



UNIVERSIDAD DE MURCIA
Departamento de Matemáticas

Topología

4. Subconjuntos y puntos notables

Pedro José Herrero y Pascual Lucas

Resumen: En este capítulo introducimos la adherencia de un conjunto y sus principales propiedades, y particularizamos el concepto a los espacios métricos. Presentamos los conjuntos densos y numerables. Estudiamos los puntos aislados, de acumulación, interiores, exteriores y frontera. Cuando entra en juego un subespacio, es necesario estudiar la adherencia, interior y frontera relativos. Finalizamos con una sección dedicada a las sucesiones.

Índice general

1. Adherencia

1.1. La adherencia en un espacio métrico

1.2. Caracterización de la adherencia

1.3. Subconjuntos densos y espacios separables

2. Puntos aislados y puntos de acumulación

3. Interior y frontera

- Puntos interiores
- Puntos frontera
- Relación entre interior, clausura y frontera

4. Adherencia, interior y frontera relativos

- Adherencia relativa
- Interior relativo
- Frontera relativa

5. Sucesiones

5.1. Sucesiones convergentes y bases de entornos

5.2. Sucesiones y espacios métricos

- Unicidad del límite
- Puntos adherentes, conjuntos densos y puntos frontera

6. Problemas propuestos

Soluciones de los ejercicios

Soluciones de las cuestiones

1. Adherencia


Definición 4.1 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y sea S un subconjunto de X . Se dice que $x \in X$ es un **punto adherente** de S si todo entorno U de x cumple que $U \cap S \neq \emptyset$, es decir, no hay ningún entorno de x totalmente contenido en $X - S$. El conjunto de puntos adherentes de S se llama la **adherencia** o la **clausura** de S y se representa por \overline{S} .

Nota 4.1 Tal y como hemos definido la adherencia de un conjunto S , es evidente que $S \subset \overline{S}$.

Proposición 4.1 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, S_1 y S_2 subconjuntos de X . Entonces se satisface lo siguiente:

- (a) Si $S_1 \subset S_2$ entonces $\overline{S_1} \subset \overline{S_2}$.
- (b) $\overline{S_1} \cup \overline{S_2} = \overline{S_1 \cup S_2}$.

Demostración.

- (a) Si $x \in \overline{S_1}$, entonces para todo $U \in \mathcal{U}_x$ se cumple que $U \cap S_1 \neq \emptyset$. Como $U \cap S_1 \subset U \cap S_2$, se cumple también que $U \cap S_2 \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \overline{S_2}$.
- (b)  Tenemos que $S_1 \subset S_1 \cup S_2$ y $S_2 \subset S_1 \cup S_2$, luego por la propiedad (a) se cumple que $\overline{S_1} \subset \overline{S_1 \cup S_2}$ y $\overline{S_2} \subset \overline{S_1 \cup S_2}$. Por tanto $\overline{S_1} \cup \overline{S_2} \subset \overline{S_1 \cup S_2}$.

▢ Para ver la inclusión contraria, sea $x \in \overline{S_1 \cup S_2}$. Si x no es adherente a S_1 ni a S_2 , existirán dos entornos $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x$ tales que $U_1 \cap S_1 = \emptyset$ y $U_2 \cap S_2 = \emptyset$.

Por otra parte, $U_1 \cap U_2$ es un entorno de x y cumple que $(U_1 \cap U_2) \cap (S_1 \cup S_2) = \emptyset$; pero esto es contradictorio con el hecho de que $x \in \overline{S_1 \cup S_2}$ pues todo entorno de x debería cortar a $S_1 \cup S_2$.

□

La definición no nos da un método adecuado para encontrar la clausura de un conjunto, ya que exige que se compruebe una propiedad para todos los entornos de un punto. Por tanto, sería útil disponer de una caracterización que permita reducir el número de comprobaciones. Esta es una de las razones más importantes de la utilidad del concepto de base de entornos.

Proposición 4.2 Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, $S \subset X$ un subconjunto de X , $x \in X$ y $\mathcal{B}(x)$ un base de entornos de x en la topología \mathcal{T} . Entonces $x \in \overline{S}$ si, y sólo si, $V \cap S \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{B}(x)$.

Demostración. \Rightarrow Supongamos que $x \in \overline{S}$ y $V \in \mathcal{B}(x)$. Como $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}_x$, según la definición de punto adherente se tiene que $V \cap S \neq \emptyset$.

\Leftarrow Supongamos ahora que todo $V \in \mathcal{B}(x)$ cumple que $V \cap S \neq \emptyset$. Como $\mathcal{B}(x)$ es base de entornos de x , para todo $U \in \mathcal{U}_x$ existe un entorno $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V \subset U$. Como $V \cap S \neq \emptyset$ y $V \cap S \subset U \cap S$ tenemos que $U \cap S \neq \emptyset$. □

1.1. La adherencia en un espacio métrico

En particular, si la topología está generada por una distancia, se pueden utilizar bases de entornos formadas por bolas y obtener los siguientes resultados particulares.

Corolario 4.3 Sea (X, d) un espacio métrico y S un subconjunto de X . Entonces $x \in X$ es un punto adherente de S ($x \in \bar{S}$) si, y sólo si, $B(x, r) \cap S \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.

