



UNIVERSIDAD DE MURCIA
Departamento de Matemáticas

Topología

8. Espacios métricos completos

Pedro José Herrero y Pascual Lucas

Resumen: Comenzamos introduciendo las sucesiones de Cauchy, que comparamos con las sucesiones convergentes. En el caso de que coincidan, se trata de un espacio métrico completo. Estudiamos los espacios euclídeos y \mathbb{R}^ω con diversas distancias. También estudiamos los espacios de funciones continuas y acotadas. Terminamos con el teorema del embebimiento isométrico, el teorema de encaje de Cantor y el teorema de Baire.

Índice general

1. Sucesiones de Cauchy
2. Espacios métricos completos
3. Completitud y compacidad
4. El espacio \mathbb{R}^ω
5. La distancia uniforme
6. La distancia del supremo
7. Teorema del embebimiento isométrico
 - 7.1. Completación de un espacio métrico
8. Algunos resultados interesantes
 - 8.1. Teorema de encaje de Cantor
 - 8.2. Teorema de Baire
9. Problemas propuestos
 - Soluciones de los ejercicios
 - Soluciones de las cuestiones

El concepto de completitud en \mathbb{R} suele aparecer en los libros de cálculo: es un concepto básico para todos los aspectos del análisis. La completitud es una propiedad métrica, más que una propiedad topológica, pero muchos teoremas que implican a los espacios métricos completos son de naturaleza topológica.

El ejemplo más familiar de espacio métrico completo es el espacio euclídeo con cualquiera de sus distancias usuales. Con este capítulo sólo pretendemos introducir al lector en este tema, por sus importantes implicaciones en otras ramas de las matemáticas. Un desarrollo profundo excede del objeto primordial de esta asignatura.

1. Sucesiones de Cauchy

Definición 8.1 Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $(x_n)_n$ de puntos de X se dice que es una **sucesión de Cauchy** en (X, d) si tiene la propiedad de que, dado $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{para todo } n, m \geq N.$$

Ejemplo 8.1.

- (1) Las únicas sucesiones de Cauchy en un espacio métrico discreto X son las de *cola* constante, es decir, aquellas sucesiones (x_n) para las que existe un punto $a \in X$ y un número natural n_0 tales que $x_n = a$ para todo $n \geq n_0$.
- (2) La sucesión $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy tanto en $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ como en $((0, 1), | \cdot |)$. En efecto,

dato $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Entonces si $n, m > n_0$ se verifica

$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} < \varepsilon.$$

- (3) La sucesión $(n)_{n=1}^{\infty}$ no es de Cauchy en $(\mathbb{R}, | \cdot |)$. Observemos que para todo $\varepsilon > 0$ y todo número natural n_0 siempre existen números $n, m > n_0$ tales que $|n - m| > \varepsilon$.

Ejemplo 8.2. Es trivial que cualquier sucesión convergente en X es necesariamente una sucesión de Cauchy. En efecto, si (x_n) es una sucesión tal que $x_n \rightarrow x$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n > n_0$ se cumple que $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, para todo $n, m > n_0$ se tiene

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ejemplo 8.3. El recíproco del **Ejemplo 8.2** no es cierto en general. La sucesión $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $((0, +\infty), | \cdot |)$ y, sin embargo, no converge. Esto justificará la introducción de los espacios métricos completos.

Lema 8.1 Sea (X, d) un espacio métrico. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge a x , entonces la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ también converge a x .

Demostración. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe n_1 tal que para todo $n, m > n_1$ se cumple que

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte, la subsucesión $(x_{n_k})_k$ es convergente a x , luego existe k_0 tal que si $n_k > n_{k_0}$ se cumple que

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos $n_0 = \max\{n_1, n_{k_0}\}$ y tomemos $n > n_0$ y k tal que $n_k > n_0$, entonces

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

de modo que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x . □

Proposición 8.2 Toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d) está acotada.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy y consideremos $\varepsilon = 1$. Por la condición de Cauchy existe n_0 tal que si $m, n > n_0$ se tiene que $d(x_n, x_m) < 1$, de modo que si $n > n_0$, entonces $x_n \in B(x_{n_0+1}, 1)$. Sólo quedan un número finito de términos que pueden estar fuera de esta bola. Sea

$$r = \max\{d(x_1, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0}, x_{n_0+1})\}.$$

Para todo n se cumple que $d(x_n, x_{n_0+1}) \leq r$. Así deducimos

$$\{x_n \mid n = 1, \dots, \infty\} \subset B(x_{n_0+1}, r + 1),$$

como queríamos. □

2. Espacios métricos completos

Definición 8.2 Un espacio métrico (X, d) se dice que es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Ejemplo 8.4.

