

## CAPÍTULO 4 INMERSIONES Y SUBVARIIDADES

### 1. INTERROGANTES CENTRALES DEL CAPÍTULO

Se pretende que el alumno sepa definir, establecer o determinar lo siguiente:

- Inmersión.
- Existencia de cartas especiales para una inmersión.
- Embebimiento.
- Subvariedad o subvariedad regular.
- Subvariedad inmersa.
- Rebanada.
- Teorema de la función implícita.
- Teorema de Whitney.

### 2. CONTENIDOS FUNDAMENTALES DEL CAPÍTULO

El objetivo principal de este tema es introducir los objetos geométricos que generalicen a las curvas y superficies del espacio euclídeo en cuanto a su relación con éste, es decir, como subvariedades. Para ello será esencial trabajar con aplicaciones diferenciables de rango máximo, y relativo a esto será el primer concepto que introduzcamos.

#### **Definición 4.1**

Una aplicación diferenciable  $f : M \rightarrow N$  se dice que es una *inmersión* si  $df_p$  es inyectiva para todo punto de  $M$ . Se dice que  $M$  está inmersa en  $N$ .

En otras palabras, una inmersión es la aplicación diferenciable entre variedades cuyo rango coincide en todos los puntos con la dimensión de la variedad de partida.

A continuación, y como era de esperar, mostramos un resultado útil que nos permitirá decidir si una aplicación diferenciable es una inmersión o no. Este resultado técnico nos facilitará la búsqueda de ejemplos y nos permitirá obtener algunas propiedades de las inmersiones.

#### **Proposición 4.2**

Sea  $f : M^m \rightarrow N^n$  una aplicación diferenciable y  $p \in M$ . Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:

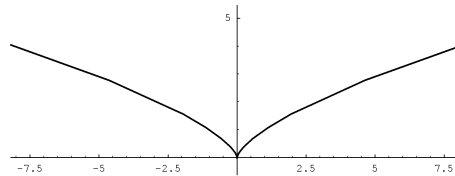
- 1) La diferencial  $df_p$  es inyectiva.
- 2) La matriz jacobiana tiene rango  $m$  relativo a un sistema de coordenadas ( $y$ , por tanto, relativo a todos).
- 3) Si  $\{y_i\}_i$  es un sistema de coordenadas en  $N$  para  $f(p)$ , existen enteros  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq n$  tales que las funciones  $\{y_{i_1} \circ f, y_{i_2} \circ f, \dots, y_{i_m} \circ f\}$  constituye un sistema de coordenadas en un entorno de  $p$ .

A continuación vamos a describir algunos ejemplos de inmersiones.

### Ejemplos.

**4.3.** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva diferenciable y regular, es decir,  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t$ .

**4.4.** Sea  $\alpha : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ .

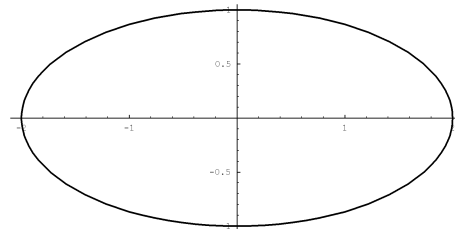


Entonces la matriz jacobiana viene dada por

$$J_\alpha(t) = (2t, 3t^2)$$

la cual tiene rango uno en todos los puntos salvo en  $t = 0$ . Luego  $\alpha$  no es una inmersión.

**4.6.** Sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$ . Es fácil ver que  $\alpha$  es una inmersión.



## 2.1. Propiedades de las inmersiones

Las siguientes propiedades de las inmersiones pueden probarse muy fácilmente recurriendo a las representantes locales de las aplicaciones diferenciables.

### Proposición 4.8

Sea  $f : M \rightarrow N$  una inmersión y  $g : M \rightarrow N'$  una aplicación diferenciable. Entonces  $(f, g) : M \rightarrow N \times N'$  es una inmersión.

### Proposición 4.9

Sean  $f : M \rightarrow N$  y  $g : M' \rightarrow N'$  dos inmersiones. Entonces la aplicación producto  $f \times g : M \times M' \rightarrow N \times N'$  es una inmersión.

**Proposición 4.10**

Sea  $f : M \rightarrow N$  una inmersión y  $g : M' \rightarrow M$  una aplicación diferenciable. Entonces  $f \circ g$  y  $g$  tienen el mismo rango.

En particular, queremos destacar la propiedad que afirma que dada una inmersión y un punto en el dominio, es posible encontrar cartas locales alrededor del punto y de su imagen de forma que la representante local sea una inclusión. Más concretamente:

**Proposición 4.11**

Sea  $f : M \rightarrow N$  una inmersión y  $p$  un punto de  $M$ . Entonces existen cartas  $(V, x)$  y  $(W, y)$  de  $p$  y  $f(p)$ , respectivamente, tales que la representante en coordenadas  $y \circ f \circ x^{-1}$  está dada por  $z \rightarrow (z, 0)$ .

Veamos seguidamente, a través de un ejemplo, cómo se pueden obtener explícitamente las cartas a las que se refiere el resultado anterior. Consideremos la inmersión  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(t) = (\sin t, \cos t)$  y sea el punto  $t = 0$ . La matriz jacobiana en  $t = 0$  está dada por

$$J_f(0) = (\cos t, -\sin t)|_{t=0} = (1, 0)$$

Entonces la aplicación  $p_1 \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $t \rightarrow \sin t$  tiene rango uno en  $t = 0$  por lo que es un difeomorfismo local. Consideremos la aplicación  $\varphi = (p_1 \circ f)^{-1} \times i_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\varphi(t, s) = (\arcsent, s)$$

y sea la aplicación  $k = p_2 \circ \varphi \circ f$ . Entonces podemos construir la aplicación  $h = q \circ \varphi$ , donde  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  está definida por

$$q(t, s) = (t, s - k(t)) = (t, s - \cos t)$$

En consecuencia, debemos considerar para  $t = 0$  la carta identidad sobre  $\mathbb{R}$ , y para  $f(0) = (0, 1)$  podemos utilizar la carta  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$h(t, s) = (\arcsent, s - \cos(\arcsent))$$

**2.2. Embebimientos y subvariedades**

Se definen en esta sección los conceptos de embebimiento y subvariedad, haciendo hincapié en el hecho de que el término *subvariedad* se aplica en ocasiones a objetos con propiedades distintas, surgiendo las subvariedades inmersas y las subvariedades regulares, que es en el sentido en que nosotros las entenderemos.

