



UNIVERSIDAD DE MURCIA
Departamento de Matemáticas

Topología

6. Espacios conexos

Pedro José Herrero y Pascual Lucas

Resumen: En este capítulo estudiamos los espacios conexos y su relación con otras propiedades ya estudiadas. Después de dar unos resultados para construir espacios conexos, estudiamos los subespacios conexos de la recta real, lo que nos conduce al concepto de conexión por caminos. A continuación relacionamos conexión y continuidad y finalizamos el capítulo con la conexión de los productos cartesianos.

Indice general

1. Conjuntos separados
 - 1.1. Subespacios conexos
 - 1.2. Construcción de espacios conexos
2. Conexos en \mathbb{R}
 - 2.1. Conexión por caminos
3. Conexión y continuidad
4. Conexión y productos cartesianos
5. Problemas propuestos
 - Soluciones de los ejercicios

1. Conjuntos separados

La definición de conexión para un espacio topológico es muy natural. Así, se dice que un espacio puede ser “separado” si es posible dividirlo en dos conjuntos abiertos con intersección trivial. En caso contrario, diremos que el espacio es conexo. En términos más precisos, se tienen las siguientes definiciones.

Definición 6.1 Dado un espacio topológico (X, \mathcal{T}) y dos subconjuntos $A, B \subset X$, diremos que A y B están **separados** si $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Es evidente que si A y B están separados, entonces son disjuntos. Sin embargo, el recíproco no es cierto como queda de manifiesto en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6.1.

(1) En \mathbb{R} con la topología usual, los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$ están separados, pero los intervalos $(0, 1)$ y $[1, 2)$ no lo están, a pesar de que son disjuntos.

(2) En (\mathbb{R}^2, d_2) los conjuntos A y B siguientes están separados

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\} \quad \text{y} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

(3) En \mathbb{R} con la topología usual, \mathbb{Q} y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ no están separados.

Definición 6.2 Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) se dice que es **conexo** si X no es unión de dos subconjuntos no vacíos y separados. En caso contrario diremos que X es no conexo.

Proposición 6.1 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $A, B \subset X$ dos subconjuntos disjuntos tales que $X = A \cup B$. Son equivalentes:

- (a) X es no conexo (A y B están separados).
- (b) A y B son cerrados.
- (c) A y B son abiertos.

Demostración. **(a) \Rightarrow (b)** Supongamos que A y B están separados, es decir, que $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ y veamos que A es cerrado. Podemos poner

$$\bar{A} = \bar{A} \cap X = \bar{A} \cap (A \cup B) = (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup \emptyset = A.$$

Por tanto, $A = \bar{A}$ de donde A es cerrado. Análogamente se prueba que B también es cerrado.

(b) \Rightarrow (c) Suponemos ahora que A y B son cerrados. Como $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$ entonces $A = B^c$ y $B = A^c$. Por tanto, A y B son abiertos (pues son complementarios de cerrados).

(c) \Rightarrow (a) Supongamos que A y B son abiertos y que $A \cup B = X$. Tal y como hemos visto, A y B son cerrados (pues son complementarios de abiertos). Entonces $\bar{A} \cap B = A \cap B = \emptyset$ y $A \cap \bar{B} = A \cap B = \emptyset$, luego A y B están separados. \square

La conexión se puede formular de otro modo:

Corolario 6.2 Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es conexo si, y sólo si, los únicos conjuntos que son, a la vez, abiertos y cerrados son X y \emptyset .

La **Proposición 6.1** nos permite introducir un nuevo concepto.

Definición 6.3 Sea X un espacio topológico. Una **separación** de X es un par U, V de abiertos (o cerrados) disjuntos no triviales de X cuya unión es X .

Obviamente, la conexión es una propiedad topológica, ya que se formula completamente en términos de la colección de los conjuntos abiertos (o de los cerrados) de X . En otras palabras, si X es un espacio conexo, también lo es cualquier espacio homeomorfo a X .

Obsérvese que si A es un subconjunto propio no vacío de X que es a la vez abierto y cerrado, entonces los conjuntos $U = A$ y $V = X - A$ constituyen una separación de X . Recíprocamente, si U y V forman una separación de X , entonces U es un subconjunto propio no vacío de X que es abierto y cerrado.

