UNIVERSIDAD DE MURCIA
Departamento de Matemáticas

Topología

3. Espacios métricos

Pedro José Herrero y Pascual Lucas

Resumen: En este capítulo definimos lo que es un espacio métrico y estudiamos sus primeras propiedades. Después de poner los primeros ejemplos de distancias en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^n$, definimos la distancia a un conjunto y la distancia entre conjuntos. Introducimos las bolas y probamos que son la base para una topología: la topología métrica. Finalizamos estudiando los espacios topológicos metrizables, por sus importantes aplicaciones en otras ramas de las matemáticas.

Actualizado el 18 de febrero de 2002 Versión 0.2

Indice general

Documento Principal

1. Distancias

Una de las maneras más frecuentemente usadas para dotar de una topología a un conjunto es definir la topología en términos de una distancia en el conjunto.

Definición 3.1 Dado un conjunto X, una **distancia** es una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada par $(x, y) \in X \times X$ le asocia un número real $d(x, y)$ y que cumple las siguientes condiciones:

(1) $d(x, y) \geq 0$.

(2) $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$ (separación).

(3) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$ (simetría).

(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$ (desigualdad triangular).

Definición 3.2 Un **espacio métrico** es un par (X, d), donde X es un conjunto y d es una distancia definida en X.

Ejemplo 3.1.

(1) En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ podemos definir una distancia tomando el valor absoluto de la diferencia, es decir, $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $d(x, y) = |x - y|$.

(2) El **espacio métrico discreto**. Sea X un conjunto no vacío cualquiera; definimos una distancia d como sigue:

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=y \\ 1 & \text{si } x\neq y \end{cases}$$

El siguiente resultado es bien conocido del álgebra lineal, en el ámbito de los espacios vectoriales con un producto escalar.

Proposición 3.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son números reales cualesquiera, entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Demostración. Dado cualquier número $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2 \geq 0$. Si desarrollamos el cuadrado y agrupamos tendremos que $Ax^2 + 2Bx + C \geq 0$, tomando $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$; $B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ y $C = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$.

En estos términos, lo que queremos probar es que $B^2 \leq AC$. Si $A = 0$ entonces $a_i = 0$ para todo i y, por tanto, también $b_i = 0$ para todo i. Si $A \neq 0$ podemos poner

$$0 \leq Ax^2 + 2Bx + C = A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. El segundo miembro es mínimo si $x = -\frac{B}{A}$ y si lo sustituimos en la expresión anterior

$$0 \leq \frac{AC - B^2}{A} \quad \text{implica} \quad AC - B^2 \geq 0$$

y, por tanto, $B^2 \leq AC$. $\square$

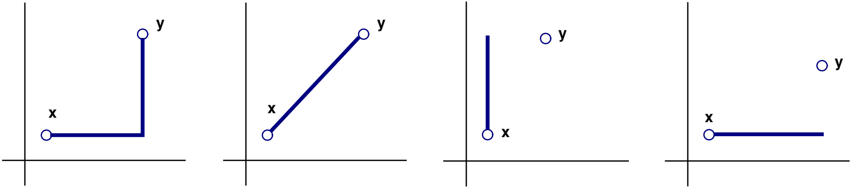
1.1. Ejemplos de distancias

Veamos ahora algunos ejemplos más de distancias.

Ejemplo 3.2. Sea $X = \mathbb{R}^2$. Para los puntos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ se definen las aplicaciones:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \\ d_2(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \\ d_\infty(x, y) &= \text{máx}(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|). \end{aligned}$$

Las tres aplicaciones son distancias en el plano (una demostración de esto la proporcionaremos en el siguiente ejemplo). Las funciones anteriores miden la distancia de una forma distinta y en el siguiente gráfico se puede ver cómo funciona cada una ellas (en color azul se indica el segmento o poligonal que da la distancia):



$d_1(x, y)$ $\quad$ $d_2(x, y)$ $\quad$ $d_\infty(x, y)$ $\quad$ $d_\infty(x, y)$

Las tres distancias son generalizaciones de la distancia que hemos definido en $\mathbb{R}$ y las tres tienen nombre propio: d_1 se llama la **distancia del taxi**, d_2 se llama la **distancia euclídea** o usual y d_∞ se llama la **distancia del ajedrez** o del máximo.

