CAPÍTULO 2
TOPOLOGÍA DE VARIEDADES

1. INTERROGANTES CENTRALES DEL CAPÍTULO

Se pretende que el alumno sepa definir, establecer o determinar lo siguiente:

- Cartas compatibles.
- Carta admisible.
- La topología inducida.
- Subvariedad abierta.
- Relación entre diferenciabilidad y continuidad.
- Relación entre la topología inducida y la dada.
- Estructura diferenciable sobre un espacio topológico.
- Axiomas de separación T_1 y T_2.
- Primer y segundo axiomas de numerabilidad.
- Variedades localmente conexas y localmente compactas.
- Variedades compactas.
- Soporte de una función diferenciable.
- Familia de abiertos localmente finita.
- Partición diferenciable de la unidad.
- Variedades paracompactas.
- Funciones salto.
- Extensión de funciones.

2. CONTENIDOS FUNDAMENTALES DEL CAPÍTULO

En el capítulo anterior hemos introducido dos conceptos fundamentales como son, lógicamente, las variedades diferenciables y las aplicaciones diferenciables entre variedades. Sin embargo, si queremos generalizar a variedades diferenciables los métodos del cálculo diferencial parece conveniente introducir nuevos conceptos, sobre todo en lo relativo a la continuidad de funciones (recordemos la conocida propiedad del cálculo elemental de que toda función derivable es continua). Por ello es imprescindible que dotemos a una variedad diferenciable de una topología, y sería conveniente que dicha topología fuese lo más natural posible.

2.1. La topología inducida

Definición 2.1 (Cartas compatibles)
Dos cartas (U, φ) y (V, ψ) se dice que son *compatibles* si o bien $U \cap V = \emptyset$ o bien $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es un difeomorfismo entre abiertos.

Definición 2.2 (Carta admisible)
Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable. Una carta (U, φ) se dice que es *admisible* si es compatible con todas las cartas del atlas $\mathcal{A}$.

Proposición 2.3
Sea M una variedad diferenciable n-dimensional y consideremos (U, φ) una carta admisible. Si $W \subset U$ es tal que $\varphi(W)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces (W, z), siendo $z = \varphi|_W$, es también una carta admisible.

Tras establecer el concepto de carta admisible, es fácil ver que la colección de entornos coordenados de una variedad diferenciable M constituye una base para una topología sobre M, que denominaremos *topología inducida* (por la estructura diferenciable) y que denotaremos por τ_0. En esta topología, un subconjunto $A \subset M$ es abierto si, y sólo si, $A \cap U$ es un entorno coordenado para cualquier carta (U, φ). No es difícil probar que es suficiente con demostrarlo para los sistemas de coordenadas de un atlas diferenciable.

Una vez introducida dicha topología, ya es posible hablar de continuidad de funciones y, en particular, de homeomorfismos. En este sentido, puede probarse la siguiente propiedad importante.

Proposición 2.4
Las cartas que definen la estructura diferenciable son homeomorfismos en la topología inducida.

También se satisfacen las siguientes propiedades, que generalizan las análogas del cálculo diferencial sobre el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.5

(a) *Si una aplicación $f : M \longrightarrow M'$ es diferenciable en un punto $p \in M$ entonces, usando las topologías inducidas en M y M', f es continua en p.*

(b) *Si $f : M \longrightarrow M'$ es una aplicación diferenciable y U es un subconjunto abierto de M que interseca el dominio de f, entonces $f|_U$ es también diferenciable. En particular, si f es un difeomorfismo, entonces $f|_U$ es también un difeomorfismo.*

2.2. Estructura diferenciable sobre un espacio topológico

En este punto conviene indicar que podría suceder, como de hecho así ocurre en la mayoría de los ejemplos que se han presentado, que el conjunto base sobre el que construimos la variedad diferenciable tenga ya una topología propia. Es lógico entonces plantearse cuándo esta topología coincidirá con la topología inducida. En esta misma línea, es natural preguntarse cómo podemos dotar de una estructura diferenciable a un espacio topológico de manera que sea compatible con su estructura topológica.

