CAPÍTULO 5
CAMPOS DE VECTORES

1. INTERROGANTES CENTRALES DEL CAPÍTULO

Se pretende que el alumno sepa definir, establecer o determinar lo siguiente:

- Campo de vectores sobre una variedad.
- Derivación sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$.
- El corchete de Lie.
- La identidad de Jacobi.
- Campos f-relacionados.
- Campos tangentes a una subvariedad.

2. CONTENIDOS FUNDAMENTALES DEL CAPÍTULO

2.1. Definiciones y resultados básicos

En un tema anterior hemos introducido el concepto de vector tangente a una variedad M en un punto p, esto es, un elemento X_p de T_pM. Ahora vamos a extender este concepto.

Definición 5.1
Un *campo de vectores* X en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asigna a cada punto p de M un vector tangente $X_p \in T_pM$.

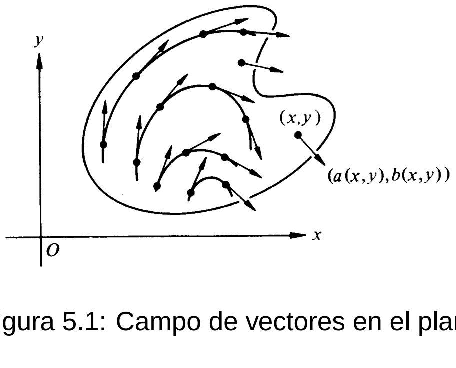

Figura 5.1: Campo de vectores en el plano

Teniendo en cuenta que el conjunto de todos los vectores tangentes a M, el fibrado tangente TM, puede dotarse de estructura de variedad diferenciable, un campo de vectores X puede interpretarse como una aplicación de M en su fibrado tangente tal que si π es la proyección natural del fibrado en la variedad, se tiene que $\pi \circ X$ es la identidad sobre M; esto es, X es una sección de π.

Teniendo en cuenta que estamos interesados en extender el cálculo a variedades, parece razonable exigir que nuestros campos de vectores sean diferenciables.

Definición 5.2
Un campo de vectores X se dirá diferenciable si como aplicación $X : M \to TM$ entre la variedad y su fibrado tangente es diferenciable. El conjunto de todos los campos de vectores diferenciables sobre M se denotará por $\mathfrak{X}(M)$.

Sea X un campo de vectores sobre M. Para cada punto p de M, $X(p) \equiv X_p$ es un vector tangente a M en p y, por consiguiente, es una derivación local (en el conjunto de las funciones diferenciables en un entorno de p) de manera que los campos de vectores se pueden considerar como derivaciones sobre el álgebra de las funciones diferenciables sobre la variedad:

$$X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}(M)$$

dada por

$$\begin{array}{rcl} X(f): & M \to & \mathbb{R} \\ & p \to & X(f)(p) := X_p(f) \end{array}$$

Esta interpretación permite caracterizar a los campos de vectores diferenciables como aquellos que transforman funciones diferenciables en funciones diferenciables. Es decir,

Proposición 5.3
Un campo de vectores X es diferenciable si, y sólo si, $X(f)$ es una función diferenciable para toda función diferenciable f.

En el conjunto de los campos de vectores diferenciables sobre M podemos definir dos operaciones naturales, la suma y el producto por funciones diferenciables, del siguiente modo:

Suma: Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $X + Y : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ está definida por

$$(X+Y)(f) : M \to \mathbb{R}, \quad (X+Y)(f)(p) = X_p(f) + Y_p(f)$$

Producto: Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ entonces $fX : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ está definida por

$$(fX)(g) : M \to \mathbb{R}, \quad (fX)(g)(p) = f(p)X_p(g)$$

Con las dos operaciones anteriores, el conjunto $\mathfrak{X}(M)$ admite estructura de módulo sobre el anillo $\mathcal{C}^\infty(M)$ de las funciones diferenciables.