Ejemplo 3.3. El ejemplo anterior se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$ como sigue. Sean los puntos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Se define:

$$\begin{aligned}
d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \\
d_2(x, y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}, \\
d_\infty(x, y) &= \max\{|x_i - y_i| : i = 1 \ldots n\}.
\end{aligned}$$

La prueba de que d_1 y d_∞ son distancias es una mera comprobación. Lo mismo sucede con las propiedades (1) y (2) para la distancia usual d_2; no así con la desigualdad triangular en la que hay que utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y consideremos

$$(d_2(x,z) + d_2(z,y))^2 = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = (*)$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz al último sumando de la expresión anterior:

$$(*) \geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)(z_i - y_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - z_i)^2 + (z_i - y_i)^2 + 2(x_i - z_i)(z_i - y_i) \right] = \sum_{i=1}^{n} [(x_i - z_i) + (z_i - y_i)]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \right]^2 = (d_2(x,y))^2.$$

EJERCICIO 3.1. Prueba que el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos es un espacio métrico con la distancia dada por el módulo de la diferencia:

$$d(z_1 - z_2) = |z_1 - z_2| \quad \text{con} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

EJERCICIO 3.2. Sea $X = \mathcal{A}([a,b], \mathbb{R}) = \ell^\infty([a,b])$ el conjunto de las funciones acotadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dadas dos funciones $f, g \in X$ definimos

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} \{|f(x) - g(x)|\}.$$

Prueba que d_∞ es una distancia y haz un un esquema gráfico que represente cómo funciona esta distancia. d_∞ se denomina la **distancia del supremo**.

EJERCICIO 3.3. Consideremos el espacio

$$\ell^\infty = \{(x_n)_n \mid \text{ sucesión acotada } x_n \in \mathbb{R}\} = \{x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{ acotada}\}$$

¿Podrías definir una distancia en este espacio?

Ejemplo 3.4. Sea $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$ el conjunto de las funciones reales continuas sobre un intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces la aplicación d dada por

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

es una distancia.

Proposición 3.2 Sean (X_1, d) y (X_2, d') dos espacios métricos. Para $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ puntos de $X_1 \times X_2$ se define:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= d(x_1, y_1) + d'(x_2, y_2), \\ d_2(x, y) &= (d(x_1, y_1)^2 + d'(x_2, y_2)^2)^{1/2}, \\ d_\infty(x, y) &= \max\{d(x_1, y_1), d'(x_2, y_2)\}. \end{aligned}$$

Entonces d_1, d_2 y d_∞ son distancias en el espacio producto $X_1 \times X_2$.

Proposición 3.3 Sea (X, d) un espacio métrico. Para todo $x, y, z \in X$ se verifica:

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y).$$

Demostración. Aplicando la desigualdad triangular tenemos $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = d(x, y) + d(z, y)$, por lo que $d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y)$.

De forma análoga podemos poner $d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) = d(x, z) + d(x, y)$ y tendremos que $-d(x, y) \leq d(x, z) - d(z, y)$.

Usando estas dos desigualdades tenemos

$$-d(x, y) \leq d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y)$$

lo que concluye la demostración. □

El siguiente resultado, cuya demostración es directa, nos dice que la propiedad de ser espacio métrico es heredada por los subespacios.

Proposición 3.4 Sea (X, d) un espacio métrico y sea $H \subset X$ un subconjunto de X. Sea la función $d_H : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_H(x, y) = d(x, y)$. Entonces d_H es una distancia sobre H, que se denomina **distancia inducida** por d. El par (H, d_H) se dice que es un **subespacio métrico** de X.

Si $H \subset \mathbb{R}^n$, cuando se hable de H como de un espacio métrico, siempre se estará suponiendo que su distancia es la distancia inducida por la distancia euclídea de $\mathbb{R}^n$, salvo que se diga otra cosa en contra.

Ejemplo 3.5.

(1) $[0, 1]$ con la distancia inducida por el valor absoluto es un subespacio métrico de $\mathbb{R}$.

(2) $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ con la distancia inducida por d_∞ es un subespacio métrico de $\mathcal{A}([a, b], \mathbb{R})$.

(3) El espacio c_o de las sucesiones reales con límite 0 es un subespacio métrico de ℓ^∞.

2. Distancia a un conjunto

Definición 3.3 Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ un subconjunto de X y x_0 un punto de X. La distancia de x_0 al subconjunto A se define como

$$d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, x) \mid x \in A\}$$

Recordemos que el ínfimo de un conjunto acotado inferiormente siempre existe.

Definición 3.4 Sean A y B dos subconjuntos de X. La distancia del subconjunto A al subconjunto B se define como

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

Ejemplo 3.6. Si d es la métrica discreta sobre X, $x \in X$ y $A, B \subset X$, entonces

$$d(x, A) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \notin A \\ 0 \text{ si } x \in A \end{cases} \qquad d(A, B) = \begin{cases} 1 \text{ si } A \cap B = \varnothing \\ 0 \text{ si } A \cap B \neq \varnothing \end{cases}$$

CUESTION 3.1. Consideremos $\mathbb{R}$ con la distancia usual $d(x, y) = |x - y|$ y sea $A = (1, 2] \subset \mathbb{R}$.

1. ¿Cuánto vale $d(\frac{3}{2}, A)$?

(a) 0 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$

2. ¿Cuánto vale $d(1, A)$?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{4}$

3. ¿Cuánto vale $d(0, A)$?

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0

Ejercicio 3.4. Consideremos $(\mathbb{R}^2, d_2)$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$. Calcule la distancia $d(A,B)$.

3. Bolas métricas

A continuación vamos a estudiar los subconjuntos, quizás más importantes, de un espacio métrico: las bolas abiertas. Se trata de una generalización del concepto conocido de intervalo abierto centrado en un punto en $\mathbb{R}$.