Corolario 4.4 Sea (X, d) un espacio métrico y S un subconjunto de X . Entonces $x \in X$ es un punto adherente de S ($x \in \bar{S}$) si, y sólo si, para todo $n \in \mathbb{N}$ la bola $B(x, \frac{1}{n})$ de centro x y radio $\frac{1}{n}$ corta a S .

Ejemplo 4.1. Sea X la recta real \mathbb{R} . Si $A = (0, 1]$ entonces $\bar{A} = [0, 1]$, ya que cada entorno del número 0 interseca a A , mientras que cada punto fuera de $[0, 1]$ tiene un entorno disjunto con A .

EJERCICIO 4.1. Determina la clausura de los siguientes conjuntos:

- (1) $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$.
- (2) $C = \{0\} \cup (1, 2)$.
- (3) \mathbb{Q} (el conjunto de los números racionales).
- (4) \mathbb{N} (el conjunto de los números enteros).
- (5) \mathbb{R}_+ (el conjunto de los números reales positivos).

La clausura de un subespacio depende del espacio ambiente donde se considere, como se prueba en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2. Consideremos el subespacio $Y = (0, 1]$ de la recta real \mathbb{R} . El conjunto $A = (0, \frac{1}{2})$ es un subconjunto de Y ; su clausura en \mathbb{R} es el conjunto $[0, \frac{1}{2}]$, y su clausura en Y es el conjunto $[0, \frac{1}{2}] \cap Y = (0, \frac{1}{2}]$.

La propiedad más característica de la adherencia de un conjunto S es la de que es el menor cerrado que contiene al conjunto S . Veamos primero que la clausura es un conjunto cerrado.

Proposición 4.5 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $S \subset X$ un subconjunto. Entonces la clausura \bar{S} es un cerrado en (X, \mathcal{T}) .

Demostración. Veamos que $X - \bar{S}$ es un abierto comprobando que es un entorno de todos sus puntos. Sea $x \in X - \bar{S}$, entonces x no es un punto adherente, por lo que existe un entorno U de x tal que $U \cap S = \emptyset$. Como U es un entorno de x existe un abierto $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subset U$. Por tanto, $A \cap S = \emptyset$.

Veamos que $A \subset X - \bar{S}$, con lo que $X - \bar{S}$ será abierto. Para todo $y \in A$, el conjunto abierto A será un entorno de y que no corta a S , luego $y \notin \bar{S}$. Es decir, $A \subset X - \bar{S}$. Por tanto, $X - \bar{S}$ es un entorno de x . Y esto para todo x que no esté en \bar{S} , por lo que $X - \bar{S}$ es abierto. \square

1.2. Caracterización de la adherencia

Proposición 4.6 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, $S \subset X$ un subconjunto y $C \subset X$ un cerrado tal que $S \subset C$. Entonces $\bar{S} \subset C$. En otras palabras, \bar{S} es el menor cerrado que contiene a S .

Demostración. Razonaremos por reducción al absurdo. Sea C un cerrado con $S \subset C$ y supongamos que $\bar{S} \not\subset C$, es decir, que existe un punto $x \in \bar{S}$ tal que $x \notin C$. Entonces $X - C$ es un abierto que contiene al punto x y como que $S \subset C$, se cumple que $(X - C) \cap S = \emptyset$. Por tanto, x no es un punto adherente de S , lo cual es una contradicción. \square

Como consecuencia tenemos la siguiente caracterización de la adherencia.

Corolario 4.7 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $S \subset X$ un subconjunto. Entonces la adherencia \bar{S} de S es la intersección de todos los conjuntos cerrados de X que contienen a S .

En particular, la propiedad anterior proporciona una caracterización de los conjuntos cerrados como aquellos que contienen a todos sus puntos adherentes.

Corolario 4.8 Un conjunto C en un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es cerrado si, y sólo si, $\bar{C} = C$.

CUESTION 4.1. ¿Son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones?

1. En un espacio topológico trivial, la adherencia de cualquier conjunto no vacío es el espacio total.
(a) Verdadero (b) Falso
2. En un espacio topológico discreto, la adherencia de cualquier conjunto S es el propio S .
(a) Verdadero (b) Falso
3. En la topología cofinita (X, \mathcal{T}_{cf}) , la adherencia de cualquier conjunto está formada por el propio conjunto.
(a) Verdadero (b) Falso
4. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$.
(a) Verdadero (b) Falso

En el caso de los espacios métricos, los puntos adherentes pueden ser caracterizados en términos de la distancia.

Proposición 4.9 Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subset X$ un subconjunto. Entonces un punto $x \in \bar{S}$ si, y sólo si, la distancia de x a S es $d(x, S) = 0$.

Demostración. Supongamos que $x \in \bar{S}$ y que $d(x, S) = \lambda > 0$; entonces $B(x, \lambda/2) \cap S = \emptyset$, lo que contradice el hecho de que x es un punto de adherencia de S .

Recíprocamente, si $d(x, S) = 0$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $y \in S$ tal que $d(x, y) < \frac{1}{n}$, de modo que $B(x, 1/n) \cap S \neq \emptyset$. Por tanto, x es un punto de adherencia de S . \square

1.3. Subconjuntos densos y espacios separables

Definición 4.2 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Un subconjunto $S \subset X$ se dice que es **denso** en X si $\bar{S} = X$.

