

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN A LAS VARIEDADES DIFERENCIABLES

1. INTERROGANTES CENTRALES DEL CAPÍTULO

Se pretende que el alumno sepa definir, establecer o determinar lo siguiente:

- Curvas y superficies en \mathbb{R}^n .
- Superficies k -dimensionales en \mathbb{R}^n .
- Carta.
- Coordenadas de un punto.
- Atlas diferenciable sobre un conjunto.
- Atlas maximal.
- Variedad diferenciable.
- Atlas (estructuras diferenciables) equivalentes.
- Función diferenciable.
- Aplicación diferenciable.
- Difeomorfismo.

2. CONTENIDOS FUNDAMENTALES DEL CAPÍTULO

En el estudio de las curvas y superficies en el espacio euclídeo tridimensional \mathbb{R}^3 se observa que existen ciertos subconjuntos de \mathbb{R}^3 que poseen determinadas propiedades o cualidades, algunas de ellas muy intuitivas, por las cuales merecería la pena estudiarlos con detenimiento. Entre estas propiedades destacan las siguientes: (1) existencia de cierto grado de “diferenciabilidad”, que se asocia con la ausencia de picos, vértices o aristas; y (2) existencia de recta o plano tangente, cualidad que nos obliga a exigir que dichos subconjuntos no tengan ‘autointersecciones’.

Las diferencias entre curvas y superficies se empiezan a notar ya desde el mismo momento de su definición. Intuitivamente, una curva en \mathbb{R}^3 se construye a partir de una línea recta doblándola en un plano que la contenga, lo que le proporciona su *curvatura*, y retorciéndola para sacarla de dicho plano, lo que nos permite asignarle una segunda curvatura, la *torsión*. Por el contrario, la definición de superficie se hace de forma local, considerando ‘trozos’ que se solapan adecuadamente. No obstante, tanto unas como otras pueden extenderse en varias direcciones: aumentando la ‘dimensión’, aumentando la ‘codimensión’ y generalizando el espacio ambiente.

2.1. Superficies k -dimensionales en \mathbb{R}^n

Una superficie regular en \mathbb{R}^3 puede construirse considerando trozos de plano y deformándolos. Posteriormente estos trozos se van entrelazando de tal forma que no aparezcan vértices, bordes o aristas, esto es, que exista una cierta suavidad en las uniones. Si recordamos la definición de superficie notaremos que nada impide considerar que el espacio ambiente sea \mathbb{R}^n en lugar de \mathbb{R}^3 , o que nuestras superficies sean localmente homeomorfas a abiertos de \mathbb{R}^k en lugar de \mathbb{R}^2 .

Antes de esto conviene introducir los conceptos de curvas y superficies en el espacio euclídeo n -dimensional \mathbb{R}^n , para liberar a estos conceptos del lastre que supone considerarlos siempre en \mathbb{R}^3 .

Definición 1.1 (Curva parametrizada regular en \mathbb{R}^n)

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Una *curva parametrizada* en \mathbb{R}^n es una aplicación $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable de clase \mathcal{C}^∞ . La curva γ se dice que es *regular* si $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Observación 1.2

Una definición más general de curva parametrizada en \mathbb{R}^n exige sólo que γ sea continua, mientras que para curvas regulares se impone únicamente que sea de clase \mathcal{C}^1 . Sin embargo, para nuestros propósitos (y salvo mención expresa de lo contrario) sólo serán consideradas curvas de clase \mathcal{C}^∞ .

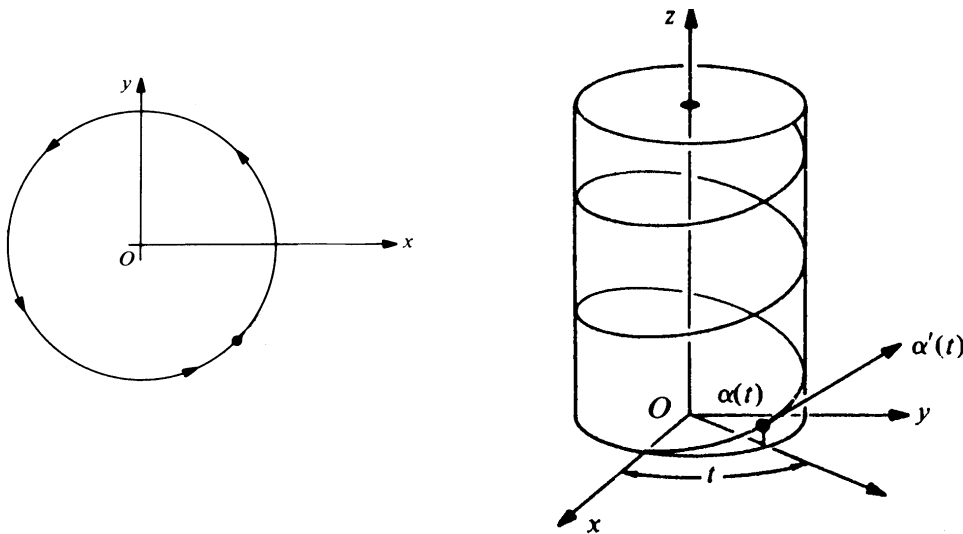


Figura 1.1: Circunferencia y hélice

Ejemplos.

- 1.3. *Línea recta.* Sea $p, v \in \mathbb{R}^n$. La recta que pasa por p en la dirección de v se expresa como $\gamma(t) = p + tv$, $t \in \mathbb{R}$. La curva es regular si, y sólo si, $v \neq 0$.
- 1.4. *Circunferencia.* Sea $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. La circunferencia de radio r centrada en el punto p se parametriza como $\gamma(t) = (a + r \cos t, b + r \sin t)$. γ es una curva regular en todos los puntos.
- 1.5. *Hélice.* Sea $r, h \in \mathbb{R}$ dos números reales no nulos. La hélice de radio r y altura (paso) h puede parametrizarse mediante $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$. Como antes, γ es una curva regular en todos los puntos.

1.6. Parametrización genérica de una recta. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces la recta determinada por (p, v) , $v \neq 0$, puede expresarse como $\gamma(t) = p + f(t)v$. En consecuencia, γ es regular en los puntos t donde $f'(t) \neq 0$.

Definición 1.7 (Superficie regular en \mathbb{R}^n)

Una *superficie (diferenciable) regular* en \mathbb{R}^n es un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo punto de S existe un entorno V del punto en S (con la topología relativa) y una aplicación $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V$, U abierto, satisfaciendo las siguientes propiedades:

- (1) X es un homeomorfismo.
- (2) $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable.
- (3) dX tiene rango 2 en todos los puntos de U .

Como vemos por la definición dada, que formalmente es idéntica a la correspondiente para superficies del espacio euclídeo tridimensional, la única diferencia estriba en la ampliación del espacio donde “vive” la superficie. Esto pone de manifiesto que la restricción sobre la *dimensión* del espacio ambiente era más bien una consecuencia histórica que científica. En este sentido, cuando digamos que S es una superficie de \mathbb{R}^n debe entenderse que S no es un subconjunto de ningún espacio \mathbb{R}^m , $m < n$.

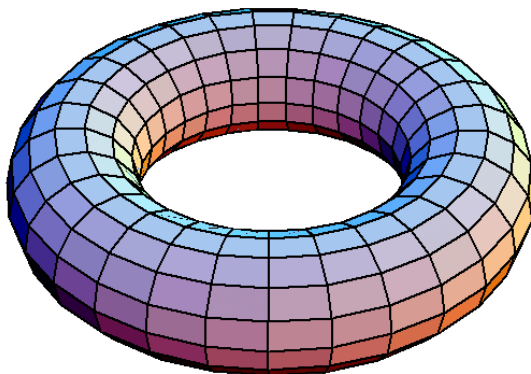


Figura 1.2: Toro

Ejemplos.