Definición 3.5 Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ un punto y $r > 0$ un número real. La **bola abierta** en X con **centro** en a y de **radio** r es el conjunto

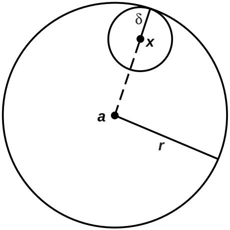
$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}.$$

Si se necesita especificar con qué distancia se está trabajando, se representará por $B_d(a, r)$.

3.1. La topología métrica

Proposición 3.5 Sea (X, d) un espacio métrico. La colección de todas las bolas $B(a, r)$, para $a \in X$ y $r > 0$, es una base para una topología en X, denominada **topología métrica** inducida por d.

Demostración.



La primera condición de base es trivial, puesto que $x \in B(x, r)$, para cualquier $r > 0$. Veamos ahora que si x es un punto del elemento básico $B(a, r)$, entonces existe un elemento básico $B(x, \delta)$ centrado en x que está contenido en $B(a, r)$. Tomemos $\delta = r - d(x, a)$. Entonces $B(x, \delta) \subset B(a, r)$, por lo que si $y \in B(x, \delta)$, entonces $d(x, y) < r - d(a, x)$, con lo que concluimos que

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < r.$$

Para comprobar la segunda condición para una base, sean B_1 y B_2 dos elementos básicos y sea $x \in B_1 \cap B_2$. Acabamos de ver que podemos elegir números positivos δ_1 y δ_2 de tal modo que $B(x, \delta_1) \subset B_1$ y $B(x, \delta_2) \subset B_2$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ concluimos que $B(x, \delta) \subset B_1 \cap B_2$. $\square$

Corolario 3.6 Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{T}_d$ la topología métrica inducida por d. Entonces un conjunto A es abierto en $\mathcal{T}_d$ si, y sólo si, para cada $x \in A$ existe un $\delta > 0$ tal que $B_d(x, \delta) \subset A$.

3.2. Ejemplos de bolas

Veamos ahora cómo son las bolas en algunos espacios métricos conocidos.

Ejemplo 3.7. En $(\mathbb{R}, |\ |)$ la bola abierta de centro a y radio $r > 0$ es el intervalo abierto de extremos $a - r$ y $a + r$:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$$

Ejemplo 3.8. En este ejemplo justificamos el nombre de bola. En $(\mathbb{R}^2, d_2)$ tenemos que

$$B(a, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\},$$

es decir, es el interior del círculo de radio r centrado en a.

En el espacio $(\mathbb{R}^3, d_2)$ se tiene

$$B(a, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}$$

que es el interior de la bola o esfera sólida de radio r centrada en a.

Las bolas abiertas, sin embargo, pueden ser realmente muy diferentes y no tener la apariencia de una bola esférica, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.9.

(1) En $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ la bola $B(a, r)$ es el interior del cuadrado de centro a y de lados paralelos a los ejes de coordenadas y con longitud $2r$.

(2) En $(\mathbb{R}^2, d_1)$ la bola $B(0, r)$ es el interior del cuadrado centrado en el punto $(0, 0)$ y con vértices en los puntos $(0, r), (0, -r), (r, 0), (-r, 0)$.

EJERCICIO 3.5.

(a) Sea una función $f_0 \in (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), d_\infty)$. ¿Cuánto vale $B(f_0, r)$?

(b) Sea un espacio métrico discreto (X, d_D). ¿Cuánto vale $B(a, r)$?

(c) Sea $H = [0,1] \subset \mathbb{R}$ con la distancia inducida d_H por la distancia d de $\mathbb{R}$. Calcule $B_d(1,1)$ y $B_{d_H}(1,1)$.

Las bolas abiertas en un subespacio métrico son la intersección con el subespacio de la bola del espacio total con el mismo centro y radio. Más precisamente:

Proposición 3.7 Sea (X, d) un espacio métrico y sea H un subconjunto de X. Entonces las bolas abiertas del subespacio métrico (H, d_H) son la intersección de las correspondientes bolas en el espacio total con el subconjunto. Es decir $B_{d_H}(x, r) = B_d(x, r) \cap H$.

4. Abiertos y cerrados

4.1. Abiertos

Ya hemos visto en el apartado anterior que las bolas en un espacio métrico son la base de una topología, que hemos denominado topología métrica. En particular, las bolas son abiertos en dicha topología.

Teorema 3.8 (Propiedad de Hausdorff) Sea (X, d) un espacio métrico y $x, y \in X$ dos puntos distintos. Entonces existen $r_x, r_y > 0$ tales que $B(x, r_x) \cap B(y, r_y) = \varnothing$.