Los subconjuntos densos pueden ser caracterizados de la siguiente forma.

Proposición 4.10 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $S \subset X$. Entonces S es denso en (X, \mathcal{T}) si, y sólo si, $A \cap S \neq \emptyset$ para todo abierto $A \in \mathcal{T}$.

Demostración. \Leftarrow Supongamos que $S \subset X$ es denso, es decir, $\bar{S} = X$ y sea $A \neq \emptyset$ un abierto. Si $x \in A$, como $x \in \bar{S} = X$ y A es entorno de x se cumple, por la definición de adherencia, que $A \cap S \neq \emptyset$.

\Leftarrow Supongamos ahora que todo abierto $A \neq \emptyset$ satisface $A \cap S \neq \emptyset$. Si suponemos que $\bar{S} \neq X$, entonces $X - \bar{S}$ sería un abierto no vacío, pero $(X - \bar{S}) \cap S = \emptyset$, en contra de lo supuesto. Por tanto, $\bar{S} = X$. \square

Ejemplo 4.3. El conjunto de los racionales \mathbb{Q} es denso en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. Por tanto, \mathbb{R} contiene un subconjunto numerable denso.

Definición 4.3 Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es **separable** si contiene un subconjunto numerable denso.

Ejemplo 4.4. La recta real $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es separable.

2. Puntos aislados y puntos de acumulación

Definición 4.4 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $S \subset X$. Diremos que un punto $x \in X$ es un **punto de acumulación** (o **punto límite**) de S en (X, \mathcal{T}) si cualquier entorno U de x contiene un punto de S distinto de x . Es decir, si $(U - \{x\}) \cap S \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos de acumulación de S se dice que es la **acumulación** o **conjunto derivado** de S , y se representa por S' .

Un concepto dual en cierto sentido es el de punto aislado.

Definición 4.5 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $S \subset X$. Diremos que un punto $x \in S \subset X$ es un **punto aislado** de S en (X, \mathcal{T}) si existe un entorno U de x tal que $U \cap S = \{x\}$.

El siguiente resultado da una relación entre puntos límites y puntos aislados.

Proposición 4.11 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $S \subset X$. Entonces:

- (a) El conjunto de puntos aislados de S es $\bar{S} - S'$.

$$(b) \bar{S} = S \cup S'.$$

Demostración. Probaremos el apartado (b), dejando el apartado (a) como ejercicio.

► Si $x \in S'$, cada entorno de x interseca a S en un punto distinto de x , luego $x \in \bar{S}$. Entonces $S' \subset \bar{S}$ y puesto que $S \subset \bar{S}$, se sigue que $S \cup S' \subset \bar{S}$.

◀ Supongamos ahora que x es un punto de \bar{S} . Si ocurre que x pertenece a S , es trivial que $x \in S \cup S'$; supongamos que $x \notin S$. Como $x \in \bar{S}$, sabemos que cada entorno U de x interseca a S ; al tener que $x \notin S$, el conjunto U debe intersecar a S en un punto distinto de x . Entonces $x \in S'$, por lo que $x \in S \cup S'$, como queríamos. ◻

CUESTION 4.2. Consideremos la recta real \mathbb{R} .

1. ¿El punto 0 es un punto límite de $A = (0, 1]$?

(a) Sí

(b) No

2. Si $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$, entonces ...

(a) $B' = [-1, 1]$

(b) $B' = \{0\}$

(c) $B' = \mathbb{R}$

3. Si $C = \{0\} \cup (1, 2)$, entonces C' es igual a ...

(a) $[1, 2]$

(b) $[0, 2]$

(c) $[1, 2)$

EJERCICIO 4.2. Determina los conjuntos derivados de \mathbb{Q} , \mathbb{N} y \mathbb{R}_+ .

En un espacio métrico (X, d) las definiciones anteriores se concretan diciendo que un punto $x \in X$ es punto de acumulación de $S \subset X$ si para todo $r > 0$ $(B(x, r) - \{x\}) \cap S \neq \emptyset$

y que un punto $x \in S \subset X$ es un punto aislado de S si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap S = \{x\}$.

Ejemplo 4.5. En \mathbb{R} con la topología usual, todo natural $n \in \mathbb{N}$ es un punto adherente de \mathbb{N} pero no es de acumulación; es decir, los naturales son puntos aislados en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. En efecto, $(B(n, \frac{1}{2}) - \{n\}) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

3. Interior y frontera

• Puntos interiores

Definición 4.6 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $S \subset X$ un subconjunto. Diremos que $x \in S$ es un **punto interior** de S si S es un entorno de x . El conjunto de los puntos interiores de S se denomina el **interior** de S y se representa por $\overset{\circ}{S}$ o $\text{Int } S$.

Un punto $x \notin S$ se dice que es **exterior** a S si $x \in \text{Int}(X - S)$.

Es obvio que para cualquier conjunto $S \subset X$ se satisface

$$\overset{\circ}{S} \subset S \subset \bar{S}.$$

Ejemplo 4.6.

(1) En \mathbb{R} con la topología usual, $\text{Int}[0, 1) = (0, 1)$.