1.8. Toro. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, a y b positivos. Entonces el producto de dos círculos de radios a y b , $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b)$, es una superficie en \mathbb{R}^4 .

1.9. Producto de curvas. En general, sean $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(s)$ curvas regulares en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , respectivamente. Entonces el producto $\gamma_1 \times \gamma_2$ es una superficie en \mathbb{R}^{n+m} .

No es difícil encontrar subconjuntos de \mathbb{R}^n que gozan de propiedades similares a las curvas y superficies pero que, sin embargo, no son ni lo uno ni lo otro. Esto lleva necesariamente a la introducción de un nuevo concepto.

Definición 1.10 (Superficie k -dimensional parametrizada en \mathbb{R}^n)

Sea $A \subset \mathbb{R}^k$ un subconjunto abierto. Una *superficie k -dimensional parametrizada* en \mathbb{R}^n es una aplicación $X : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable de clase C^∞ . Diremos que la superficie es regular si dX tiene rango k en todos los puntos de A .

Sin embargo, y tal como ocurría con las curvas y superficies 2-dimensionales, el nuevo concepto es insuficiente ya que no permite obtener subconjuntos de \mathbb{R}^n que a todas luces gozan de *buenas propiedades*, como son, por ejemplo, las esferas. Por ello conviene introducir una noción que generalice adecuadamente la de superficie.

Definición 1.11

Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es una *superficie k -dimensional (diferenciable y regular)* si para todo punto p de S existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^k$, un entorno $V \subset S$ de p (con la topología relativa) y una aplicación $X : U \rightarrow V$ satisfaciendo las siguientes tres propiedades:

- (1) X es un homeomorfismo.
- (2) $X = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable.
- (3) La diferencial $dX_q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva para todo $q \in U$.

Un mismo punto de S puede pertenecer a distintos entornos coordenadas V y puesto que la geometría de S depende de la aplicación X , sería adecuado y conveniente que las propiedades geométricas en p fuesen independientes de la parametrización. Este problema se soluciona con el siguiente resultado, cuya demostración es totalmente análoga al caso de superficies en \mathbb{R}^3 .

Proposición 1.12

Sea p un punto de una superficie k -dimensional (diferenciable y regular) en \mathbb{R}^n , y sean $X : U \rightarrow S$ e $Y : V \rightarrow S$ dos parametrizaciones de S tales que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$. Entonces la aplicación $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ es un difeomorfismo. h se denomina la aplicación ‘cambio de parámetros’ o ‘cambio de coordenadas’.

La propiedad que acabamos de enunciar nos dice que cuando dos parametrizaciones se intersecan lo hacen de manera diferenciable, de tal suerte que si nos moviésemos por la superficie no nos daríamos cuenta del paso de una a otra. Esta propiedad será fundamental para comprender la definición del concepto de variedad diferenciable.

No es difícil probar que el grafo de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ es una superficie k -dimensional. Por otra parte, puede probarse que toda superficie k -dimensional diferenciable S es, localmente, el grafo de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$. Esta propiedad nos permite diseñar un método práctico y sencillo para obtener ejemplos de superficies k -dimensionales.

Proposición 1.13

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ una aplicación diferenciable y sea $a \in \mathbb{R}^{n-k}$ un valor regular de f , es decir, df_q tiene rango $n - k$ para todo punto $q \in f^{-1}(a)$ (o bien $f^{-1}(a)$ es vacío). Entonces $S = f^{-1}(a)$ es una superficie k -dimensional de \mathbb{R}^n .

Ejemplos.

1.14. Cilindro circular recto. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}, r > 0$.

1.15. Paraboloide. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$.

1.16. Hiperboloide de una hoja. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$.

1.17. Hiperboloide de dos hojas. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0\}$.

1.18. Cilindro k -dimensional. $E = \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} : x_1^2 + \dots + x_k^2 = r^2\}, r > 0$.

1.19. Esfera k -dimensional. $F = \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} : x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = r^2\}, r > 0$.

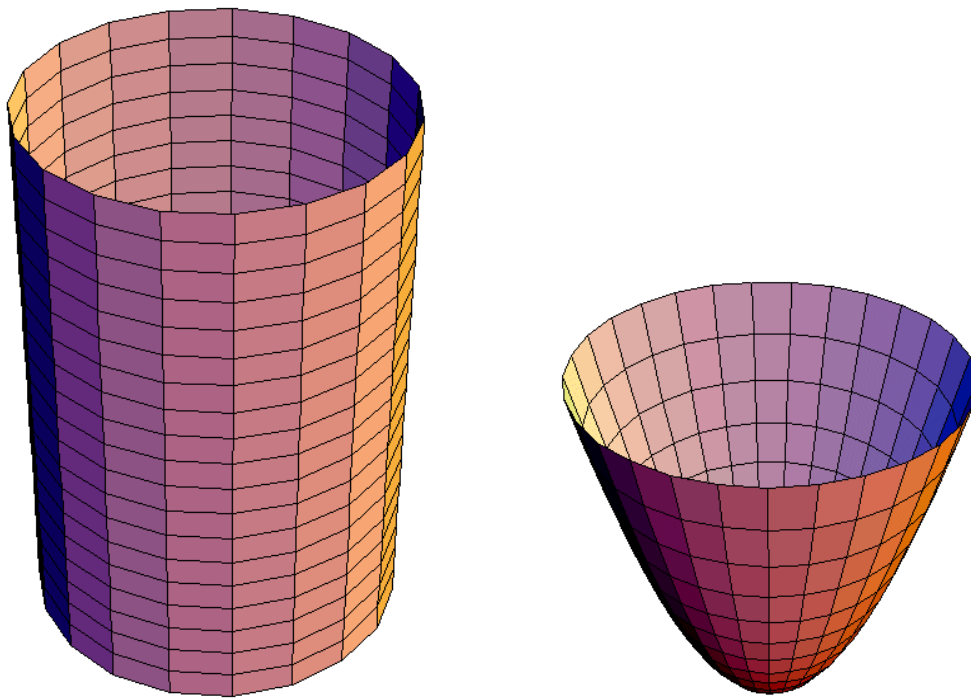


Figura 1.3: Cilindro y paraboloides

2.2. Variedades diferenciables

Cuando trabajamos con subvariedades del espacio euclídeo estamos disfrutando de la ventaja de la simplicidad conceptual; en general, estamos más cómodos tratando con subespacios de \mathbb{R}^n que con espacios métricos o topológicos arbitrarios. Sin embargo, esta aproximación a las variedades diferenciables tiene la desventaja de que importantes ideas están algunas veces ocultas por el familiar ambiente de \mathbb{R}^n . Por esta razón, y tras haber motivado las variedades diferenciables con las superficies k -dimensionales de \mathbb{R}^n , conviene que nos introduzcamos ya en el estudio general de este concepto.

Existen diversas formas de introducir la noción de variedad diferenciable, muchas de las cuales parten de la idea de espacio topológico o variedad topológica. Nosotros preferimos introducir las estructuras diferenciables sobre un conjunto sin ninguna otra estructura adicional, tal y como se hace en los textos de R. Brickell y R.S. Clark y M. Do Carmo.

Definición 1.20

Sea M un conjunto. Una *carta n -dimensional* sobre M es una aplicación biyectiva $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuya imagen $V = \varphi(U)$ es un conjunto abierto del espacio euclídeo.

El conjunto U , dominio de la carta φ , se denomina *entorno coordinado*, ya que todos los puntos de U tienen asignadas, via φ , unas coordenadas. En efecto, si $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ denota la función proyección en la i -ésima coordenada, entonces se definen las funciones coordenadas asociadas a la carta (U, φ) como $x_i = p_i \circ \varphi$. Las coordenadas de un punto p en la carta φ son $(x_1(p), \dots, x_n(p))$.