Demostración. Sea $r = d(x, y)$ y consideremos $r_x, r_y > 0$ tales que $r_x < r/2$ y $r_y < r/2$. Entonces si $z \in B(x, r_x)$ se tiene

$$d(z, y) \geq d(x, y) - d(z, x) = r - d(z, x) > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2},$$

por lo que $z \notin B(y, r_y)$. Análogamente, si $w \in B(y, r_y)$ se prueba que $w \notin B(x, r_x)$. □

Veamos ahora unos cuantos ejemplos de conjuntos abiertos en algunos de los espacios métricos que hemos introducido anteriormente.

Ejemplo 3.10.

(1) Cualquier intervalo abierto de la recta real, acotado o no acotado, es un subconjunto abierto de la recta real con la distancia usual. También lo son las uniones de intervalos abiertos. Sin embargo, los intervalos $[a, b]$, $[a, b)$ y $(a, b]$ no lo son.

(2) Un conjunto abierto no tiene por qué ser una bola abierta. Así, el subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1,\ |y| < 2\}$$

no es una bola abierta de $\mathbb{R}^2$ para la distancia euclídea y, sin embargo, sí es un subconjunto abierto. Por el contrario, el conjunto siguiente no es abierto

$$B = \{(x, y) \in R^2 : |x| < 1,\ |y| \leq 2\}.$$

(3) Sea $(X, \mathcal{T}_D)$ un espacio métrico discreto ($\mathcal{T}_D$ es la topología inducida por la distancia discreta). Entonces cualquier subconjunto es abierto.

(4) La condición de ser abierto depende naturalmente de la distancia y del espacio total. (a) El subconjunto $\{0\} \subset \mathbb{R}$ es abierto para la distancia discreta, pero no lo es para la distancia euclídea. (b) El intervalo $[0,1)$ es abierto en $([0,2], d_{[0,2]})$, pero no lo es en $\mathbb{R}$ con la distancia usual.

EJERCICIO 3.6. ¿Es abierto el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$?

4.2. Cerrados

Ya hemos visto en el capítulo anterior que tan importantes como los conjuntos abiertos son sus complementarios, los conjuntos cerrados. Antes de estudiar algunas propiedades de estos conjuntos en los espacios métricos, veamos unos ejemplos.

Ejemplo 3.11.

(1) En $\mathbb{R}$, con la distancia usual, los intervalos cerrados son subconjuntos cerrados; también lo son las semirrectas cerradas $[a, +\infty)$ o $(-\infty, b]$. Sin embargo, no lo son los intervalos de la forma $[a, b)$, $(a, b]$ o (a, b).

(2) En $(\mathbb{R}^2, d_2)$, el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1,\ |y| \leq 2\}$ no es cerrado, pero $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ |y| \leq 2\}$ sí lo es.

(3) Cualquier recta en $(\mathbb{R}^2, d_2)$ es un conjunto cerrado.

Proposición 3.9 Un subconjunto C de un espacio métrico (X, d) es un cerrado si, y sólo si, para todo $x \notin C$ existe un radio $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap C = \varnothing$.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $C \subset X$ es cerrado quiere decir que C^c es abierto; por tanto, para todo $x \notin C$ $(x \in C^c)$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset C^c$. Entonces $B(x, r) \cap C = \varnothing$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si para todo $x \notin C$ $(x \in C^c)$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap C = \varnothing$, entonces $B(x, r) \subset C^c$ y así C^c es abierto, luego C es cerrado. □

Definición 3.6 Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ un punto de X y $r > 0$ un número real. Llamaremos **bola cerrada** de centro a y radio r al conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{\in X \mid d(a, x) \leq r\}.$$

Observemos que las bolas cerradas contienen a las correspondientes bolas abiertas. El siguiente resultado es obvio.

Proposición 3.10 Las bolas cerradas en un espacio métrico son conjuntos cerrados.

Ejemplo 3.12.

(1) La unión arbitraria de cerrados no es, necesariamente, un cerrado. Consideremos la familia $\{\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \mid n \in \mathbb{N}\}$ de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$; su intersección es

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1),$$

que no es cerrado.

(2) Cualquier subconjunto en la distancia discreta es cerrado.

(3) Hay subconjuntos que no son ni abiertos ni cerrados. Por ejemplo, $[0,1) \subset \mathbb{R}$ con la distancia euclídea.

(4) También es posible que un subconjunto sea a la vez abierto y cerrado. Por ejemplo, cualquier subconjunto en la distancia discreta es, a la vez, abierto y cerrado.

5. Conjuntos acotados. Distancia acotada

5.1. Conjuntos acotados

Definición 3.7 Sea (X, d) un espacio métrico y $H \subset X$. Se dice que H es un subconjunto **acotado** si existen un punto $a \in X$ y un radio $r > 0$ tal que $H \subset B(a, r)$. En este caso se dice que (H, d_H) es un **subespacio métrico acotado** de (X, d).

Ejemplo 3.13.

(1) Los subespacios $[1, 2]$, $[1, 2)$ y $\{0\} \cup [1, 2)$ de $\mathbb{R}$ con la distancia euclídea son subespacios métricos acotados. El subespacio $[-1, +\infty)$ no es acotado.

(2) Cualquier bola, abierta o cerrada, es un subespacio acotado.