1.1. Subespacios conexos

Definición 6.4 Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) y un subconjunto $S \subset X$. Diremos que S es un **subespacio conexo** si (S, \mathcal{T}_S) es conexo.

Proposición 6.3 Un subconjunto S de un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es conexo si, y sólo si, no existen dos subconjuntos $A, B \subset X$ separados tales que $A \cup B = S$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la definición de topología relativa y la **Proposición 6.1**. □

Ejemplo 6.2. Cualquier espacio topológico con la topología trivial (o con la topología discreta) es conexo.

Ejemplo 6.3. Sea Y el subespacio $[-1, 0) \cup (0, 1]$ de la recta real \mathbb{R} . Los conjuntos $[-1, 0)$ y $(0, 1]$ son no vacíos y abiertos en Y (aunque no en \mathbb{R}); de esta forma, constituyen una separación de Y . Por otra parte, obsérvese que ninguno de estos conjuntos contiene puntos límite del otro.

Ejemplo 6.4. Sea X el subespacio $[-1, 1]$ de la recta real. Los conjuntos $[-1, 0]$ y $(0, 1]$ son disjuntos y no vacíos pero no forman una separación de X ya que el primer conjunto no es abierto en X . Por otro lado, obsérvese que el primer conjunto contiene un punto límite, el 0, del segundo. De hecho, probaremos enseguida que no existe una separación del espacio $[-1, 1]$.

Ejemplo 6.5. El conjunto de los números racionales \mathbb{Q} no es conexo. Es más, los únicos subespacios conexos de \mathbb{Q} son los conjuntos unipuntuales: si Y es un subespacio de \mathbb{Q} conteniendo dos puntos p y q , es posible elegir un número irracional a entre p y q y escribir Y como la unión de los abiertos

$$Y \cap (-\infty, a) \quad \text{e} \quad Y \cap (a, +\infty).$$

1.2. Construcción de espacios conexos

Teorema 6.4 La unión de una colección de subespacios conexos de X que tienen un punto en común es conexa.

Demostración. Sea $\{A_i\}$ una colección de subespacios conexos de un espacio X y sea p un punto de $\bigcap A_i$. Probemos que el espacio $Y = \bigcup A_i$ es conexo. Supongamos que $Y = C \cup D$ es una separación de Y . El punto p está, bien en C bien en D ; supongamos que $p \in C$. Como A_i es conexo, ya $A_i \subset C$, ya $A_i \subset D$, aunque esta última posibilidad se descarta pues $p \in A_i$ y $p \in C$. Por tanto, $A_i \subset C$ para cada i , y así $\bigcup A_i \subset C$, contradiciendo el hecho de que D era no vacío. \square

Este resultado puede enunciarse de una forma más general como sigue.

Teorema 6.5 La unión de una colección de subespacios conexos de X tales que no están separados dos a dos es conexa.

Demostración. Hagamos la prueba por reducción al absurdo. Supongamos que $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ es no conexo; entonces existe $B \subset A$, $B \neq A$ no vacío que es abierto y cerrado en (A, \mathcal{T}_A) .

Como $B \neq \emptyset$, existe $x \in B \subset A$ y como $B \neq A$ existe $y \in A$, $y \notin B$. Por tanto, existen índices $i_x, i_y \in I$ tales que $x \in A_{i_x}$ e $y \in A_{i_y}$. Entonces $B \cap A_{i_x} \neq \emptyset$ es abierto y cerrado en $(A_{i_x}, \mathcal{T}_{i_x})$ que es conexo por hipótesis, luego $B \cap A_{i_x} = A_{i_x}$ lo que implica que $A_{i_x} \subset B$.

De la misma forma $(A - B) \cap A_{i_y} \neq \emptyset$ es abierto y cerrado en $(A_{i_y}, \mathcal{T}_{i_y})$, luego $(A - B) \cap A_{i_y} = A_{i_y}$, lo que implica que $A_{i_y} \subset B - A$.

Pero A y $A - B$ están separados en (A, \mathcal{T}_A) , pues son dos abiertos y cerrados no vacíos cuya unión es A , lo que lleva consigo que A_{i_x} y A_{i_y} también están separados, en contra de la hipótesis, lo que concluye la prueba. \square

Corolario 6.6 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos conexos no vacíos de X tales que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para cada par $i, j \in I$. Entonces $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ es conexo.