**Definición 4.12**

Una inmersión  $f : M \rightarrow N$  se dice que es un *embebimiento* si es un homeomorfismo en la imagen (con la topología relativa de  $N$ ).

**Definición 4.13**

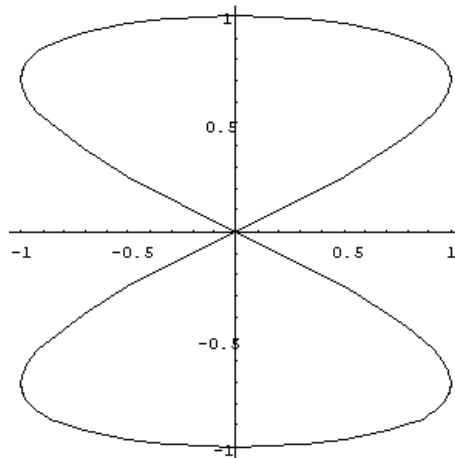
Una variedad  $P \subset M$  se dice que es una subvariedad de una variedad  $M$  si la inyección canónica  $j : P \rightarrow M$  es un embebimiento. La *codimensión* de la subvariedad es la diferencia  $\dim M - \dim P$ .

Presentamos a continuación algunos ejemplos de subvariedades.

### Ejemplos.

- 4.14.** Sea  $M$  una variedad y consideremos  $P \subset M$  un subconjunto abierto. Entonces  $P$  admite de manera trivial una estructura diferenciable con la que se convierte en subvariedad de  $M$ .  $P$  se denomina *subvariedad abierta* de  $M$ .
- 4.15.** Sea  $GL(n, \mathbb{R})$  el conjunto de las matrices cuadradas regulares de orden  $n$ . Entonces  $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , y puesto que la aplicación determinante  $\det$  es diferenciable, y consecuentemente continua,  $GL(n, \mathbb{R})$  es una subvariedad abierta de  $M_n(\mathbb{R})$ .
- 4.16.** La aplicación  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, m < n$ , dada por  $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ , es claramente un embebimiento.
- 4.17.** Cualquier inmersión es localmente un embebimiento.

En algunas ocasiones se relajan las condiciones de subvariedad, exigiendo solamente que la inclusión canónica sea una inmersión, en lugar de exigir que sea un embebimiento. Nosotros las distinguiremos añadiéndole el apellido *inmersa*. Toda subvariedad es una subvariedad inmersa, pero no recíprocamente. En efecto, es fácil ver que la figura ocho es una subvariedad inmersa que no se puede embeber en  $\mathbb{R}^2$ .



### Proposición 4.18

*Toda subvariedad compacta inmersa en un espacio Hausdorff es una subvariedad (embebida o regular).*

Con el fin de encontrar una caracterización de las subvariedades, se introducen los sistemas de coordenadas adaptados y se prueba que toda subvariedad de una variedad admite un sistema de coordenadas adaptado en cada punto, sirviendo esta propiedad como criterio para decidir si un subconjunto de una variedad admite una estructura diferenciable.

Sea  $(V, x)$  una carta en una variedad  $M$ . El subconjunto  $\Sigma$  de  $V$  que se obtiene haciendo  $n - m$  funciones coordenadas constantes es una subvariedad  $m$ -dimensional de  $M$  denominada  $x$ -rebanada  $m$ -dimensional de  $U$ . Vamos a probar que toda subvariedad puede construirse pegando adecuadamente  $x$ -rebanadas.

**Definición 4.19**

Sea  $P$  un subconjunto de una variedad  $M$ . Un sistema de coordenadas  $(V, x)$  se dice que está adaptado a  $P$  si  $V \cap P$  es una  $x$ -rebanada de  $V$ .

Un criterio básico para saber si un subconjunto de una variedad diferenciable es una subvariedad es el siguiente.

**Proposición 4.20**

Un subconjunto  $P$  de una variedad  $M$  es una variedad  $m$ -dimensional de  $M$  si para cada punto  $p$  de  $P$  existe un sistema de coordenadas  $(V, x)$  en  $M$  adaptado a  $P$  tal que  $V \cap P$  es una rebanada  $m$ -dimensional.

En esta línea, una cuestión sumamente interesante es saber de cuántas maneras se puede dotar a un subconjunto de estructura de variedad diferenciable de forma que constituya una subvariedad. La respuesta, de sencilla demostración, nos dice que a lo sumo hay una manera de convertir un subconjunto de una variedad en subvariedad de la misma.

**2.3. El teorema de la función implícita**

Un criterio útil y práctico para encontrar subvariedades nos lo proporciona el teorema de la función implícita, consecuencia del teorema de la función inversa, y que nos permite averiguar cuándo las fibras de una aplicación diferenciable son subvariedades.

**Definición 4.21**

Sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable. Un punto  $q \in N$  se dice que es un *valor regular* de  $f$  si  $f^{-1}(q) \neq \emptyset$  y  $df_p$  es sobreyectiva en todo punto  $p \in f^{-1}(q)$ .

**Proposición 4.22 (Teorema de la Función Implícita)**

Sea  $f : M^m \rightarrow N^n$  una aplicación diferenciable y  $q \in N$  un valor regular de  $f$ . Entonces  $P = f^{-1}(q)$  es una subvariedad  $(m - n)$ -dimensional de  $M$ .

Describimos a continuación algunos ejemplos de subvariedades obtenidas utilizando este resultado.

**Ejemplos.**

**4.23.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable y consideremos  $S = f^{-1}(0)$ . Si en cada punto  $p$  de  $S$ , la matriz  $\{\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\}$  tiene rango 1, entonces  $S$  es una subvariedad  $(n - 1)$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$ , es decir,  $S$  es una hipersuperficie.

**4.24.** Las hiperesferas y los hipercilindros son subvariedades regulares del espacio euclídeo.

**4.25.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación dada por

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2),$$

con  $a > b > 0$ . Entonces  $S = f^{-1}(0)$  admite estructura de variedad diferenciable 2-dimensional, es decir,  $S$  es una superficie de  $\mathbb{R}^3$ . Puede comprobarse fácilmente que  $S$  es el toro de revolución en  $\mathbb{R}^3$ .

