UNIVERSIDAD DE MURCIA
Departamento de Matemáticas

Topología

7. Espacios compactos

Pedro José Herrero y Pascual Lucas

Resumen: Tras las primeras propiedades analizamos cómo son los subconjuntos compactos de la recta real y del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Posteriormente nos centramos en los espacios métricos, lo que nos conduce, a través de la compacidad por punto límite, hasta el teorema de Heine-Borel-Lebesgue. Finalizamos estudiando la relación entre la compacidad y las funciones continuas, y probando que la compacidad está caracterizada por la propiedad de la intersección finita.

Actualizado el 18 de febrero de 2002

Versión 0.2

Indice general

Documento Principal

Mientras que la noción de conexión que hemos introducido y estudiado en el Capítulo 6 es muy fácil de presentar, por lo que nos resulta bastante familiar e incluso intuitiva, la noción de compacidad no nos es tan cercana ni natural. La estandarización del concepto de compacidad tardó muchos años en producirse. Desde principios del siglo pasado se fueron introduciendo distintas definiciones de compacidad, que pretendían extender a espacios topológicos arbitrarios alguna propiedad conocida de los intervalos cerrados $[a, b]$ de la recta real que era crucial en la demostración de ciertos teoremas, tales como el teorema del valor máximo y el teorema de la continuidad uniforme. Surgieron así los distintos "tipos" de compacidad: compacidad numerable, compacidad por punto límite, compacidad secuencial, etc. Posteriormente, los matemáticos asumieron que era posible encontrar una definición en términos más débiles y generales; de hecho, en términos de cubrimientos del espacio por conjuntos abiertos.

1. Compacidad

Definición 7.1 Sea X un conjunto y sea $S \subset X$. Un **cubrimiento** de S es una familia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X tales que $S = \cup_{i\in I} A_i$. Un **subcubrimiento** es una subfamilia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ que es también un cubrimiento de S. Un cubrimiento se dice que es finito si está formado por una cantidad finita de conjuntos. Cuando $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y cada A_i es un abierto de X, se dice que $\mathcal{A}$ es un **cubrimiento abierto** de S.

Ejemplo 7.1. Sea $X = \mathbb{R}$, entonces la familia $\mathcal{A} = \{[-n, n]\}_{n=1}^{\infty}$ es claramente un cubrimiento de $S = \mathbb{R}$, pero no es un cubrimiento abierto en la topología usual. Un ejemplo de un subcubrimiento de $\mathcal{A}$ sería $\mathcal{D} = \{[-2n, 2n]\}_{n=1}^{\infty}$. La familia $\{(-n, n)\}_{n=1}^{\infty}$ también es un cubrimiento, esta vez abierto, de $\mathbb{R}$, pero no es un subcubrimiento de $\mathcal{A}$.

Definición 7.2 Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es **compacto** si todo cubrimiento abierto de X admite un subcubrimiento finito.

Ejemplo 7.2. La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta, pues el cubrimiento de $\mathbb{R}$ por intervalos abiertos

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

no contiene ningún subcubrimiento finito que cubra $\mathbb{R}$.

Ejemplo 7.3. El siguiente subespacio de $\mathbb{R}$ es compacto:

$$X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Para todo cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X, existe un elemento U de $\mathcal{A}$ que contiene al 0. El conjunto U contiene a todos los puntos de la forma $1/n$ excepto a un número finito de ellos; elijamos para cada uno de estos puntos que no están en U un elemento de $\mathcal{A}$ que los contenga. La colección de estos elementos de $\mathcal{A}$, junto con el propio U, es un subcubrimiento finito de $\mathcal{A}$ que cubre X.

Ejemplo 7.4. Cualquier espacio X que contenga a un número finito de puntos es trivialmente compacto, pues cualquier cubrimiento por abiertos de X es finito.

Ejemplo 7.5. El intervalo $(0, 1]$ no es compacto; el cubrimiento abierto

$$\mathcal{A} = \{(1/n, 1] \mid n \in \mathbb{N}\}$$

no contiene ningún subcubrimiento finito cubriendo $(0, 1]$. Aplicando un argumento análogo se demuestra que tampoco es compacto el intervalo $(0, 1)$.

Ejemplo 7.6.

(1) La recta real con la topología de los complementos finitos $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$ es compacta.

(2) Cualquier espacio con la topología trivial $(X, \mathcal{T}_T)$ siempre es compacto.

(3) Cualquier conjunto infinito con la topología discreta $(X, \mathcal{T}_D)$ no es compacto.

Es fácil ver que la compacidad es una propiedad topológica. Dejamos como ejercicio la demostración de este hecho.

Teorema 7.1 Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo entre dos espacios topológicos. Entonces X es compacto si, y sólo si, Y es compacto.

2. Subconjuntos compactos

Definición 7.3 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $K \subset X$ un subconjunto. Diremos que K es un **conjunto compacto** en $(X, \mathcal{T})$ si $(K, \mathcal{T}_K)$, con la topología relativa, es un espacio compacto. En este caso se dice que $(K, \mathcal{T}_K)$ es un **subespacio compacto**.