(2) En \mathbb{R} con la topología usual, $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$. ¿Cuál es el exterior de \mathbb{Q} ?

- (3) En un espacio topológico con la topología trivial, el interior de cualquier subconjunto $S \subsetneq X$ es el vacío.

Proposición 4.12 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $S \subset X$ un subconjunto. Un punto $x \in S$ es interior de S si, y sólo si, $x \notin \overline{X - S}$. En otras palabras, el interior de S es el abierto dado por

$$\overset{\circ}{S} = X - \overline{X - S}.$$

Demostración. \Rightarrow Si $x \in \overset{\circ}{S}$, existe un abierto A tal que $x \in A \subset S$. Entonces $A \cap (X - S) = \emptyset$, por tanto, $x \notin \overline{X - S}$.

\Leftarrow Sea, ahora, $x \notin \overline{X - S}$. Como $X - S \subset \overline{X - S}$, si tomamos complementarios en esta relación cambia el sentido de la inclusión y tendremos que $X - \overline{X - S} \subset S$. Ahora bien, $X - \overline{X - S}$ es abierto, por lo que S es entorno de x , luego $x \in \overset{\circ}{S}$. \square

Una importante característica del interior de un conjunto es que se trata del mayor abierto contenido en dicho conjunto.

Proposición 4.13 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $S \subset X$ un subconjunto. Entonces si $A \subset S$ es abierto se cumple que $A \subset \overset{\circ}{S}$.

Demostración. Sea A un abierto no vacío tal que $A \subset S$ y sea x un punto de A . Como A es abierto, es un entorno de x y, por tanto, también lo es S . Entonces x es un punto

interior de S , luego $A \subset \overset{\circ}{S}$. □

En particular, esta proposición proporciona una caracterización de los conjuntos abiertos como aquellos en los que todos sus puntos son interiores:

Corolario 4.14 Un subconjunto S de un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es abierto si, y sólo si, $S = \overset{\circ}{S}$.

Se puede caracterizar el interior en términos de bases de entornos (la demostración se deja como ejercicio).

Proposición 4.15 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, $S \subset X$ y $x \in S$. Sea $\mathcal{B}(x)$ una base de entornos de x en la topología \mathcal{T} . Entonces $x \in \overset{\circ}{S}$ si, y sólo si, existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V \subset S$.

Concretemos ahora estas caracterizaciones en el caso de los espacios métricos.

Corolario 4.16 Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subset X$. Entonces $x \in \overset{\circ}{S}$ si, y sólo si, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset S$.

Observemos que la condición anterior es equivalente a que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \frac{1}{n}) \subset S$.

En el caso de espacios métricos, podemos caracterizar también el interior en términos de la distancia a un conjunto.

EJERCICIO 4.3. Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subset X$. Pruebe que un punto $x \in S$ es un punto interior de S si, y sólo si, $d(x, X - S) > 0$.

El interior posee las siguientes propiedades, que son duales de las correspondientes de la adherencia, probadas en la **Proposición 4.1**.

Proposición 4.17 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, y sean S_1 y S_2 subconjuntos de X . Entonces:

- (a) Si $S_1 \subset S_2$, entonces $\overset{\circ}{S}_1 \subset \overset{\circ}{S}_2$
- b) $\overset{\circ}{S}_1 \cap \overset{\circ}{S}_2 = \text{Int}(S_1 \cap S_2)$.

Demostración.

- (a) Si $x \in \overset{\circ}{S}_1$, esto significa que S_1 es un entorno de x . Como $S_1 \subset S_2$, S_2 también es un entorno de x . Entonces $x \in \overset{\circ}{S}_2$.
- (b) Según hemos visto en la **Proposición 4.12**:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{S}_1 \cap \overset{\circ}{S}_2 &= (X - \overline{X - S_1}) \cap (X - \overline{X - S_2}) = X - \overline{(X - S_1) \cup (X - S_2)} \\ &= X - \overline{(X - S_1) \cup (X - S_2)} = X - \overline{X - (S_1 \cap S_2)} = \text{Int}(S_1 \cap S_2) \end{aligned}$$

• Puntos frontera

Definición 4.7 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $S \subset X$ un subconjunto. Diremos que $x \in X$ es un **punto frontera** de S si todo entorno U de x cumple que $U \cap S \neq \emptyset$ y $U \cap (X - S) \neq \emptyset$. El conjunto de puntos frontera de S se denomina la **frontera** de S , y se representa por $\text{Fr}(S)$.

Como consecuencia de la definición, el siguiente resultado es obvio.

Proposición 4.18 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $S \subset X$ un subconjunto. Entonces $\text{Fr}(S) = \overline{S} \cap \overline{X - S}$.

Corolario 4.19 Si S es un subconjunto de un espacio topológico, entonces $\text{Fr}(S)$ es cerrado.

EJERCICIO 4.4.

- (a) ¿Cuánto vale la frontera de $(0, 1)$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$?
(b) ¿Cuánto vale la frontera de \mathbb{Q} en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$?

Proposición 4.20 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, $S \subset X$ un subconjunto y $\mathcal{B}(x)$ una base de entornos de un punto $x \in X$ en la topología \mathcal{T} . Entonces $x \in \text{Fr}(S)$ si, y sólo si, para todo $V \in \mathcal{B}(x)$ se cumple que $V \cap S \neq \emptyset$ y $V \cap (X - S) \neq \emptyset$.