**Corolario 4.26**

Sea  $M^n$  una variedad diferenciable y sean  $f_1, \dots, f_k$  funciones diferenciables sobre  $M$ . Consideremos el subconjunto  $P$  de  $M$  dado por  $P = \{p \in M : f_i(p) = 0, i = 1, \dots, k\}$ . Si en cada punto  $p$  de  $P$  se verifica que  $\{df_{1p}, \dots, df_{kp}\}$  son covectores linealmente independientes, entonces  $P$  es una subvariedad cerrada de  $M$  de dimensión  $n - k$ .

**Observación 4.27**

Si  $M$  es una variedad diferenciable y  $P \subset M$  es una subvariedad diferenciable cerrada tal que  $P = \bigcap_{i=1}^k f_i^{-1}(0)$ , para ciertas funciones diferenciables  $f_1, \dots, f_k$ , entonces no necesariamente la dimensión de  $P$  es  $n - k$ , ya que los covectores  $\{df_{1p}, \dots, df_{kp}\}$  no tienen por qué ser linealmente independientes.

Una pregunta que cabe plantearse es si cualquier variedad abstracta  $M$  es difeomorfa a una subvariedad regular de un espacio euclídeo. La respuesta, de muy difícil demostración, es afirmativa y se denomina teorema del embebimiento de Whitney. Dicho teorema establece que cualquier variedad diferenciable  $n$ -dimensional se puede embeber en un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^{2n}$ . Una versión más sencilla de este resultado pero que admite una demostración asequible a este nivel, utilizando particiones diferenciables de la unidad, es la siguiente:

**Proposición 4.28**

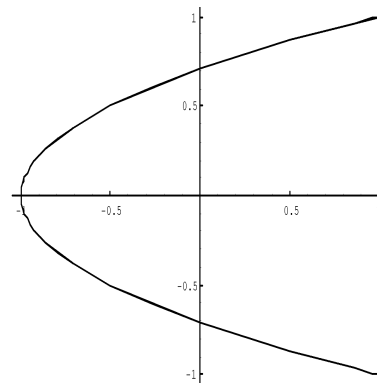
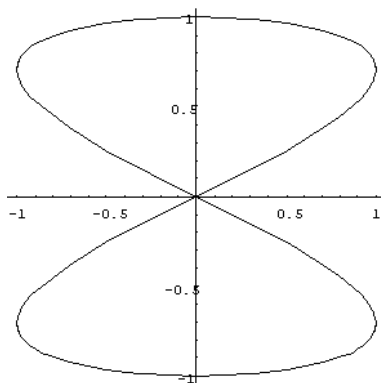
Toda variedad diferenciable compacta se puede embeber como subvariedad regular en un cierto espacio euclídeo.

**3. ACTIVIDADES DE APLICACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS**

**A.4.1.** Determina si las funciones  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas por

(a)  $s \rightarrow (\sin 2s, \sin s)$

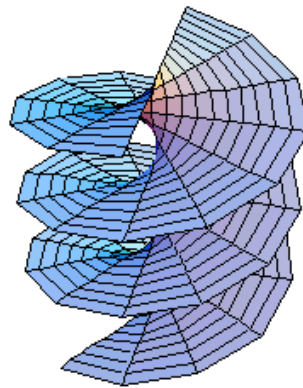
(b)  $s \rightarrow (\cos 2s, \cos s)$



son inmersiones. El grafo de la primera función es la *figura ocho*.

**A.4.2.** Determina si la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$(x, y) \rightarrow (y \cos x, y \sin x, x)$$



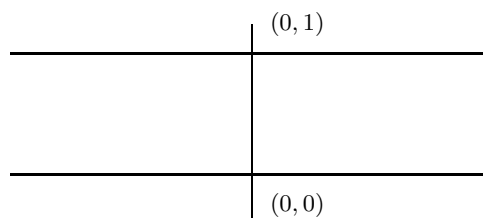
es una inmersión.

**A.4.3.** Sea  $M = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$  y se considera la estructura diferenciable dada por las cartas

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} \times \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x(s, 0) = s, \\ y : \mathbb{R} \times \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad y(s, 1) = s. \end{aligned}$$

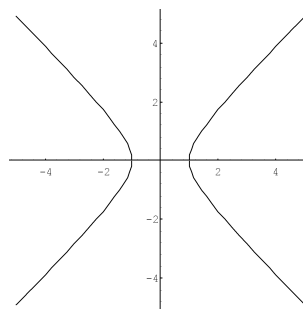
Sean las aplicaciones

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow M, \quad \phi(s) = (s, 1) \text{ si } s \neq 0, \text{ y } \phi(0) = (0, 0), \\ \psi : M &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(s, 1) = \psi(s, 0) = s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Prueba que  $\psi$  es una inmersión y que  $\psi \circ \phi$  es diferenciable, aunque  $\phi$  no es diferenciable.

**A.4.4. (a)** Sea  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$  la hipérbola equilátera.



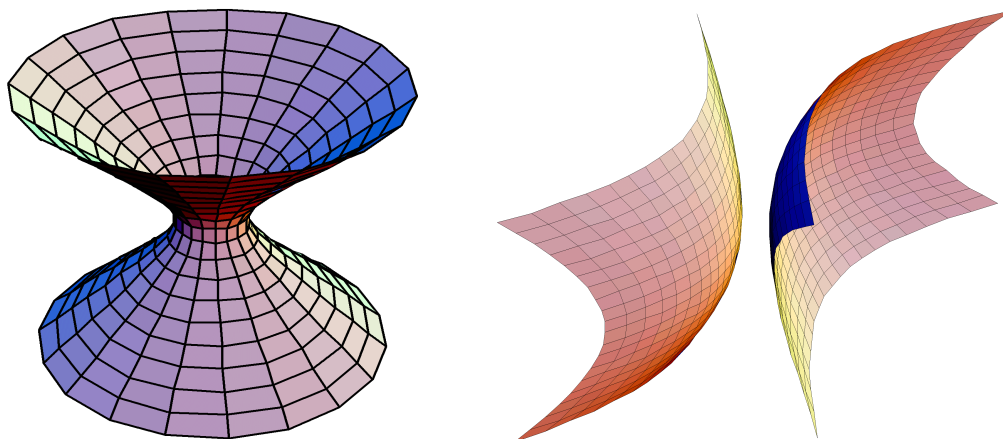
Justifica que  $S$  es una subvariedad 1-dimensional cerrada de  $\mathbb{R}^2$  y dotale de un atlas de una sola carta.

**(b)** Deduce que el siguiente conjunto (el toro) es una subvariedad 2-dimensional de  $\mathbb{R}^4$ :  $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 - y^2 = 1, z^2 - w^2 = 1\}$ .