Al igual que ocurre con las superficies, hay conjuntos que no será posible cubrir mediante una sola carta, de modo que necesitaremos colecciones de cartas entre las que exista compatibilidad, en un

sentido que pasamos a precisar.

Definición 1.21

Dos cartas n -dimensionales (U, φ) y (V, ψ) sobre un conjunto M son *compatibles* si $U \cap V = \emptyset$ o bien $U \cap V \neq \emptyset$, los conjuntos $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son abiertos en \mathbb{R}^n y las aplicaciones $\psi \circ \varphi^{-1}$, $\varphi \circ \psi^{-1}$ son difeomorfismos.

Ahora estamos en condiciones de definir uno de los conceptos fundamentales de este tema.

Definición 1.22

Un atlas diferenciable n -dimensional sobre un conjunto M es una familia de cartas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

(1) $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

(2) Para todo par de índices α y β , las cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) son compatibles.

Diremos que el atlas \mathcal{A} determina una *estructura diferenciable* sobre M si es maximal para las condiciones anteriores.

Observación 1.23

Aunque en un principio pueden considerarse atlas de clase C^k , es decir, de manera que los cambios de cartas sean diferenciables de clase C^k , para nuestros propósitos es suficiente trabajar con atlas de clase C^∞ .

La condición de maximalidad que aparece en la definición anterior es puramente técnica y podría eliminarse, ya que es fácil demostrar que cualquier atlas se puede completar a un atlas maximal de manera única, es decir, todo atlas diferenciable sobre un conjunto está contenido en exactamente un atlas maximal. Así pues, para definir una estructura diferenciable no necesitamos especificar un atlas maximal sobre M , sino simplemente un atlas diferenciable.

Como sobre un mismo conjunto es posible definir diferentes atlas, ¿cómo saber si determinan la misma estructura diferenciable (atlas maximal)?

Definición 1.24

Dos atlas \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 sobre un conjunto M se dice que son *equivalentes* si determinan la misma estructura diferenciable sobre M .

Utilizando la compatibilidad de las cartas es fácil probar que los atlas \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 son equivalentes si, y sólo si, $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ constituye un atlas. Llegamos ahora al concepto central del tema.

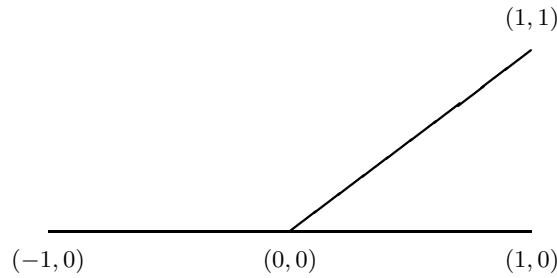
Definición 1.25

Una *variedad diferenciable* de dimensión n es un par (M, \mathcal{A}) formado por un conjunto M y una estructura diferenciable n -dimensional \mathcal{A} sobre M .

Para indicar la dimensión n , en algunas ocasiones escribiremos M^n en lugar de M , y cuando la estructura diferenciable \mathcal{A} sea conocida omitiremos cualquier referencia a ella.

Ejemplos.

- 1.26. En el espacio euclídeo \mathbb{R}^n podemos definir una estructura diferenciable considerando como carta global la aplicación identidad. Nos referiremos a ella como la estructura diferenciable estándar de \mathbb{R}^n .
- 1.27. Consideremos la aplicación diferenciable $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(s) = s^3$. Entonces φ proporciona una estructura diferenciable sobre \mathbb{R} distinta de la estructura estándar. Ello es debido a que la aplicación $\varphi^{-1}(s) = \sqrt[3]{s}$ no es diferenciable en todo \mathbb{R} .
- 1.28. Sea el conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 definido por $M = \{(s, 0) : -1 < s < 1\} \cup \{(s, s) : 0 < s < 1\}$



y consideremos las aplicaciones

$$x : U = \{(s, 0) : -1 < s < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(s, 0) = s$$

$$y : V = \{(s, 0) : -1 < s \leq 0\} \cup \{(s, s) : 0 < s < 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y(s, 0) = s, \quad y(s, s) = s$$

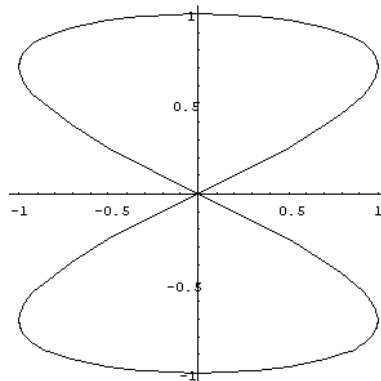
Entonces $\{(U, x), (V, y)\}$ no determinan una estructura de variedad diferenciable sobre M . La razón hay que buscarla en que $x(U \cap V) = y(U \cap V) = (-1, 0]$ no es un abierto de \mathbb{R} .

- 1.30. Si \mathbb{C} denota el cuerpo de los números complejos, entonces \mathbb{C}^n admite estructura de variedad diferenciable. Para comprobarlo basta considerar la carta global (\mathbb{C}^n, φ) , donde la aplicación $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ está definida por

$$\varphi(a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n) = (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n).$$

Ejercicio 1.31. La figura ocho

Sea el conjunto $E = \{(\sin(2s), \sin(s)) : s \in \mathbb{R}\}$, denominado *figura ocho*.



Entonces las aplicaciones $y : V = \{(\sin(2s), \sin(s)) : s \in (0, 2\pi)\} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x : U = \{(\sin(2s), \sin(s)) : s \in (-\pi, \pi)\} \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada punto le asignan el valor del parámetro s , definen atlas sobre la figura ocho. ¿Son equivalentes?

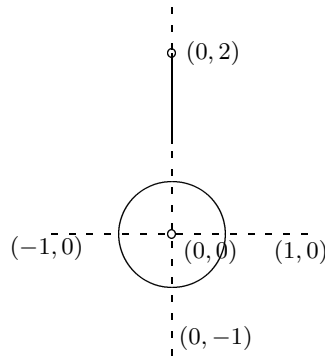
Solución: Comprobemos que (V, y) es un atlas sobre E (la comprobación de que (U, x) es también un atlas puede hacerse de forma totalmente análoga). En primer lugar, el dominio V de y es toda la figura ocho, y su imagen $y(V)$ es el abierto $(0, 2\pi)$. Sólo resta probar la inyectividad de y , pero esto es obvio. Para probar que ambas cartas definen la misma estructura diferenciable sólo debemos estudiar el cambio de cartas $y \circ x^{-1}$, que está definido como sigue:

$$y \circ x^{-1}(s) = \begin{cases} s + 2\pi & \text{si } s \in (-\pi, 0) \\ \pi & \text{si } s = 0 \\ s & \text{si } s \in (0, \pi) \end{cases}$$

Como puede comprobarse, dicha aplicación no es diferenciable en $s = 0$ por lo que las estructuras diferenciables son distintas y, por tanto, los atlas no son equivalentes. \square

Ejercicio 1.32. El lazo

El subconjunto $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < y < 2\}$ se denomina *lazo*.



Consideremos las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned} x : N &\rightarrow \mathbb{R} \\ (0, s) &\rightarrow 1 - s, \quad 1 < s < 2 \\ (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) &\rightarrow s, \quad 0 \leq s < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y : N &\rightarrow \mathbb{R} \\ (0, s) &\rightarrow 1 - s, \quad 1 < s < 2 \\ (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) &\rightarrow 1 - s, \quad 0 \leq s < 1 \end{aligned}$$

Entonces x e y definen dos estructuras diferenciables sobre el lazo. ¿Son equivalentes estas estructuras diferenciables?