Proposición 7.2 Sea K un subespacio de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Entonces K es compacto si, y sólo si, para toda familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de abiertos en X tal que $K \subset \cup_{i \in I} A_i$, existe una subfamilia finita $\{A_i\}_{i=1}^n$ tal que $K \subset \cup_{i=1}^n A_i$.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que K es compacto y sea $K \subset \cup_{i \in I} A_i$, donde $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de abiertos de $(X, \mathcal{T})$. Entonces, según la definición de topología relativa, $\{A_i \cap K\}_{i \in I}$ es un cubrimiento de K por abiertos de $(K, \mathcal{T}_K)$. Como este subespacio es compacto, existen abiertos $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ tales que

$$K = (A_{i_1} \cap K) \cup \cdots \cup (A_{i_n} \cap K).$$

De aquí se deduce que $K \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora todo cubrimiento de K por abiertos de $(X, \mathcal{T})$ admite un subcubrimiento finito y veamos que $(K, \mathcal{T}_K)$ es compacto. Para ello, sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos de $(K, \mathcal{T}_K)$ que recubren K. Entonces cada abierto A_i se puede escribir de la forma $A_i = B_i \cap K$, donde B_i es un abierto en $(X, \mathcal{T})$ y así se tiene que $K \subset \cup_{i \in I} B_i$. Por hipótesis, existirán $B_{i_1}, \ldots, B_{i_n}$ tales que $K \subset B_{i_1} \cup \cdots \cup B_{i_n}$ de forma que

$$K = (B_{i_1} \cap K) \cup \cdots \cup (B_{i_n} \cap K) = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$$

y, por tanto, K es compacto. □

Teorema 7.3 Todo subconjunto cerrado C de un espacio topológico compacto $(X, \mathcal{T})$ es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de C por abiertos de $(X, \mathcal{T})$. Entonces $\mathcal{A} \cup C^c$ es un cubrimiento abierto de X, del cual se puede extraer un subcubrimiento finito; si este subcubrimiento finito no contiene a C^c, estará formado únicamente por elementos de $\mathcal{A}$: $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}\}$ y como $C \subset X$ ya estaría probado. Si C^c está en el cubrimiento finito, dicho cubrimiento será de la forma $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}, C^c\}$ y como $C \subset X = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n} \cup C^c$, tenemos que $C \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$. □

Teorema 7.4 Todo subconjunto compacto de un espacio topológico de Hausdorff $(X, \mathcal{T})$ es cerrado.

Demostración. Probaremos que K^c es abierto demostrando que es entorno de todos sus puntos. Sea $a \notin K$; si $x \in K$, $x \neq a$, la propiedad de Hausdorff nos asegura que existen abiertos disjuntos A_x y B_x con $a \in A_x$ y $x \in B_x$; y esto se puede hacer para cada $x \neq a$, $x \in K$.

Pero $\{B_x\}_{x \in K}$ es un cubrimiento de K por abiertos de X del cual se puede extraer un subcubrimiento finito $B_{x_1}, \dots, B_{x_n}$, para ciertos puntos $x_1, \dots, x_n \in K$. Entonces tomemos

$$A = A_{x_1} \cap \cdots \cap A_{x_n},$$

que es abierto y contiene a a. Veamos que $A \subset K^c$. Si $b \in A$, entonces para cada $i = 1, \ldots, n$ se tiene que $b \in A_{x_i}$ y, por tanto, $b \notin B_{x_i}$, lo que implica que $b \notin K$. De esta forma, $A \subset K^c$. □

Durante la demostración del teorema anterior hemos probado el siguiente resultado.

Lema 7.5 Si K es un subespacio compacto de un espacio de Hausdorff $(X, \mathcal{T})$ y a no está en K, entonces existen abiertos disjuntos A y B de X conteniendo al punto a y a K, respectivamente.

Ejemplo 7.7.

(1) Usando el Teorema 7.4, los intervalos $(a, b]$ y (a, b) no pueden ser compactos (hecho que ya sabemos) ya que no son cerrados en el espacio de Hausdorff $\mathbb{R}$.

(2) La condición de Hausdorff es imprescindible para demostrar el Teorema 7.4. Consideremos, por ejemplo, la topología cofinita en la recta real. Los únicos subconjuntos propios de $\mathbb{R}$ que son cerrados en esta topología son los finitos. Pero todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto con esta topología, como fácilmente se puede comprobar.

3. Compactos en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$

Siguiendo un camino paralelo al que hemos seguido en la búsqueda de espacios conexos, vamos a buscar espacios compactos en la recta real para, a partir de ahí, construir nuevos espacios compactos. Probaremos que cada intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es compacto. Las aplicaciones de este hecho incluyen el teorema de los valores extremos y el teorema de la continuidad uniforme. También proporcionaremos una caracterización de todos los subespacios compactos de $\mathbb{R}^n$.

3.1. Compactos en $\mathbb{R}$

Teorema 7.6 (Teorema de Heine-Borel) Todo intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ con la topología usual es compacto.