Hemos definido un vector tangente a M en un punto p como el vector tangente a una curva que pasa por p y hemos visto que puede interpretarse como una derivación sobre $\mathcal{C}^\infty(p)$. Veamos a continuación que es posible caracterizar un campo de vectores de una manera similar.

Definición 5.4
Una *derivación* sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$ es una función $\mathcal{D} : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:
(1) $\mathbb{R}$-linealidad: $\mathcal{D}(af + bg) = a\mathcal{D}(f) + b\mathcal{D}(g)$, para $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.
(2) Regla de Leibnitz: $\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g + f\mathcal{D}(g)$.

Como una consecuencia de esta definición, todo campo diferenciable de vectores X es una derivación sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$, considerando X como una aplicación $f \mapsto X(f)$. El siguiente resultado nos proporciona el recíproco.

Proposición 5.5
Toda derivación sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$ proviene de un campo de vectores diferenciable.

2.2. El corchete de Lie

Otra consecuencia interesante de la interpretación discutida en el párrafo anterior es que nos permite considerar las derivaciones iteradas. Si X e Y son dos campos de vectores diferenciables y f es una función diferenciable, entonces $X(Y(f))$ e $Y(X(f))$ son funciones diferenciables. Sin embargo, este tipo de operaciones no conduce en general a nuevos campos de vectores diferenciables, ya que envuelven derivadas de orden superior a la primera. No obstante, la diferencia de ambas iteraciones sí conduce a un nuevo campo de vectores.

Proposición 5.6
Sean X e Y dos campos de vectores diferenciables sobre M. Entonces existe un único campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

para toda función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. El campo Z se denomina el corchete de Lie de X e Y y se denota por $[X, Y]$.

Esta forma de construir nuevos campos a partir de otros ya existentes nos permite definir la operación corchete:

$$\begin{array}{rccl} [,]: & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(M) \\ & (X, Y) & \to & [X, Y] \end{array}$$

que a cada par de campos le asocia su corchete de Lie, la cual posee interesantes propiedades.

Proposición 5.7
Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vectores diferenciables sobre M, $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ funciones diferenciables. Entonces:
(1) $[X, Y] = -[Y, X]$ *(antisimetría)*
(2) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ *($\mathbb{R}$-linealidad)*
(3) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *(identidad de Jacobi)*
(4) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

2.3. Campos relacionados

La diferencial de una aplicación $f : M \to N$ traslada vectores tangentes a M en vectores tangentes a N. Sin embargo, no hay ninguna forma, en general, de trasladar campos de vectores. Este problema lo vienen a solucionar, de forma satisfactoria, los campos de vectores relacionados por una aplicación diferenciable, siendo una de sus propiedades más importantes la de conservar el corchete de Lie de dos campos.

Definición 5.8
Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Se dice que X e Y están *f-relacionados*, y se denota por $X \sim_f Y$, si

$$df_p(X_p) = Y_{f(p)}$$

para todo punto $p \in M$.

El siguiente resultado nos proporciona un criterio para saber si dos campos están f-relacionados.

Proposición 5.9
Dos campos de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ están f-relacionados si, y sólo si, $X(g \circ f) = Y(g) \circ f$ para toda función $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$.

Este criterio permite probar que el corchete de Lie se conserva mediante f-relación. Más concretamente, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.10
Sean $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ campos de vectores tales que $X_i \sim_f Y_i$, $i = 1, 2$. Entonces $[X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2]$.

En el caso especial en que f es un difeomorfismo, para cada campo de vectores X sobre M existe un único campo de vectores Y sobre N relacionado con X mediante f. En efecto, dado $q \in N$ existe un único punto $p \in M$ tal que $f(p) = q$. Definimos $Y_q := df_p(X_p)$.