Definición 3.8 Sea (X, d) un espacio métrico y $H \subset X$ un subconjunto acotado. El **diámetro** de H, representado por diám(H), se define como

$$\text{diám}(H) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}.$$

Ejemplo 3.14. Los diámetros de los subconjuntos $[1, 2]$, $[1, 2)$ y $\{0\} \cup [1, 2)$ de $\mathbb{R}$ con la distancia usual son, respectivamente, 1, 1 y 2.

Ejercicio 3.7. Determine el diámetro del subespacio $A = [0, 1] \times [0, 1]$ de $\mathbb{R}^2$ para cada una de las tres distancias d_1, d_2 y d_∞.

5.2. Distancia acotada

Un caso especial surge cuando el espacio métrico X está acotado en la distancia d.

Definición 3.9 Un espacio métrico (X, d) se dice **acotado** si existe un número real $k > 0$ tal que $d(x, y) \leq k$ para todo par de puntos $x, y \in X$. En este caso, también se dice que la distancia d es una **distancia acotada**.

Ejemplo 3.15.

(1) $\mathbb{R}$ con la distancia euclídea es un espacio métrico no acotado.

(2) $\mathbb{R}$ con la distancia discreta es un espacio métrico acotado.

Proposición 3.11 Un espacio métrico (X, d) está acotado si, y sólo si, existen un punto $x_0 \in X$ y un número real $r > 0$ tales que $B(x_0, r) = X$.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Si el espacio métrico está acotado por k, tomamos un punto cualquiera $x_0 \in X$. Es obvio que la bola $B(x_0, k+1) \subset X$; pero si $x \in X$, como $d(x_0, x) \leq k$, por ser k cota de X, tenemos que $x \in B(x_0, k+1)$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Recíprocamente, supongamos que $B(x_0, r) = X$, entonces el número real $2r$ es una cota superior de todas las distancias entre los pares de puntos x, y del espacio. Aplicando la desigualdad triangular se tiene que $d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < r + r = 2r$. □

Corolario 3.12 Todo subconjunto de un espacio métrico acotado es, a su vez, acotado.

Proposición 3.13 Sea (X, d) un espacio métrico y $H \subset X$. Entonces H está acotado si, y sólo si, existen un punto $x_0 \in X$, no necesariamente de H, y un número real $r > 0$ tales que $H \subset B(x_0, r)$.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Si (H, d_H) está acotado, existe $r > 0$ tal que $H = B_H(x_0, r) = B_X(x_0, r) \cap H \subset B_X(x_0, r)$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Recíprocamente, si $H \subset B(x_0, r)$, entonces el número real $2r$ es una cota superior de todas las distancias entre los pares de puntos $x, y \in H$, ya que $d_H(x, y) = d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < r + r = 2r$ y, por tanto, (H, d_H) está acotado. □

6. Espacios metrizables

En la Sección 3 hemos visto que en cualquier espacio métrico (X, d) podemos construir una topología, denominada topología métrica y denotada por $\mathcal{T}_d$. Nos podemos preguntar ahora si todo espacio topológico procede de una métrica.

Definición 3.10 Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es **metrizable** si existe una distancia d definida sobre X tal que $\mathcal{T}$ coincide con la topología métrica inducida $\mathcal{T}_d$.

Muchos de los espacios importantes para las matemáticas son metrizables, pero algunos no lo son. La metrizabilidad es una propiedad muy deseable para un espacio, puesto que la existencia de una distancia nos ofrece una valiosa herramienta para probar teoremas sobre dicho espacio. Un problema de importancia fundamental en topología es encontrar condiciones sobre un espacio topológico que garanticen que es metrizable. No es un problema de fácil tratamiento y, en todo caso, excede de las pretensiones de este curso.

Ejemplo 3.16.

(1) La topología discreta sobre cualquier conjunto X es metrizable, siendo la distancia asociada la distancia discreta o trivial.

(2) No todo espacio topológico es metrizable. Por ejemplo, si X es un conjunto que contiene más de un punto y lo consideramos dotado de la topología indiscreta

$(X, \mathcal{T}_I)$, entonces no es un espacio metrizable, puesto que los únicos cerrados para esta topología son $\varnothing$ y X, pero sabemos que en un espacio métrico los conjuntos finitos son cerrados, por lo que deberían existir más cerrados.

Proposición 3.14 Sea un espacio métrico (X, d) y sea un subconjunto $H \subset X$. Entonces la topología asociada a la métrica inducida sobre H coincide con la topología inducida por la topología métrica en X. Es decir: $\mathcal{T}_d|_H = \mathcal{T}_{d_H}$.