Demostración. Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de $[a, b]$. Vamos a ver que se puede extraer un subcubrimiento finito. Consideremos el conjunto siguiente:

$$G = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \text{ se recubre con una subfamilia finita de } \{A_i\}_{i\in I}\}.$$

Paso 1. $G \neq \varnothing$. Además existe $\delta > 0$ tal que $[a, a + \delta) \subset G$.
En efecto, como $a \in [a, b] \subset \cup_{i\in I} A_i$, existirá un índice $j \in I$ tal que $a \in A_j$. Como A_j es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subset A_j$ y, por tanto, $[a, a + \delta) \subset A_j$. Esto implica que si $x \in [a, a + \delta)$, $[a, x] \subset [a, a + \delta) \subset A_j$, que es un *subcubrimiento finito*. Por tanto, $[a, a + \delta) \subset G$.
Paso 2. G es un intervalo.
Si $x, y \in G$, entonces $[x, y] \subset G$ ya que para todo $z \in [x, y]$ se satisface $[a, z] \subset [a, y] \subset G$. Aplicando el Lema 6.8, G debe ser un intervalo.

Paso 3. $b \in G$.
Consideremos $c = \sup\{G\}$, que eventualmente puede ser $c = +\infty$. Como a es cota inferior de G, entonces $a < c$. Pueden presentarse los siguientes casos:

Caso 1: $b < c$. Entonces $b \in G$, pues existiría, por la definición de supremo, un punto $x \in G$ tal que $b < x \leq c$ y ya hemos visto que G es un intervalo.

Caso 2: $c \leq b$. Ahora también $b \in G$, pues como $[a, b] \subset \cup_{i \in I} A_i$, entonces $c \in A_k$ para algún $k \in I$. A_k es abierto, luego es entorno de c y, por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset A_k$. Pero como $c = \sup\{G\}$ entonces $c - \varepsilon \in G$. Por tanto, $[a, c - \varepsilon] \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$, con lo cual tenemos que $c + \varepsilon$ también está en G, ya que $[a, c + \varepsilon]$ tiene un subcubrimiento finito de la forma

$$[a, c + \varepsilon] \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n} \cup A_k,$$

y esto es una contradicción con el hecho de que $c = \sup\{G\}$.

Por tanto, $b \in G$ y $[a, b]$ tiene un subcubrimiento finito. □

3.2. Compactos en $\mathbb{R}^n$

Vamos a ver en esta sección que los rectángulos, o cubos, generalizados $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ son compactos en $\mathbb{R}^n$ con la topología usual. Haremos la prueba en $\mathbb{R}^2$ y con un procedimiento similar por inducción se prueba en $\mathbb{R}^n$.

Lema 7.7 Sea $[c, d] \subset \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Entonces $S = \{x\} \times [c, d]$ es compacto en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

Demostración. Es fácil ver que $S = \{x\} \times [c, d]$, con la topología relativa, es un espacio homeomorfo al intervalo $[c, d]$, también con su topología usual. Basta considerar la aplicación:

$$f : S = \{x\} \times [c, d] \longrightarrow [c, d], \qquad f(x, y) = y.$$

Ahora no hay más que aplicar los Teoremas 7.1 y 7.6. □

Lema 7.8 Sea un intervalo $[c, d] \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ y $\{A_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de $\{x\} \times [c, d]$. Entonces existe $r > 0$ tal que el producto $(x - r, x + r) \times [c, d]$ está recubierto por una cantidad finita de elementos de $\{A_i\}_{i\in I}$.

Demostración. Por el Lema 7.7 se sabe que $\{x\} \times [c, d]$ es compacto, por lo que admite un subcubrimiento finito $\{A_j\}_{j=1}^n \subset \{A_i\}_{i\in I}$.

Para cada $y \in [c, d]$, $(x, y) \in A_k$ para algún $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por tanto, existe $r_y > 0$ tal que

$$(x, y) \in B_\infty((x, y), r_y) = (x - r_y, x + r_y) \times (y - r_y, y + r_y) \subset A_k.$$

Tenemos entonces que $\{(y - r_y, y + r_y)\}_{y\in[c,d]}$ es un cubrimiento abierto de $[c, d]$, que es compacto. Por tanto, admite un subcubrimiento finito $\{(y_j - r_{y_j}, y_j + r_{y_j})\}_{j=1}^m$.

Ahora tomamos $r = \min\{r_{y_j} \mid j = 1, \ldots, m\}$, de modo que

$$(x - r, x + r) = \bigcap_{j=1}^{m} (x - r_{y_j}, x + r_{y_j}).$$

Se concluye entonces que

$$(x - r, x + r) \times [c, d] \subset \bigcup_{j=1}^{m} \{(x - r, x + r) \times (y_j - r_{y_j}, y_j + r_{y_j})\} \subset$$

$$\subset \bigcup_{j=1}^{m} \{(x - r_{y_j}, x + r_{y_j}) \times (y - r_{y_j}, y + r_{y_j})\} \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

obteniendo el subcubrimiento finito buscado. □

Proposición 7.9 Un rectángulo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ es compacto.