Proposición 2.6
Sea (M,τ) un espacio topológico y consideremos $\mathcal{A}$ una estructura diferenciable sobre M. Entonces la topología inducida coincide con τ si, y sólo si, las cartas de $\mathcal{A}$ son homeomorfismos en τ.

Este resultado motiva la siguiente definición.

Definición 2.7
Sea M un espacio topológico. Un *atlas diferenciable n-dimensional* sobre M es una familia de cartas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:
(1) $\cup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$.
(2) Las cartas φ_α son homeomorfismos de U_α en abiertos de $\mathbb{R}^n$.
(3) Para todo par de índices α y β, las cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) son compatibles.
Diremos que el atlas $\mathcal{A}$ determina una *estructura diferenciable* sobre M si es maximal para las condiciones anteriores.

2.3. Propiedades de la topología inducida

A continuación estudiamos las propiedades más importantes de la topología inducida, sobre todo en lo referente a la separabilidad y numerabilidad de la variedad.

Proposición 2.8
La topología inducida sobre una variedad es T_1 y localmente Hausdorff.

El resultado anterior no puede mejorarse, ya que es posible encontrar variedades diferenciables que no son Hausdorff. Un ejemplo sencillo se muestra a continuación.

Ejemplo 2.9
Sea M el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ siguiente:

$$M = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,1)\}$$

y consideremos las siguientes aplicaciones:

$$x : U = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}, \qquad x(t,0) = t,$$

$$y : V = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2; t \neq 0\} \cup \{(0,1)\} \to \mathbb{R}, \qquad y(t,0) = t, y(0,1) = 0$$

Es fácil ver que $\{(U,x),(V,y)\}$ es un atlas sobre M y que los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$ no pueden separarse.

La variedad M también puede ser obtenida de una copia doble de $\mathbb{R}$ mediante una relación de equivalencia. Para ser más precisos, consideremos la variedad diferenciable $N = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2; s = 0,1\}$ y definamos la siguiente relación de equivalencia:

$$(s,t) \sim (a,b) \Longleftrightarrow s = a \neq 0$$

Es fácil ver que el conjunto cociente $N/\sim$ admite estructura de variedad diferenciable difeomorfa a M.

Proposición 2.10
La topología inducida sobre una variedad satisface el primer axioma de numerabilidad $1A\mathbb{N}$.

Como ocurría con la propiedad anterior, este resultado no puede mejorarse, ya que existen ejemplos de variedades diferenciables que no satisfacen el segundo axioma de numerabilidad.

En general, y puesto que una variedad diferenciable es localmente homeomorfa a un espacio euclídeo, todas las propiedades locales de $\mathbb{R}^n$ que involucren a conjuntos abiertos también se verificarán en variedades. Por ejemplo, toda variedad es localmente conexa y localmente conexa por arcos.

2.4. Variedades Hausdorff y $2A\mathbb{N}$

Ya hemos visto que una variedad diferenciable no tiene que ser necesariamente Hausdorff ni $2A\mathbb{N}$; sin embargo, para poder desarrollar un cálculo diferencial sobre variedades necesitamos introducir el concepto de límite, y el axioma de Hausdorff es precisamente el que nos asegura la unicidad de dicho límite. Por esta razón, en muchas ocasiones se parte de un espacio topológico Hausdorff para dotarlo de una estructura diferenciable. Exigir esta propiedad es bastante natural, ya que $\mathbb{R}^n$ la satisface y, en consecuencia, cualquier variedad $M \subset \mathbb{R}^n$, que esté dotada de la topología relativa, también la satisface. Otra propiedad interesante es la siguiente.

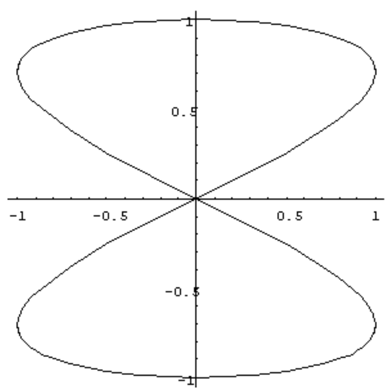
Proposición 2.11
La topología de una variedad Hausdorff es localmente compacta.