- (1) Todo espacio métrico discreto es completo.
- (2) $(0, \infty)$ no es completo con la distancia usual.

EJERCICIO 8.1. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $A \subset X$ un subconjunto cerrado. ¿Es A completo?

EJERCICIO 8.2. Si (X, d) es completo, entonces X es completo con la distancia acotada estándar

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$$

correspondiente a d , y recíprocamente. ¿Por qué?

Veamos un criterio útil para comprobar si un espacio métrico es completo:

Lema 8.3 Un espacio métrico X es completo si toda sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en (X, d) . Vamos a probar que si (x_n) tiene una subsucesión (x_{n_i}) que converge a un punto x , entonces la propia sucesión (x_n) converge a x .

Dado $\varepsilon > 0$, y puesto que (x_n) es una sucesión de Cauchy, elijamos primero N lo suficientemente grande para que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$$

para todos $n, m \geq N$. Entonces sea i un entero lo suficientemente grande para que $n_i \geq N$ y

$$d(x_{n_i}, x) < \varepsilon/2$$

(utilizamos aquí el hecho de que $n_1 < n_2 < \dots$ es una sucesión creciente de enteros y que (x_{n_i}) converge a x). Teniendo en cuenta ambas desigualdades, obtenemos para $n \geq N$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x) < \varepsilon,$$

que es el resultado buscado. □

Teorema 8.4 El espacio euclídeo \mathbb{R}^k es completo con cualquiera de sus distancias usuales, la distancia euclídea d o la distancia del supremo d_∞ .

Demostración. Para probar que el espacio métrico (\mathbb{R}^k, d_∞) es completo, sea (x_n) una sucesión de Cauchy en (\mathbb{R}^k, d_∞) . Entonces el conjunto $\{x_n\}$ es un subconjunto acotado de (\mathbb{R}^k, d_∞) , ya que si N es tal que

$$d_\infty(x_n, x_m) \leq 1$$

para todos $n, m \geq N$, entonces el número

$$M = \max\{d_\infty(x_1, \mathbf{0}), \dots, d_\infty(x_{N-1}, \mathbf{0}), d_\infty(x_N, \mathbf{0}) + 1\}$$

es una cota superior para $d_\infty(x_n, \mathbf{0})$. De este modo, los puntos de la sucesión (x_n) permanecen todos en el cubo $[-M, M]^k$. Dado que este cubo es compacto, la sucesión (x_n) tiene una subsucesión convergente. Entonces (\mathbb{R}^k, d_∞) es completo.

Para probar que (\mathbb{R}^k, d) es completo, observemos que una sucesión es una sucesión de Cauchy para d si, y sólo si, es una sucesión de Cauchy para d_∞ , y una sucesión converge en la distancia d si, y sólo si, converge en la distancia d_∞ . \square

EJERCICIO 8.3. Consideremos el espacio \mathbb{Q} de los números racionales con la distancia usual $d(x, y) = |x - y|$. ¿Es completo?

QUESTION 8.1. ¿Es el intervalo abierto $(-1, 1)$ de \mathbb{R} con la distancia $d(x, y) = |x - y|$ un espacio completo?

(a) Sí

(b) No

La cuestión anterior demuestra que la completitud no es una propiedad topológica, es decir, no se conserva por homeomorfismos, ya que el intervalo $(-1, 1)$ es homeomorfo a la recta real \mathbb{R} y este espacio es completo con su distancia usual.

Proposición 8.5 Todo subespacio completo de un espacio métrico es cerrado.

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $H \subset X$ tal que (H, d_H) es completo. Veamos que H es cerrado comprobando que $H = \overline{H}$. Si $x \in \overline{H}$, entonces existe una sucesión en H , $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, que converge a x y, por tanto, es de Cauchy, tanto en X como en H . Como (H, d_H) es completo la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge en H a un punto x' . Pero (X, d) es un espacio métrico y, por tanto, de Hausdorff, de modo que $x = x'$. Es decir, $x \in H$. \square

3. Completitud y compacidad

Proposición 8.6 Todo espacio métrico compacto es completo.

