

## CAPÍTULO 0

### BREVES NOTAS HISTÓRICAS

La Geometría Diferencial, tal y como hoy la entendemos, debe su origen fundamentalmente a C.F. Gauss (1777–1855), que ya a principios del siglo XIX afirmaba que *“las propiedades de una superficie, flexible y no extensible, dependen en parte de la forma a la cual la podemos suponer reducida, y en parte son absolutas y permanecen invariantes sea cual fuere la forma en que la superficie esté combada. A estas últimas propiedades, cuyo estudio abre a la Geometría un nuevo y fértil campo, pertenece la medida de la curvatura y la curvatura integral, en el sentido que hemos dado a estas expresiones. También a éstas pertenece la teoría de las líneas más cortas . . .”*

Gauss había contribuido a las Matemáticas, esencialmente, con el Álgebra y con el Análisis. Sin embargo, y aunque la Geometría no era su fuerte, todavía llegó a tiempo para dos cosas fundamentales: (1) obtener, en 1824, una importante conclusión, no publicada, sobre el postulado de las paralelas; y (2) publicar, en 1827, un clásico tratado que generalmente es aceptado como el punto de partida de una nueva rama de la Geometría, y del cual hemos entresacado las palabras anteriores. Ya siendo Gauss estudiante en Gotinga había intentado probar el axioma de las paralelas, al igual que su amigo F. Bolyai (1775–1856). Sin embargo, llegó a la conclusión de que no sólo no había prueba posible, sino que una geometría bien distinta a la euclídea podría ser desarrollada. Si Gauss hubiera pulido y publicado sus ideas sobre el axioma de las paralelas, hoy se le consideraría, sin duda, como el inventor de la geometría no euclídea; pero su silencio en este tema hizo que el descubrimiento se lo adjudicasen otros.

La nueva rama de la Geometría que Gauss inició en 1827 se conoce como Geometría Diferencial, y en un principio estuvo más ligada al Análisis que al tradicional campo de la Geometría. No obstante, I. Newton (1642–1727) y G.W. Leibnitz (1646–1716) ya habían aplicado el Cálculo al estudio de curvas en el plano y, en este sentido, sus trabajos constituyen un prototipo de Geometría Diferencial. L. Euler (1707–1783) y G. Monge (1746–1818) extendieron estas ideas al estudio analítico de superficies; de hecho, muchas veces han sido considerados los padres de la Geometría Diferencial. Sin embargo, no fue hasta la aparición del tratado de Gauss *Investigaciones Generales sobre Superficies Curvadas*, con el que se dedicaba un volumen completo a esta materia, cuando puede decirse que inició su andadura la Geometría Diferencial.

Hablando a grosso modo, la Geometría ordinaria o clásica está interesada en la totalidad de un diagrama, figura u objeto geométrico, mientras que la Geometría Diferencial se concentra en las propiedades de una curva o superficie en el entorno de un punto de la misma. En esta línea, Gauss extendió el trabajo de C. Huygens (1629–1695) y A.C. Clairaut (1713–1765), sobre la curvatura de una curva plana, definiendo la curvatura de una superficie en un punto, que hoy se conoce como “curvatura de Gauss”. Si sobre un punto  $P$  de una superficie  $S$  se construye la línea  $N$  normal a  $S$ , los planos que contienen a  $N$  cortarían a la superficie en una familia de curvas planas, cada una de las cuales tendrá un radio de curvatura en  $P$ . Las direcciones de las curvas con mayor y menor radios de curvatura,  $R$  y  $r$ , se

denominan las direcciones principales de  $S$  en  $P$ , y ocurre que casi siempre son perpendiculares entre sí. Las cantidades  $R$  y  $r$  se llaman los radios principales de curvatura, y la curvatura de Gauss de  $S$  en  $P$  se define como  $K = 1/Rr$ . Gauss dio fórmulas para  $K$  en términos de las derivadas parciales de la superficie con respecto a varios sistemas de coordenadas; también obtuvo numerosos resultados sobre curvas en la superficie, como geodésicas, que denominó “teoremas remarcables”. Realizando estudios de este tipo en Geometría Diferencial fue como los matemáticos del siglo XIX pusieron las bases para las teorías científicas de nuestro siglo.