Finalizamos la lección con los campos de vectores sobre una variedad que son tangentes a una subvariedad de la misma, los cuales se caracterizan por la existencia de campos de vectores en la subvariedad que están j-relacionados con ellos, siendo j la inclusión canónica de la subvariedad en la variedad. Concretamente tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.11
Sea P una subvariedad de M.
(1) *Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es tangente a P entonces su restricción $X|_P$ a P es un campo de vectores diferenciable sobre P.*
(2) *Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es otro campo de vectores tangente a P, entonces $[X, Y]|_P = [X|_P, Y|_P]$.*

3. ACTIVIDADES DE APLICACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS

A.5.1. Se consideran los tres campos de vectores siguientes sobre $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} X &= \partial_x, \\ Y &= \partial_x + \partial_y, \\ Z &= \partial_x + \partial_y + (1+x^2)\partial_z, \end{aligned}$$

siendo (x, y, z) el sistema rectangular usual de coordenadas de $\mathbb{R}^3$. Prueba que forman una base global de $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$.

A.5.2. Consideremos en $\mathbb{S}^2$ el atlas obtenido mediante la proyección estereográfica. Prueba que los campos

$$X = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad \text{e} \qquad Y = -y^1 \frac{\partial}{\partial y^1} - y^2 \frac{\partial}{\partial y^2}$$

coinciden en la intersección de sus dominios y, por tanto, juntos definen un campo de vectores sobre $\mathbb{S}^2$.

A.5.3. **(a)** ¿Qué condición geométrica verifican los campos tangentes a la esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$? Utiliza dicha caracterización para construir una base del tangente a $\mathbb{S}^2$ en un punto genérico $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$.

(b) Prueba que el campo de vectores X sobre $\mathbb{R}^{2n}$ definido por

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + x^{2n} \frac{\partial}{\partial x^{2n-1}} - x^{2n-1} \frac{\partial}{\partial x^{2n}}$$

es un campo de vectores diferenciable no nulo cuando lo restringimos a la esfera $\mathbb{S}^{2n-1}$.

A.5.4. **(a)** En el toro $T \subset \mathbb{R}^3$ se considera el campo vectorial W definido como sigue. Se parametrizan los meridianos de T por la longitud de arco y para cada punto p de T, $W(p)$ es el vector velocidad del meridiano que pasa por p. Prueba que W es un campo de vectores diferenciable.

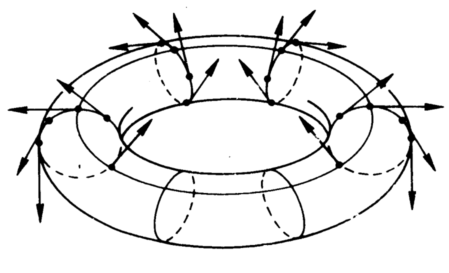

Figura 5.2: Campo de vectores en el toro.

(b) Siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado anterior, esta vez sobre la esfera $\mathbb{S}^2$ y utilizando los semimeridianos, construye un campo vectorial W definido en la esfera menos los dos polos N y S.

(c) Reparametriza todos los semimeridianos de la esfera $\mathbb{S}^2$ mediante el mismo parámetro t, $-1 < t < 1$, y define $V(p) = (1-t^2)W(p)$, para $p \neq N$ y $p \neq S$. En los polos, hacemos $V(N) = V(S) = 0$. Prueba que V es un campo de vectores diferenciable en $\mathbb{S}^2$.

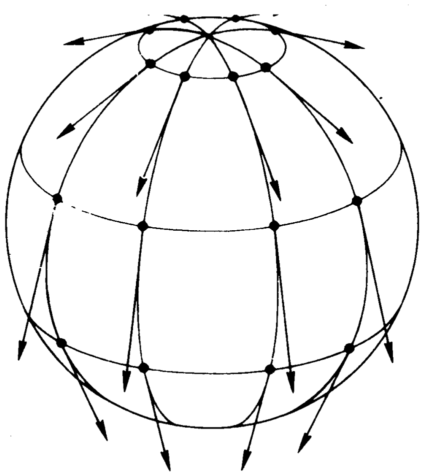

Figura 5.3: Campo de vectores en la esfera.

