



UNIVERSIDAD DE MURCIA
Departamento de Matemáticas

Topología

2. Espacios topológicos

Pedro José Herrero y Pascual Lucas

Resumen: En este capítulo definimos lo que es un espacio topológico y estudiamos algunos caminos para construir una topología sobre un conjunto, para convertirlo en un espacio topológico. También consideramos algunos de los conceptos elementales que tienen que ver con espacios topológicos, como son las bases y las subbases, los espacios producto, los subespacios, así como los conjuntos abiertos y cerrados.

Índice general

1. El concepto de espacios topológico
2. Base de una topología
 - 2.1. Subbase para una topología
3. Subespacios topológicos
4. La topología producto
5. Subconjuntos especiales
 - 5.1. Conjuntos cerrados
 - 5.2. Entornos
6. Problemas propuestos
 - Soluciones de los ejercicios
 - Soluciones de las cuestiones

1. El concepto de espacios topológico

La topología inició su andadura con el siglo XX y ya por los años 20 se propusieron las primeras definiciones de espacio topológico. Al principio hubo varias definiciones, propuestas por los principales matemáticos, que coincidían en unos puntos y discrepaban en otros. Con el paso de los años se fue unificando y en la actualidad está ya estandarizada.

Definición 2.1 Una **topología** sobre un conjunto X es una colección \mathcal{T} de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

- (1) \emptyset y X están en \mathcal{T} .
- (2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .
- (3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .

Un conjunto X para el que se ha definido una topología \mathcal{T} se llama un **espacio topológico**.

En realidad, un espacio topológico es un par (X, \mathcal{T}) formado por un conjunto X y una topología \mathcal{T} sobre X . Los elementos de \mathcal{T} se denominan **conjuntos abiertos** de (X, \mathcal{T}) o, simplemente, **abiertos**.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1. Si X es cualquier conjunto y consideramos $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, entonces (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico. \mathcal{T} se denomina **topología discreta**.

Ejemplo 2.2. Si X es cualquier conjunto y consideramos $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, entonces (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico. \mathcal{T} se denomina **topología indiscreta** o **topología trivial**.

No todas las topologías son discretas o indiscretas. Veamos un sencillo ejemplo.

Ejemplo 2.3. Sea X un conjunto de tres elementos, $X = \{a, b, c\}$. Hay muchas topologías posibles sobre X , algunas de las cuales se indican a continuación:

$$(1) \mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b\}, \{b, c\}\}.$$

$$(2) \mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}.$$

$$(3) \mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}.$$

$$(4) \mathcal{T}_4 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Pero hay colecciones de subconjuntos que no constituyen una topología. Por ejemplo, las siguientes familias no son una topología:

$$(1) \mathcal{T}_5 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}.$$

$$(2) \mathcal{T}_6 = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}\}.$$

EJERCICIO 2.1. ¿En qué fallan las familias \mathcal{T}_5 y \mathcal{T}_6 para no ser una topología?

Ejemplo 2.4. Sea X un conjunto; sea \mathcal{T}_{cf} la colección de todos los subconjuntos U de X tales que $X - U$ es finito o es todo X . Entonces \mathcal{T}_{cf} es una topología sobre X , llamada **topología de los complementos finitos** o **topología cofinita**.

Cuando el conjunto X es finito entonces la topología cofinita coincide con la topología discreta. Siempre que estudiemos un conjunto con la topología cofinita supondremos que X es infinito.

EJERCICIO 2.2. Demuestra que \mathcal{T}_{cf} es, efectivamente, una topología.

EJERCICIO 2.3. Sea X un conjunto y \mathcal{T}_{cn} la colección de todos los subconjuntos U de X tales que $X - U$ es numerable o todo X . Prueba que \mathcal{T}_{cn} es una topología sobre X . \mathcal{T}_{cn} se denomina **topología de los complementos numerables** o **topología conumerable**.

Definición 2.2 Sea X un conjunto y sean \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 dos topologías sobre X . Si $\mathcal{T}_2 \supset \mathcal{T}_1$, diremos que \mathcal{T}_2 es **más fina** que \mathcal{T}_1 ; si \mathcal{T}_2 contiene *propriadamente* a \mathcal{T}_1 , diremos que \mathcal{T}_2 es **estrictamente más fina** que \mathcal{T}_1 . También diremos que \mathcal{T}_1 es **más gruesa** que \mathcal{T}_2 , o **estrictamente más gruesa**, en estas dos respectivas situaciones. Se dice que \mathcal{T}_1 es **comparable** con \mathcal{T}_2 si $\mathcal{T}_2 \supset \mathcal{T}_1$ ó $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$.