Teorema 6.7 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Entonces se verifican:

- (a) Si $H \subset X$ es un subconjunto conexo y $S \subset X$ tal que $H \subset S \subset \bar{H}$, entonces S es conexo.
- (b) Si S es un subconjunto conexo de X , entonces \bar{S} es conexo.

Demostración. (a) Si $x \in H$, entonces $H \cup \{x\}$ es conexo puesto que H y $\{x\}$ son conexos no separados ($\bar{H} \cap \{x\} = \{x\}$). Entonces podemos poner $S = \bigcup_{x \in S} (H \cup \{x\})$ y, teniendo en cuenta que $H \subset S \subset \bar{H}$, S es unión de conexos no disjuntos, lo que implica que S es conexo.

- (b) Es una consecuencia inmediata de (a). \square

2. Conexos en \mathbb{R}

Antes de seguir con las propiedades de los espacios conexos en general, bueno será que estudiemos los subespacios conexos que tenemos más cercanos, es decir, los subespacios conexos de la recta real. Éste es el mejor sitio para encontrar subespacios conexos que podamos utilizar para construir otros nuevos y más complicados.

Lema 6.8 Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y un subconjunto $I \subset \mathbb{R}$. Son equivalentes:

- (a) I es un intervalo.
- (b) Para cada $x, y \in I$, $x \leq y$, se verifica que $[x, y] \subset I$.

Demostración. Supongamos que se satisface (b) (la otra implicación es trivial). Llamemos

$$a = \inf I \quad \text{y} \quad b = \sup I,$$

teniendo en cuenta que si I no está acotado inferiormente entonces $a = -\infty$ y si I no está acotado superiormente entonces $b = +\infty$. Vamos a ver que ha de ocurrir que $(a, b) \subset I \subset [a, b]$. En los casos $a = -\infty$ y/o $b = +\infty$ estaremos cometiendo un pequeño abuso de notación.

Si $z \in (a, b)$, tenemos que $a < z$ y por la definición de ínfimo, existe $x \in I$ tal que $x < z$; de la misma manera tenemos que $z < b$ y por la definición de supremo, existe $y \in I$ tal que $z < y$. Entonces, como $x < y$ con $x, y \in I$, por la hipótesis (b), $z \in [x, y] \subset I$, luego $(a, b) \subset I$. El contenido $I \subset [a, b]$ es por la propia definición de a y de b . \square

Teorema 6.9 Un subconjunto $S \subsetneq \mathbb{R}$, con la topología usual, es conexo si, y sólo si, es un intervalo o un conjunto unipuntual.

Demostración. \Rightarrow Supongamos que S es conexo y que no es un conjunto unipuntual ni es un intervalo; entonces existen $x, y \in S$ tales que $[x, y]$ no está contenido en S , es decir, existe $z \in (x, y)$ tal que $z \notin S$. Consideremos los conjuntos

$$A = (-\infty, z) \cap S \quad \text{y} \quad B = (z, +\infty) \cap S.$$

Entonces $S = A \cup B$, siendo $\{A, B\}$ una separación de S , en contra de que S es conexo.

\Leftarrow Supongamos ahora que S es un intervalo y que es no conexo. Esto quiere decir que existen $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y separados tales que $S = A \cup B$. Sean $x \in A$, $y \in B$ y supongamos que $x < y$. Como S es un intervalo, el **Lema 6.8** implica $[x, y] \subset S$.

Consideremos el conjunto $C = [x, y] \cap A$, que es no vacío ($x \in A$) y está acotado superiormente por y ; por tanto, existe $\alpha = \sup C$.

Tenemos entonces que $x \leq \alpha \leq y$, es decir, $\alpha \in [x, y] \subset S$. Por tanto, o bien $\alpha \in A$ o bien $\alpha \in B$, pero no a los dos. Supongamos que $\alpha \in A$, esto implica que $\alpha < y$. Como A es abierto en S , por definición de topología relativa existirá G abierto en (X, \mathcal{T}) tal que $A = G \cap S$. Luego $\alpha \in G$, de modo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset G$. Además, $\alpha < y$, de modo que podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha + \varepsilon < y$, luego $\alpha + \varepsilon \in S$ y, por tanto, $\alpha + \varepsilon \in G \cap S = A$, en contra de que α es supremo. De forma análoga se ve que α no puede estar en B . \square

Corolario 6.10 \mathbb{R} con la topología usual es un espacio conexo.