**A.4.5.** Consideremos las funciones  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

(a)  $(x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 - z^2 - 1,$

(b)  $(x, y, z) \rightarrow x^2 - y^2 - z^2 - 1.$



Prueba que la inyección canónica  $j$  de  $f^{-1}(0)$  en  $\mathbb{R}^3$  tiene rango 2 en todos los puntos calculando explícitamente la aplicación diferencial.

**A.4.6.** (a) Prueba que el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz = 1\}$$

es una subvariedad cerrada de  $\mathbb{R}^3$  de dimensión 2.

(b) Prueba que el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + 2xz + 2yz = 1, 2x - y + z = 0\}$$

puede dotarse de estructura de variedad diferenciable de forma que sea una subvariedad 1-dimensional cerrada de  $\mathbb{R}^3$ .

**A.4.7.** (a) Sean  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables de la misma dimensión y  $f : M \rightarrow N$  una inmersión. Si  $M$  es compacta y  $N$  es conexa y Hausdorff, prueba que  $f$  es sobreyectiva.

(b) Deduce que no existe ninguna inmersión de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{R}$  ni de  $P^n(\mathbb{R})$  en  $\mathbb{R}^n$ .

**A.4.8.** Consideremos los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ :  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = |x|\}$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 - 3xy = 1\}$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$ . ¿Cuáles de ellos son subvariedades de  $\mathbb{R}^2$ ?

**A.4.9.** ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subvariedades de  $\mathbb{R}^2$ ?

$$A = \{(t, t^2) : t \in \mathbb{R}^-\} \cup \{(t, -t^2) : t \in \mathbb{R}^+\}$$

$$B = \{(x, y) : x = 0 \text{ o } y = 0\}$$

$$C = \{(\cos(t), \cos(t/3) + \sin(t/3)) : t \in (0, 4\pi + \frac{3\pi}{4})\}$$

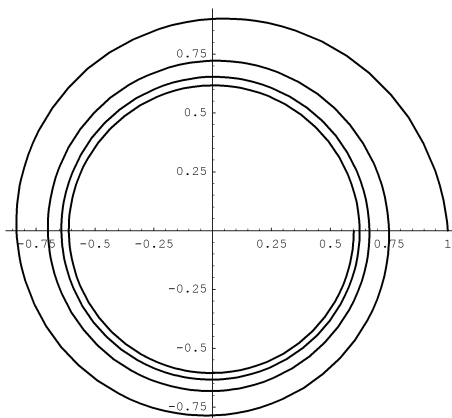
**A.4.10.** Sea  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ . Construyamos dos cartas aplicando cada eje en la recta real mediante  $(x, 0) \rightarrow x, (0, y) \rightarrow y$ . ¿Definen las cartas anteriores un atlas sobre el conjunto abstracto  $S$ ? Si no es así, ¿admite  $S$  estructura de variedad diferenciable? En caso afirmativo, ¿es  $S$  una subvariedad de  $\mathbb{R}^2$ ?

**A.4.11.** Sea  $\mathcal{M} = M(n, \mathbb{R})$  el conjunto de todas las matrices reales de orden  $n \times n$ , con su estructura canónica de variedad diferenciable. Entonces  $\det : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación diferenciable y  $GL(n) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$  es un subconjunto abierto de  $\mathcal{M}$ ; por tanto,  $GL(n)$  es una subvariedad diferenciable de dimensión  $n^2$ . Prueba:

- a)  $\det : GL(n) \rightarrow \mathbb{R}$  tiene rango constante e igual a 1. En consecuencia,  $\det^{-1}(1) = SL(n)$  es una hipersuperficie de  $GL(n)$ , que llamaremos el *grupo especial lineal*.
- b) El espacio tangente  $T_I(SL(n)) \subset \mathcal{M}$ , donde  $I$  denota la matriz identidad de orden  $n$ , está formado por las matrices de traza cero.

**A.4.12.** Sea  $F : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación dada por

$$F(t) = \left( \frac{t+1}{2t} \cos(2\pi t), \frac{t+1}{2t} \operatorname{sen}(2\pi t) \right).$$



¿Es  $F$  una inmersión?

**A.4.13.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función diferenciable definida por  $f(x, y) = y^4 - y^2 + \frac{1}{4}x^2$  y consideremos el conjunto  $M = f^{-1}(0)$ . ¿Admite  $M$  estructura de variedad diferenciable?

**A.4.14.** Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable que tiene rango 1 en todos los puntos de una fibra  $F = f^{-1}(a)$ . Si  $p$  es un punto de  $F$  y  $v \in T_pM$ , prueba que  $v \in T_pF$  si, y sólo si,  $df_p(v) = 0$ .

**A.4.15.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $G$  un grupo. Se dice que  $G$  actúa sobre  $M$  si existe una aplicación  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  tal que:

- i) las aplicaciones  $\varphi_g = \varphi(g, \cdot)$  son difeomorfismos, y
- ii)  $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$ , para todo  $g, h \in G$ .

La acción es *libre* si el elemento identidad es el único elemento de  $G$  que tiene algún punto fijo; y es *discontinua* si todo punto  $m$  tiene un entorno  $U$  tal que  $\varphi_g(U) \cap U = \emptyset$  para todo  $g \neq e$ .

Si  $G$  actúa sobre  $M$  entonces determina una relación de equivalencia: dos puntos  $p$  y  $q$  están relacionados si existe  $g \in G$  tal que  $q = \varphi_g(p)$ . Denotemos por  $M/G$  al conjunto cociente y por  $\pi : M \rightarrow M/G$  la proyección canónica.

Prueba que si  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  es una acción libre y discontinua de  $G$  sobre  $M$ , entonces  $M/G$  admite estructura de variedad diferenciable tal que  $\pi$  es un difeomorfismo local.

**A.4.16.** Prueba que  $\mathbb{Z}$  actúa libre y discontinuamente como un grupo de transformaciones sobre  $\mathbb{R}^2$  si la acción está determinada por la función global  $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\Phi((x, y), n) = (x + n, (-1)^n y)$$

**A.4.17.** Prueba que la función global  $\Phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\Phi(m, n, s) = s + m\alpha + n\beta,$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son números cuya razón es irracional, determina una acción de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{R}$  que es libre pero no discontinua.

**A.4.18.** Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  el grupo  $G$  de difeomorfismos generado por las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, y) &= (x + 1, -y) \\ \Phi_2(x, y) &= (x, y + 1)\end{aligned}$$

Comprueba que el grupo  $G$  actúa libre y discontinuamente sobre  $\mathbb{R}^2$ . (La variedad cociente  $\mathbb{R}^2/G$  se conoce como *la botella de Klein*).