A.5.5. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T^2$ la parametrización definida por $\phi(\theta,\theta') = (e^{i\theta}, e^{i\theta'})$ y sea Y un campo de vectores sobre $\mathbb{R}^2$. ¿Bajo qué condiciones Y representa, con respecto a la parametrización ϕ, un campo de vectores X sobre T^2?

A.5.6. Los campos de vectores X_i ($i = 1, \ldots, r$) definidos en un subconjunto U de una variedad diferenciable M de dimensión n son *linealmente independientes* si los vectores $X_i(p)$ son linealmente independientes en cada punto p de U. Entonces, un conjunto ordenado de n campos de vectores linealmente independientes $X_1, \ldots, X_n$ sobre U se llama una *paralelización de* U. Si M admite una paralelización global, entonces diremos que M es *paralelizable*. Prueba:

(a) Toda variedad con una carta global es paralelizable. En consecuencia, los espacios euclídeos son paralelizables.

(b) Las esferas $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^3$ son paralelizables. La esfera $\mathbb{S}^2$ no es paralelizable.

(c) Una variedad producto $M \times M'$ es paralelizable si M y M' lo son. Dar un contraejemplo de que no se verifica el recíproco.

A.5.7. Un *punto crítico* de una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ es un punto $p \in M$ tal que $df_p = 0$. Prueba:

(a) En un punto crítico está bien definida la función

$$H : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}, \quad H(X_p, Y_p) = X_p(Yf),$$

siendo Y una extensión local de Y_p.

(b) H es una aplicación bilineal y simétrica.

(c) Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un sistema de coordenadas, entonces $H(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

(d) Si $\alpha : I \longrightarrow M$ es una curva en M con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces $H(v,v) = \frac{d^2(f\circ\alpha)}{ds^2}(0)$.

A.5.8. Sean $\{x, y\}$ las coordenadas naturales de $\mathbb{R}^2$ y consideremos los campos de vectores $V = \dfrac{\partial}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$, $W = (x^2 + y)\dfrac{\partial}{\partial y}$. Calcular $[V, W]$.

A.5.9. Sea X un campo de vectores sobre $\mathbb{S}^n$. Extender X a $\mathbb{R}^{n+1}$ por $\tilde{X}(x) = \|x\| X\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ y sea Y el campo de vectores sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por $Y(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Calcular $[\tilde{X}, Y], [X_1, Y]$, donde $X_1(x) = \tilde{X}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$.

A.5.10. Sean x e y las cartas de las proyecciones estereográficas sobre $\mathbb{S}^2$. Si a, $b \in \mathbb{R}$, se consideran los campos

$$(ax_1 - bx_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (bx_1 + ax_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$
$$(-ay_1 - by_2)\frac{\partial}{\partial y_1} + (by_1 - ay_2)\frac{\partial}{\partial y_2}$$

¿Definen juntos un campo de vectores global sobre $\mathbb{S}^2$?

4. BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

W. BOOTHBY. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 1986.

R. BRICKELL y R. CLARK . *Differentiable Manifolds*. Van Nostrand, 1970.

L. CONLON. *Differentiable Manifolds. A First Course*. Birkhäuser, 1993.

W.D. CURTIS y F.R. MILLER. *Differential Manifolds and Theoretical Physics*. Academic Press, 1985.

5. PREGUNTAS DE EVALUACIÓN

E.5.1. Sean $\phi_1 : U_1 = \mathbb{S}^n \backslash \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\phi_2 : U_2 = \mathbb{S}^n \backslash \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ las cartas estereográficas para $\mathbb{S}^n$. Sean X_1 y X_2 dos campos de vectores sobre $\mathbb{R}^n$. ¿Qué condición deben satisfacer X_1 y X_2 para representar en las cartas ϕ_1 y ϕ_2, respectivamente, el mismo campo de vectores X sobre $\mathbb{S}^n$?

E.5.2. Sea $j : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión canónica y consideremos $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{n-1})$ un campo de vectores diferenciable sobre la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. ¿Existe un campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ tal que $Y \sim_j X$, es decir, Y está j-relacionado con X?