CUESTION 6.1. En \mathbb{R} con la topología usual, ¿es conexo el conjunto $S = [0, 1) \cup [2, 3]$?

(a) Sí (b) No

2.1. Conexión por caminos

La conexión de los intervalos en \mathbb{R} nos conduce a la condición de que cualquier par de puntos de X pueda unirse mediante un *camino* en X . Y esto nos lleva a la conexión por caminos (también llamada conexión por arcos).

Definición 6.5 Dados dos puntos x e y de un espacio X , un **camino** en X que une x con y es una aplicación continua $f : [a, b] \rightarrow X$ de algún intervalo cerrado de la recta real en X , de modo que $f(a) = x$ y $f(b) = y$. Un espacio X se dice que es **conexo por caminos** si cada par de puntos de X se pueden unir mediante un camino en X .

EJERCICIO 6.1. Prueba que todo espacio conexo por caminos es también conexo.

El recíproco de esta implicación no es cierto; un espacio conexo no es necesariamente conexo por caminos.

EJERCICIO 6.2. Se define la **bola unidad** B^n en \mathbb{R}^n como

$$B^n = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\},$$

donde

$$\|\mathbf{x}\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

Prueba que B^n es conexa por caminos.

EJERCICIO 6.3. Se define el **espacio euclídeo agujereado** como el espacio $\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$, donde $\mathbf{0}$ es el origen en \mathbb{R}^n . ¿Para qué dimensiones n es conexo por caminos?

EJERCICIO 6.4. Se define la **esfera unidad** S^{n-1} en \mathbb{R}^n como el conjunto

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

¿Es conexa por caminos?

3. Conexión y continuidad

Teorema 6.11 Sean (X, \mathcal{T}_X) e (Y, \mathcal{T}_Y) dos espacios topológicos, $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua y $S \subset X$ un subconjunto conexo en X . Entonces $f(S)$ es conexo en Y .

Demostración. Supongamos que $f(S)$ es no conexo, entonces existen $A, B \subset Y$ no vacíos y separados tales que $f(S) = A \cup B$. Como $f : S \rightarrow f(S)$ es continua y A y B son abiertos y cerrados en $f(S)$ con la topología relativa, tendremos que $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ serán abiertos y cerrados en S con la topología relativa inducida por \mathcal{T}_X . Además son

no vacíos, disjuntos y cumplen

$$S = f^{-1}(f(S)) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$

con lo que S sería no conexo. □

Corolario 6.12 Sean (X, \mathcal{T}_X) y (Y, \mathcal{T}_Y) dos espacios topológicos homeomorfos. Entonces X es conexo si, y sólo si, Y es conexo. En otras palabras, la conexión es una propiedad topológica.

Corolario 6.13 Un espacio topológico (X, \mathcal{T}_X) es conexo si, y sólo si, cualquier aplicación continua entre X y el espacio discreto $\{0, 1\}$ es constante, es decir, ya $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, ya $f(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Lema 6.14 Si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico no conexo, existe una aplicación $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ continua y no constante.

Demostración. Si (X, \mathcal{T}) es no conexo, entonces $X = A \cup B$ con A y B abiertos y cerrados disjuntos. Definimos $f(x) = 0$ si $x \in A$ y $f(x) = 1$ si $x \in B$. Esta aplicación es continua, puesto que $f^{-1}(\{0\})$ es abierto y cerrado, y lo mismo ocurre para $\{1\}$. Ahora basta aplicar el **Corolario 6.13**. □

Teorema 6.15 (Teorema del valor intermedio) Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es conexo si, y sólo si, cada aplicación continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ cumple que si $x, y \in X$ y $c \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x) \leq c \leq f(y)$, entonces existe $z \in X$ tal que $f(z) = c$.

Demostración. \Rightarrow Si X es conexo, entonces $f(X)$ es conexo en \mathbb{R} y, por tanto, es un intervalo.

\Leftarrow Supongamos que X fuera no conexo, entonces $X = A \cup B$ con A y B no vacíos y separados. Consideramos una función $g : X \rightarrow \{0, 1\}$ continua como en el **Lema 6.14** y tal que $g(A) = \{0\}$ y $g(B) = \{1\}$. Consideremos la composición de g con la inclusión i de $\{0, 1\}$ en \mathbb{R} . Tendremos una aplicación $g \circ i$ continua de X en \mathbb{R} , que no cumple las hipótesis. \square

El teorema anterior puede enunciarse en un contexto más general.