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X . Como (X, \mathcal{T}_d) es compacto, también es sucesionalmente compacto, luego existe una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, convergente. Como consecuencia del **Lema 8.1** la sucesión inicial $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ también es convergente. \square

La implicación recíproca no es cierta, en general, aunque sí se cumple si se considera una hipótesis adicional, la de ser totalmente acotado. El siguiente resultado, que sirve de

punte entre los espacios completos y los compactos, justifica que los espacios métricos totalmente acotados reciban también el nombre de *precompactos*.

Proposición 8.7 Todo espacio métrico completo y totalmente acotado es sucesionalmente compacto.

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico completo y totalmente acotado y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X . Vamos a construir una subsucesión de Cauchy que será convergente, por ser X completo. Por tanto, X será sucesionalmente compacto.

Si la sucesión es finita no hay nada que probar, pues tiene infinitos términos iguales y ya tenemos la subsucesión convergente. Supongamos entonces que la sucesión $S = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene infinitos términos distintos. Como X es totalmente acotado y $S \subset X$, S también es totalmente acotado. Por tanto, dado $\frac{1}{2}$ existe un número finito de bolas con este radio que recubren S . Como S es infinito, una de estas bolas contendrá infinitos puntos de la sucesión S ; llamemos a esta bola B_1 .

Consideremos ahora $B_1 \cap S$. Este conjunto es también totalmente acotado, de modo que si consideramos $\frac{1}{2^2}$, entonces $B_1 \cap S$ estará recubierto por un número finito de bolas de radio $\frac{1}{2^2}$. De entre todas ellas habrá al menos una, que llamaremos B_2 , que contendrá una cantidad infinita de términos de la sucesión.

Así sucesivamente vamos construyendo una sucesión de bolas B_k de radio $\frac{1}{2^k}$, cada una de las cuales tiene infinitos términos de la sucesión y que, según se han construido, dos a dos tienen intersección no vacía.

Vamos a construir la subsucesión de la siguiente manera.

El primer término será un término arbitrario de la sucesión que esté en B_1 y le llamamos x_{n_1} . Como en B_2 hay infinitos términos de la sucesión, existe un término de la sucesión $x_{n_2} \neq x_{n_1}$ y con $n_2 > n_1$; procediendo de esta manera construimos una subsucesión $(x_{n_k})_k$, tal que cada $x_{n_k} \in B_k$. Veamos que esta subsucesión es de Cauchy. Sean $p, q \in \mathbb{N}$ con $p < q$. Como $B_p \cap B_q \neq \emptyset$, si $y \in B_p \cap B_q$ tendremos que

$$d(x_{n_p}, x_{n_q}) \leq d(x_{n_p}, y) + d(y, x_{n_q}) \leq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^q} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe m tal que $\frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon$, y si $p, q > m$ (con $p > q$ por ejemplo), entonces

$$d(x_{n_p}, x_{n_q}) < \frac{1}{2^{p-1}} < \frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon,$$

lo que prueba que la subsucesión es de Cauchy. □

Teniendo en cuenta que todo espacio métrico compacto es sucesionalmente compacto, podemos expresar los dos resultados anteriores en el siguiente teorema.

Teorema 8.8 Un espacio métrico (X, d) es compacto si, y sólo si, (X, d) es completo y totalmente acotado.

4. El espacio \mathbb{R}^ω

Vamos a estudiar ahora el espacio producto \mathbb{R}^ω .

Lema 8.9 Sea X el espacio producto $X = \prod X_i$ y sea \mathbf{x}_n una sucesión de puntos de X . Entonces $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ si, y sólo si, $\pi_i(\mathbf{x}_n) \rightarrow \pi_i(\mathbf{x})$, para cada i .

Demostración. En primer lugar, como la proyección $\pi_i : X \rightarrow X_i$ es una aplicación continua, entonces conserva la convergencia de sucesiones y deducimos la condición necesaria del lema.