Solución: La aplicación x está definida sobre todo N y su imagen es el abierto $(-1, 1)$ de \mathbb{R} . Por tanto, sólo la inyectividad es necesario verificar. Si $x(z_1, z_2) = x(w_1, w_2) \in (-1, 0)$ entonces (z_1, z_2) y (w_1, w_2) se encuentran en $\{(0, s) \in \mathbb{R}^2 : 1 < s < 2\}$ por lo que $z_1 = 0 = w_1$. Además $x(0, z_2) = 1 - z_2 = x(0, w_2) = 1 - w_2$ implica $z_2 = w_2$. Si $x(z_1, z_2) = x(w_1, w_2) \in [0, 1)$ entonces (z_1, z_2) y

(w_1, w_2) se encuentran en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Utilizando la periodicidad de las funciones $\sin 2\pi s$ y $\cos 2\pi s$ se obtiene que $(z_1, z_2) = (w_1, w_2)$. Esto prueba que x es una carta. Para y se razona exactamente igual.

Para ver si x e y determinan la misma estructura diferenciable sobre N , debemos estudiar la aplicación $y \circ x^{-1} : x(N) = (-1, 1) \rightarrow y(N) = (-1, 1)$ que está definida como sigue:

$$y \circ x^{-1}(s) = \begin{cases} s & \text{si } -1 < s < 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \\ 1 - s & \text{si } 0 < s < 1 \end{cases}$$

Es fácil ver que dicha aplicación no es continua en $s = 0$ y, en consecuencia, las estructuras diferenciables determinadas por x y por y son distintas. \square

Ejercicio 1.33. El espacio de las matrices

Sea $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices reales de orden $m \times n$. Entonces $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ admite estructura de variedad diferenciable.

Solución: Si $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces definimos la aplicación $\varphi : \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$ por

$$\varphi(A) = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

Es fácil comprobar que φ constituye una carta global sobre $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$. Ésta será la estructura diferenciable estándar sobre el espacio de las matrices $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$. \square

2.3. Aplicaciones diferenciables

En esta sección vamos a introducir el concepto de aplicación diferenciable, herramienta básica si se quiere extender el cálculo diferencial a las nuevas estructuras que acabamos de definir.

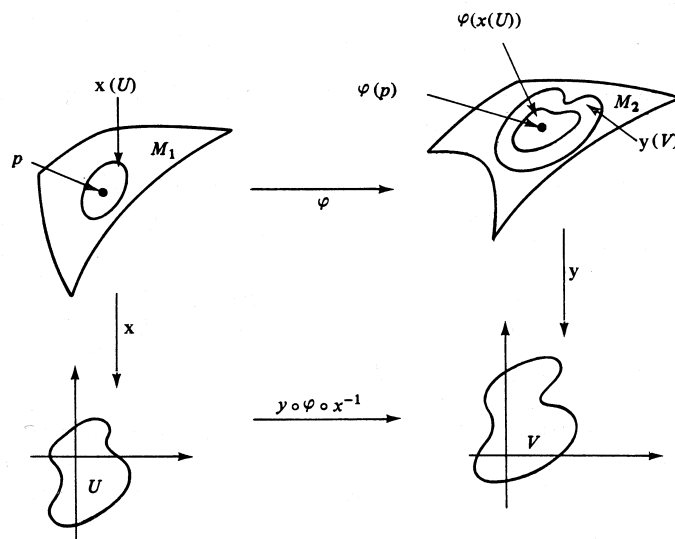
Comenzaremos por el caso más sencillo que se puede presentar, cuando el conjunto de llegada es el espacio euclídeo. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función, sea p un punto de su dominio y consideremos (U, φ) una carta en M cuyo dominio contiene a p . Entonces la aplicación $F = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina la *representante local* o *representante en coordenadas* de f .

Definición 1.34

Una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es *diferenciable* en un punto p de su dominio si una representante local $F = f \circ \varphi^{-1}$ (y, por tanto, todas) es diferenciable en $\varphi(p)$.

La razón de que la definición anterior sea correcta puede encontrarse en el siguiente razonamiento. Sean (U, φ) y (V, ψ) dos cartas en M cuyos dominios contienen al punto p , y consideremos $F = f \circ \varphi^{-1}$ y $G = f \circ \psi^{-1}$ las representantes locales respectivas. Entonces, utilizando el cambio de cartas, podemos comprobar que $F = G \circ (\psi \circ \varphi^{-1})$, por lo que F es diferenciable en $\varphi(p)$ si, y sólo si, G es diferenciable en $\psi(p)$. El conjunto de todas las funciones (reales) diferenciables definidas en M será denotado por $C^\infty(M)$ y es fácil ver que admite estructura de anillo conmutativo.

Introduzcamos ahora el caso general. Sea $f : M_1^m \rightarrow M_2^n$ una aplicación, sea p un punto de su dominio y consideremos (U, x) una carta en M_1 cuyo dominio contiene a p y (V, y) una carta en M_2 cuyo dominio contiene a $f(p)$. Entonces la aplicación $F = y \circ f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ se denomina la *representante local* o *representante en coordenadas* de f .



Definición 1.35

Una aplicación $f : M_1 \rightarrow M_2$ se dice que es *diferenciable* en un punto p de su dominio si una representante local $F = y \circ f \circ x^{-1}$ (y, por tanto, todas) es diferenciable en $x(p)$. La aplicación se dice *diferenciable* si lo es en todos los puntos de M .

Merece la pena que nos detengamos un momento analizando la definición que acabamos de presentar. Observemos que las cartas sobre una variedad son siempre aplicaciones diferenciables y que esta definición generaliza el concepto análogo para aplicaciones entre conjuntos abiertos de espacios euclídeos.

Ejercicio 1.36.

Sea $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ el conjunto de las matrices cuadradas reales de orden n con su estructura de variedad diferenciable y consideremos la aplicación determinante $\det : \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que \det es una aplicación diferenciable.

Solución: Sea $\varphi : \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ la carta estándar sobre las matrices cuadradas (ver Ejemplo 1.33)

y consideremos $F : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ la representante local de la aplicación determinante det , es decir,

$$F(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}) = det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Por definición de determinante,

$$F(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)}$$

donde S_n es el grupo de las permutaciones de n letras y ε_σ denota la signatura de la permutación σ . Al ser F un polinomio de grado n en n^2 variables, es diferenciable (de clase \mathcal{C}^∞) y, en consecuencia, la aplicación det es también diferenciable. \square

En ocasiones, y por simplificar la escritura, consideraremos aplicaciones diferenciables $f : M \rightarrow N$. En estos casos, y aunque no se mencione explícitamente, estaremos suponiendo que tanto M como N son variedades diferenciables.

Definición 1.37

Una aplicación $f : M \rightarrow N$ se dice que es un *difeomorfismo* si es biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable. En tal caso, las variedades M y N se dice que son *difeomorfas*.

El objetivo de la Geometría Diferencial es la clasificación de las variedades diferenciables, teniendo en cuenta que dos variedades difeomorfas se consideran la misma desde el punto de vista de la teoría de variedades diferenciables.

Ejercicio 1.38.

Las variedades diferenciables $(\mathbb{R}, 1)$ (ver Ejemplo 1.26) y (\mathbb{R}, φ) (ver Ejemplo 1.27) son variedades diferenciables difeomorfas.

Solución: Definimos la aplicación $f : (\mathbb{R}, 1) \rightarrow (\mathbb{R}, \varphi)$ por $f(s) = \sqrt[3]{s}$. Trivialmente, f es biyectiva y tanto ella como su inversa f^{-1} son diferenciables ya que sus representantes locales son la aplicación identidad. \square

Ejercicio 1.39.