Demostración. $\boxed{\subseteq}$ Sea $A' \in \mathcal{T}_d|_H$, entonces existe un $A \in \mathcal{T}_d$ tal que $A' = A \cap H$. Veamos que $A' \in \mathcal{T}_{d_H}$. Para cualquier $x \in A' \subset A$ existe un $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subset A$, entonces $B_d(x, r) \cap H \subset A'$, pero ya hemos visto que $B_d(x, r) \cap H = B_{d_H}(x, r)$. Por tanto, $A' \in \mathcal{T}_{d_H}$.
$\boxed{\supseteq}$ Sea ahora $A' \in \mathcal{T}_{d_H}$. Para cualquier $x \in A'$ existe un $r > 0$ tal que $B_{d_H}(x, r) \subset A'$. Como antes, $B_{d_H}(x, r) = B_d(x, r) \cap H$. Si tomamos

$$A = \bigcup_{x \in A'} B_d(x, r)$$

tendremos

$$A' \subset A \cap H = (\cup_{x \in A'} B_d(x, r)) \cap H = \cup_{x \in A'} (B_d(x, r) \cap H) = \cup_{x \in A'} B_{d_H}(x, r) \subset A'.$$

Entonces $A' = A \cap H$ y, por tanto, $A' \in \mathcal{T}_d|_H$. $\square$

Hemos visto que no todo espacio topológico es metrizable. Cabe entonces hacerse la siguiente pregunta: ¿qué diferencias *topológicas* existen entre un espacio topológico que sea metrizable y otro que no lo sea? Veamos a continuación una propiedad fundamental que se verifica en los espacios metrizables pero que no es cierta, en general, en un espacio topológico arbitrario.

Definición 3.11 Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es un **espacio de Hausdorff** o que satisface el **axioma** T_2 si para todo par de puntos $x, y \in X$ distintos existen entornos $U_x \in \mathcal{U}_x$ y $V_y \in \mathcal{U}_y$ tales que $U_x \cap V_y = \varnothing$.

Como consecuencia directa de la definición de entorno se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.15 Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es de Hausdorff si, y sólo si, para todo par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos $A, B \subset X$ tales que $x \in A$, $y \in B$ y $A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo 3.17.

(1) Todo espacio métrico es de Hausdorff.

(2) No todo espacio topológico es T_2. La recta real, con la topología cofinita, no es un espacio de Hausdorff.

Vamos a comparar las topologías métricas inducidas por dos distancias distintas sobre un mismo espacio X.

Definición 3.12 Dos métricas d y d' sobre un mismo conjunto X se dice que son **equivalentes** si dan lugar a la misma topología, es decir, si $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.

Proposición 3.16 Sean d y d' dos distancias definidas sobre un conjunto X. Entonces d y d' son equivalentes si, y sólo si, para todo $x \in X$ y para todo $r > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $B_d(x, \delta) \subset B_{d'}(x, r)$ y existe $\delta' > 0$ tal que $B_{d'}(x, \delta') \subset B_d(x, r)$.

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que d y d' son equivalentes. Dados $x \in X$ y $r > 0$, $B_{d'}(x, r)$ es un abierto de $\mathcal{T}_{d'}$ y, por tanto, también está en $\mathcal{T}_d$; entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_d(x, \delta) \subset B_{d'}(x, r)$. Análogamente se demuestra la segunda afirmación.
$\Leftarrow$ Recíprocamente, si suponemos que se cumplen las dos afirmaciones veamos que d y d' son equivalentes. Sea A un abierto de $\mathcal{T}_d$ y sea $x \in A$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subset A$. Aplicando la segunda propiedad, existirá $\delta' > 0$ tal que $B_{d'}(x, \delta') \subset B_d(x, r)$, y entonces A es un entorno de x para $\mathcal{T}_{d'}$ y es, por tanto, abierto en esta topología. De forma análoga se demuestra que todo abierto de $\mathcal{T}_{d'}$ lo es también de $\mathcal{T}_d$.
$\square$

Corolario 3.17 Dos distancias d y d' sobre un conjunto X son equivalentes si existen constantes $m, M > 0$ tales que para todo $x, y \in X$ se satisface

$$m\, d(x,y) \leq d'(x,y) \leq M\, d(x,y).$$

Demostración. Sean $x \in X$ y $r > 0$. Entonces tomando $\delta = \frac{r}{M}$ se tiene que $d(x,y) \leq \delta$ implica que $d'(x,y) \leq Md(x,y) \leq M\delta = r$, con lo que $B_d(x;\delta) \subset B_{d'}(x,r)$. De forma análoga, tomando $\delta' = mr$ se tiene que $B_{d'}(x,\delta') \subset B_d(x,r)$. □

EJERCICIO 3.8. Demuestra que las tres distancias d_1, d_2 y d_∞ en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.

No todas las distancias definidas en un conjunto son equivalentes. Por ejemplo, la distancia euclídea y la distancia discreta sobre $\mathbb{R}^2$ no son equivalentes.

7. Problemas propuestos

Problema 3.1. Sea $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(m,n) = |m^2 - n^2|$. ¿Es $(\mathbb{N}, d)$ un espacio métrico? Justifique la respuesta.