Supongamos ahora que $\pi_i(\mathbf{x}_n) \rightarrow \pi_i(\mathbf{x})$, para cada $i \in J$. Sea $U = \prod U_i$ un elemento básico de X que contenga a \mathbf{x} . Para cada i de forma que U_i no es igual a todo el espacio X_i , sea N_i un entero tal que $\pi_i(\mathbf{x}_n) \in U_i$ para todo $n \geq N_i$. Si N es el número más grande de todos los N_i , entonces $\mathbf{x}_n \in U$, para todo $n \geq N$. \square

Teorema 8.10 Existe una distancia para el espacio producto \mathbb{R}^ω con la cual \mathbb{R}^ω es completo.

Demostración. Sea $\bar{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$ la distancia acotada estándar sobre \mathbb{R} . Sea D la distancia sobre \mathbb{R}^ω definida por

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{\bar{d}(x_i, y_i)/i\}.$$

Entonces D induce la topología producto sobre \mathbb{R}^ω y \mathbb{R}^ω es completo con la distancia D . Sea \mathbf{x}_n una sucesión de Cauchy en (\mathbb{R}^ω, D) . Como

$$\bar{d}(\pi_i(\mathbf{x}), \pi_i(\mathbf{y})) \leq iD(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

observamos que, para i fijo, la sucesión $\pi_i(\mathbf{x}_n)$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} y, por tanto, converge a un número a_i . Entonces la sucesión \mathbf{x}_n converge al punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$ de \mathbb{R}^ω . \square

5. La distancia uniforme

Definición 8.3 Sea (Y, d) un espacio métrico. Pongamos $\bar{d}(a, b) = \min\{d(a, b), 1\}$ para la distancia acotada estándar sobre Y correspondiente a d . Si $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in J}$ e $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in J}$ son puntos del producto cartesiano Y^J , definimos

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in J\}.$$

$\bar{\rho}$ es una distancia denominada **distancia uniforme** sobre Y^J correspondiente a la distancia d sobre Y .

Los elementos de Y^J son simplemente aplicaciones de J en Y . Con esta notación, la definición de la distancia uniforme adquiere la siguiente forma: para $f, g : J \rightarrow Y$, entonces

$$\bar{\rho}(f, g) = \sup\{\bar{d}(f(\alpha), g(\alpha)) \mid \alpha \in J\}.$$

Teorema 8.11 Si el espacio Y es completo con la distancia d , entonces el espacio Y^J es completo con la distancia uniforme $\bar{\rho}$ correspondiente a d .

Demostración. Si (Y, d) es completo, entonces (Y, \bar{d}) también lo es, donde \bar{d} es la distancia acotada correspondiente a d . Supongamos que f_1, f_2, \dots es una sucesión de puntos de Y^J que es una sucesión de Cauchy para la distancia $\bar{\rho}$. Dado i en J , el hecho de que

$$\bar{d}(f_n(i), f_m(i)) \leq \bar{\rho}(f_n, f_m)$$

para todos n, m se traduce en que la sucesión $f_1(i), f_2(i), \dots$ es una sucesión de Cauchy en (Y, \bar{d}) . Por tanto, la sucesión converge a un punto y_i . Sea $f : J \rightarrow Y$ la aplicación definida por $f(i) = y_i$. Afirmamos que la sucesión (f_n) converge a f en la distancia $\bar{\rho}$.

Dado $\varepsilon > 0$, elijamos N lo suficientemente grande para que $\bar{\rho}(f_n, f_m) < \varepsilon/2$, para todos $n, m \geq N$. Entonces, en particular,

$$\bar{d}(f_n(i), f_m(i)) < \varepsilon/2$$

para $n, m \geq N$ e $i \in J$. Manteniendo n y i fijos y haciendo tender m a infinito, obtenemos que

$$\bar{d}(f_n(i), f(i)) \leq \varepsilon/2.$$

Esta desigualdad es cierta para todo i , siempre que $n \geq N$. Por consiguiente,

$$\bar{\rho}(f_n, f) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

para $n \geq N$, como deseábamos probar. □

Supongamos ahora que X es un espacio topológico y consideremos los subconjuntos $\mathcal{C}(X, Y)$ y $\mathcal{A}(X, Y)$ de todas las aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ continuas y acotadas, respectivamente, de X en Y .

Teorema 8.12 Sea X un espacio topológico y sea (Y, d) un espacio métrico. Los conjuntos $\mathcal{C}(X, Y)$ y $\mathcal{A}(X, Y)$ son cerrados en Y^X . Por tanto, si Y es completo entonces estos dos espacios son completos con la distancia uniforme.