(a) Construir un difeomorfismo entre: (i) $]a, b[$ y $] - 1, 1[$; (ii) $]0, 1[$ y \mathbb{R} .

(b) Probar que no existe ningún difeomorfismo entre el círculo unidad y un intervalo de la recta real.

Solución: Resolvamos el apartado (b). Supongamos, por reducción al absurdo, que existe un intervalo I y un difeomorfismo $f : I \rightarrow S^1$. Entonces I debe ser compacto y, por tanto, cerrado; supongamos $I = [c, d]$. Pero entonces $f((c, d))$ es la circunferencia menos dos puntos, que no es conexo, cuando el intervalo abierto (c, d) sí que lo es. \square

Ejercicio 1.40.

Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (x \cos z - y \operatorname{sen} z, x \operatorname{sen} z + y \cos z, z).$$

Probar:

(a) $f|_{\mathbb{S}^2}$ toma valores en \mathbb{S}^2 .

(b) La aplicación inducida de \mathbb{S}^2 en sí misma es un difeomorfismo.

Solución: a) Denotemos por f_1 , f_2 , y f_3 a las tres componentes de la aplicación f . Entonces $f(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ si, y sólo si, $|f(x, y, z)|^2 = f_1(x, y, z)^2 + f_2(x, y, z)^2 + f_3(x, y, z)^2 = 1$. Consideremos un punto $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$:

$$\begin{aligned} |f(x, y, z)|^2 &= (x \cos z - y \operatorname{sen} z)^2 + (x \operatorname{sen} z + y \cos z)^2 + z^2 \\ &= x^2 \cos^2 z + y^2 \operatorname{sen}^2 z - 2xy \operatorname{sen} z \cos z \\ &\quad + x^2 \operatorname{sen}^2 z + y^2 \cos^2 z + 2xy \operatorname{sen} z \cos z + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{aligned}$$

b) Veamos, en primer lugar, que f es biyectiva. Supongamos que $f(x, y, z) = f(x', y', z')$. Entonces $z = z'$ y

$$\begin{aligned} x \cos z - y \operatorname{sen} z &= x' \cos z - y' \operatorname{sen} z \\ x \operatorname{sen} z + y \cos z &= x' \operatorname{sen} z + y' \cos z \end{aligned}$$

Reorganizando las ecuaciones anteriores podemos escribir

$$\begin{aligned} (x - x') \cos z - (y - y') \operatorname{sen} z &= 0 \\ (x - x') \operatorname{sen} z + (y - y') \cos z &= 0 \end{aligned}$$

que representa un sistema de ecuaciones lineales homogéneo en las incógnitas $(x - x')$ e $(y - y')$, cuya matriz de coeficientes tiene determinante 1. En consecuencia, la única solución es la solución trivial y, así, $x = x'$ e $y = y'$. Para comprobar la sobreyectividad, sea $(a, b, c) \in \mathbb{S}^2$; debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x \cos z - y \operatorname{sen} z &= a \\ x \operatorname{sen} z + y \cos z &= b \\ z &= c \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $z = c$ en las dos primeras ecuaciones obtenemos un sistema de ecuaciones lineales cuya solución está dada por $x = a \cos c - b \operatorname{sen} c$ e $y = b \cos c - a \operatorname{sen} c$.

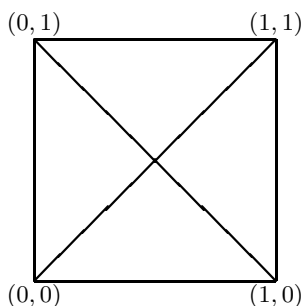
Comprobemos, finalmente, que f es una aplicación diferenciable (la demostración para f^{-1} es totalmente análoga). Sea $p_0 \in \mathbb{S}^2$, entonces la aplicación f es diferenciable en p_0 si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en $\varphi(p_0)$, donde φ y ψ son cartas en la esfera \mathbb{S}^2 alrededor de los puntos p_0 y $f(p_0)$, respectivamente. Supongamos, por ejemplo, que $p_0 = (x, y, z)$ con $z > 0$. Podemos considerar la carta de los hemisferios (U_{30}, φ_{30}) tanto para el punto p_0 como para el punto $f(p_0)$ (ver ejercicio ??). Entonces la representante local de f respecto de φ_{30} está dada por

$$\varphi_{30} \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} x \cos \sqrt{1 - x^2 - y^2} - y \operatorname{sen} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \\ x \operatorname{sen} \sqrt{1 - x^2 - y^2} + y \cos \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

que es, claramente, diferenciable en su dominio. En consecuencia, f es un difeomorfismo. \square

3. ACTIVIDADES DE APLICACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS

A.1.1. Consideremos el subconjunto M de \mathbb{R}^2 descrito por la siguiente figura:



¿Admite M una estructura de variedad diferenciable?

A.1.2. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n .

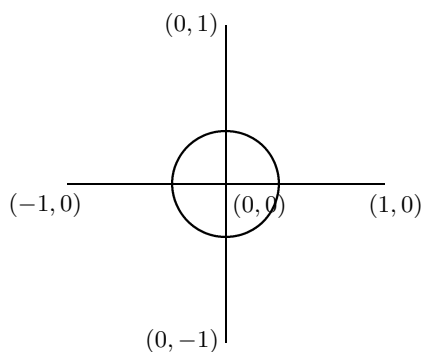
(a) Fijada una base $\{e_1, \dots, e_n\}$, la aplicación

$$x : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

determina una estructura de variedad diferenciable sobre V .

(b) Además, cualquier otra base da origen a la misma estructura diferenciable sobre el espacio vectorial.

A.1.3. Sea \mathbb{S}^1 la circunferencia de radio 1 y centrada en el origen de \mathbb{R}^2 .



Consideremos los siguientes subconjuntos de \mathbb{S}^1 :

$$U_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^1; z_1 > 0\}$$

$$U_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^1; z_2 > 0\}$$

$$U_3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^1; z_1 < 0\}$$

$$U_4 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^1; z_2 < 0\}$$

y definamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} x_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{R}, & x_1(z_1, z_2) &= z_2 \\ x_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{R}, & x_2(z_1, z_2) &= z_1 \\ x_3 : U_3 &\longrightarrow \mathbb{R}, & x_3(z_1, z_2) &= z_2 \\ x_4 : U_4 &\longrightarrow \mathbb{R}, & x_4(z_1, z_2) &= z_1 \end{aligned}$$

- (a) Prueba que $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ forma un atlas para \mathbb{S}^1 .
 (b) Prueba que el atlas definido en (a) es equivalente al formado por las dos cartas siguientes:

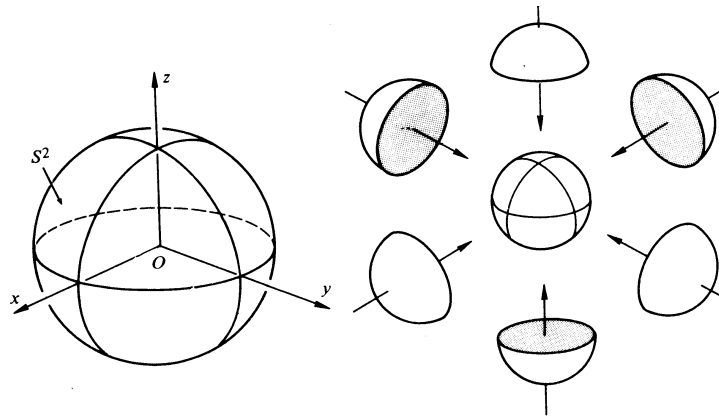
$$\begin{aligned} y : \{(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) : 0 < s < 1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) &\longrightarrow s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' : \{(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) : -1/2 < s < 1/2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) &\longrightarrow s \end{aligned}$$

- (c) Sea $\mathbb{S}^n = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} z_i^2 = 1\}$ la esfera unitaria n -dimensional. Consideremos las aplicaciones

$$\varphi_{kj} : U_{kj} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_{kj}(z_1, \dots, z_{n+1}) = (z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_{n+1})$$

donde $U_{kj} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : (-1)^j z_k > 0\}$, $j = 0, 1$ y $k = 1, 2, \dots, n+1$. Entonces $\{(U_{kj}, \varphi_{kj})\}$ es un atlas para \mathbb{S}^n .