En el caso de los espacios métricos tenemos la siguiente caracterización.

Corolario 4.21 Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subset X$ un subconjunto. Un punto $x \in \text{Fr}(S)$ si, y sólo si, para todo $r > 0$ se cumple que $B(x, r) \cap S \neq \emptyset$ y $B(x, r) \cap (X - S) \neq \emptyset$.

Observemos que, de forma equivalente, se puede decir que un punto $x \in \text{Fr}(S)$ si, y sólo si, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $B(x, \frac{1}{n}) \cap S \neq \emptyset$ y $B(x, \frac{1}{n}) \cap (X - S) \neq \emptyset$.

- **Relación entre interior, clausura y frontera**

Finalizamos esta sección con una bonita relación entre los conjuntos interior, clausura y frontera.

Proposición 4.22 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $S \subset X$ un subconjunto. Entonces la frontera de S está dada por

$$\text{Fr}(S) = \bar{S} - \overset{\circ}{S}.$$

Demostración. La **Proposición 4.18** implica que $\text{Fr}(S) = \bar{S} \cap \overline{X - S}$. Entonces usando la **Proposición 4.12** tenemos

$$\bar{S} \cap \overline{X - S} = \bar{S} \cap (X - \overset{\circ}{S}) = \bar{S} - \overset{\circ}{S},$$

que es lo que queríamos probar. □

Proposición 4.23 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces A es abierto si, y sólo si, $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.

Demostración. \Rightarrow Si A es abierto, como $\text{Fr}(A) = \bar{A} - A$ tenemos que $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.

\Leftarrow Si $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$, entonces

$$\emptyset = \text{Fr}(A) \cap A = (\bar{A} - \overset{\circ}{A}) \cap A = A - \overset{\circ}{A},$$

lo que significa que $A \subset \overset{\circ}{A}$. Por tanto, A es abierto. \square

4. Adherencia, interior y frontera relativos

• Adherencia relativa

Si tenemos un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , un subespacio suyo (H, \mathcal{T}_H) y un subconjunto $S \subset H$, se puede estudiar la adherencia de S tanto en H , \bar{S}^H , como en X , \bar{S} . ¿Cuál es la relación entre ambas? Vamos a estudiarla a continuación.

Proposición 4.24 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $H \subset X$. Consideremos el subespacio topológico (H, \mathcal{T}_H) y sea $S \subset H \subset X$. Entonces

$$\bar{S}^H = \bar{S} \cap H.$$

Demostración. \square Hemos visto que $\bar{S} \cap H$ es cerrado en H . Además, por la misma definición, tenemos que $S \subset \bar{S} \cap H$ y como la adherencia de S en H es el menor de los cerrados de H que contiene a S , tendremos que $\bar{S}^H \subset \bar{S} \cap H$.

\square Recíprocamente, sea $x \in \bar{S} \cap H$. Sea $U' \in \mathcal{E}_H(x)$. Entonces será $U' = U \cap H$ para algún $U \in \mathcal{E}(x)$. Como $x \in \bar{S}$, tendremos que $U \cap S \neq \emptyset$. Ahora bien, $U' \cap S = U \cap H \cap S = U \cap S \neq \emptyset$, por lo que $x \in \bar{S}^H$. \square

Ejemplo 4.7. La adherencia de $(0, 1)$ en $(0, \infty)$ (considerado este último como subespacio topológico de \mathbb{R} con la topología usual) es $(0, 1]$.

• Interior relativo

Proposición 4.25 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $H \subset X$. Consideremos el subespacio topológico (H, \mathcal{T}_H) y sea $S \subset H \subset X$. Entonces

$$\text{Int}_H S \supset \overset{\circ}{S} \cap H.$$

Demostración. Es claro que $\overset{\circ}{S} \cap H$ es un abierto de H incluido en S . Como $\text{Int}_H S$ es el abierto relativo más grande incluido en S , se cumple $\overset{\circ}{S} \cap H \subset \text{Int}_H S$. \square

La propiedad anterior no ayuda mucho a la hora de calcular el interior ya que, en general, la inclusión es estricta, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.8. Consideremos \mathbb{Q} como subespacio de \mathbb{R} con la topología usual. Sabemos que $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$, pero $\text{Int}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. Por tanto,

$$\mathbb{Q} = \text{Int}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \neq \overset{\circ}{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{Q} = \emptyset.$$

- **Frontera relativa**

Corolario 4.26 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $H \subset X$. Consideremos el subespacio topológico (H, \mathcal{T}_H) y sea $S \subset H \subset X$. Entonces

$$\text{Fr}_H(S) \subset \text{Fr}(S) \cap H.$$

Demostración. La frontera de S en H está dada por

$$\text{Fr}_H(S) = \overline{S^H} \cap H - \overset{\circ}{S^H} = \overline{S} \cap H \cap H - \overline{S} \cap H = \overline{S} \cap H - \overline{S} \cap H \subset \overline{S} \cap X - \overline{S} \cap H = \text{Fr}(S) \cap H.$$

□

El **Ejemplo 4.8** anterior muestra que, en general, la inclusión es estricta.