Otra propiedad topológica importante es el segundo axioma de numerabilidad, propiedad hereditaria que se conserva para los productos. La importancia de este axioma quedará puesta de manifiesto en la siguiente sección. Una condición necesaria para que una variedad satisfaga este axioma se recoge en el siguiente resultado.

Proposición 2.12
Toda variedad diferenciable con un atlas numerable satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Como consecuencia inmediata, toda variedad compacta satisface $2A\mathbb{N}$.

Observación 2.13
En relación con las propiedades topológicas de una variedad diferenciable, debemos tener la precaución necesaria para evitar errores fácilmente evitables. Por ejemplo, si consideramos la figura ocho $E \subset \mathbb{R}^2$, entonces es fácil pensar que E es una variedad compacta, ya que con la topología relativa de $\mathbb{R}^2$ es así.



Sin embargo, E admite un atlas de una sola carta, por lo que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}$ y, consecuentemente, nunca podrá ser compacta. La razón hay que buscarla en que las cartas de E no son homeomorfismos en la topología relativa.

2.5. Variedades paracompactas

En esta sección justificaremos la conveniencia de imponer ciertas restricciones topológicas a la variedad, más concretamente el axioma de separación T_2 (Hausdorff) y el segundo axioma de numerabilidad. Entre las razones para aceptar estas restricciones, una fundamental es garantizar la existencia de familias especiales de funciones diferenciables definidas en M y con valores en $\mathbb{R}$, denominadas particiones diferenciables de la unidad, que resulta ser una herramienta extraordinariamente útil para construir objetos globales a partir de otros definidos localmente.

Definición 2.14
El *soporte* de una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ es el siguiente conjunto:

$$\mathrm{sop}(f) = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}$$

Definición 2.15
Una familia $\mathcal{A}$ de abiertos de M es *localmente finita* si todo punto de M tiene un entorno que interseca a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$.

Introducimos ahora el concepto de partición diferenciable de la unidad.

Definición 2.16
Una colección $\{f_\alpha : M \to [0,1] \subset \mathbb{R}\}_\alpha$ de funciones diferenciables se dice que es una *partición (diferenciable) de la unidad* si satisface las siguientes condiciones:
(1) El soporte de f_α es compacto y está contenido en un entorno coordenado.
(2) La colección de los soportes $\{\mathrm{sop}(f_\alpha)\}$ es localmente finita.
(3) Para todo punto p de M, $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$.
En este caso, diremos que M es una variedad *paracompacta*.

Se dice que una partición de la unidad $\{f_\alpha\}_\alpha$ está subordinada a un cubrimiento $\{U_i\}_i$ si para cada α existe un i tal que $\{\mathrm{sop}(f_\alpha)\} \subset U_i$.

Muchos de los problemas que se presentan en Geometría Diferencial tienen una fácil solución en un entorno coordenado de un punto. Las particiones de la unidad se utilizan para construir soluciones globales a los problemas a partir de las soluciones locales.

Proposición 2.17
Si M es una variedad diferenciable paracompacta entonces M es Hausdorff.

Teorema 2.18
Una variedad diferenciable M es paracompacta s,i y sólo si, M es Hausdorff y cada componente conexa de M satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Finalizamos el capítulo probando un teorema de extensión de funciones diferenciables definidas en un entorno de un punto, el cual puede considerarse como la primera aplicación de las particiones diferenciables de la unidad. Antes enunciaremos otra aplicación más sencilla.

Proposición 2.19
Sea M una variedad paracompacta, $U \subset M$ un subconjunto abierto y $C \subset U$ un subconjunto cerrado. Entonces existe una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $f \equiv 1$ en C y $f \equiv 0$ en $M \backslash U$.

Corolario 2.20
Sea M una variedad paracompacta y U un entorno de un punto p. Entonces existe una función salto f en p subordinada a U, es decir:
(1) $0 \leqslant f \leqslant 1$ *en* M.
(2) $f = 1$ *en algún entorno de* p.
(3) $\operatorname{sop}(f) \subset U$.