Demostración. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de $[a, b] \times [c, d]$, también es un cubrimiento de $\{x\} \times [c, d]$, para cada $x \in [a, b]$. Por el Lema 7.8, para cada x existe $r_x > 0$ tal que el conjunto $(x - r_x, x + r_x) \times [c, d]$ admite un subcubrimiento finito. Pero $\{(x - r_x, x + r_x)\}_{x\in[a,b]}$ es un cubrimiento abierto de $[a, b]$. Por la compacidad de $[a, b]$, dicho cubrimiento admite un subcubrimiento finito $\{(x_k - r_{x_k}, x_k + r_{x_k})\}_{k=1}^{m}$. Entonces tenemos que

$$[a,b]\times[c,d]\subset\bigcup_{k=1}^{m}\{(x_k-r_{x_k},x_k+r_{x_k})\times[c,d]\}$$

y cada uno de los conjuntos $(x_k-r_{x_k},x_k+r_{x_k})\times[c,d]$ está recubierto por un número finito de elementos de $\{A_i\}_{i\in I}$. Luego el rectángulo $[a,b]\times[c,d]$ está contenido en unión finita de elementos A_i. □

Corolario 7.10 Los rectángulos generalizados $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ son compactos en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. La demostración es un proceso de inducción a partir de la Proposición 7.9. □

Finalizamos esta sección con la siguiente generalización del teorema de Heine-Borel.

Teorema 7.11 (Teorema de Heine-Borel en $\mathbb{R}^n$) Sea $K\subset\mathbb{R}^n$ con la topología usual. Entonces K es compacto si, y sólo si, K es cerrado y acotado.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Como $\mathbb{R}^n$ es de Hausdorff y K es compacto, la Proposición 7.4 implica que K es cerrado. Por otra parte, si $a\in K$ la colección de bolas $\{B(a,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ constituye un cubrimiento abierto de K que, como es compacto, admite un subcubrimiento finito. La unión de esta subcolección será la bola $B(a,m)$ más grande. Por tanto, $K\subset B(a,m)$ está acotado.

⇐ Si K está acotado, hay alguna bola cerrada tal que $K \subset \overline{B}_\infty(a, r)$, para algún $a \in \mathbb{R}^n$. Esta bola es un rectángulo cerrado que, por el Corolario 7.10 es compacto. Como K es cerrado y está contenido en un compacto, la Proposición 7.3 implica que K es compacto. □

Ejemplo 7.8. La esfera unidad S^{n-1} y la bola cerrada unidad B^n en $\mathbb{R}^n$ son compactos, pues son cerrados y acotados. El conjunto

$$A = \{(x, \frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}^2$, pero no es compacto porque no está acotado. El conjunto

$$S = \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}$$

está acotado en $\mathbb{R}^2$, pero no es compacto porque no es cerrado.

4. Compactos en un espacio métrico

En esta sección vamos a demostrar algunos resultados que generalizan propiedades de los compactos de $\mathbb{R}^n$ a cualquier espacio métrico.

Proposición 7.12 Todo subconjunto compacto K de un espacio métrico (X, d) está acotado.

Demostración. Basta repetir la prueba de la implicación directa del Teorema 7.11. □

Teorema 7.13 Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_n \subset X$ una sucesión. Entonces $(x_n)_n$ converge a $x \in X$ si, y sólo si, cada subsucesión $(x_{n_k})_k$ converge a x.

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que $x_n \to x$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$. Esto quiere decir que $x_n \in B(x, \varepsilon)$ y, por tanto, sólo hay una cantidad finita de términos de la sucesión que no están en dicha bola. En consecuencia, ninguna subsucesión $(x_{n_k})_k$ puede tener infinitos términos fuera de la bola, luego debe ser convergente a x.
$\Leftarrow$ Es evidente puesto que cualquier sucesión es subsucesión de sí misma. □

Ejemplo 7.9. Si una sucesión no converge, no quiere decir que ninguna subsucesión sea convergente. Por ejemplo, la sucesión $((-1)^n)_n$ no es convergente pero tiene dos subsucesiones convergentes: $(1, 1, \dots)$ que converge a 1 y $(-1, -1, \dots)$ que converge a -1. En realidad hay infinitas subsucesiones convergentes. ¿Cómo son?

4.1. Espacios sucesionalmente compactos y totalmente acotados

Definición 7.4 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $K \subset X$ un subconjunto. Diremos que K es **sucesionalmente compacto** si dada una sucesión $(x_n)_n$ en K existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ convergente a un punto de K.

Ejemplo 7.10.

(1) Cualquier espacio topológico finito es compacto y sucesionalmente compacto.

(2) El intervalo abierto $(0,1)$, con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}$, no es sucesionalmente compacto: la sucesión $(\frac{1}{n})_{n=2}^{\infty} \subset (0,1)$ converge a 0 y, por tanto, cualquier subsucesión suya también converge a 0; pero $0 \notin (0,1)$.