Demostración. La primera parte de este teorema es justo el **teorema del límite uniforme**. Veamos, en primer lugar, que si una sucesión de elementos f_n de Y^X converge al elemento f de Y^X en la distancia $\bar{\rho}$ de Y^X , entonces la sucesión converge uniformemente a f , para la distancia \bar{d} sobre Y . Dado $\varepsilon > 0$, elijamos un entero N tal que

$$\bar{\rho}(f, f_n) < \varepsilon$$

para todo $n > N$. Entonces, para todo $x \in X$ y todo $n \geq N$,

$$\bar{d}(f_n(x), f(x)) \leq \bar{\rho}(f_n, f) < \varepsilon.$$

Y , por tanto, (f_n) converge uniformemente a f .

Probemos ahora que $\mathcal{C}(X, Y)$ es cerrado en Y^X con la distancia $\bar{\rho}$. Sea f un elemento de Y^X que es un punto límite de $\mathcal{C}(X, Y)$. Existe entonces una sucesión (f_n) de elementos de $\mathcal{C}(X, Y)$ convergente a f en la distancia $\bar{\rho}$. Por el teorema del límite uniforme, f es continua, de forma que $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.

Finalmente, probemos que $\mathcal{A}(X, Y)$ es cerrado en Y^X . Si f es un punto límite de $\mathcal{A}(X, Y)$, existe una sucesión de elementos f_n de $\mathcal{A}(X, Y)$ convergente a f . Elijamos N lo suficientemente grande para que $\bar{\rho}(f_N, f) < 1/2$. Entonces, para $x \in X$, tenemos que $\bar{d}(f_N(x), f(x)) < 1/2$, lo cual implica que $d(f_N(x), f(x)) < 1/2$. Deducimos que, si M es el diámetro del conjunto $f_N(X)$, entonces $f(X)$ tiene diámetro menor o igual que $M + 1$. Por tanto, $f \in \mathcal{A}(X, Y)$. \square

Corolario 8.13 Sea X un espacio topológico. Los conjuntos $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ y $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ son cerrados en \mathbb{R}^X y completos con la distancia uniforme.

6. La distancia del supremo

Definición 8.4 Si (Y, d) es un espacio métrico, podemos definir otra distancia en el conjunto $\mathcal{A}(X, Y)$ de las aplicaciones acotadas de X en Y por la ecuación

$$\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

Es fácil observar que ρ está bien definida porque el conjunto $f(X) \cup g(X)$ está acotado si $f(X)$ y $g(X)$ lo están. La distancia ρ se conoce como **distancia del supremo**.

EJERCICIO 8.4. ¿Qué relación hay entre la distancia del supremo y la distancia uniforme?

7. Teorema del embebimiento isométrico

Vamos a probar ahora un teorema clásico, el cual afirma que todo espacio métrico se puede embeber isométricamente en un espacio métrico completo.

Teorema 8.14 Sea (X, d) un espacio métrico. Existe un embebimiento isométrico de X en un espacio métrico completo.

Demostración. Sea $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones acotadas de X en \mathbb{R} . Sea x_0 un punto fijo de X . Dado $a \in X$, definamos $\phi_a : X \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la ecuación

$$\phi_a(x) = d(x, a) - d(x, x_0).$$

Aseguramos que ϕ_a está acotada. Efectivamente, de las desigualdades

$$d(x, a) \leq d(x, b) + d(a, b),$$

$$d(x, b) \leq d(x, a) + d(a, b),$$

se deduce que

$$|d(x, a) - d(x, b)| \leq d(a, b).$$

Poniendo $b = x_0$, concluimos que $|\phi_a(x)| \leq d(a, x_0)$, para todo x .