E.5.3. Sea la aplicación diferenciable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $f(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$ y consideremos el campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ definido por $X(t) = t\partial_t$. ¿Existe un campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^1)$ tal que X está f-relacionado con Y?

ANOTACIONES

6. BIOGRAFÍA: NICOLAI LOBACHEVSKI (1793-1856)

Nicolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856), fue hijo de un gobernador oficial que murió cuando Lobachevski sólo tenía 7 años. Alumno de **Johann Martin Bertels** (1769-1836), fue amigo y correspondiente de Gauss, y llegó a ser profesor de la Universidad de Kazán a la edad de veintiún años. De 1827 a 1846 fue rector de esa universidad, donde permaneció, como profesor y administrador, hasta el final de sus días, a pesar del hecho de que la escasa apreciación de su trabajo le entristeció en sus últimos años. Lobachevski recibió una gran formación en las ideas geométricas, donde las fronteras y las direcciones de investigación eran controvertidas.

Los revolucionarios puntos de vistas de Lobachevski no son fruto de una repentina inspiración. En un esbozo de geometría que elaboró en 1823, probablemente para usar en clase, Lobachevski decía en relación con el postulado de la paralelas que "no se había descubierto ninguna demostración rigurosas de esta verdad". Aparentemente, por esa época Lobachevski no excluía la posibilidad de que una prueba pudiera todavía ser descubierta.

En 1826 sometió a juicio de sus colegas un primer resumen de su nueva geometría, que él llamaba "geometría imaginaria", cuyo fundamento reposaba en el rechazo del postulado de las paralelas y en la hipótesis de que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos. Lobachevski estableció los principios de esta nueva geometría en dos memorias publicadas en la revista científica de Kazán y en una tercera publicación en el *Journal für Mathematik* entre 1829 y 1837. Su trabajo de 1829 atrajo poco la atención cuando apareció, fundamentalmente porque apareció en ruso, y los rusos que lo leyeron fueron muy críticos con él.

Figura 5.4: Grabado de Lobachevski

Lobachevski cambió abiertamente la doctrina kantiana de que el espacio es una intuición subjetiva. En 1835 escribía:

> *El poco éxito de los intentos realizados desde Euclides me han hecho sospechar que la verdad no está contenida sólo en los datos, y que para establecerla es necesario la ayuda de experimentos, por ejemplo, las observaciones astronómicas, como se realiza en otras leyes de la naturaleza.*

Deseoso de dar a conocer mejor su geometría y difundirla entre los geómetras occidentales, escribió *Géométrie imaginaire (Geometría imaginaria)*, que apareció en la revista de Crelle en 1837, y otra obra en aleman, cuyo título es *Geometrische Untersuchungen sur Theorie der Parallelinien (Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas)*, publicada en 1840. **Gauss** comprendió y apreció la nueva geometría de Lobachevski pero, una vez más, no le dió públicamente su aprobación. Ésta es una de las razones por las que la nueva geometría se fue conociendo muy lentamente. Lobachevski intentó de nuevo dar a conocer sus investigaciones geométricas publicando una nueva exposición de su geometría con el título *Pangéométrie*, o compendio de geometría fundada en un teoría general de las paralelas (1855), cuando estaba completamente ciego.

Gauss, **Bolyai** y Lobachevski se dieron cuenta de que el postulado de las paralelas no podía ser demostrado a partir de los axiomas de la geometría euclídea, y que era pues lógicamente concebible adoptar una proposición contradictoria y desarrollar una nueva geometría consecuente y coherente naturalmente a partir de esos axiomas. El contenido técnico presentado por los coinventores de esta nueva geometría es prácticamente el mismo, y está perfectamente desarrollado en la memoria de Lobachevski del año 1840.