Teorema 6.16 (Versión general del teorema del valor intermedio) Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua, donde X es un espacio conexo e Y es un conjunto ordenado con la topología del orden. Si x e y son dos puntos de X y c es un punto de Y que se encuentra entre $f(x)$ y $f(y)$, entonces existe un punto z en X tal que $f(z) = c$.

Demostración. Supongamos las hipótesis del teorema. Los conjuntos

$$A = f(X) \cap (-\infty, c) \quad \text{y} \quad B = f(X) \cap (c, +\infty)$$

son disjuntos, y además son no vacíos pues uno contiene a $f(x)$ mientras el otro contiene a $f(y)$. Cada uno es abierto en la imagen $f(X)$ ya que son la intersección de un rayo

abierto en Y con $f(X)$. Si no existiera un punto z de X tal que $f(z) = c$, entonces $f(X)$ sería la unión de los conjuntos A y B . Entonces A y B constituirían una separación de $f(X)$, lo cual contradice el hecho de que la imagen de un conjunto conexo bajo una aplicación continua sigue siendo un conjunto conexo. \square

4. Conexión y productos cartesianos

Teorema 6.17 El producto cartesiano finito de espacios conexos es conexo.

Demostración. Vamos a demostrar primero el resultado para el producto de dos espacios conexos X e Y . La prueba es sencilla de visualizar. Elijamos un “punto base” $a \times b$ en el producto $X \times Y$. Obsérvese que la “rebanada horizontal” $X \times b$ es conexa, ya que es homeomorfa a X , y que también lo es cada “rebanada vertical” ya que éstas son homeomorfas a Y . Como consecuencia, cada espacio

$$T_x = (X \times b) \cup (x \times Y)$$

es conexo ya que es la unión de dos espacios conexos que tienen el punto $x \times b$ en común. Ahora, consideremos la unión $\bigcup_{x \in X} T_x$ de todos estos espacios. Como todos tienen al punto $a \times b$ en común, esta unión es conexa. Pero esta unión es el espacio total $X \times Y$.

La prueba para cualquier colección finita de espacios conexos puede realizarse por inducción, utilizando el hecho (fácilmente demostrable) de que $X_1 \times \cdots \times X_n$ es homeomorfo a $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$. \square

5. Problemas propuestos

Problema 6.1. Demuestre que si A y B son dos subconjuntos disjuntos de un espacio topológico y ambos son abiertos o ambos son cerrados, entonces están separados.

Problema 6.2. Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}' dos topologías en X . Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, ¿qué puede decir de la conexión de X respecto de una topología y respecto de la otra?

Problema 6.3. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para cada n . Demuestre que $\bigcup A_n$ es conexo.

Problema 6.4. Sean $\{A_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X . Demuestre que si $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo α , entonces $A \cup (\bigcup A_\alpha)$ es conexo.

Problema 6.5. Demuestre que si X es un conjunto infinito, entonces X es conexo con la topología de los complementos finitos (o topología cofinita).

Problema 6.6. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $A, B \subset X$ separados. Pruebe:

- (a) Si $A \cup B$ es abierto, entonces A y B son abiertos.
- (b) Si $A \cup B$ es cerrado, entonces A y B son cerrados.

Problema 6.7. ¿Son homeomorfos $[0, 1)$ y $(0, 1)$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$? Justifique la respuesta.

Problema 6.8. ¿Son homeomorfos $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$? Justifique la respuesta.

Problema 6.9. ¿Es conexa la intersección de dos subconjuntos conexos? Justifique la respuesta.

Problema 6.10. Demuestre que si (X, \mathcal{T}) es conexo y $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es una aplicación continua, entonces $f(X)$ es un intervalo.

Problema 6.11. ¿Son homeomorfos la recta real y una circunferencia?

Problema 6.12. Sea (X, d) un espacio métrico, $M \subset X$ un subconjunto conexo y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua.