Este corolario puede demostrarse directamente, sin hacer uso de la existencia de particiones diferenciables de la unidad y suponiendo solamente que la variedad es Hausdorff.

Proposición 2.21
Sea M una variedad diferenciable Hausdorff y consideremos un punto p en el dominio de una función diferenciable f. Entonces existe una función diferenciable global F que coincide con f en un entorno de p.

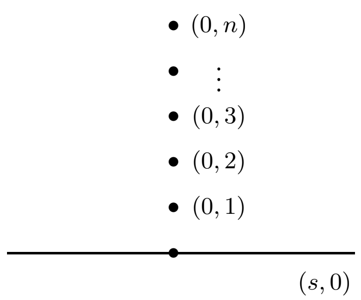
3. ACTIVIDADES DE APLICACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS

A.2.1. Sea K el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido como sigue:

$$K = \{(s,0); s \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,n); n \in \mathbb{N}\}$$

Sea $U_n = \{(s,0); s \neq 0\} \cup \{(0,n); n \in \mathbb{N}\}$. Definimos las funciones $x_n : U_n \to \mathbb{R}$ mediante

$$x_n(s,0) = s \neq 0 \qquad x_n(0,n) = 0.$$



Prueba:

(a) $\{(U_n, x_n)\}$ constituye un atlas sobre K.

(b) La topología inducida no es Hausdorff.

(c) La topología inducida no es localmente compacta.

A.2.2. Una variedad M se dice *conexa* si, con la topología inducida, es un espacio topológico conexo. Prueba que una variedad Hausdorff M es conexa si, y sólo si, es conexa por arcos, es decir, para todo par de puntos p, q de M existe una aplicación $f : [0,1] \longrightarrow M$ continua tal que $f(0) = p$ y $f(1) = q$.

A.2.3. Sea M una variedad diferenciable no necesariamente paracompacta. Si $p \in M$ y U es un entorno de p entonces existe una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, llamada una *función salto* en p, tal que

(1) $0 \leqslant f \leqslant 1$.

(2) $f \equiv 1$ en un entorno de p.

(3) $\mathrm{sop}(f) \subset U$.

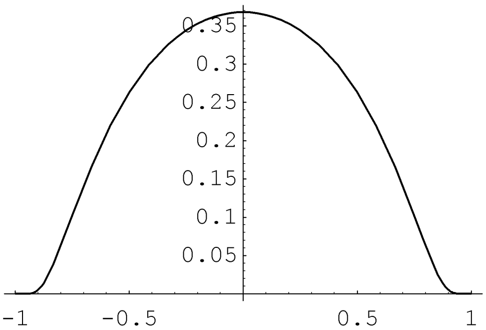
A.2.4. Prueba que las funciones $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ definidas por

$$f_n(x) = \frac{h(x-n)}{\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(x-m)}$$

donde

$$h(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-x^2}) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

constituyen una partición diferenciable de la unidad subordinada al cubrimiento abierto de $\mathbb{R}$ definido por $\{(n-2, n+2)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.



Gráfica de la función $h(x)$

A.2.5. **(a)** Prueba que la esfera $\mathbb{S}^n$ admite una partición diferenciable de la unidad consistente en sólo dos funciones.

(b) Si M y M' son dos variedades paracompactas, entonces la variedad producto $M \times M'$ es paracompacta.

4. BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

W. BOOTHBY. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 1986.

R. BRICKELL y R. CLARK . *Differentiable Manifolds*. Van Nostrand, 1970.

L. CONLON. *Differentiable Manifolds. A First Course*. Birkhäuser, 1993.

W.D. CURTIS y F.R. MILLER. *Differential Manifolds and Theoretical Physics*. Academic Press, 1985.