Definición 7.5 Dado un espacio métrico (X,d) y $T \subset X$ un subconjunto, diremos que T es **totalmente acotado** si para cada $r > 0$ existe un número finito de puntos $x_1,\dots,x_n \in T$ tales que $T \subset B(x_1,r) \cup \cdots \cup B(x_n,r)$.

Proposición 7.14 Sea (X,d) un espacio métrico y $T \subset X$. Se verifican:

(a) Si T es compacto, entonces T es totalmente acotado.

(b) Si T es totalmente acotado, T es acotado.

Demostración. La prueba de estas dos propiedades es muy sencilla.
(a) Sea $r > 0$. Entonces $\{B(x,r) \mid x \in T\}$ es un cubrimiento abierto de T. La compacidad de T implica que existe un subcubrimiento finito, es decir, existe un número finito de puntos $x_1,\dots,x_n \in T$ tales que $T \subset B(x_1,r) \cup \cdots \cup B(x_n,r)$.
(b) Sea $r > 0$ y supongamos que $T \subset B(x_1,r) \cup \cdots \cup B(x_n,r)$. Definamos

$$R = \max\{d(x_1,x_i) \mid i = 2,\dots,n\}$$

Entonces $T \subset B(x_1,R+r)$, lo que significa que está acotado. $\square$

Ejemplo 7.11.

(1) $(0,1) \subset \mathbb{R}$, con la distancia usual, es totalmente acotado, pero no es compacto.

(2) $\mathbb{R}$, con la distancia discreta, es un espacio métrico acotado, pero no es totalmente acotado.

Proposición 7.15 Si (X, d) es un espacio métrico y $K \subset X$ es sucesionalmente compacto, entonces K es totalmente acotado.

Demostración. Supongamos que K es sucesionalmente compacto y no es totalmente acotado. Existirá $r > 0$ de modo que no existe un cubrimiento finito de K con bolas de radio r y centro en un punto de K. Vamos a construir un sucesión de la siguiente manera.

Sea $x_1 \in K$ un punto arbitrario. Escogemos $x_2 \in K$ tal que $d(x_1, x_2) \geq r$, que existe pues de lo contrario $B(x_1, r)$ sería un cubrimiento finito de K. Tomamos $x_3 \in K$ tal que $d(x_1, x_3) \geq r$ y $d(x_2, x_3) \geq r$, que existe pues en caso contrario $\{B(x_1, r), B(x_2, r)\}$ sería un cubrimiento finito de K. Y así sucesivamente. Obtenemos una sucesión $(x_n)_n$ en K que verifica que $d(x_n, x_m) \geq r$ si $n \neq m$ y que no tiene ninguna subsucesión convergente en K, pues si tuviéramos $(x_{n_k})_k$ con $\lim_k x_{n_k} = x \in K$, dado $r > 0$ existiría $k_r \in \mathbb{N}$ tal que si $n_k > n_{k_r}$ entonces $d(x_{n_k}, x) < \frac{r}{2}$, con lo que tendríamos que si $n_k, n_m > n_{k_r}$

$$d(x_{n_k}, x_{n_m}) \leq d(x_{n_k}, x) + d(x, x_{n_m}) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

en contra de que $d(x_{n_k}, x_{n_m}) \geq r$. Entonces K no sería sucesionalmente compacto. □

Lema 7.16 (Lema de Lebesgue) Sea (X, d) un espacio métrico, $K \subset X$ un subconjunto sucesionalmente compacto y $\{A_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de K. Entonces existe $r > 0$ tal que para cada $x \in K$ existe $i \in I$ de modo que $B(x, r) \subset A_i$. Este número $r > 0$ se llama **número de Lebesgue** del cubrimiento.

Demostración. Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de K para el que no existe ningún número de Lebesgue. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá $x_n \in K$ tal que $B(x_n, \frac{1}{n})$ no está contenida en ningún A_i para todo $i \in I$.

Como K es sucesionalmente compacto, ha de existir una subsucesión $(x_{n_k})_k$ convergente a un punto $x \in K$. Además, como $\{A_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de K, entonces $x \in A_j$ para algún $j \in I$. Pero A_j es abierto, luego existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \frac{2}{n_j}) \subset A_j$.

Como la subsucesión anterior converge a x, dado $n_j > 0$ existirá $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_r \geq n_{r_0}$ entonces $x_{n_r} \in B(x, \frac{1}{n_j})$.

Tomemos ahora $n_r \geq n_{r_0}$ tal que también sea $n_r \geq n_j$. Entonces $B(x_{n_r}, \frac{1}{n_r}) \subset B(x, \frac{2}{n_j})$ ya que si $y \in B(x_{n_r}, \frac{1}{n_r})$ entonces

$$d(x, y) \leq d(x, x_{n_r}) + d(x_{n_r}, y) < \frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_r} \leq \frac{2}{n_j}.$$

De aquí se deduce que $B(x_{n_r}, \frac{1}{n_r}) \subset A_j$, en contradicción con la hipótesis. □

5. Compacidad por punto límite

Existen otras formulaciones de compacidad equivalentes que son frecuentemente utilizadas. En esta sección introducimos la más débil, en general, aunque coincide cuando se trata de espacios metrizables.