Ejemplo 2.5. La topología indiscreta es más gruesa (o menos fina) que cualquier otra, y la topología discreta es la más fina posible.

Ejemplo 2.6. La topología conumerable es más fina que la topología cofinita. En efecto, si A es abierto en \mathcal{T}_{cf} entonces $X - A$ es un conjunto finito y, por tanto, numerable. Entonces A es abierto en \mathcal{T}_{cn} .

2. Base de una topología

Para describir una topología no es necesario indicar todos los abiertos de la misma, basta con indicar un subconjunto con algunas propiedades.

Definición 2.3 Si X es un conjunto, una **base** para una topología \mathcal{T} sobre X es una colección \mathcal{B} de subconjuntos de X (llamados **elementos básicos**) tales que cada abierto A de \mathcal{T} es la unión de elementos de \mathcal{B} .

Lo interesante de lo anterior es que estudiando dos propiedades podemos decidir si una colección \mathcal{B} es una base para la topología. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.1 Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos de X . Entonces \mathcal{B} es una base para una topología \mathcal{T} si, y sólo si, se cumple que

- (1) Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x .
- (2) Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2 , entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Demostración. Veamos que la colección \mathcal{T} generada por la base \mathcal{B} es una topología sobre X :

$$\mathcal{T} = \{A \subset X \mid A = \cup B \text{ para ciertos conjuntos } B \in \mathcal{B}\}.$$

Si U es el conjunto vacío, satisface la condición de ser abierto trivialmente. De la misma forma, X está en \mathcal{T} , puesto que para cada $x \in X$ existe algún elemento básico B que contiene a x y contenido a su vez en X . Tomemos una familia $\{A_j\}_{j \in J}$ de elementos de \mathcal{T} y probemos que

$$A = \bigcup_{j \in J} A_j$$

pertenece a \mathcal{T} . Dado $x \in A$, existe un índice j tal que $x \in A_j$. Como A_j es abierto, existe un elemento básico B tal que $x \in B \subset A_j$. Entonces $x \in B$ y $B \subset A$, por lo que A es abierto, por definición.

Tomemos ahora *dos* elementos A_1 y A_2 de \mathcal{T} y probemos que $A_1 \cap A_2$ pertenece a \mathcal{T} . Dado $x \in A_1 \cap A_2$, elegimos un elemento básico B_1 que contenga a x tal que $B_1 \subset A_1$; elijamos también un elemento básico B_2 que contenga a x y tal que $B_2 \subset A_2$. La segunda condición para una base nos permite elegir un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Entonces $x \in B_3$ y $B_3 \subset A_1 \cap A_2$, por lo que $A_1 \cap A_2$ pertenece a \mathcal{T} , por definición.

Por último, veamos que cualquier intersección finita $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ de elementos de \mathcal{T} está en \mathcal{T} . Utilizaremos la inducción. Este hecho es trivial para $n = 1$; supongamos que es cierto para $n - 1$ y probémoslo para n . Tenemos

$$(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n.$$

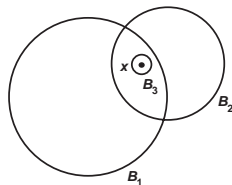
Por hipótesis, $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ pertenece a \mathcal{T} ; utilizando el resultado que acabamos de probar, la intersección de $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ y A_n también pertenece a \mathcal{T} . Hemos comprobado que \mathcal{T} es, en efecto, una topología. \square

Ejemplo 2.7. La colección $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ de todos los intervalos abiertos de la recta real constituye una base para la topología usual \mathcal{T}_u de \mathbb{R} .

Ejemplo 2.8. La colección $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ de todos los intervalos semiabiertos anteriores constituye una base para una topología sobre \mathbb{R} . Dicha topología se llama **topología del límite inferior** y se denota \mathcal{T}_ℓ . El espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\ell)$ se denota simplemente por \mathbb{R}_ℓ y se llama **recta de Sorgenfrey**.

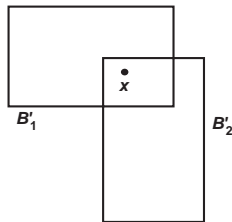
Ejemplo 2.9. Sea \mathcal{B} la colección de todas las regiones circulares (interiores de círculos) en el plano. Entonces \mathcal{B} satisface las dos condiciones de la **Proposición 2.1**. La topología generada por \mathcal{B} se denomina **topología usual** de \mathbb{R}^2 y se denota por \mathcal{T}_u .

En esta topología, un subconjunto A del plano es abierto si cada x en A está dentro de alguna región circular contenida en A .



Ejemplo 2.10. Sea \mathcal{B}' la colección de todas las regiones rectangulares en el plano de lados paralelos a los ejes de coordenadas. Entonces \mathcal{B}' satisface las dos condiciones de la **Proposición 2.1**, por lo que genera una topología en el plano.