**A.4.19.** Sea  $F(k, n)$  el conjunto formado por todas las familias de  $k$  vectores de  $\mathbb{R}^n$  linealmente independientes (en general, cualquier espacio vectorial real  $n$ -dimensional). Dota a  $F(k, n)$  de estructura de variedad diferenciable. Las variedades  $F(k, n)$  se denominan *variedades de Stiefel*.

**A.4.20.** Sea  $G(k, n)$  el conjunto de todos los  $k$ -planos (subespacios lineales de dimensión  $k$ ) pasando por el origen de  $\mathbb{R}^n$  (en general, cualquier espacio vectorial real  $n$ -dimensional). Dota a  $G(k, n)$  de estructura de variedad diferenciable. Las variedades  $G(k, n)$  se denominan *variedades de Grassmann* y, en particular,  $G(1, n) = P^n(\mathbb{R})$ .

**A.4.21.** Prueba que para cualquier  $k$ , las variedades de Grassmann  $G(k, n)$  y  $G(n - k, n)$  son naturalmente difeomorfas.

**A.4.22.** Sea el toro de revolución  $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ , simétrico respecto del origen  $0 \in \mathbb{R}^3$ . Sea  $G = \{A, I\} \subset \text{Isom}(T^2)$ , donde  $A$  es la aplicación antípoda e  $I$  es la identidad. Entonces:

- a) El cociente  $K = T^2/G$  admite estructura de variedad diferenciable.  $K$  se denomina la *Botella de Klein*.
- b) La aplicación  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= ((r \cos y + a) \cos x, (r \cos y + a) \sin x, \\ &\quad r \sin y \cos(x/2), r \sin y \sin(x/2))\end{aligned}$$

induce un embebimiento de la botella de Klein en  $\mathbb{R}^4$ .

**A.4.23.** (a) Una aplicación diferenciable  $f : M \rightarrow N$  es una sumersión si tiene rango constante e igual a  $\dim N$ . Sea  $M = \prod_{i=1}^n M_i$ . Prueba que las proyecciones  $p_k : M \rightarrow M_k$  son sumersiones.

(b) Sean  $\varphi_i : M_i \rightarrow N_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sumersiones. Prueba que la aplicación producto  $\varphi = \varphi_1 \times \dots \times \varphi_n : \prod_{i=1}^n M_i \rightarrow \prod_{i=1}^n N_i$  es una sumersión.

**4. BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO**

W. BOOTHBY. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 1986.

R. BRICKELL y R. CLARK . *Differentiable Manifolds*. Van Nostrand, 1970.

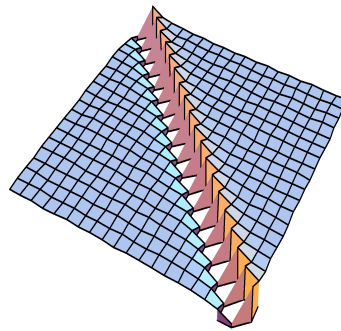
L. CONLON. *Differentiable Manifolds. A First Course*. Birkhäuser, 1993.

W.D. CURTIS y F.R. MILLER. *Differential Manifolds and Theoretical Physics*. Academic Press, 1985.

**5. PREGUNTAS DE EVALUACIÓN**

**E.4.1.** Prueba que para cualesquiera números reales  $a, b$  y  $c$  (no todos nulos), la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x, y, z) = ayz + bxz + cxy - 1,$$



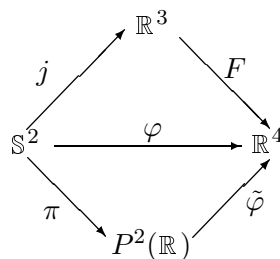
determina sobre  $f^{-1}(0)$  la estructura de una variedad diferenciable cerrada no compacta.

**E.4.2.** Estudia si existe una inmersión inyectiva  $f : S^2 \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ . En caso negativo, ¿qué es lo que lo impide?

**E.4.3.** Consideremos la aplicación diferenciable  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$

y sea  $\pi : S^2 \rightarrow P^2(\mathbb{R})$  la proyección canónica de la esfera unidad en el plano proyectivo. Sean  $\varphi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  y  $\tilde{\varphi} : P^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$  las aplicaciones que hacen el siguiente diagrama conmutativo:



donde  $j : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la inclusión canónica; en otras palabras,  $\varphi = F|_{\mathbb{S}^2}$  y  $\tilde{\varphi}([(x, y, z)]) = \varphi(x, y, z)$ . Prueba que  $\tilde{\varphi}$  es un embebimiento.

**E.4.4.** Sea la aplicación diferenciable  $\phi : GL(n) \rightarrow GL(n)$  definida por  $\phi(A) = A^t A$ , donde  $A^t$  indica la matriz transpuesta. Prueba:

- Relativa a la identificación estándar  $T_I(GL(n)) = \mathcal{M}(n)$ , la aplicación diferencial  $d\phi_I : T_I(GL(n)) \rightarrow T_I(GL(n))$  está dada por  $d\phi_I(B) = B^t + B$ .
- La aplicación  $\phi$  tiene rango constante  $n(n+1)/2$ .
- Deduce que el grupo ortogonal  $O(n) \subset GL(n)$  es una subvariedad compacta de dimensión  $n(n-1)/2$ .
- Prueba que el subespacio  $T_I(O(n)) \subset \mathcal{M}(n)$  está formado por las matrices antisimétricas.

**E.4.5.** Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2), \quad a > b > 0$$

- Determina los valores  $c \in \mathbb{R}$  para los que  $f^{-1}(c)$  es una superficie regular de  $\mathbb{R}^3$ .
- Sea  $S = f^{-1}(0)$  y consideremos el punto  $p = (a, 0, b) \in S$ . Calcula una base del plano tangente  $T_p S \subset \mathbb{R}^3$ .

**E.4.6.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$  la aplicación definida por

$$f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}xy)$$

Prueba que  $f$  induce un embebimiento de la esfera  $\mathbb{S}^2(1)$  en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^6$ . La subvariedad  $f(\mathbb{S}^2)$  se denomina *superficie de Veronese*.