Definamos $\Phi : X \rightarrow \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ por

$$\Phi(a) = \phi_a.$$

Vamos a probar que Φ es un embebimiento isométrico de (X, d) en el espacio métrico completo $(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), \rho)$. Es decir, vamos a probar que, para todo par de puntos $a, b \in X$,

$$\rho(\phi_a, \phi_b) = d(a, b).$$

Por definición,

$$\begin{aligned}\rho(\phi_a, \phi_b) &= \sup\{|\phi_a(x) - \phi_b(x)| : x \in X\} \\ &= \sup\{|d(x, a) - d(x, b)| : x \in X\}.\end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que

$$\rho(\phi_a, \phi_b) \leq d(a, b).$$

Por otro lado, esta desigualdad no puede ser estricta, ya que si $x = a$ entonces

$$|d(x, a) - d(x, b)| = d(a, b),$$

y así concluye la prueba. □

7.1. Completación de un espacio métrico

Definición 8.5 Sea X un espacio métrico. Si $h : X \rightarrow Y$ es un embebimiento isométrico de X en un espacio métrico completo Y , entonces el subespacio $\overline{h(X)}$ de Y es un espacio métrico completo. Se conoce como **completación** de X .

En otras palabras, si (\bar{X}, \bar{d}) es un espacio métrico completo y X es un espacio métrico isométrico a un subconjunto denso de \bar{X} , entonces (\bar{X}, \bar{d}) es la completación de X .

Ejemplo 8.5. La recta real $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ es una completación de $(\mathbb{Q}, | \cdot |)$.

Proposición 8.15 Todo espacio métrico (X, d) admite una completación.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del **Teorema 8.14**. □

8. Algunos resultados interesantes

8.1. Teorema de encaje de Cantor

Teorema 8.16 Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de cerrados en X , no vacíos y tales que la sucesión de sus diámetros converga a 0. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ es exactamente un punto.

Demostración. Que la sucesión de cerrados sea decreciente quiere decir que

$$C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset \dots$$

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X de manera que $x_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que esta sucesión es de Cauchy.

Como los diámetros de $(C_n)_n$ forman una sucesión que tiende a 0, tendremos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $\text{diám}(C_n) < \varepsilon$. Por tanto, como la

sucesión de cerrados es decreciente, si $n, m > n_0$, con $m > n$, tenemos que $x_n, x_m \in C_n$. Entonces $d(x_n, x_m) < \text{diám}(C_m) < \varepsilon$ y la sucesión es de Cauchy.

Como X es completo, la sucesión $(x_n)_n$ es convergente a un punto $x \in X$. Veamos que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

Supongamos que no fuera así. Entonces existiría $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin C_k$; como C_k es cerrado, tenemos que $d(x, C_k) = r > 0$, con lo que la bola $B(x, \frac{r}{2})$ y C_k no tienen puntos comunes. Pero si $n > k$, entonces $x_n \in C_k$ (pues la sucesión de cerrados es decreciente), lo que implica que $x_n \notin B(x, \frac{r}{2})$, lo cual es imposible puesto que $x_n \rightarrow x$.

Veamos, finalmente, que este punto es el único en la intersección. Supongamos que existe otro punto $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, entonces $d(x, y) \leq \text{diám}(C_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y como $\lim_n \text{diám}(C_n) = 0$ ha de ser $d(x, y) \leq 0$. Pero d es una distancia, luego $d(x, y) = 0$. Por tanto, $x = y$. \square

8.2. Teorema de Baire

Teorema 8.17 Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de abiertos de X tales que A_n es denso en X para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es denso en X .

Demostración. Es suficiente probar que todo abierto no vacío de X corta a $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Sea $A \subset X$ un abierto. Como A_1 es denso, $A \cap A_1$ es no vacío y, por tanto, $x_1 \in A \cap A_1$. Como $A \cap A_1$ es abierto, existe $r_1 < 1$ tal que la bola cerrada $\overline{B}(x_1, r_1) \subset A \cap A_1$.

La bola $B(x_1, r_1)$ es abierta no vacía y A_2 es denso, luego $B(x_1, r_1) \cap A_2$ es no vacío. Por tanto, existe $x_2 \in B(x_1, r_1) \cap A_2$; esta intersección es abierta, luego existe $r_2 < \frac{1}{2}$ tal que

$$\overline{B}(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1) \cap A_2 \subset A \cap A_1 \cap A_2.$$

Así, por inducción, se puede construir una sucesión de bolas $\{B(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ $r_n < \frac{1}{n}$ y $\overline{B}(x_n, r_n) \subset A \cap A_1 \cap \dots \cap A_n$.