5. PREGUNTAS DE EVALUACIÓN

E.2.1. Sea A el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido como sigue:

$$A = \{(s,0); s \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,\alpha); \alpha \in \mathbb{R}^+\}$$

Sea $U_\alpha = \{(s,0); s \neq 0\} \cup \{(0,\alpha)\}$. Definimos las funciones $x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ mediante

$$x_\alpha(s,0) = s \neq 0 \qquad x_\alpha(0,\alpha) = 0.$$

Prueba:

(a) $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ constituye un atlas sobre A.

(b) La topología inducida no es Hausdorff ni localmente compacta.

(c) La topología inducida no satisface el segundo axioma de numerabilidad.

E.2.2. Sea $E = \mathbb{R}^3$ y denotemos por $\mathbb{R}^2_a$ al plano $z = a$, con su topología usual. Consideremos E como la unión disjunta de $\mathbb{R}^2_a$, con $a \in \mathbb{R}$, y dotémosle de la topología natural: un subconjunto de E es abierto si, y sólo si, su intersección con cada $\mathbb{R}^2_a$ es abierto. Consideremos la siguiente relación:

$$(x,y)_a \sim (x',y')_b \Longleftrightarrow (x,y)_a = (x',y')_b \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = y' > 0 \\ xy + a = x'y + b \end{array} \right.$$

donde $(x,y)_a$ denota el punto $(x,y,a) \in \mathbb{R}^2_a$.

(a) Comprueba que '$\sim$' es una relación de equivalencia. Sea $\mathcal{P} = E/\sim$, y consideremos $\pi : E \longrightarrow \mathcal{P}$ la aplicación canónica.

(b) Prueba que $\mathcal{P}$ es Hausdorff y que, para todo $a \in \mathbb{R}$, la restricción de π al plano $\mathbb{R}^2_a$ es un homeomorfismo en su imagen.

(c) Sea $f_a : \pi(\mathbb{R}^2_a) \to \mathbb{R}^2$ tal que $f_a([(x,y)_a]) = (x,y)$. Entonces $\{(\pi(\mathbb{R}^2_a), f_a)\}_{a\in\mathbb{R}}$ es un atlas sobre $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}$ se denomina la **superficie de Prüfer**.

(d) Prueba que $\mathcal{P}$ no satisface el segundo axioma de numerabilidad.

E.2.3. Sean M y N dos variedades diferenciables de la misma dimensión. ¿Son localmente difeomorfas? ¿Son globalmente difeomorfas? ¿Qué ocurre en el caso concreto de $M = \mathbb{S}^n$ y $N = P^n(\mathbb{R})$?

ANOTACIONES

6. BIOGRAFÍA: GASPARD MONGE (1746-1818)

Gaspard Monge (1746-1818) nació en Beaune, en el seno de una modesta familia. Gracias a la prosperidad del negocio familiar, su padre le hizo cursar los estudios primarios y secundarios en el colegio de los oratorianos de Beaune. Fue un estudiante brillante y finalizó sus estudios en 1762. Los oratorianos de Lyon decidieron atraerlo y a los dieciseis años le ofrecieron la cátedra de física en su colegio. Sin embargo, en 1764 Monge decidió abandonar el colegio y regresar a Beaune junto a su familia.

La construcción de un plano de su pueblo natal permitió que, a través de un coronel de ingenieros, segundo jefe de la escuela de Mezières, pudiese ingresar en el Colegio de Ingenieros de Mézières, donde se podría utilizar su habilidad para el trazado de planos de defensa y de arquitectura. Sin embargo, al no ser noble de nacimiento, no pudo ingresar en la sección de ingenieros militares y tuvo que conformarse con la de constructores y aparejadores. Observó que todas las operaciones relacionadas con el diseño y construcción de planos de fortificación se basaban en cálculos aritméticos muy laboriosos.

En 1765 se le planteó un problema y tras un minucioso estudio propuso un método geométrico, que fue rechazado en primera instancia por su comandante, aunque posteriormente fue aceptado. Monge desarrolló fructiferamente estos métodos, creando su geometría descriptiva. Debido a la rivalidad que existía entre las distintas escuelas militares francesas, no se le permitió que divulgara sus conocimientos y sus nuevos métodos. En 1768 alcanzó el grado de profesor de matemáticas en Mézières, ocupando la cátedra de matemáticas que había dejado vacante **Bossut**, y consiguió incluir la geometría descriptiva en la enseñanza regular de la escuela. La nueva ciencia sería divulgada por primera vez en 1795 por Monge, primero como un libro que recogía las lecciones dadas en la Escuela Normal, y después, en versión revisada, en el *Journal des écoles normales*.