**E.4.7.** Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función polinómica homogénea de grado  $r \geq 1$  con al menos un valor positivo. Prueba:

- La función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = F(x) - 1$ , determina en  $f^{-1}(0)$  una estructura de variedad diferenciable. (Ind.: Utiliza el teorema de Euler para funciones homogéneas).
- Si  $F(z) > 0$  excepto para  $z = 0$ , entonces  $f^{-1}(0)$  es una subvariedad compacta de  $\mathbb{R}^n$ . (Ind.: Prueba que está acotada).

**E.4.8.** Sea  $f : \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por

$$f(x, y, z) = (yz, xz, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2)$$

y consideremos  $\tilde{f} : P^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida por

$$\tilde{f}([p]) = f(p),$$

donde estamos identificando  $P^2(\mathbb{R})$  con  $\mathbb{S}^2/\{1, A\}$ . Prueba que  $\tilde{f}$  es un embebimiento de  $P^2(\mathbb{R})$  en  $\mathbb{R}^4$ .

**E.4.9.** Sea  $f : M \rightarrow M'$  una sumersión y sea  $p$  un punto del dominio de  $f$ . Prueba que existen cartas  $(U, x)$  de  $p$  y  $(W, y)$  de  $f(p)$  tal que la representante local  $y \circ f \circ x^{-1}$  de  $f$  está dada por  $y \circ f \circ x^{-1}(z, w) = z$ .



## 6. BIOGRAFÍA: KARL-FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

**Karl-Friedrich Gauss** (1777-1855) nació en Gotinga el 30 de abril. Sin ayuda de ningún tipo, Gauss aprendió a calcular antes de hablar. A los tres años corrigió un error en la paga de los obreros de su padre, y por sí solo estudió y profundizó la aritmética. A los ocho años mostró un genio precoz con ocasión de un problema propuesto por su profesor de la escuela elemental: encontrar la suma de los cien primeros números naturales. Gauss sumó casi instantáneamente los enteros al darse cuenta que eran 50 parejas de números que sumaban 101. El profesor tuvo la sabiduría de procurarle libros de aritmética para que Gauss prosiguiera su aprendizaje.

A los once años Gauss conoció a **Johann Martin Bartels** (1769-1836), entonces profesor ayudante de la escuela y más tarde profesor de Lovachevski. Bartels habló de él al duque de Brunswick, quien lo llevó a estudiar a sus expensas al Brunswick Collegium Carolinum. En la academia Gauss descubrió la ley de Bode, el teorema del binomio y la media aritmético-geométrica, así como la ley de reciprocidad cuadrática y el teorema de los números primos. En 1795 Gauss dejó Brunswick y se marchó a la Universidad de Gotinga. El profesor de Gauss era **Abraham Gotthelf Kaestner** (1719-1800), a quien Gauss ridiculizaba frecuentemente. Su único amigo conocido entre los estudiantes fue **Farkas Bolyai** (1775-1856), a quien conoció en 1799 y con quien mantuvo correspondencia durante muchos años.

En marzo de 1796 obtiene la construcción del polígono regular de 17 lados por medio de la regla y el compás, y desde ese día consigna la primera anotación en su célebre diario matemático en el que durante dieciocho años inscribirá 146 enunciados matemáticos breves de los resultados de sus trabajos. Este diario no fue encontrado hasta 1898, y su contenido fue publicado por primera vez por **Felix Klein** (1849-1925) en 1901.

En 1798, Gauss vuelve a Brunswick para continuar allí sus trabajos en solitario. Al año siguiente obtiene el doctorado por la Universidad de Helmsted bajo la dirección de **Johann Friedrich Pfaff** (1765-1825). Su tesis de doctorado contiene una demostración del *teorema fundamental del álgebra*, es decir, que toda ecuación polinómica  $p(x) = 0$  con coeficientes reales o imaginarios posee al menos una raíz. En 1801, Gauss escribe y publica su gran tratado titulado *Disquisitiones arithmeticae*, en el que presenta un resumen de los trabajos aislados de sus predecesores, da soluciones a las cuestiones más difíciles, formula conceptos y cuestiones que indicarán, al menos durante un siglo, las líneas maestras de la investigación en teoría de números.

En junio de 1801, **Zach**, un astrónomo a quien Gauss había conocido dos o tres años antes, publica las posiciones orbitales de Ceres, un nuevo “pequeño planeta” que había sido descubierto por el observador italiano **Giuseppe Piazzi** en enero. Desafortunadamente, Piazzi sólo pudo observar nueve grados de su órbita antes de que desapareciera detrás del Sol. Zach publicó diversas predicciones de su posición, incluyendo una de Gauss que difería bastante del resto. Cuando Ceres fue redescubierto por Zach en diciembre, estaba exactamente donde Gauss había predicho. Aunque Gauss no descubrió sus métodos en esa época, utilizó una teoría orbital de los planetas fundamentada en la elipse y recurrió a métodos numéricos basados en el método de mínimos cuadrados. Esta hazaña coincide con el comienzo de sus investigaciones astronómicas, que absorberán una buena parte de sus energías durante casi veinte años.

En 1807 Gauss es nombrado profesor de astronomía y director del observatorio de Gotinga, donde permaneció el resto de su vida. Sus trabajos de astronomía le llevaron a publicar su *Theoria motus*



Figura 4.1: Gauss en 1803

*corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (1809), en la cual Gauss desarrolla sistemáticamente su método del cálculo orbital. En 1809 nace su tercer hijo, que sobrevive corto tiempo, y de las secuelas de este nacimiento muere su mujer, con la que se había casado en 1805. Estos dos acontecimientos sumieron a Gauss en una profunda soledad que nunca fue capaz de superar.

Durante los primeros años en Gotinga, Gauss realiza estudios y lleva a cabo investigaciones en diversos frentes, a la vez que redacta numerosas memorias: *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, un primer estudio riguroso de las series y la introducción de las funciones hipergeométricas (1813); *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*, una contribución importante a la aproximación de las integrales y *Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen*, uno de los primeros análisis de los estimadores estadísticos (1816); trabajos en astronomía, inspirados por su estudio del planeta Palas y una memoria notable sobre la determinación de la atracción de un planeta a su órbita, *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodus nova tractata*.



Figura 4.2: Gauss en 1828

En 1822 Gauss ganó el Premio de la Universidad de Copenhagen con su *Theoria attractionis...*, junto con la idea de aplicar una superficie en otra de tal forma que ambas sean similares localmente. Este trabajo fue publicado en 1825 y dio origen a su publicación *Untersuchungen über Gegenstände der*

*Höheren Geodäsie* (1843 y 1846). El trabajo *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* (1823), junto con su suplemento de 1828, se dedicó a la estadística matemática, en particular al método de los mínimos cuadrados.