5. Sucesiones

En esta sección vamos a estudiar el concepto de sucesión en un espacio topológico general, y analizaremos la relación que existe entre puntos adherentes y convergencia

de sucesiones, relación que resulta ser especialmente interesante, y particularmente útil, en el caso de los espacios métricos.

Definición 4.8 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de X . Diremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ **converge** a x en (X, \mathcal{T}) , y lo denotaremos por $x_n \rightarrow x$ o $\lim_n x_n = x$, si para todo entorno U de x existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que si $n > n_0$, entonces $x_n \in U$. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ se dice que es **convergente** y el punto x se llama **límite** de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Ejemplo 4.9. La convergencia de una sucesión depende de la topología. Sea un conjunto X y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, con $x_n = x \in X$ para todo n , la sucesión constante x . Entonces se dan las dos situaciones siguientes:

- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cualquier punto $y \in X$ en la topología trivial (X, \mathcal{T}_T) .
- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sólo converge a x en la topología discreta (X, \mathcal{T}_D) .

5.1. Sucesiones convergentes y bases de entornos

Relacionemos las sucesiones convergentes con las bases de entornos.

Proposición 4.27 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X y $\mathcal{B}(x)$ una base de entornos de x en la topología \mathcal{T} . Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x si, y sólo si, para todo $V \in \mathcal{B}(x)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $x_n \in V$.

Demostración. \Rightarrow Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x , como $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}_x$, la condición se cumple para todos los entornos $V \in \mathcal{B}(x)$.

\Leftarrow Si $U \in \mathcal{U}_x$ es un entorno de x , como $\mathcal{B}(x)$ es base de entornos, existirá $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V \subset U$. Entonces para este V existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que si $n > n_0$ se tiene que $x_n \in V \subset U$. Por tanto, para todo $n > n_0$ se tiene que $x_n \in U$. \square

5.2. Sucesiones y espacios métricos

En el caso de los espacios métricos podemos enunciar la convergencia de sucesiones como sigue.

Corolario 4.28 Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X . Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x si, y sólo si:

$$\text{Para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } n_0 \text{ tal que } n > n_0 \implies d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Muy interesante es la siguiente consecuencia, en el que la convergencia se reduce, en el caso de los espacios métricos, al estudio de la convergencia de una sucesión de números reales:

Corolario 4.29 Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X . Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x si, y sólo si, la sucesión de las distancias $(d(x_n, x))_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 en $(\mathbb{R}, | \cdot |)$.

• Unicidad del límite

Una propiedad importante de la convergencia de sucesiones de números reales es la unicidad del límite. Ya hemos visto en el [Ejemplo 4.9](#) que esto no se cumple en los espacios topológicos generales. Sin embargo, sí es cierto para un tipo particular de espacios topológicos, que incluye a los espacios métricos.

Proposición 4.30 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico de Hausdorff y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X . Entonces, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente, su límite es único.

Demostración. Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente en X a dos puntos distintos $x \neq y$. Como X es de Hausdorff, existen entornos $U \in \mathcal{U}_x$ y $V \in \mathcal{E}(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Por otra parte, como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x , para el entorno U de x existe n_0 tal que si $n > n_0$, entonces $x_n \in U$.

Igualmente, para el entorno V de y , existe n_1 tal que si $n > n_1$, entonces $x_n \in V$. Así, para todo $n > n_1$ y $n > n_0$ a la vez, se cumple $x_n \in U$ y $x_n \in V$, lo que está en contradicción con el hecho de que $U \cap V = \emptyset$. \square

Para concluir este apartado dedicado a las sucesiones en los espacios métricos, vamos a ver que la adherencia, los subconjuntos densos y la frontera se pueden caracterizar, en un espacio métrico, en términos de sucesiones.

• Puntos adherentes, conjuntos densos y puntos frontera

Proposición 4.31 Sea (X, d) un espacio métrico y sea $S \subset X$. Entonces $x \in \bar{S}$ si, y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset S$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Demostración. \Rightarrow Supongamos que $x \in \bar{S}$. Sabemos que $\{B(x, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos de x en (X, d) . Por tanto, $B(x, \frac{1}{n}) \cap S \neq \emptyset$. Podemos construir entonces una sucesión de la siguiente forma:

- Para $n = 1$ tomamos $x_1 \in B(x, 1) \cap S$.
- Para $n = 2$ tomamos $x_2 \in B(x, \frac{1}{2}) \cap S$.
- Y así sucesivamente: para cada n tomamos $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap S$.

De esta manera obtenemos una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de S que converge a x evidentemente.

\Leftarrow Si existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en S tal que $x_n \rightarrow x$, entonces para todo $U \in \mathcal{U}_x$ existe n_0 tal que $n > n_0$ implica que $x_n \in U$, es decir, $U \cap S \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \bar{S}$. \square

La propiedad anterior para los puntos adherentes permite dar una caracterización para un conjunto denso.

Proposición 4.32 Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subset X$ un subconjunto. Entonces S es denso en X si, y sólo si, para todo $x \in X$ existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en S tal que $x_n \rightarrow x$.