A.1.4. Consideremos los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^n :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}, r > 0.$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}.$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}.$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0\}.$$

$$E = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = a^2, z^2 + w^2 = b^2\}, a, b > 0.$$

Prueba que los conjuntos anteriores pueden dotarse de un atlas de forma que se convierten en variedades diferenciables. ¿Cuál es su dimensión?

A.1.5. Sean M y M' dos variedades diferenciables de dimensiones n y n' , respectivamente. Dota al conjunto $M \times M'$ de una estructura de variedad diferenciable.

A.1.6. Sea M una variedad diferenciable n -dimensional y sea A un conjunto arbitrario. ¿Admite el producto cartesiano $M \times A$ estructura de variedad diferenciable?

A.1.7. Sea M el conjunto de los pares de vectores ortonormales de \mathbb{R}^n . ¿Es M una variedad diferenciable? En caso afirmativo, ¿es M difeomorfa al fibrado unitario de la esfera unidad \mathbb{S}^n ?

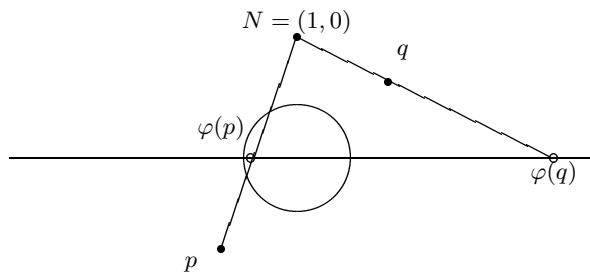
A.1.8. Sea M una variedad diferenciable y $r > 0$ un número real positivo. Probar que todo punto p de M admite un entorno coordenado (U, φ) tal que $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$ y $\varphi(U) = B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$. Por tanto, todo punto admite una carta centrada en dicho punto y cuyo abierto coordenado es \mathbb{R}^n .

A.1.9. En este ejercicio se trata de construir un atlas para la esfera n -dimensional \mathbb{S}^n equivalente al formado por $2(n + 1)$ hemisferios, pero constituido sólo por dos cartas. Sean los puntos $N = (0, \dots, 0, 1)$ y $S = (0, \dots, 0, -1)$ y consideremos $U = \mathbb{S}^n - N$ y $V = \mathbb{S}^n - S$. Definamos las aplicaciones

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

por

$$\varphi_i(z_1, \dots, z_{n+1}) = \frac{z_i}{1 - z_{n+1}}, \quad \psi_i(z_1, \dots, z_{n+1}) = \frac{z_i}{1 + z_{n+1}}.$$



Prueba que $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ constituye un atlas para \mathbb{S}^n equivalente al de los hemisferios. Lo llamaremos el *atlas estereográfico*.

A.1.10. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ se define la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \text{ si y sólo si } x \text{ e } y \text{ son colineales.}$$

El conjunto de las clases de equivalencia es un espacio topológico conocido como *Espacio Proyectivo Real* y que se denota por $P^n(\mathbb{R})$. Dota a $P^n(\mathbb{R})$ de estructura de variedad diferenciable.

A.1.11. Definimos la siguiente relación de equivalencia en \mathbb{R} :

$$x \sim y \text{ si, y sólo si, } y = x + n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Prueba que el conjunto cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} admite estructura de variedad diferenciable de dimensión 1.

A.1.12. En el plano \mathbb{R}^2 con coordenadas (x, y) , definimos las aplicaciones (traslaciones) $T_{m,n} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mediante $T_{m,n}(x, y) = (x + m, y + n)$, donde m y n son enteros. Definimos la siguiente relación de equivalencia en \mathbb{R}^2 :

$$(x, y) \sim (a, b) \text{ si, y sólo si, } x = a + m, \quad y = b + n$$

Prueba que el conjunto cociente T admite estructura de variedad diferenciable 2-dimensional.

A.1.13. En \mathbb{R}^n definimos la siguiente relación de equivalencia. Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$. Entonces

$$x \sim y \text{ si, y sólo, si } y_i = x_i + m_i, \quad m_i \in \mathbb{Z}$$

prueba que el conjunto cociente $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ admite estructura de variedad diferenciable n -dimensional.

A.1.14. (a) Demuestra que una aplicación $\phi : M \rightarrow N$ es diferenciable si, y sólo si, para una colección de sistemas coordenados $\eta = (y_1, \dots, y_n)$ suficientes para cubrir N , las funciones $y_j \circ \phi$ son diferenciables.

(b) Prueba que si $f : M \rightarrow M'$ y $g : N \rightarrow N'$ son aplicaciones diferenciables, entonces la aplicación producto $f \times g : M \times N \rightarrow M' \times N'$ es también diferenciable.

(c) Si $f : M \rightarrow N$ y $g : M \rightarrow N'$ son funciones diferenciables, entonces $(f, g) : M \rightarrow N \times N'$ es una función diferenciable. Como consecuencia la aplicación diagonal $d : M \rightarrow M \times M$ definida por $d(m) = (m, m)$ es diferenciable.

(d) Sea $f : M \rightarrow M'$ y $m \in M$. Prueba que f es diferenciable en m si y sólo si $\psi \circ f$ es diferenciable en m para toda función $\psi : M' \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $f(m)$.

(e) La composición $g \circ f$ de dos aplicaciones diferenciables $f : M \rightarrow M'$ y $g : M' \rightarrow M''$ es también diferenciable. Si f y g son difeomorfismos entonces también lo es $g \circ f$.

A.1.15. Sean M_1 y M_2 dos variedades diferenciables y consideremos $M = M_1 \times M_2$ la variedad diferenciable producto. Sea $(p, q) \in M$. Definimos $j_p : M_2 \rightarrow M$ e $i_q : M_1 \rightarrow M$ por

$$j_p(y) = (p, y), \quad i_q(x) = (x, q).$$

Prueba que j_p e i_q son aplicaciones diferenciables.

A.1.16. (a) Sea $M(n, \mathbb{R})$ el conjunto de las matrices cuadradas reales de orden n con su estructura de variedad diferenciable y consideremos la aplicación determinante $\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Prueba que \det es una función diferenciable.

(b) Sea $GL(n, \mathbb{R})$ el conjunto de las matrices cuadradas regulares de orden n . Dota a $GL(n, \mathbb{R})$ de estructura de variedad diferenciable.

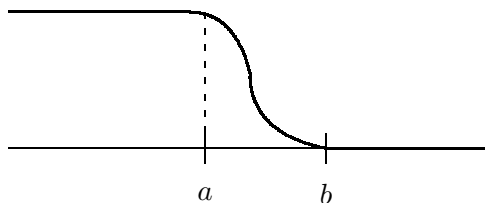
(c) Sea $S(n, \mathbb{R})$ el conjunto de las matrices simétricas de orden n . Prueba que $S(n, \mathbb{R})$ admite estructura de variedad diferenciable.

(d) Sea $A(n, \mathbb{R})$ el conjunto de las matrices antisimétricas de orden n . Prueba que $A(n, \mathbb{R})$ admite estructura de variedad diferenciable.