La publicación, en 1827, de su *Disquisitiones circa generales superficies curvas* supone una contribución definitiva a la geometría diferencial de superficies en el espacio de tres dimensiones, constituyendo esencialmente la primera etapa en el desarrollo de la geometría de Riemann. Gauss emprende un estudio de las superficies, demostrando, en particular, que si dos superficies son isométricas el producto de los dos radios de curvatura principales es el mismo en dos puntos correspondientes (*teorema egregium*).

En su memoria de 1827, Gauss trata también el problema de determinar las geodésicas sobre las superficies. Gauss consigue demostrar un célebre teorema sobre la curvatura de un triángulo cuyos lados son geodésicas. Determina que la curvatura total de un triángulo geodésico de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$  viene dada por

$$\int \int K ds = a + b + c - \pi$$

Sus trabajos en geometría diferencial demuestran que el estudio de la geometría de una superficie puede hacerse concentrándonos esencialmente en la superficie misma. Así, las “líneas rectas” sobre la superficie son las geodésicas y, por consiguiente, la geometría de la superficie es no euclídea.

Durante los primeros años en Gotinga, Gauss había estudiado la posibilidad de la existencia de una geometría no euclídea. Convencido de la ineficacia de las diversas tentativas anteriores para demostrar el postulado de las paralelas, Gauss acepta cada vez más la idea de que debe abandonar los caminos trillados y elaborar una nueva geometría. A partir de 1813 desarrolla esta nueva geometría, llamada sucesivamente antieuclídea, geometría astral y, por fin, geometría no euclídea. En 1831 escribe un ensayo sobre las líneas paralelas, y en una carta dirigida a **H.K. Schumaker** le dice:

*Después de haber meditado durante casi cuarenta años sin escribir nada, me he tomado la molestia al menos de poner por escrito algunas de mis ideas, con el fin de que no desaparezcan conmigo.*

Este mismo año, Gauss conoce los trabajos de **Janos Bolyai** (1802-1860), a través de un libro que le envía su padre, y en una carta dirigida a éste, le comunica sus propios trabajos sobre el tema y reivindica la propiedad de sus descubrimientos:

*Si digo que soy incapaz de elogiar este estudio, quizás le extrañe. Pero no puede ser de otra manera, porque ello equivaldría a alabar mis propios trabajos. En efecto, el enfoque preconizado por vuestro hijo y los resultados que ha obtenido coinciden casi enteramente con las ideas que han ocupado mi espíritu desde hace 30 o 35 años. No tengo la intención de publicar estas meditaciones durante mi vida, pero he decidido escribirlas para que puedan conservarse. Es, en consecuencia, una sorpresa agradable para mí ahorrarme este trabajo, y me llena de alegría el pensamiento de que es precisamente el hijo de mi amigo de siempre el que me ha suplantado de forma tan notable. . .*

En 1831, **Wilhelm Weber** llega a Gotinga como profesor de física, ocupando el puesto de **Tobias Mayer**. Gauss había conocido a Weber en 1828 y apoyó este nombramiento. Gauss había trabajado en física antes de 1831, publicando *Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik* y *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii which discussed forces of attraction*. Estos trabajos estaban basados en la teoría del potencial de Gauss, de gran importancia en sus investigaciones en

física. Gauss pensaba que su teoría del potencial y su método de los mínimos cuadrados proporcionaban una relación vital entre la ciencia y la naturaleza.



Figura 4.3: Gauss en 1832

En 1832, Gauss y Weber comenzaron a estudiar la teoría del magnetismo terrestre, después de que **Alexander von Humboldt** intentase obtener la ayuda de Gauss para construir una red de puntos de observación magnéticos alrededor de la Tierra. Gauss se interesó por este tema, y publicó tres importantes trabajos: *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* (1832), *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus* (1839) y *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte* (1840).

En 1837, Weber fue forzado a abandonar Gotinga cuando se vio envuelto en una disputa política, y desde entonces la actividad de Gauss decreció. Aunque parece ser que siguió trabajando con asiduidad, no se animaba a publicar los resultados que obtenía. Algunas veces se sintió muy complacido por los avances realizados por otros matemáticos, especialmente por **Eisenstein** y **Lovachevsky**.

Después de 1850, el estado de su corazón se deterioró rápidamente y debió reducir considerablemente sus actividades. En 1851 Gauss aprobó la tesis doctoral de Riemann sobre los fundamentos del análisis complejo y en 1854 asiste feliz a la lección inaugural de Riemann en Gotinga. Su salud se deterioró lentamente y murió en la cama el 23 de febrero de 1855.

Dos de los últimos estudiantes de doctorado de Gauss fueron **Moritz Cantor** y **Dedekind**, que describió a su tutor con las siguientes palabras:

*... usualmente se sentaba en una actitud confortable, con la mirada baja, ligeramente inmóvil y con las manos sobre su regazo. Hablaba bastante libremente, con mucha claridad, de forma simple y llana: pero cuando quería destacar un nuevo punto de vista... entonces levantaba su cabeza, se volvía hacia alguien de los que estaban sentados a su lado y lo miraba fijamente, con ojos penetrantes, mientras duraba su alocución. Si procedía a realizar una explicación acerca de los principios de desarrollo de unas fórmulas matemáticas, entonces se levantaba y, con una postura muy erguida, escribía en una pizarra detrás de él con su particular y esmerada escritura: siempre procuraba escribir ordenadamente para utilizar el menor espacio.*

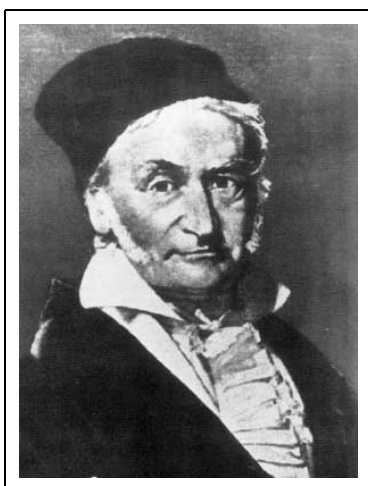


Figura 4.4: Gauss en su madurez

### **Bibliografía**

Carl B. Boyer. *A History of Mathematics*. Princeton University Press, 1985. pp. 544–557.

Florian Cajori. *A History of Mathematics*. Chelsea Publishing Company, 1995. pp. 434–438.