Definición 7.6 Un espacio se dice que es **compacto por punto límite** si cada subconjunto infinito de X tiene un punto límite.

Esta propiedad, que es más intuitiva y natural que la definición de compacidad, constituyó la definición original, mientras que la definición en términos de cubrimientos era llamada "bicompacidad".

Teorema 7.17 La compacidad implica compacidad por punto límite, pero el recíproco no es cierto.

Demostración. Sea X un espacio compacto. Dado un subconjunto A de X, queremos probar que si A es infinito, entonces tiene un punto límite. Vamos a demostrar el contrarrecíproco —si A no tiene un punto límite, entonces es finito.

Supongamos pues que A no tiene un punto límite. Entonces A contiene todos sus puntos límite, luego es cerrado. Más aún, podemos elegir para cada $a \in A$ un entorno U_a de a de modo que U_a interseque a A sólo en el punto a. El espacio X está cubierto por el conjunto abierto $X - A$ y los abiertos U_a. Como es compacto, puede ser cubierto por un número finito de tales conjuntos. Como $X - A$ no interseca a A y cada conjunto U_a contiene únicamente un punto de A, el conjunto A debe ser finito. □

Ejemplo 7.12. Sea Y un conjunto con dos puntos; consideramos en Y la topología trivial, es decir, la formada por el conjunto vacío y el propio Y. Entonces el espacio $X = \mathbb{N} \times Y$ es compacto por punto límite, pues cada subconjunto no vacío de X tiene un punto límite. Sin embargo, no es compacto, ya que el cubrimiento de X por los abiertos $U_n = \{n\} \times Y$ no admite una subcolección finita que cubra a X.

6. El teorema de Heine-Borel-Lebesgue

Veamos ahora que las tres definiciones que hemos dado de compacidad son equivalentes en el caso de los espacios métricos.

Teorema 7.18 (Teorema de Heine-Borel-Lebesgue) Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) K es compacto.

(b) K es compacto por punto límite.

(c) K es sucesionalmente compacto.

Demostración. **(a)⇒(b)** Supongamos que K es compacto y que $S \subset K$ es un subconjunto infinito que no tiene ningún punto de acumulación. Entonces para cada $x \in K$ existe

$r_x > 0$ tal que la bola $B(x, r_x)$ no corta a S o bien sólo corta a S en el propio x.

La familia $\{B(x, r_x)\}_{x \in K}$ es un cubrimiento abierto de K que, al ser compacto, admite un subcubrimiento finito. Este subcubrimiento finito también recubre a S, con lo que según lo visto en el párrafo anterior S sería finito, en contra de la hipótesis.

(b)⇒(c) Si $(x_n)_n$ es una sucesión en K con infinitos términos iguales a x, no hay nada que probar, pues ella misma converge a x. Supongamos entonces que $(x_n)_n$ es una sucesión en K con infinitos términos distintos. Según (b), dicha sucesión tiene un punto de acumulación $x \in K$ y por la Proposición 4.30 existe una subsucesión de $(x_n)_n$ convergente a x. Por tanto, K es sucesionalmente compacto.

(c)⇒(a) Supongamos que K es sucesionalmente compacto y que $\{A_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de K. Por el Lema de Lebesgue existe un número de Lebesgue $r > 0$ para este cubrimiento. Por la Proposición 7.15 K es totalmente acotado, de modo que existe un cubrimiento finito de X por bolas de radio r, $\{B(x_1, r), \dots, B(x_n, r)\}$. Pero cada bola $B(x_i, r)$ ha de estar contenida en un abierto del cubrimiento $\{A_i\}_{i \in I}$, por lo que $\{A_1, \dots, A_n\}$ es un subcubrimiento finito de X. □

• El caso de $\mathbb{R}^n$

Después de los resultados que hemos demostrado en los espacios métricos referidos a la compacidad, podemos completar el Teorema 7.11 de Heine-Borel.

Teorema 7.19 (Teorema de Heine-Borel-Lebesgue en $\mathbb{R}^n$) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ con la topología usual. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) K es compacto.

(b) K es cerrado y acotado.

(c) Todo subconjunto $S \subset K$ infinito tiene un punto de acumulación en K.

(d) K es sucesionalmente compacto.

7. Compacidad y funciones continuas

Teorema 7.20 Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos y $K \subset X$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto en Y.

Demostración. Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de $f(K)$ en Y. Entonces

$$\{f^{-1}(A_i)\}_{i\in I}$$

es un cubrimiento abierto de K. Por la compacidad de K, existe un subcubrimiento finito: $K \subset f^{-1}(A_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$, lo que implica que $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es un subcubrimiento finito de $f(K)$. □

Corolario 7.21 Sea $K \subset X$ un subconjunto compacto de un espacio X. Entonces toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$ está acotada en K.