Si consideramos las bolas cerradas, la familia $\{\overline{B}(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ cumple la hipótesis del **teorema de encaje de Cantor** y, por tanto, su intersección es un único punto:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) = \{x\}, \quad x \in X.$$

En consecuencia, $x \in A \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$ por lo que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es denso. □

9. Problemas propuestos

Problema 8.1. Sea X un espacio métrico.

- Suponga que, para algún $\varepsilon > 0$, toda ε -bola en X tiene clausura compacta. Pruebe que X es completo.
- Suponga que, para cada $x \in X$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B(x, \varepsilon)$ tiene clausura compacta. Muestre mediante un ejemplo que X no es completo necesariamente.

Problema 8.2. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos, con Y completo. Sea $A \subset Y$. Demuestre que si $f : A \rightarrow Y$ es uniformemente continua, entonces f puede ser extendida unívocamente a una aplicación uniformemente continua $g : \bar{A} \rightarrow Y$.

Problema 8.3. Dos distancias d y d' sobre un conjunto X se dice que son **métricamente equivalentes** si la aplicación identidad $i : (X, d) \rightarrow (X, d')$ y su inversa son uniformemente continuas.

- Demuestre que d es métricamente equivalente a la distancia acotada estándar \bar{d} asociada a d .
- Demuestre que si d y d' son métricamente equivalentes, entonces X es completo con la distancia d si, y sólo si, es completo con la distancia d' .

Problema 8.4. Demuestre que el espacio métrico (X, d) es completo si, y sólo si, para toda sucesión encajada $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que $\text{diám } A_n \rightarrow 0$, la intersección de los conjuntos A_n no es vacía.

Problema 8.5. Si (X, d) es un espacio métrico, recuerde que una aplicación $f : X \rightarrow X$ se dice que es una **contracción** si existe un número $\alpha < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y),$$

para todos $x, y \in X$. Demuestre que si f es una contracción de un espacio métrico completo, entonces existe un único punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Problema 8.6. Un espacio X se dice que es **topológicamente completo** si existe una distancia para la topología de X para la cual X es completo.

- (a) Demuestre que un subespacio cerrado de un espacio topológicamente completo es topológicamente completo.
- (b) Pruebe que un producto numerable de espacios topológicamente completos es topológicamente completo (con la topología producto).

Fin del Capítulo

Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 8.1. Sí, ya que una sucesión de Cauchy en A también es una sucesión de Cauchy en X y, por tanto, converge en X . Como A es cerrado en X , el límite de la sucesión debe permanecer en A .

Ejercicio 8.1

Ejercicio 8.2. Porque una sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy para la distancia \bar{d} si, y sólo si, es una sucesión de Cauchy para la distancia d . Y una sucesión converge en la distancia \bar{d} si, y sólo si, converge en la distancia d .

Ejercicio 8.2

Ejercicio 8.3. El espacio \mathbb{Q} de los números racionales con la distancia usual $d(x, y) = |x - y|$ NO es completo. Por ejemplo, la sucesión

$$1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, \dots$$

de números con una cantidad finita de decimales, que converge (en \mathbb{R}) a $\sqrt{2}$, es una sucesión de Cauchy en \mathbb{Q} que no converge en \mathbb{Q} .

Ejercicio 8.3

Ejercicio 8.4. Si $f, g \in \mathcal{A}(X, Y)$ entonces

$$\bar{\rho}(f, g) = \min\{\rho(f, g), 1\}$$

ya que si $\rho(f, g) > 1$ entonces $d(f(x_0), g(x_0)) > 1$ para algún $x_0 \in X$, de manera que $\bar{d}(f(x_0), g(x_0)) = 1$ y $\bar{\rho}(f, g) = 1$, por definición. Por otro lado, si $\rho(f, g) \leq 1$ entonces $\bar{d}(f(x), g(x)) = d(f(x), g(x)) \leq 1$ para todo x , y así $\bar{\rho}(f, g) = \rho(f, g)$.

Observemos que sobre $\mathcal{A}(X, Y)$, la distancia $\bar{\rho}$ es justamente la distancia acotada estándar derivada de la distancia ρ .

Ejercicio 8.4

Soluciones de las cuestiones

Cuestión 8.1. El intervalo abierto $(-1, 1)$ de \mathbb{R} con la distancia $d(x, y) = |x - y|$ no es completo. En este espacio, la sucesión (x_n) definida por

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

es una sucesión de Cauchy que no converge.

Fin de la cuestión