- Pruebe que si $a \in M$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ es tal que $f(a) < \alpha$ entonces existe U , entorno de a , tal que $f(x) < \alpha$ para todo $x \in M \cap U$.
- Supongamos que para todo entorno U de $a \in M$ existen puntos $x, y \in U \cap M$ tales que $f(x)$ y $f(y)$ son de signos opuestos; demuestre que $f(a) = 0$.
- Pruebe que si para $a, b \in M$, $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, existe $c \in M$ tal que $f(c) = 0$.

Problema 6.13. Sea E un espacio topológico y $A \subset E$ un subconjunto. Demuestre que todo subconjunto conexo $P \subset E$ que corte a A y A^c , también corta a la frontera de A .

Problema 6.14. Sea E un espacio topológico, $A, B \subset E$ dos cerrados tales que $A \cap B$ y $A \cup B$ son conexos. Pruebe que, entonces, A y B son conexos. Busque un contraejemplo

en \mathbb{R} , con la topología usual, mostrando que la exigencia de que A y B sean cerrados es necesaria.

Problema 6.15. Sea E un conjunto totalmente ordenado, dotado de la topología del orden. Demuestre que si E es conexo, entonces

- (a) Para todo $x, y \in E$ con $x < y$, el intervalo (x, y) es no vacío.
- (b) Todo subconjunto $A \subset E$ acotado superiormente admite supremo.

Problema 6.16. Sean A un subconjunto propio de X y B un subconjunto propio de Y . Si X e Y son conexos, demuestre que

$$(X \times Y) - (A \times B)$$

es conexo.

Problema 6.17. Sea $Y \subset X$ y supongamos que X e Y son conexos. Demuestre que si A y B forman una separación de $X - Y$, entonces $Y \cup A$ e $Y \cup B$ son conexos.

Problema 6.18.

- (a) Dados los espacios $(0, 1)$, $(0, 1]$ y $[0, 1]$, demuestre que ningún par de ellos son homeomorfos.
- (b) Supongamos que existen embebimientos $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$. Demuestre, con un ejemplo, que X e Y no son necesariamente homeomorfos.

(c) Demuestre que \mathbb{R}^n y \mathbb{R} no son homeomorfos si $n > 1$.

Problema 6.19. Sea $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua. Demuestre que existe un punto de S^1 tal que $f(x) = f(-x)$.

Problema 6.20. Sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Demuestre que si $X = [0, 1]$, entonces existe un punto x tal que $f(x) = x$. El punto x se llama un **punto fijo** de f . ¿Qué ocurre si X es el espacio $[0, 1)$ o el espacio $(0, 1)$?

Fin del Capítulo

Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 6.1. Es sencillo comprobar que todo espacio X que es conexo por caminos también es un espacio conexo. Supongamos que $X = A \cup B$ es una separación de X . Sea $f : [a, b] \rightarrow X$ un camino en X . Como $[a, b]$ es conexo, entonces el conjunto $f([a, b])$ debe estar contenido ya en A , ya en B . Por tanto, no existen caminos en X que unan puntos de A con puntos de B lo cual es contrario al hecho de que X sea conexo por caminos.

Ejercicio 6.1

Ejercicio 6.2. La bola unidad es conexa por caminos; dados dos puntos cualesquiera \mathbf{x} e \mathbf{y} de B^n , el segmento de línea recta $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$f(t) = (1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$$

está enteramente contenido en B^n ya que

$$\|f(t)\| \leq (1 - t)\|\mathbf{x}\| + t\|\mathbf{y}\| \leq 1.$$

Ejercicio 6.2

Ejercicio 6.3. Si $n > 1$, este espacio es conexo por caminos: dados \mathbf{x} e \mathbf{y} distintos de $\mathbf{0}$, podemos unir \mathbf{x} e \mathbf{y} con el segmento de línea recta que ambos determinan si este segmento no pasa por el origen. En caso de que así ocurriera, podemos elegir otro punto \mathbf{z} que no esté contenido en la recta que determinan \mathbf{x} e \mathbf{y} y a continuación considerar la línea recta quebrada que determinan \mathbf{x} , \mathbf{z} y finalmente \mathbf{y} .

Ejercicio 6.3

Ejercicio 6.4. Si $n > 1$, S^{n-1} es conexa por caminos ya que la aplicación $g : \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\} \rightarrow S^{n-1}$ definida por $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ es continua y sobreyectiva y es sencillo demostrar que la imagen bajo una aplicación continua de un espacio conexo por caminos es también conexo por caminos.

Ejercicio 6.4