A.1.17. Demuestra que para todo par de números reales $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se puede construir una función diferenciable $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $0 \leq h(t) \leq 1$, tal que

(a) $h(t) \equiv 1$ si $t \leq a$ y $h(t) \equiv 0$ si $t \geq b$.

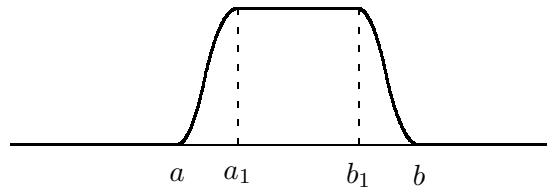
(b) $h(t) \equiv 0$ si $t \leq a$ y $h(t) \equiv 1$ si $t \geq b$.



A.1.18. Demuestra que para toda cuaterna de números reales $a < a_1 < b_1 < b$, se puede construir una función diferenciable $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $0 \leq h(t) \leq 1$, tal que

(a) $h(t) \equiv 0$ si $t \leq a$ o $t \geq b$ y $h(t) \equiv 1$ si $a_1 \leq t \leq b_1$.

(b) $h(t) \equiv 1$ si $t \leq a$ o $t \geq b$ y $h(t) \equiv 0$ si $a_1 \leq t \leq b_1$.



A.1.19. Prueba que la recta proyectiva real $P^1(\mathbb{R})$ es difeomorfa a \mathbb{S}^1 .

A.1.20. Prueba que la esfera \mathbb{S}^2 y la recta proyectiva compleja $P\mathbb{C}^1$ son variedades difeomorfas.

A.1.21. Sea

$$T(\lambda, \mu) = \{x \in \mathbb{S}^{\lambda+\mu-1} : \sum_{i \leq \lambda} x_i^2 = \sum_{i > \lambda} x_i^2\}.$$

Prueba que $T(\lambda, \mu)$ y $\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \mathbb{S}^{\mu-1}$ son variedades difeomorfas.

4. BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

W. BOOTHBY. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 1986.

R. BRICKELL y R. CLARK. *Differentiable Manifolds*. Van Nostrand, 1970.

L. CONLON. *Differentiable Manifolds. A First Course*. Birkhäuser, 1993.

W.D. CURTIS y F.R. MILLER. *Differential Manifolds and Theoretical Physics*. Academic Press, 1985.

5. PREGUNTAS DE EVALUACIÓN

E.1.1. En $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$p \sim q \text{ sí, y sólo si, } |q|p - |p|q = 0$$

- Probar que el conjunto cociente $M = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim$ admite estructura de variedad diferenciable.
- ¿A qué conocida variedad es M difeomorfa? Dar explícitamente el difeomorfismo y probar que, efectivamente, lo es.

E.1.2. Consideremos en el subconjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$ la siguiente relación de equivalencia:

$$p \sim q \iff p = q \quad \text{o} \quad p, q \in \partial A,$$

donde $\partial A = \{(x, y) \in A : x^2 + y^2 = 1\}$.

- Dota al conjunto cociente A/\sim de una estructura de variedad diferenciable.
- ¿A qué conocida variedad es difeomorfa? Proporciona explícitamente un difeomorfismo.

E.1.3. Un **grupo de Lie** G es una variedad diferenciable que al mismo tiempo admite una estructura de grupo tal que las operaciones del grupo son diferenciables; es decir, las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} \mu : G \times G & \longrightarrow & G & \quad & \xi : G & \longrightarrow & G \\ (a, b) & \longrightarrow & ab & & a & \longrightarrow & a^{-1} \end{array}$$

son ambas diferenciables.

Consideramos \mathbb{R} la variedad de los números reales con las coordenadas usuales y se define $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mu(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$. Estudia si (\mathbb{R}, μ) es un grupo de Lie.

E.1.4. En el espacio $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ se considera que dos elementos x e y están relacionados si, y sólo si, son colineales. El conjunto de las clases de equivalencia es un espacio topológico conocido como *Espacio Proyectivo Complejo* y denotado por $P\mathbb{C}^n$. Dota a $P\mathbb{C}^n$ de estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$.

E.1.5. En el espacio $\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}$, donde \mathbb{H} es el espacio vectorial de los cuaterniones, se considera que dos elementos x e y están relacionados si, y sólo si, son colineales. El conjunto de las clases de equivalencia es un espacio topológico conocido como *Espacio Proyectivo Cuaterniónico* y denotado por $P\mathbb{H}^n$. Dota a $P\mathbb{H}^n$ de estructura de variedad diferenciable de dimensión $4n$.

E.1.6. Consideremos en \mathbb{R}^2 la siguiente relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \exists n \in \mathbb{Z} \mid x_1 - x_2 = n \text{ e } y_1 = (-1)^n y_2.$$

Sea $M = \mathbb{R}^2/\sim$ el espacio cociente y $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ la proyección canónica. Definamos

$$U_1 = \{\pi(x, y) : -1/2 < x < 1/2\}, \quad U_2 = \{\pi(x, y) : 0 < x < 1\}.$$

Prueba que $\pi : (-1/2, 1/2) \times \mathbb{R} \longrightarrow U_1$ y $\pi : (0, 1) \times \mathbb{R} \longrightarrow U_2$ son homeomorfismos con inversos ϕ_1 y ϕ_2 , respectivamente, tales que $\mathcal{A} = \{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$ es un atlas para M de dimensión dos (M dotado de esta estructura diferenciable se conoce como *la cinta de Möbius*).

E.1.7. Prueba que \mathbb{R}/\mathbb{Z} y \mathbb{S}^1 son variedades diferenciables difeomorfas. Extiende el difeomorfismo anterior a las variedades $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$.

E.1.8. Sea $X = \mathbb{R}$ con su estructura diferenciable estándar, y consideremos $Y = \mathbb{R}$ con la estructura diferenciable determinada por la carta $\phi(x) = x^3$. Consideremos las siguientes aplicaciones: $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = x^{1/3}$; $g : X \rightarrow X$, $g(x) = x^{1/3}$; $h : X \rightarrow X$, $h(x) = x^3$; $\psi : X \rightarrow Y$, $\psi(x) = x$. ¿Cuáles de las aplicaciones f , g , h o ψ son diferenciables y/o difeomorfismos?

6. BIOGRAFÍA: ALEXIS CLAIRAUT (1713-1765)

Alexis Claude Clairaut (1713-1765) nació en París, hijo de Jean-Baptiste, maestro de matemáticas de París y miembro de la Academia de Matemáticas de Berlín. Fue uno de los matemáticos más precoces, superando incluso a **Blaise Pascal** (1623-1662), y a la edad de diez años ya leía los libros de **Guillaume François Antoine l'Hospital** (1661-1704) sobre cónicas y cálculo infinitesimal. Con sólo doce años, Clairaut presenta una memoria sobre cuatro curvas de cuarto grado a la Academia, la cual, y tras haberse asegurado que era el autor verdadero, se deshace en grandes elogios. Posteriormente, y con sólo dieciocho años, publica la obra *Recherches sur les courbes à double courbure* (*Investigaciones sobre las curvas con doble curvatura*, 1731) gracias a la cual fue admitido en la Academia de Ciencias, aunque hubo de hacerse una excepción con él, ya que el reglamento exigía una edad mínima de veinte años.

Posteriormente, y a propósito de la figura de la Tierra, estudia las geodésicas de las superficies de revolución, y da la solución de algunos problemas de máximos y mínimos. En 1740 publica su obra *Sobre la integración o la construcción de las ecuaciones diferenciales de primer orden*, donde introduce, independientemente de **Leonhard Euler** (1707-1783), el uso del factor integrante. En 1743 publicó su tratado *Théorie de la figure de la Terre* (*Teoría de la figura de la Tierra*).