Después de haber hecho una breve exposición de sus investigaciones anteriores, Lobachevski establece una lista de 15 teoremas de geometría cuya comprensión juzga esencial antes de abordar la hipótesis que rechaza el postulado de las paralelas de Euclides. A continuación afirma que todas las rectas del plano que salen de un mismo punto pueden dividirse, con respecto a una recta dada BC, del mismo plano, en dos clases: las rectas que cortan a BC y las que no la cortan. En esta segunda clase existen dos rectas que constituyen la frontera entre las dos clases, y que se llaman "rectas paralelas". Lobachevski muestra que una recta conserva la característica de paralelismo para todos sus puntos y que la suma de los tres ángulos de un triángulo no puede exceder dos rectos.

Lobachevski pasa a continuación a la geometría esférica, demostrando diversos teoremas relativos a los triángulos esféricos, a su superficie, e introduce en particular la noción de línea frontera como un círculo de radio infinito.

Figura 5.5: Grabado de Lobachevski

Lobachevski ha sido denominado "el gran emancipador" por E.T. Bell, según el cual el nombre de Lobachevski debería ser tan familiar a cualquier escolar como lo son Miguel Angel o Napoleón. Desafortunadamente, Lobachevski no fue muy apreciado en vida, hasta el punto de que en 1846 fue expulsado de la Universidad de Kazán.

No sería hasta la muerte de Gauss en 1855, cuando su correspondencia fue publicada, que la comunidad matemática comenzara a considerar seriamente las ideas no euclídeas. Incluso en 1888 **Lewis Carroll** hacía chistes sobre la geometría no euclídea. Algunos de los mejores matemáticos (**E. Beltrami** (1835-1900), **G.F.B. Riemann** (1826-1866), **F. Klein** (1849-1925), **H. Poincaré** (1854-1912)) extendieron y clarificaron las ideas de Lobachevski, aplicándolas a otras ramas de las matemáticas. En 1868, el matemático italiano Beltrami resolvió definitivamente el problema del axioma de las paralelas, al probar que no era posible ninguna demostración del mismo. Demostró que la geometría no euclídea era tan consistente como la geometría euclídea, de tal forma que una de ellas no podía existir sin la otra.

Bibliografía

Carl B. Boyer. *A History of Mathematics*. Princeton University Press, 1985. pp. 585–590.

Florian Cajori. *A History of Mathematics*. Chelsea Publising Company, 1995. pp. 303.

Jean-Paul Collete. *Historia de las matemáticas*, vol. II. Siglo veintiuno de España Editores, S.A., 1985. pp. 474–479.

Internet. URL de la página:
www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Lobachevsky.html

Bibliografía complementaria

Dictionary of Scientific Biography (New York 1970-1990).

Books:

R. Bonola *Non-Euclidean Geometry* (1955).

Artículos:

V.A. Bazhanov *The imaginary geometry of N.I. Lobachevskii and the imaginary logic of N.A. Vasiliev* Modern Logic 4 (2) (1994), 148-156.

N.A. Chernikov *Introduction of Lobachevskii geometry into the theory of gravitation* Soviet J. Particles and Nuclei 23 (5) (1992), 507-521.

L.E. Evtushik y A.K. Rybnikov *The influence of Lobachevskii's ideas on the development of differential geometry* Moscow Univ. Math. Bull. 49 (2) (1994), 1-9.

B.V. Gnedenko *N.I. Lobachevskii as an educator and a representative of the Enlightenment* Moscow Univ. Math. Bull. 49 (2) (1994), 10-16.

G.B. Halsted *Biography. Lobachevsky* Amer. Math. Monthly 2 (1895), 137-137.

B. Mayorga *Lobachevskii and non-Euclidean geometry (Español)* Lect. Mat. 15 (1) (1994), 29-43.

A.P. Norden y A.P. Shirokov *The legacy of N.I. Lobachevskii and the activity of Kazan geometer* Russian Math. Surveys 48 (2) (1993), 47-74.