Demostración. Simplemente hay que tener en cuenta la **Definición 4.2** de conjunto denso y la **Proposición 4.31**. \square

Finalizamos con una caracterización de los puntos frontera.

Proposición 4.33 Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subset X$. Un punto $x \in X$ es un punto frontera de S si, y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en S y otra $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en $X - S$ tales que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow x$.

Demostración. De nuevo, sólo hay que tener en cuenta la **Definición 4.7** de punto frontera y la **Proposición 4.31**. \square

6. Problemas propuestos

Problema 4.1. Estudie si $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$ es un espacio de Hausdorff.

Problema 4.2. Demuestre que la familia formada por las uniones de elementos de $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ es una topología sobre \mathbb{R} . ¿Es de Hausdorff? ¿Es la usual de \mathbb{R} ?

Problema 4.3. Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) se dirá **puntualmente cerrado** cuando todo subconjunto unipuntual $\{x\}$ sea cerrado. Demuestre que (X, \mathcal{T}) es puntualmente cerrado si, y sólo si, para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos A y B tales que $x \in A - B$ e $y \in B - A$. Pruebe que todo espacio de Hausdorff es puntualmente cerrado. ¿Es cierto el recíproco?

Problema 4.4. Sea (X, d) un espacio métrico y $C, F \subset X$ cerrados disjuntos. Pruebe que existen dos abiertos disjuntos A y B tales que $C \subset A$ y $F \subset B$.

Problema 4.5. Sea $(E, <)$ un conjunto totalmente ordenado. Un **intervalo abierto** es cualquier conjunto de la forma $(a, b) = \{x \in E \mid a < x < b\}$; $(\leftarrow, b) = \{x \in E \mid x < b\}$ y $(a, \rightarrow) = \{x \in E \mid a < x\}$. Demuestre que, tomando como abiertos la unión arbitraria de intervalos abiertos, se tiene una topología sobre E y que dicha topología es de Hausdorff.

Problema 4.6. Pruebe que si \mathcal{B} es una base de una topología \mathcal{T} sobre un conjunto X y $H \subset X$, entonces $\mathcal{B}_H = \{H \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base para la topología \mathcal{T}_H inducida sobre H .

Problema 4.7. Sea (X, d) un espacio métrico. Pruebe que si $F \subset X$ es cerrado, entonces $d(x, F) = 0$ si, y sólo si, $x \in F$.

Problema 4.8. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, calcule $S \cap \overline{\mathbb{R} - S}$ cuando S es **i)** $[a, b)$; **ii)** (a, b) ; **iii)** \mathbb{N} ; **iv)** \mathbb{Q} .

Problema 4.9. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$, calcule $\text{Fr}(S) \cap (\mathbb{R} - S)$ cuando S es **i)** un abierto; **ii)** finito; **iii)** \mathbb{Q} .

Problema 4.10. Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y A un subconjunto de X . Se dice que A es **fronterizo** cuando $A \subset \text{Fr}(A)$ y que A es **raro** cuando $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

(a) ¿Es cierto que A es fronterizo si, y sólo si, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$?

- (b) ¿Es cierto que A es fronterizo si, y sólo si, el complementario de A es denso en X ?
- (c) Encuentre en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ dos ejemplos de conjuntos fronterizos.
- (d) Encuentre en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ dos ejemplos de conjuntos raros.
- (e) ¿Todo conjunto raro es fronterizo?
- (f) ¿Todo conjunto fronterizo es raro?
- (g) ¿ A abierto implica que $\text{Fr}(A)$ es raro?
- (h) ¿Todo conjunto cerrado y raro es la frontera de un conjunto abierto?

Problema 4.11. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Demuestre que si $A \subset B$, entonces todo punto de acumulación de A es un punto de acumulación de B , es decir, $A' \subset B'$.

Problema 4.12. Considere el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ y la topología sobre X dada por

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}; \{a, b\}; \{a, c, d\}; \{a, b, c, d\}; \{a, b, e\}\}.$$

- (a) Encuentre los puntos interiores de $A = \{a, b, c\}$.
- (b) Encuentre los puntos exteriores de A .
- (c) Encuentre los puntos frontera de A .

Problema 4.13. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $A \in \mathcal{T}$ un abierto. Pruebe que, para todo $B \subset X$, se cumple que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Proporcione un ejemplo que muestre que si A no es abierto, entonces la igualdad anterior no se cumple necesariamente.

Problema 4.14. Demuestre que un conjunto A es abierto en un espacio topológico (X, \mathcal{T}) si, y sólo si, para todo $M \subset X$ tal que $A \cap M = \emptyset$, también es $\overline{M} \cap A = \emptyset$.

Problema 4.15. Si (X, d) es un espacio métrico y $M \subset X$. Demuestre:

- (a) $x \in \overline{M}$ si, y sólo si, $d(x, M) = 0$.
- (b) $x \in \text{Int}(M)$ si, y sólo si, $d(x, X - M) \neq 0$.

Problema 4.16. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, $H \subset X$ y $M \subset H$. Considere el subespacio (H, \mathcal{T}_H) . Pruebe:

- (a) $\text{Int} M \cap H \subset \text{Int}_H M$.
- (b) $\text{Fr}_H(M) \subset \text{Fr}(M) \cap H$.
- (c) Busque un ejemplo que muestre que las inclusiones de los dos apartados anteriores pueden ser estrictas.