Es difícil presentar una visión general del desarrollo de la Geometría durante la primera mitad del siglo XIX, debido fundamentalmente a las contracorrientes e interrelaciones de numerosos aspectos. Sin embargo, hay un aspecto (el nacimiento y crecimiento de las geometrías no euclídeas) que se desarrolló nítidamente. No obstante, en este caso y al igual que en numerosas otras ocasiones, nos encontramos con un caso de simultaneidad en el descubrimiento. El origen de las geometrías no euclídeas es fruto del trabajo de tres hombres: un alemán (Gauss), un húngaro (J. Bolyai (1802–1860)) y un ruso (N.I. Lobachevsky (1793–1856)). Lobachevsky es considerado como el “Copérnico de la Geometría”, el hombre que revolucionó este campo con la introducción de una nueva rama, la Geometría Lobachevskiana, demostrando que la Geometría Euclídea no era una ciencia exacta o una verdad absoluta, como hasta entonces se había tenido.

El nacimiento oficial de la geometría no euclídea data de 1829, cuando Lobachevsky publica un artículo titulado *Sobre los Principios de la Geometría*. Ya con anterioridad estaba convencido de que el quinto postulado no podía ser demostrado a partir de los otros cuatro, pero es en 1829 cuando da el revolucionario paso de publicar una geometría específicamente construida sobre una hipótesis en directo conflicto con el postulado de las paralelas: la existencia de más de una línea paralela. Con este nuevo postulado, Lobachevsky deduce una estructura geométrica armoniosa que no poseía contradicciones lógicas inherentes. A pesar de que era una geometría válida, se la denominó “geometría imaginaria”, ya que iba en contra del sentido común (incluso para Lobachevsky). En 1832, J. Bolyai publica un trabajo en el que desarrolla lo que él llama la *Ciencia Absoluta del Espacio*, partiendo de la hipótesis de que por un punto exterior a una línea existen infinitas líneas paralelas a la dada.

Lobachevsky intuyó la gran importancia que tendría su “geometría imaginaria”, como se deduce del hecho de que entre los años 1835 y 1855 publicase tres tratados sobre esta nueva geometría: *Nuevos Fundamentos de Geometría* (1835–1838), *Investigaciones Geométricas sobre la Teoría de las Paralelas* (1840), y *Pangeometría* (1855). Gracias al segundo de los tres trabajos conoció Gauss las contribuciones de Lobachevsky a las geometrías no euclídeas, lo que le valió su recomendación para que ingresase en la Sociedad Científica de Gotinga. Gauss participaba privadamente de las ideas de Lobachevsky, pero nunca le dió su apoyo públicamente, lo que fue uno de los motivos más importantes para que la nueva geometría se diese a conocer muy lentamente.

Tan lenta fue su expansión que la geometría no euclídea continuó durante varias décadas siendo un aspecto marginal de las Matemáticas, hasta que fue integrada en una teoría más general por G.F.B. Riemann (1826–1866). En 1854, Riemann ingresa en la Universidad de Gotinga y, de acuerdo con la tradición, debía pronunciar una conferencia ante los miembros de la Facultad de Ciencias. El resultado fue la memoria más celebrada en la historia de las Matemáticas, pues presentaba una visión profunda y amplia de todo el campo de la Geometría. En dicho trabajo sugería que el objetivo global de la Geometría era el estudio de variedades de cualquier número de dimensiones en cualquier clase de espacio. Sus geometrías son no euclídeas en un sentido mucho más general que el de Lobachevsky, donde el problema se reducía a determinar el número de paralelas que se podían trazar pasando por un punto. Riemann intuyó que la Geometría no tenía que tratar necesariamente con puntos, líneas o espacios en el sentido

ordinario, sino con conjuntos ordenados de  $n$ -uplas, que se combinaban de acuerdo con ciertas reglas.