Corolario 7.22 (Teorema de Weierstrass) Sea $K \subset X$ un subconjunto compacto de un espacio X. Entonces toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$ alcanza sus extremos en K.

Demostración. Si K es compacto entonces $f(K)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y, por tanto, es cerrado y acotado. Por ser acotado, existen $c = \inf\{f(K)\}$ y $d = \sup\{f(K)\}$; y por ser cerrado, los puntos $c, d \in f(K)$, de modo que existirán $x, y \in K$ tales que $f(x) = c$ y $f(y) = d$. $\square$

Teorema 7.23 Sea $f : X \to Y$ una aplicación biyectiva y continua entre un espacio compacto X y un espacio de Hausdorff Y. Entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Veamos, en primer lugar, que f transforma cerrados de X en cerrados de Y. En efecto, por la Proposición 7.3 se tiene que si $C \subset X$ es cerrado, entonces C es compacto; y por el Teorema 7.20 $f(C)$ es compacto. Pero Y es de Hausdorff, de modo que la Proposición 7.4 implica que también es cerrado.

Veamos ahora que f es un homeomorfismo. Para esto hay que probar que la aplicación inversa $g = f^{-1}$ es continua; y lo es puesto que si $C \subset X$ es cerrado entonces $g^{-1}(C) = f(C)$ es cerrado, tal y como acabamos de ver. $\square$

Ejercicio 7.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Prueba que el conjunto imagen $f([a, b])$ es un intervalo cerrado y acotado $[c, d]$.

CUESTION 7.1. ¿Es cierto que toda función continua y estrictamente monótona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ admite una inversa $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ continua?

(a) Sí (b) No

7.1. Compacidad y continuidad uniforme

Proposición 7.24 Toda aplicación continua $f : (X,d) \to (Y,d')$ entre espacios métricos, donde $(X,\mathcal{T}_d)$ es compacto, es uniformemente continua.

Demostración. Como f es continua, dado $x \in X$ y dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_x > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta_x$ entonces $d'(f(x),f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Fijado $\varepsilon > 0$, la colección de bolas $\{B(x,\frac{\delta_x}{2})\}_{x\in X}$ constituye un cubrimiento abierto de X que, al ser compacto, admite un subcubrimiento finito $\{B(x_i,\frac{\delta_i}{2})\}_{i=1}^n$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_i/2 \mid i = 1,2,\ldots,n\}$. Tomemos $x,y \in X$ arbitrarios cumpliendo $d(x,y) < \delta$; tendremos que $x \in B(x_k,\delta_k/2)$ para algún $k \in \{1,\ldots,n\}$. Entonces

$$d(y,x_k) \leq d(y,x) + d(x,x_k) < \delta + \frac{\delta_k}{2} \leq \delta_k,$$

lo que implica que

$$d'(f(y),f(x_k)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y entonces

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_k)) + d'(f(x_k), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto, f es uniformemente continua. □

Corolario 7.25 Toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua.

8. Propiedad de la intersección finita

Definición 7.7 Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X. Se dice que $\mathcal{F}$ tiene la **propiedad de la intersección finita** si la intersección de cualquier subfamilia finita de $\mathcal{F}$ es no vacía.

Ejemplo 7.13.

(1) La familia $\{(0, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

(2) La familia $\{[n, n+1]\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ no tiene la propiedad de la intersección finita.

Cuestion 7.2. ¿Qué familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$ satisfacen la propiedad de intersección finita?

(a) $\{(n, n+2)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (b) $\{(\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ (c) $\{(-n, n)\}_{n\in\mathbb{N}}$

Proposición 7.26 Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si, y sólo si, toda familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de cerrados en X que tiene la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que X es compacto y que $\{F_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita tal que $\cap_{i\in I}F_i = \varnothing$. Si tomamos complementarios tendremos que $\cup_{i\in I}F_i^c = X$, luego obtenemos un cubrimiento abierto de X que, por ser compacto, admite un subcubrimiento finito, $F_1^c \cup \cdots \cup F_n^c = X$. Tomando de nuevo complementarios tendremos que $F_1 \cap \cdots \cap F_n = \varnothing$, en contra de que la familia $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene la propiedad de la intersección finta.
$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X; entonces $(\cup_{i\in I}A_i)^c = \varnothing$. Por tanto $\cap_{i\in I}A_i^c = \varnothing$, con lo que tenemos una familia de cerrados $\{A_i^c\}_{\in I}$ que no tiene la propiedad de la intersección finita; luego debe existir una subfamilia finita cuya intersección es vacía: $A_{i_1}^c \cap \cdots \cap A_{i_n}^c = \varnothing$. Tomando complementarios obtenemos que $A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n} = X$ y así hemos obtenido un subcubrimiento finito. □

Ejemplo 7.14. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ no es compacto, cosa que ya sabemos porque no es acotado. Pero esto mismo puede deducirse de otra forma. La familia de cerrados $\{[z, +\infty)\}$ tiene la propiedad de la intersección finita y, sin embargo, la intersección de todos los elementos de esta familia es vacía. Ahora basta aplicar la Proposición 7.26.