Problema 3.2. Sea (X,d) un espacio métrico. Demuestre que si $x, y, z, t \in X$ se cumple que

$$|d(x,y) - d(z,t)| \leq d(x,z) + d(y,t).$$

Problema 3.3. Sea X un conjunto. Demuestre que una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una distancia si, y sólo si, para $x, y, z \in X$, se verifican

(a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Problema 3.4. Sea (X, d) un espacio métrico. Se definen d'_1, d'_2 y d'_3 como sigue:

$$\begin{aligned} d'_1(x, y) &= kd(x, y), \qquad k \in \mathbb{R}^+ \\ d'_2(x, y) &= \min\{1, d(x, y)\} \\ d'_3(x, y) &= [d(x, y)]^2 \end{aligned}$$

Demuestre que d'_1 y d'_2 son distancias sobre X, pero que d'_3 no tiene por qué ser necesariamente una distancia.

Problema 3.5. Sea X un conjunto y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación inyectiva; demuestre que la aplicación $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia sobre X.

Problema 3.6. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente. Demuestre que $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia sobre $\mathbb{R}$

Problema 3.7. Sea $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ una función estrictamente creciente verificando:

(a) $f(0) = 0$;

(b) Si $x, y \geq 0 \Rightarrow f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Sea (X, d) un espacio métrico. Pruebe que la aplicación $d' = f \circ d$, es decir, $d'(x, y) = f(d(x, y))$, $x, y \in X$, es también una distancia sobre X.

Problema 3.8. Definimos la aplicación $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{si } x_1 = y_1 \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{si } x_1 \neq y_1 \end{cases}$$

Pruebe que d es una distancia sobre $\mathbb{R}^2$. Determine y represente gráficamente las bolas $B((0, 0), 1)$, $B((1, 0), 1)$, $B((0, 1), 1)$ y $B((2, 3), 1)$.

Problema 3.9. Se define la parte entera de un número real $x \in \mathbb{R}$ como $[x] =$ *el mayor número entero menor o igual que* x. Considere la aplicación $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\rho(x, y) = |[x] - [y]| + |(x - [x]) - (y - [y])|, \quad \text{con} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Pruebe que ρ es una distancia en $\mathbb{R}$.

(b) Estudie cómo son las bolas $B_\rho(0, 1)$ y $B_\rho(\frac{3}{2}, 1)$ ¿Cómo son las bolas abiertas?

(c) Pruebe que ρ y la distancia $d(x) = |x - y|$ inducen la misma distancia en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros.

Problema 3.10. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ definido como $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$. Calcule la forma explícita de las distancias inducidas sobre A por d_1, d_2 y d_∞.

Problema 3.11. Sea $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y el subconjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 1\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Determine en $(A, d_2|_A)$ la bola cerrada de centro 0 y radio 1.

Problema 3.12. Considere $\mathbb{R}$ con la distancia usual y $A = \{\frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Calcule $d(A, 1)$ y $d(-1, A)$. ¿Cuánto vale $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n} + (-1)^n)$?

Problema 3.13. Sea $\mathbb{R}^3$ con la distancia definida por $d(x,y) = \min\{1, d_1(x,y)\}$ y sea el conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Halle los puntos de $\mathbb{R}^3$ que verifican $d(x, A) = 1$.

Problema 3.14. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ el círculo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Definimos la aplicación $d : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ \pi & \text{si } x, y \text{ son diametralmente opuestos} \\ \text{la longitud del arco más corto que une } x \text{ e } y, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Pruebe que d es una distancia sobre A.

Problema 3.15. Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre que la aplicación $d' : X \times$

$X \longrightarrow \mathbb{R}$ siguiente es una distancia:

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

Problema 3.16. Sea (X,d) un espacio métrico. Demuestre que:

(a) Dadas dos bolas abiertas y concéntricas, entonces una es un subconjunto de la otra.

(b) Sean $B(a,r)$ y $B(b,s)$ dos bolas abiertas en X y $x \in B(a,r) \cap B(b,s)$. Entonces existe una bola abierta $B(x,\delta)$ tal que

$$x \in B(x,\delta) \subset B(a,r) \cap B(b,s).$$

Problema 3.17. Considere el conjunto de las funciones reales continuas en el intervalo $[0,1]$, $\mathcal{C}([0,1])$. Sean $f(x) = x(1-x)$ y $g(x) = x$. Calcule $d_\infty(f,g)$.

Problema 3.18. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $S \subset X$. Demuestre la siguiente *desigualdad triangular*: para todo $x,y \in X$, $d(x,S) \leq d(x,y) + d(y,S)$.

Problema 3.19. Pruebe que en cualquier espacio métrico, los conjuntos formados por un único punto son cerrados. Deduzca que los conjuntos finitos también son cerrados.

Problema 3.20. Justifique si son abiertos o cerrados los siguientes conjuntos en $(\mathbb{R}^2, d_2)$:

- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}\}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\} \bigcup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$

Problema 3.21. Demuestre que el intervalo $H = [a, b]$ es abierto en (H, d_H), pero que no lo es en el espacio total $\mathbb{R}$ con la distancia euclídea.

Problema 3.22. Calcule en $(\mathbb{R}^2, d_2)$ la distancia $d_2(A, B)$ en los siguientes casos:

- $A = \{(0, 0)\}$ y $B = [1, +\infty) \times [1, +\infty)$
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{x},\ x > 0\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -\frac{1}{x},\ x > 0\}$.