V. Perminov *The philosophical and methodological thought of N.I. Lobachevsky* Philos. Math. (3) 5 (1) (1997), 3-20.

A. Vucinich *Nicolai Ivanovich Lobachevskii: The Man Behind the First Non-Euclidean Geometry* Isis 53 (1962), 465-481.

7. BIOGRAFÍA: JANOS BOLYAI (1802-1860)

Wolfang Farkas Bolyai (1775-1856) nació en Szekler-Land, Transilvania. Después de estudiar en Jena viajó a Gotinga, donde se hizo muy amigo de **Gauss**, que entonces tenía diecinueve años. Gauss diría posteriormente que Bolyai fue el único hombre que entendió plenamente sus puntos de vista en metafísica y matemáticas. Bolyai llegó a ser profesor en el Colegio Reformado de Maros-Vasarhely, donde formó a los profesores de Transilvania durante cuarenta y siete años. Las primeras publicaciones de Bolyai fueron dramas y poesías. Fue realmente original, tanto en su vida privada como en su forma de pensar. Decía que en su sepultura no quería ningún monumento, sólo un manzano, en memoria de las "tres manzanas": las dos de Eva y París, que convirtieron la Tierra en un infierno, y la de **I. Newton**, que volvió a elevar la Tierra a la altura de los cuerpos celestiales.

Janos Bolyai (1802-1860) fue educado para el ejército, llegando a ser oficial del cuerpo de ingenieros militares del ejército húngaro. Su padre Farkas Bolyai pasó una gran parte de su vida tratando de demostrar el postulado de las paralelas, y sabiendo que su hijo Janos estaba también preocupado por ese problema, intentó en vano disuadirle:

> *Por amor de Dios, te ruego que abandones. Témele más que a las pasiones sensuales, porque él también ocupará todo tu tiempo, y te privará de la salud, de la paz mental, y de la felicidad en la vida.*

Janos continuó trabajando y en 1829 llegó a la conclusión que había llegado **Lobachevski** unos pocos años antes. Cuando anunció privadamente sus descubrimientos en geometría no euclídea, su padre le escribió:

> *Me parece aconsejable, si has obtenido una solución al problema, que, por dos razones, su publicación debe ser acelerada: en primer lugar, porque las ideas pasan fácilmente de uno a otro, que las puede publicar; en segundo lugar, porque parece ser que muchas cosas tienen una época en la cual son descubiertas en muchos lugares simultáneamente, igual que las violetas surgen por todas partes en primavera.*

Janos Bolyai publicó sus descubrimientos en un apéndice de 26 páginas en un libro de su padre, *Tentamen* (1831). Su padre envió una copia del libro a su amigo Gauss, indiscutiblemente el matemático más famoso de la época. Después del regreso a Hungría de Wolfgang, mantuvo con Gauss una correspondencia íntima, y cuando el propio Wolfgang envió a Gauss su propio intento de probar el postulado de las paralelas, Gauss le indicó delicadamente el fatal error.

Janos tenía trece años cuando ya dominaba el cálculo diferencial e integral. Su padre le escribió a Gauss dándole cuenta de los prodigios de su hijo e intentando que Gauss lo acogiese en su casa como aprendiz de matemáticas. Sin embargo, Gauss nunca le contestó, quizás porque ya tenía suficientes problemas con su propio hijo Eugene, que se había marchado de casa. Quince años después, cuando Wolfgang le envió el *Tentamen*, Janos esperaba que Gauss hiciera público este descubrimiento. Por tanto, se puede imaginar la decepción que Janos tuvo que sentir cuando leyó la siguiente carta de Gauss a su padre:

> *Si comienzo diciendo que nunca alabaré el trabajo, te quedarás sorprendido de momento; pero no puedo hacer otra cosa. Alabar el trabajo sería alabarme a mí mismo, ya que el contenido del*

Figura 5.6: Retrato de Bolyai que aparece en un sello del Servicio de Correos Hungaro en el centenario de su muerte.