Problema 4.17. Sea \mathbb{R}_ℓ la *recta de Sorgenfrey* y $A = (0, 1) \cup (1, 2)$. Calcule \overline{A} y $\text{Fr}(A)$.

Problema 4.18. Encuentre un ejemplo de dos subconjuntos A y B de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ tales que los conjuntos

$$A \cap \overline{B}, \quad \overline{A} \cap B, \quad \overline{A \cap B} \quad \text{y} \quad \overline{A} \cap \overline{B}$$

sean distintos.

Problema 4.19. Sea $E = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{T} = \{A \subset [-1, 1] \mid 0 \notin A \text{ ó } (-1, 1) \subset A\}$:

(a) Pruebe que \mathcal{T} es una topología sobre E .

(b) Calcule $\overline{\{\frac{1}{2}\}}$ y $\text{Fr}(-1, 1)$.

Problema 4.20. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ se consideran los subconjuntos $A = [0, 1)$, $B = \mathbb{Q} \cap [1, 2]$, $C = (2, 3] \cup \{4\}$ y $D = A \cup B \cup C$. Calcule \bar{A}^D , \bar{B}^D y \bar{C}^D .

Problema 4.21. Calcule en (\mathbb{R}^2, d_2) el interior, el exterior y la frontera de los conjuntos siguientes:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = n, y = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$

Problema 4.22. Determine cuáles son las sucesiones convergentes en los siguientes espacios topológicos y especifique sus límites: **a)** (X, \mathcal{T}_T) ; **b)** (X, \mathcal{T}_D) y **c)** (X, \mathcal{T}_{cf}) .

Problema 4.23. ¿Converge $\{(-\frac{1}{2})^n\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathbb{R}_ℓ ? En caso afirmativo, ¿a qué puntos converge? Justifique la respuesta.

Problema 4.24. Considere la recta real \mathbb{R} y la familia $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dada por

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[-x, x]\}_{x>0}$$

¿Es $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ un espacio topológico? Justifique la respuesta.

Problema 4.25. Considere la recta real \mathbb{R} y la familia $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dada por:

$$\mathcal{T} = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{T}_u \text{ y } B \subset \mathbb{Q}\}$$

Justifique que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un espacio topológico.

Problema 4.26. Sea \mathbb{R}_ℓ la *recta de Sorgenfrey*. Para todo $A, B \subset \mathbb{R}$, ¿se cumple siempre que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$? En caso afirmativo, justifique la respuesta y en caso negativo, dé un contraejemplo.

Fin del Capítulo

Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 4.1.

- (1) Si $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$, entonces $\bar{B} = \{0\} \cup B$.
- (2) Si $C = \{0\} \cup (1, 2)$, entonces $\bar{C} = \{0\} \cup [1, 2]$.
- (3) Si \mathbb{Q} es el conjunto de los números racionales, entonces $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
- (4) Si \mathbb{N} es el conjunto de los números naturales, entonces $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.
- (5) Si \mathbb{R}_+ es el conjunto de los reales positivos, entonces la clausura de \mathbb{R}_+ es el conjunto $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Ejercicio 4.1

Ejercicio 4.2. Si \mathbb{Q} es el conjunto de los números racionales, cada punto de \mathbb{R} es un punto límite de \mathbb{Q} . Si \mathbb{Z}_+ es el conjunto de los enteros positivos, ningún punto de \mathbb{R} es un punto límite de \mathbb{Z}_+ . Si \mathbb{R}_+ es el conjunto de los reales positivos, entonces cada punto de $\{0\} \cup \mathbb{R}_+$ es un punto límite de \mathbb{R}_+ .

Ejercicio 4.2

Ejercicio 4.3. Hemos visto que x es un punto interior de S si, y sólo si, $x \notin \overline{X - S}$. Por otra parte, también sabemos que $x \in \overline{X - S}$ si, y sólo si, $d(x, X - S) = 0$. Por tanto, x es un punto interior de S si, y sólo si, $d(x, X - S) \neq 0$.

Ejercicio 4.3

Ejercicio 4.4(a) La frontera de $(0, 1)$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$.



Ejercicio 4.4(b) Todos los números reales son puntos frontera de \mathbb{Q} , es decir, $\text{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. □

Soluciones de las cuestiones

Cuestión 4.1(3) En la topología cofinita (X, \mathcal{T}_{cf}) , la adherencia de un conjunto finito es él mismo, pero la clausura de un conjunto infinito es el espacio total.

Fin de la cuestión

Cuestión 4.2(1) El punto 0 es un punto límite de A . De hecho, cada punto del intervalo $[0, 1]$ va a ser un punto límite de A , pero ningún otro punto de \mathbb{R} es un punto límite de A .

Fin de la cuestión

Cuestión 4.2(2) El 0 es el único punto límite de B. Cualquier otro punto x de \mathbb{R} tiene un entorno que, o no llega a intersectar a B, o interseca a B sólo en el propio punto x .

Fin de la cuestión

Cuestión 4.2(3) Si $C = \{0\} \cup (1, 2)$, entonces los puntos límite de C son los puntos del intervalo $[1, 2]$.

Fin de la cuestión