Problema 3.23. Sea $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$. Calcule el diámetro de A.

Problema 3.24. Demuestre que un subconjunto de un espacio métrico es abierto si, y sólo si, es unión de bolas abiertas.

Problema 3.25. Determine las bolas en $\mathbb{R}^2$ para la distancia

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - x_2|, d_D(y_1, y_2)\},$$

con $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$.

Problema 3.26. Determine las bolas en $\mathbb{R}$ para la distancia $d(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$.

Problema 3.27. Sea $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la distancia definida por

$$d(x, y) = \frac{2|x - y|}{1 + 3|x - y|}.$$

Determine la bola $B_d(0, r)$.

Problema 3.28. Sea $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la distancia definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ d_D(x, 0) + d_D(0, y) & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

siendo d_D la distancia discreta. Determine analítica y geométricamente las bolas $B_d(x, r)$. *Indicación*: en primer lugar suponga $x = 0$.

Problema 3.29. Estudie si los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados en $\mathbb{R}^2$ para las distancias d_1, d_2 y d_∞:

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \tan x\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{4 - x^2}\}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1]\}$

Problema 3.30. En $\mathcal{C}([0, 1])$ consideremos la distancia d_∞ y la distancia

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Sea $r > 0$ y consideremos las funciones f y g definidas por

$$f(x) = 2 \text{ para todo } x \in [0,1] \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} -\dfrac{4x}{r} + 4 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}r \\ 2 & \text{si } \frac{1}{2}r \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Pruebe que $g \in B_d(f, r)$ pero $g \notin B_\infty(f, 1)$. Deduzca que d y d_∞ no son equivalentes.

Problema 3.31. Sea (X, d) un espacio métrico. Pruebe que d, $\delta(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ y $\rho(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ son tres distancias equivalentes sobre X.

Problema 3.32. Sean A y B dos conjuntos en un espacio métrico (X, d). Pruebe que:

(a) Si A es abierto y B es cerrado, entonces $A - B$ es abierto.

(b) Si A es cerrado y B es abierto, entonces $A - B$ es cerrado.

Problema 3.33. Sea (X, d) es un espacio métrico, $a \in X$ y $r > 0$. Pruebe que $\{x \in X \mid d(a, x) > r\}$ es un conjunto abierto y $\{x \in X \mid d(a, x) \geq r\}$ es un conjunto cerrado.

Problema 3.34. Sea $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ con la distancia del supremo. Describa analítica y gráficamente cómo son las bolas de radio 1 y centro en las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 2 + \cos x$, respectivamente.

Problema 3.35. Considere el espacio métrico de las sucesiones reales acotadas (ℓ^∞, d_∞). Pruebe que el conjunto $A = \{(x_n)_n \in \ell^\infty \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ es cerrado.

Problema 3.36. Se considera el espacio topológico $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Averigüe cuáles de los siguientes conjuntos son entornos del origen de coordenadas:

- $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$
- $(-\frac{1}{2}, 0] \times (-1, 0]$
- $[0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{4}]$
- $(0, 1] \times (0, \frac{1}{2}]$.

¿Sabría encontrar una base de entornos del $(0, 0)$?

Fin del Capítulo

Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 3.3. Dadas dos sucesiones $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$,definamos

$$d_\infty((x_n)_n, (y_n)_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n - y_n|\}.$$

Ejercicio 3.3

Ejercicio 3.4. Una gráfica ayuda a visualizar que la distancia que queremos calcular es la diferencia entre la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, que es $\sqrt{2}$, y diámetro del círculo A que es 1. Por tanto,

$$\boxed{d(A, B) = \sqrt{2} - 1}$$

Ejercicio 3.4

Ejercicio 3.5(a) $B(f_0, r)$ es el conjunto de todas las funciones continuas f en $[0, 1]$ cuya gráfica se encuentra entre las gráficas de las funciones $f_0(x) - r$ y $f_0(x) + r$. □

Ejercicio 3.5(b)

$$B(a,r) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } r \leq 1 \\ X & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

$\square$

Ejercicio 3.5(c) $\mathsf{B}_{\mathsf{d}}(1,1) = (0,2)$ mientras que, para la distancia inducida en H, $\mathsf{B}_{\mathsf{d}_\mathsf{H}}(1,1) = (0,1]$. □

Ejercicio 3.6. La intersección arbitraria de abiertos no es, en general, un abierto. Si consideramos la familia de abiertos $\{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ en $(\mathbb{R}, |\ |)$, su intersección es

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\},$$

que no es abierto. Ejercicio 3.6

Ejercicio 3.7. Los diámetros, para cada una de estas tres distancias, son:

$$\begin{aligned} \text{diám}_1(\mathrm{A}) &= 2, \\ \text{diám}_2(\mathrm{A}) &= \sqrt{2}, \\ \text{diám}_\infty(\mathrm{A}) &= 1. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.7