Previamente había publicado su obra *Eléments de géométrie* (*Elementos de geometría*, 1741), dirigida especialmente para principiantes y escrito con un estilo muy simple y didáctico. Sus cualidades de autor-pedagogo se verían después confirmadas con su obra *Eléments d'algèbre* (*Elementos de álgebra*, 1746), que tuvo una influencia notable en la enseñanza superior francesa. Su estilo huye de las demostraciones rigurosas y busca despertar la intuición y la curiosidad del lector, de forma que sea él mismo quien vaya descubriendo y explorando este nuevo mundo. Desgraciadamente parece que, según el abate **Bossut**, su excesiva afición a los placeres terrenales y a la compañía de las mujeres le hizo perder el reposo y la salud, provocándole la muerte de 1765.



Figura 1.4: Grabado de Alexis Clairaut

Con sólo quince años de edad, su hermano menor, del que se desconoce el nombre, publicó la obra *Traté de quadratures circulaires et hyperboliques* (*Tratado de cuadraturas circulares e hiperbólicas*, 1731). El historiador Montucla opina que poseía todo el talento necesario para seguir las huellas de su hermano Alexis, pero este genio precoz murió prematuramente de viruela en 1732.

En su tratado de 1731, Alexis Clairaut desarrolló las ideas que **René Descartes** (1596-1650) había sugerido casi un siglo antes en el estudio de las curvas del espacio mediante la consideración de las proyecciones sobre dos planos coordenados. Clairaut las llamó curvas de doble curvatura porque la curvatura de estas curvas está determinada por las curvaturas de las dos curvas que se obtienen por proyección de la curva original en dos planos perpendiculares. Determinó así numerosas curvas del espacio mediante intersecciones de superficies variadas, dio las ecuaciones de algunas superficies y demostró que dos de estas ecuaciones son necesarias para describir una curva en el espacio. Se encuentran también en este tratado las fórmulas de la distancia para dos y tres dimensiones, ecuaciones de superficies cuádricas, y las tangentes de curvas del espacio. Clairaut demostró también que una ecuación homogénea en x , y , y z (todos los términos del mismo grado) representa un cono cuyo vértice está situado en el origen.

Isaac Newton (1642-1727) determinó de manera teórica que el radio ecuatorial de la Tierra era $1/230$ más largo que el radio polar. Un método consistía en medir la longitud de arco de 1° de latitud cerca del ecuador y cerca del polo. Jean-Dominique Cassini (1625-1712) y su hijo Jacques Cassini (1677-1756) efectuaron una medición en 1712 y su resultado reveló que el diámetro que unía los dos polos era $1/95$ más largo que el diámetro ecuatorial, lo que contradecía el resultado teórico de Newton. La Academia de Ciencias organizó dos expediciones, una a Laponia (1736-1737), bajo la dirección de **Pierre Louis Moreau de Maupertuis** (1698-1759), y otra a Perú (1735-1744). Clairaut acompañó a Maupertuis a Laponia y las mediciones efectuadas en las dos expediciones confirmaron que la Tierra estaba achatada en los polos. De esta forma la teoría de Newton triunfó y el debate entre newtonianos y cassinianos quedó, temporalmente, zanjado. Sin embargo, no sería hasta el siglo XX cuando se conocería la respuesta definitiva a la forma de la Tierra.

A la vuelta de la expedición de Laponia, Clairaut escribió su *Théorie de la figure de la Terre* (*Teoría de la figura de la Tierra*, 1743), y en 1752 publicó su *Théorie de la Lune* (*Teoría de la Luna*). En estas dos obras, Clairaut aplica las matemáticas al problema de la atracción gravitacional y a la configuración de la Tierra, lo que le sitúa en los orígenes de la teoría del potencial. Su obra *Teoría de la Luna* le valió un premio de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, y es la primera vez que el cálculo infinitesimal es aplicado al estudio del movimiento lunar, que también fue estudiado por la misma época por L. Euler y **Jean-le-Rond D'Alembert** (1717-1783). Clairaut predijo que el cometa Halley llegaría al punto más cercano al sol el 13 de abril de 1759, aunque realmente el cometa llegó un mes antes.

Otros campos de interés fueron las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones en derivadas parciales, la teoría de superficies, el cálculo en varias variables y las series trigonométricas. Por lo que respecta a las ecuaciones diferenciales, en 1734, Clairaut se interesó por una ecuación que actualmente lleva su nombre:

$$y = xy' + f(y'),$$

cuya solución general consiste en una familia de líneas rectas. La ecuación de Clairaut posee también una solución singular, siendo una de las primeras veces en la historia que este tipo de solución se pone de relieve.

BIBLIOGRAFÍA

Carl B. Boyer. *A History of Mathematics*. Princeton University Press, 1985. pp. 494–495.

Florian Cajori. *A History of Mathematics*. Chelsea Publishing Company, 1995. pp. 244–245.

Jean-Paul Collete. *Historia de las matemáticas*, vol. II. Siglo veintiuno de España Editores, S.A., 1985. pp. 216–220.

Internet. URL de la página:

www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Clairaut.html

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Dictionary of Scientific Biography (New York 1970-1990).

Libros:

P. Brunet *La vie et l'oeuvre de Clairaut (1713-1765)* (Paris, 1952).

J.L. Greenberg *The problem of the Earth's shape from Newton to Clairaut : the rise of mathematical science in eighteenth-century Paris and the fall of 'normal' science* (Cambridge, 1995).

T.L. Hankins *Jean d'Alembert : science and the enlightenment* (New York, 1990).

Artículos:

J. Bertrand *Clairaut, sa vie et ses travaux*, *Eloges académiques* (1902), 231-261.

C.B. Boyer *Clairaut and the origin of the distance formula*, *Amer. Math. Monthly* 55 (1948), 556-557.

P. Brunet *La vie et l'oeuvre de Clairaut*, *Rev. Hist. Sci. Appl.* 4 (1951), 13-40, 109-153.

P. Brunet *La vie et l'oeuvre de Clairaut*, *Rev. Hist. Sci. Appl.* 5 (1952), 334-349.

P. Brunet *La vie et l'oeuvre de Clairaut*, *Rev. Hist. Sci. Appl.* 6 (1953), 1-17.

P. Chandler *Clairaut's critique of Newtonian attraction : some insights into his philosophy of science*, *Ann. of Sci.* 32 (4) (1975), 369-378.

J.L. Greenberg *Breaking a 'vicious circle' : unscrambling A-C Clairaut's iterative method of 1743*, *Historia Math.* 15 (3) (1988), 228-239.

V.J. Katz *The history of differential forms from Clairaut to Poincaré*, *Historia Math.* 8 (2) (1981), 161-188.

S. Mills *Un théorème de Clairaut*, *C. R. Acad. Sci. Paris Vie Académique* 290 (1980), Suppl. 20-24, 175-177.

P. Speziali *Une correspondance inédite entre Clairaut et Cramer*, *Rev. Hist. Sci. Appl.* 8 (1955), 193-237.

R. Taton *Clairaut et le retour de la 'comete de Halley' en 1759*, *L'Astronomie* 100 (1986), 397-408.

R. Taton *Sur la diffusion des théories newtoniennes en France : Clairaut et le problème de la figure de la terre*, *Vistas Astronom.* 22 (4) (1978), 485-509.

R. Taton *Inventaire chronologique de l'oeuvre d'Alexis-Claude Clairaut (1713-1765)*, *Rev. Histoire Sci. Appl.* 29 (2) (1976), 97-122.

E. Ulivi *The teaching of elementary algebra : Clairaut (Italian)*, *Archimede* 32 (3) (1980), 130-135.

C. Wilson *Clairaut's calculations of the eighteenth-century return of Halley's comet*, *J. Hist. Astronom.* 24 (1-2) (1993), 1-15.