> *trabajo, el camino que tu hijo ha seguido, los resultados que ha obtenido, coinciden casi exactamente con mis propias meditaciones, que han ocupado mi mente en los últimos treinta años. Me encuentro sorprendido en extremo.*
>
> *Mi intención era, en relación con mi propio trabajo, del cual se ha publicado muy poco, no hacerlo público durante mi vida. La mayoría no tiene la lucidez para entender nuestras conclusiones y sólo he encontrado unos pocos que han recibido con interés lo que les he contado. Para comprender estas cosas, uno debe tener una percepción entusiasta de lo que es necesario, y en este punto la mayoría están bastante confundidos. Por otra parte, tenía intención de escribir un artículo, de forma que las ideas no se perdiesen conmigo.*
>
> *De modo que estoy gratamente sorprendido de no hacer este esfuerzo, y estoy encantado de que sea el hijo de mi viejo amigo quien me haya suplantado de un modo tan sorprendente.*

A pesar de la última frase de Gauss, Janos quedó totalmente decepcionado y desilusionado con la respuesta del gran matemático; incluso imaginó que su padre había informado secretamente a Gauss de sus resultados y que Gauss trataba ahora de apropiarse de ellos. Como hombre de temperamento fuerte, que había participado y vencido en trece duelos consecutivos, Janos cayó en una profunda depresión mental y nunca más volvió a publicar sus resultados. En 1851, escribe:

> *En mi opinión y, como estoy persuadido, en la opinión de los que juzgan sin prejuicios, todas las razones esgrimidas por Gauss para explicar por qué nunca publicó nada en su vida sobre este tema son insuficientes; porque en la ciencia, como en la vida diaria, es necesario clarificar las cosas de interés general que todavía están ambiguas, así como despertar, acrecentar y promover el sentido perdido de la verdad. ¡Ay!, para gran detrimento de la humanidad, sólo unos pocos tienen aptitudes para las matemáticas; por tal motivo Gauss, para ser coherente, debería haber mantenido una gran parte de su gran trabajo para sí mismo. Es un hecho que, entre los matemáticos,e incluso entre personas célebres, existen, desafortunadamente, mucha gente superficial, pero esto no es una razón para que un hombre sensible escriba solamente cosas superficiales y mediocres, dejando que la ciencia entre en un estado letárgico. Tal suposición no es natural, por lo que considero ciertamente incorrecto que Gauss, en lugar de reconocer honesta y definitivamente el gran trabajo del Apéndice y del Tentamen, y en lugar de expresar su gran alegría e interés y tratar de preparar una apropiada recepción para la buena causa, evitando todo esto, él descansa contento con piadosos deseos y quejas acerca de la ausencia de una civilización adecuada. Ciertamente, no es esta la actitud que llamamos vida, trabajo y mérito.*

Bolyai estaba frecuentemente aquejado de fiebres, lo que le impedía trabajar, y en 1833 comenzó a recibir una pensión del ejército. Aunque nunca publicó más que las escasas páginas del Apéndice del *Tentamen* de su padre, dejó escritas más de 20.000 páginas de manuscritos de trabajos matemáticos. Estos manuscritos se encuentran en la biblioteca Bolyai-Teleki en Tirgu-Mures.

Bibliografía

Carl B. Boyer. *A History of Mathematics*. Princeton University Press, 1985. pp. 587-588.

Florian Cajori. *A History of Mathematics*. Chelsea Publising Company, 1995. pp. 303-304.

Jean-Paul Collete. *Historia de las matemáticas*, vol. II. Siglo veintiuno de España Editores, S.A., 1985. pp. 473-474.

Internet. URL de la página:
www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Bolyai.html

Bibliografía complementaria

Dictionary of Scientific Biography (New York 1970-1990)

Libros:

S Barna *Bolyai Janos* (Budapest, 1978).

L Nemeth *The two Bolyais* The new Hungarian quarterly 1 (1960).

Artículos:

M Bier *A Transylvanian lineage* The Mathematical Intelligencer (14) (2) (1992), 52-54.

E Kiss *Fermat's theorem in János Bolyai's manuscripts* Math. Pannon. 6 (2) (1995), 237-242.

O Mayer *János Bolyai's life and work*Proceedings of the national colloquium on geometry and topology (Cluj-Napoca, 1982), 12-26.