En 1772 comienza a interesarse por otras disciplinas, entre las que destaca la física. Las numerosas memorias que publica entre 1772 y 1780 revelan contribuciones importantes no sólo a la geometría descriptiva, sino también a la geometría diferencial y a las ecuaciones en derivadas parciales. Hizo importantes contribuciones a la geometría de superficies de segundo grado (previamente estudiadas por **Christopher Wren** (1632-1723) y **Leonhard Euler** (1707-1783) y descubrió una relación entre la teoría de superficies y las ecuaciones diferenciales. Estudió las líneas de curvatura, estableciendo una teoría general de la curvatura que aplicó al elipsoide.

En 1780, Monge es elegido geómetra adjunto a la Academia de Ciencias de París, en sustitución de **Alexandre-Théophile Vandermonde** (1735-1796), que es promovido a socio. Colabora activamente con al abate Bossut en su cátedra de hidrodinámica en el Louvre, dedicando su tiempo libre al estudio de la física y química, en particular, al electromagnetismo, la electricidad y la teoría del calor. En 1783 Monge es nombrado examinador de la Marina francesa por el mariscal Castries, tras la muerte de **Etienne Bézout** (1780-1783), célebre por su curso de matemáticas.

Partidario de la Revolución francesa, aplaude la caída de la Bastilla y se afilia a sociedades patrióticas. No obstante, y debido a sus giras de inspección, está ausente de París desde 1790 hasta 1792. A su vuelta es nombrado ministro de Marina, aunque sólo 10 meses después dimite ante las dificultades que encuentra para reorganizar la Marina, volviendo a la Academia de Ciencias.

Monge participó activamente en la creación de la Escuela Normal en la que daría a conocer públicamente la geometría descriptiva. Posteriormente también participaría en la creación de la Escuela

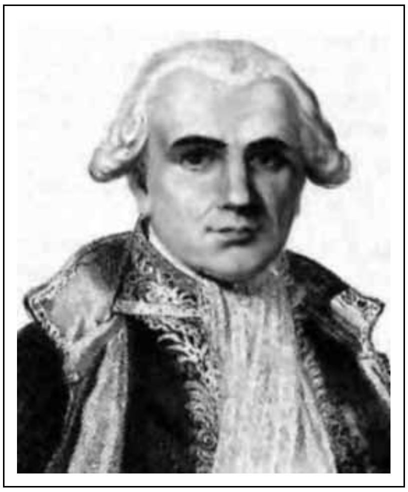


Figura 2.1: Grabado de Gaspard Monge

Politécnica, siendo su profesor más activo y su protector más abnegado. En 1796 conoció a Napoleón Bonaparte e inmediatamente se estableció una simpatía recíproca entre ambos. Antes la insistencia del general, Monge se embarcó para participar en la campaña de Egipto. En 1798, en Egipto, Bonaparte decidía la creación del Instituto de Egipto, cuya presidencia confió a Monge. A su regreso a Francia, abandonó la dirección de la Escuela Politécnica, conservando su puesto de profesor, lo que le permitió reanudar la investigación. Su amistad con Napoleón le perjudicó al final, fue despedido de la Escuela Politécnica y excluido de la lista de miembros del Instituto, muriendo el 28 de julio de 1818.

La obra de Monge fue considerable y fecunda, siendo imposible en unas pocas líneas enumerar sus aportaciones a las Matemáticas, en particular a la geometría. La obra de Monge en geometría descriptiva queda recogida en su obra *Geometría descriptiva* (1799), que recoge las lecciones impartidas a los alumnos de la Escuela Normal en 1794-1795.