9. Problemas propuestos

Problema 7.1. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Demuestre que si $K, K' \subset X$ son subconjuntos compactos, entonces $K \cup K'$ también es compacto.

Problema 7.2. Demuestre que una unión finita de subespacios compactos de X es también compacto.

Problema 7.3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico de Hausdorff. Demuestre que si $\{K_i\}_{i \in I}$ es una familia de subespacios compactos de X, entonces $\cap_{i \in I} K_i$ también es compacto.

Problema 7.4. ¿Cuáles de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ son compactos? Justifique la respuesta.

(1) $[0, 1)$

(2) $[0, +\infty)$

(3) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

(4) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

(5) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$

(6) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

(7) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1/x\}$

Problema 7.5. Demuestre que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es compacto si, y sólo si, para toda familia de cerrados $\{C_i\}_{i\in I}$ tales que $\cap_{i\in I} C_i = \varnothing$ existe una subfamilia finita $\{C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}\}$ satisfaciendo $C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_k} = \varnothing$.

Problema 7.6. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico de Hausdorff, $K \subset X$ un compacto y $x \notin K$. Pruebe que existen dos abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $K \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$.

Problema 7.7. Sean K y K' dos subconjuntos compactos y disjuntos de un espacio de Hausdorff $(X, \mathcal{T})$. Pruebe que existen subconjuntos abiertos y disjuntos U y V tales que $K \subset U$ y $K' \subset V$.

Problema 7.8. Demuestre que si $f : X \to Y$ es continua, donde X es compacto e Y es de Hausdorff, entonces f es una aplicación cerrada (esto es, f lleva conjuntos cerrados a conjuntos cerrados).

Problema 7.9. Demuestre que si Y es compacto, entonces la proyección $\pi_1 : X \times Y \to X$ es una aplicación cerrada.

Problema 7.10. Sea X un espacio compacto por punto límite.

(a) Si $f : X \to Y$ es continua, ¿es $f(X)$ compacto por punto límite?

(b) Si A es un subconjunto cerrado de X, ¿es A compacto por punto límite?

(c) Si X es un subespacio de un espacio de Hausdorff Z, ¿es X un cerrado de Z?

Problema 7.11. Un espacio X se dice que es **numerablemente compacto** si cada cubrimiento numerable de abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre a X. Demuestre que para un espacio T_1, la condición numerablemente compacto equivale a la de compacto por punto límite.

Problema 7.12. Demuestre que X es numerablemente compacto si, y sólo si, cada sucesión encajada $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ de conjuntos cerrados no vacíos de X tiene intersección no vacía.

Problema 7.13. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico sucesionalmente compacto y sea $(Y, \mathcal{T}')$ otro espacio topológico. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación continua. Demuestre que $(f(X), \mathcal{T}'_{f(X)})$ es sucesionalmente compacto.

Problema 7.14. Sea $X = [-1, 1]$ con la topología $\mathcal{T} = \{A \subset X \mid 0 \in A, \text{ o bien } (-1, 1) \subset A\}$. Demuestre que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico compacto.

Problema 7.15. Estudie si la recta de *Sorgenfrey* $\mathbb{R}_\ell$ es un espacio compacto. ¿Son compactos, en este espacio, los subconjuntos $[0, 1)$ y $[0, 1]$?

Problema 7.16. Sea $(\mathbb{R}, d)$ el espacio métrico de los números reales con la distancia

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Sea $A = [1, +\infty)$. Estudie si A es cerrado, acotado o compacto en dicho espacio.

Problema 7.17. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio compacto y consideremos una topología $\mathcal{T}'$ menos fina que $\mathcal{T}$. Demuestre que $(X, \mathcal{T}')$ es también compacto.

Problema 7.18. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y una sucesión $(a_n)_n$ en X que converge hacia $a \in X$. Pruebe que el conjunto $A = (a_n)_n \cup \{a\}$ es compacto en X.

Fin del Capítulo

Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 7.1. Sabemos que el intervalo cerrado $[a, b]$ es compacto, de modo que su imagen $f([a, b])$ por la aplicación continua f será también un conjunto compacto. Como la recta real es de Hausdorff, la imagen $f([a, b])$ debe ser cerrada. Por otra parte, como la conexión se conserva por las aplicaciones continuas, el conjunto imagen también debe ser conexo; pero los conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos. En conclusión, $f([a, b])$ es un intervalo cerrado $[c, d]$. Ejercicio 7.1

Soluciones de las cuestiones

Cuestión 7.1. En efecto, utilizando la compacidad y la conexión del intervalo $[a, b]$ podemos deducir, por ser f una aplicación continua, que la imagen $f([a, b])$ es un intervalo cerrado $[c, d]$. Utilizando ahora la monotonía estricta de f puede deducirse que la aplicación es inyectiva y, por tanto, biyectiva en la imagen. Ahora basta utilizar el Teorema 7.23 aplicado a la función $f : [a, b] \to [c, d]$. Fin de la cuestión