Esta definición “local” fue la comúnmente admitida durante muchos años. Por ejemplo, T. Levi-Civita (1873–1941) afirma en su obra *El Cálculo Diferencial Absoluto* (1923) que “*punto de una variedad  $n$ -dimensional abstracta es el conjunto de  $n$  variables, y variedad  $n$ -dimensional es el conjunto de valores que pueden asignarse a  $n$  variables*”. En esta misma dirección, L.P. Eisenhart dice en su obra *Geometría Riemanniana* (1925) que “ *$n$  variables independientes pueden pensarse como las coordenadas de un espacio  $n$ -dimensional, en el sentido de que cada conjunto de valores de las variables define un punto de la variedad.*”

El tratamiento local era claramente insuficiente y, ya con anterioridad, H. Weyl (1885–1955), en su obra *Espacio, Tiempo y Materia* (1918), es el primero en llamar la atención sobre la posibilidad de que un mismo sistema de coordenadas no valga para toda la variedad: “*la característica de una variedad  $n$ -dimensional es que cada uno de sus elementos puede ser especificado dando  $n$  cantidades, las coordenadas, que son funciones continuas dentro de la variedad. Esto no debe significar que toda la variedad, con todos sus elementos, pueda representarse de una sola y reversible manera por los valores de sistemas de coordenadas: significa solamente que si  $P$  es un punto arbitrario de la variedad, siempre existe un cierto dominio en un entorno de  $P$  que puede representarse de manera unívoca y reversible por los valores de un sistema de coordenadas*”.

El aspecto global de la Geometría Diferencial tiene su origen en el mismo punto de partida de la Topología Algebraica con H. Poincaré (1854–1912), y su desarrollo inicial está estrechamente ligado a la figura de E. Cartan (1869–1951), quien al poner en escena la teoría general de conexiones (método de la referencia móvil) coloca el carácter global de la Geometría Diferencial en su punto álgido, restando al aspecto local el protagonismo propio de la época, y estableciendo las diferencias de ambos aspectos, global y local, que aún admitiendo estudios por separado, de las interrelaciones entre ambos se extrae la gran riqueza de resultados propios de la Geometría Diferencial.

Fue este interés por el estudio de las propiedades globales sobre una variedad lo que obligó a puntualizar adecuadamente las definiciones básicas. El primer intento serio fue el libro de O. Veblen (1880–1960) y J.H.C. Whitehead (1904–1960) *Los Fundamentos de la Geometría Diferencial* (1932), cuya idea esencial era la de definir rigurosamente las relaciones entre la variedad y los sistemas de coordenadas que se introducen en ella para su estudio, haciendo una clara distinción entre ambos conceptos. Se formula por primera vez de manera explícita que las variedades que estudia la Geometría Diferencial son un conjunto de dos elementos: primero, la variedad como conjunto de puntos, para cuya definición y tratamiento la Topología suministra los útiles y los medios necesarios; y segundo, un cierto conjunto de “sistemas de coordenadas admisibles” que permiten el estudio “diferencial” de la variedad y entre los cuales deberán existir ciertas fórmulas de transformación, o ciertas relaciones de equivalencia, que los vinculen entre sí y permitan pasar de unos sistemas a otros.

Esta idea se fue puliendo y simplificando hasta llegar a la definición actual de variedad diferenciable, la cual es el resultado de sucesivos perfeccionamientos debidos principalmente a H. Whitney (*Variedades Diferenciables*, *Ann. of Math.*, **37** (1936), 645–480), C. Chevalley (*Teoría de Grupos de Lie*, Princeton, 1946), S.S. Chern (*Tópicos en Geometría Diferencial*, Princeton, 1951) y G. De Rham (*Variedades Diferenciables*, Hermann, Paris, 1955). A partir de esa fecha la definición de variedad diferenciable es ya usual en todos los textos de Geometría Diferencial.