La geometría analítica de Monge, como la de **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813), está centrada en problemas del espacio. En la memoria titulada *Memoria sobre las evolutas, los radios de curvatura y los diferentes géneros de inflexión de las curvas de doble curvatura* (1771), publicada en 1785, Monge estudia un gran número de problemas preliminares de geometría analítica. Otras obras de Monge son *Hojas de análisis aplicado a la geometría* (editadas por primera vez en 1795) y *Aplicación del álgebra a la geometría* (1802), ésta última escrita en colaboración con **Jean-Nicolas Pierre Hachette** (1769-1834). Entre las contribuciones de Monge a la geometría analítica podemos citar el perfeccionamiento del estudio de las cuádricas, la introducción de las coordenadas axiales de la recta y la de la orientación de las áreas triangulares y de los volúmenes tetraédricos.

Monge participó activamente en la creación de la geometría diferencial de las curvas del espacio y se destacó en el progreso de la teoría de superficies. Entre sus aportaciones más importantes, podemos destacar la unión de las ecuaciones en derivadas parciales con las familias de superficies, un estudio paralelo de las ecuaciones diferenciales totales, su célebre teoría de las características y su solución de la ecuación de las superficies minimales.

Bibliografía

Carl B. Boyer. *A History of Mathematics*. Princeton University Press, 1985. pp. 511–516.

Florian Cajori. *A History of Mathematics*. Chelsea Publising Company, 1995. pp. 274–275.

Jean-Paul Collete. *Historia de las matemáticas*, vol. II. Siglo veintiuno de España Editores, S.A., 1985. pp. 242–250.

Internet. URL de la página:
www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Monge.html

Bibliografía complementaria

Dictionary of Scientific Biography (New York 1970-1990).

Encyclopaedia Britannica

Libros:

P.V. Aubry *Monge, le savant ami de Napoléon Bonaparte, 1746-1818* (1954).

A.N. Bogolyubov *Gaspard Monge (1746-1818)* (Russian), Scientific-Biographical Literature Series 'Nauka' (Moscow, 1978).

J.L. Coolidge *A History of Geometrical Methods* (1940).

G. Kasdorf *Monge*, en H Wussing y W Arnold (ed.), Biographien bedeutender Mathematiker (Berlin, 1983).

R. Taton *Gaspard Monge* (Basel, 1950).

R. Taton (ed.) *L'Oeuvre scientifique de Monge* (Paris, 1951).

Artículos:

M.L. Balinski *Gaspard Monge : pour la patrie, les sciences et la gloire*, in Mathématiques appliquées aux sciences de l'ingénieur (Toulouse, 1991), 21-37.

S. Colombo *Gaspard Monge, géomètre et sénateur*, Rev. Questions Sci. 150 (1) (1979), 3-21.

E. Glas *On the dynamics of mathematical change in the case of Monge and the French revolution*, Stud. Hist. Philos. Sci. 17 (3) (1986), 249-268.

H.P. Huang *Monge - mathematician and social reformer (Chinese)*, Math. Practice Theory (4) (1989), 87-90.

L. Pepe *Gaspard Monge in Italy : the foundation and first works of the National Institute of the Roman Republic (Italian)*, Boll. Storia Sci. Mat. 16 (1) (1996), 45-100.

R. Taton *La première note mathématique de Gaspard Monge (juin 1769)*, Rev. Histoire Sci. Appl. 19 (1966), 143-149.

R. Taton *Un texte inédit de Monge : Réflexions sur les équations aux différences partielles*, Osiris 9 (1950), 44-61.

R. Taton *Monge, créateur des coordonnées axiales de la droite, dites de Plücker*, Elemente der Math. 7 (1952), 1-5.

R. Taton *Remarques sur la diffusion des théories mathématiques de Monge*, Thalès 5 (1948), 43-49.

R. Taton *Deux contributions de Monge à la création de la géometrie moderne*, C. R. Acad. Sci. Paris 232 (1951), 198-200.

R. Taton *Une correspondance mathématique inédite de Monge*, Revue Sci. 85 (1947), 963-989.

R. Taton *A propos d'une correspondance inédite de Monge*, C. R. Acad. Sci. Paris 226 (1948), 36-37.