Jean-Paul Collete. *Historia de las matemáticas*, vol. II. Siglo veintiuno de España Editores, S.A., 1985. pp. 286–308.

Internet. URL de la página:

[www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Gauss.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Gauss.html)

### **Bibliografía complementaria**

*Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990).

*Encyclopaedia Britannica*

#### **Libros:**

W.K. Bühler *Gauss: A Biographical Study* (Berlin, 1981).

G.W. Dunnington *Carl Friedrich Gauss : Titan of Science* (New York, 1955).

T. Hall *Carl Friedrich Gauss : A Biography* (1970).

G.M. Rassias (ed.) *The mathematical heritage of C F Gauss* (Singapore, 1991).

H. Reichardt *Gauss*, en H Wussing y W Arnold, *Biographien bedeutender Mathematiker* (Berlin, 1983).

H. Reichardt (ed.) *C F Gauss Gedenkband anlässlich des 100. Todestages am 23. Februar 1855* (1957).

W.S. von Waltershausen *Gauss, a Memorial* (Colorado Springs, Colo., 1966).

#### **Artículos:**

- C. Agostinelli *Some aspects of the life and work of Carl Friedrich Gauss and that of other illustrious members of the Academy (Italian)*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 112 (1978), suppl., 69-88.
- W. Benham *The Gauss anagram : an alternative solution*, Ann. of Sci. 31 (1974), 449-455.
- E. Breitenberger *Gauss und Listing: Topologie und Freundschaft*, Gauss-Ges. Göttingen Mitt. 30 (1993), 3-56.
- E. Breitenberger *Gauss's geodesy and the axiom of parallels*, Arch. Hist. Exact Sci. 31 (3) (1984), 273-289.
- D.A. Cox *Gauss and the arithmetic - geometric mean*, Notices Amer. Math. Soc. 32 (2) (1985), 147-151.
- D.A. Cox *The arithmetic-geometric mean of Gauss*, Enseign. Math. (2) 30 (3-4) (1984), 275-330.
- H.S.M. Coxeter *Gauss as a geometer*, Historia Math. 4 (4) (1977), 379-396.
- J. Dieudonné *Carl Friedrich Gauss : a bicentenary*, Southeast Asian Bull. Math. 2 (2) (1978), 61-70.
- J. Dutka *On Gauss' priority in the discovery of the method of least squares*, Arch. Hist. Exact Sci. 49 (4) (1996), 355-370.
- M. Folkerts *C F Gauss' Beitrag zur Besetzung von Professuren an der Universität Göttingen*, Gauss-Ges. Göttingen Mitt. 32 (1995), 3-34.
- E.G. Forbes *The astronomical work of Carl Friedrich Gauss (1777-1855)*, Historia Math. 5 (2) (1978), 167-181.
- E.G. Forbes *Gauss and the discovery of Ceres*, J. Hist. Astronom. 2 (3) (1971), 195-199.
- A. Fryant . V.L.N. Sarma *Gauss' first proof of the fundamental theorem of algebra*, Math. Student 52 (1-4) (1984), 101-105.
- G.D. Garland *The contributions of Carl Friedrich Gauss to geomagnetism*, Historia Math. 6 (1) (1979), 5-29.
- H. Grauert *Wie Gauss die alte Göttinger Mathematik schuf*, Proceedings of the 2nd Gauss Symposium. Conference A : Mathematics and Theoretical Physics (Berlin, 1995), 1-15.
- H.-J. Felber *Die beiden Ausnahmegestimmungen in der von C F Gauss aufgestellten Osterformel*, Sterne 53 (1) (1977), 22-34.
- H.-J. Treder *Gauss und die Gravitationstheorie*, Sterne 53 (1) (1977), 9-14.
- S.H. Hollingdale *C F Gauss (1777-1855) : a bicentennial tribute*, Bull. Inst. Math. Appl. 13 (3-4) (1977), 68-76.
- K-R. Biermann *Aus der Gauss-Forschung*, Gauss-Ges. Göttingen Mitt. 29 (1992), 39-42.
- K-R. Biermann *Zu den Beziehungen von C F Gauss und A v Humboldt zu A F Möbius*, NTM Schr. Geschichte Naturwiss. Tech. Medizin 12 (1) (1975), 12-15.
- K-R. Biermann *Zu Dirichlets geplantem Nachruf auf Gauss*, NTM Schr. Geschichte Naturwiss. Tech. Medizin 8 (1) (1971), 9-12.

- P. Mürsepp *Gauss and Tartu University*, *Historia Math.* 5 (4) (1978), 455-459.
- W. Narkiewicz *The work of C F Gauss in algebra and number theory*, Festakt und Tagung aus Anlass des 200 : Geburtstages von Carl Friedrich Gauss (Berlin, 1978), 75-82.
- J.G. O'Hara *Gauss and the Royal Society : the reception of his ideas on magnetism in Britain (1832-1842)*, *Notes and Records Roy. Soc. London* 38 (1) (1983), 17-78.
- R.L. Plackett *The influence of Laplace and Gauss in Britain*, *Bull. Inst. Internat. Statist.* 53 (1) (1989), 163-176.
- D.E. Rowe *Gauss, Dirichlet and the Law of Biquadratic Reciprocity*, *The Mathematical Intelligencer* 10 (1988), 13-26.
- O. Sheynin *C F Gauss and geodetic observations*, *Arch. Hist. Exact Sci.* 46 (3) (1994), 253-283.
- D.A. Sprott *Gauss's contributions to statistics*, *Historia Math.* 5 (2) (1978), 183-203.
- G.W. Stewart *Gauss, statistics, and Gaussian elimination*, *J. Comput. Graph. Statist.* 4 (1) (1995), 1-11.
- S.M. Stigler *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900* (Cambridge, Mass.-London, 1986), 140-.
- S.M. Stigler *Gauss and the invention of least squares*, *Ann. Statist.* 9 (3) (1981), 465-474.
- S.M. Stigler *An attack on Gauss, published by Legendre in 1820*, *Historia Math.* 4 (1977), 31-35.
- W. Waterhouse *Gauss's first argument for least squares*, *Arch. Hist. Exact Sci.* 41 (1) (1990), 41-52.
- W. Waterhouse *Gauss on infinity*, *Historia Math.* 6 (4) (1979), 430-436.
- K. Zornbala *Gauss and the definition of the plane concept in Euclidean elementary geometry*, *Historia Math.* 23 (4) (1996), 418-436.