En este caso, la segunda condición de la definición de base se satisface trivialmente, ya que la intersección de dos elementos de la base vuelve a ser un elemento de la base.



En los dos ejemplos anteriores hemos encontrado dos bases \mathcal{B} y \mathcal{B}' que generan topologías en el plano. La pregunta es, ¿serán la misma? La respuesta nos la proporciona el siguiente resultado.

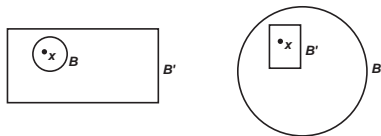
Proposición 2.2 Sean \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 bases para las topologías \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 , respectivamente, sobre X . Entonces son equivalentes:

- (1) \mathcal{T}_2 es más fina que \mathcal{T}_1 .
- (2) Para cada $x \in X$ y cada elemento básico $B \in \mathcal{B}_1$ que contiene a x , existe un elemento básico $C \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in C \subset B$.

Demostración. **(2) \Rightarrow (1)** Sea $U \in \mathcal{T}_1$. Si $x \in U$, puesto que \mathcal{B}_1 genera \mathcal{T}_1 , existe un elemento $B \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in B \subset U$. La condición (2) nos dice que existe un elemento $C \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in C \subset B$. Entonces $x \in C \subset U$, por lo que $U \in \mathcal{T}_2$.

(1) \Rightarrow (2) Sea $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$, con $x \in B$. Como B pertenece a \mathcal{T}_1 por definición y $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ por la condición (1), entonces $B \in \mathcal{T}_2$. Puesto que \mathcal{T}_2 está generada por \mathcal{B}_2 , existe un elemento $C \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in C \subset B$. \square

Ahora ya podemos ver que la colección \mathcal{B} de todas las regiones circulares en el plano genera la misma topología que la colección \mathcal{B}' de todas las regiones rectangulares. Aunque no sea muy riguroso, la siguiente figura ilustra la demostración que podría hacerse:



QUESTION 2.1. ¿Qué topología sobre \mathbb{R} es más fina?

(a) \mathcal{T}_u

(b) \mathcal{T}_ℓ

2.1. Subbase para una topología

Hemos visto que los abiertos de la topología generada por una base \mathcal{B} está formada por la colección de las uniones arbitrarias de elementos de \mathcal{B} . Si en lugar de trabajar con las uniones arbitrarias lo hacemos con las intersecciones finitas llegamos al concepto de subbase.

Definición 2.4 Una **subbase** \mathcal{S} para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X , y la **topología generada por la subbase** \mathcal{S} es la colección \mathcal{T} de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S} .

EJERCICIO 2.4. Comprueba que \mathcal{T} es, efectivamente, una topología.

3. Subespacios topológicos

Proposición 2.3 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $H \subset X$ un subconjunto. La familia $\mathcal{T}_H = \{H \cap A \mid A \in \mathcal{T}\}$ de las intersecciones de los abiertos de X con H es una topología sobre H .

Demostración. Evidentemente $H \in \mathcal{T}_H$, puesto que $H = H \cap X$, y $\emptyset = H \cap \emptyset$, luego $\emptyset \in \mathcal{T}_H$.

Si tenemos una familia $\{H \cap A_i \mid i \in I, A_i \in \mathcal{T}\}$ de elementos de \mathcal{T}_H , entonces la unión será $\bigcup_{i \in I} (H \cap A_i) = H \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)$. Como $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$ por ser abiertos, tendremos que la unión de elementos de \mathcal{T}_H también está en \mathcal{T}_H . Aplicando la misma propiedad, pero en sentido contrario, se prueba que la intersección de dos elementos de \mathcal{T}_H también es de \mathcal{T}_H . \square

Definición 2.5 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $H \subset X$ un subconjunto. El espacio topológico (H, \mathcal{T}_H) se llama **subespacio topológico** de X y la topología \mathcal{T}_H se llama

topología inducida por \mathcal{T} sobre H o **topología relativa** de H con respecto a (X, \mathcal{T}) . Los abiertos de \mathcal{T}_H se denominan **abiertos relativos** o abiertos para la topología relativa.

EJERCICIO 2.5. Demuestra si \mathcal{B} es una base para la topología de X , entonces la colección

$$\mathcal{B}_H = \{B \cap H \mid B \in \mathcal{B}\}$$

es una base para la topología inducida sobre Y .

CUESTION 2.2. Los abiertos relativos, ¿son abiertos en el espacio total?

- (a) Sí (b) No

Proposición 2.4 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y (H, \mathcal{T}_H) un subespacio. Entonces todo subconjunto $A \subset H$ abierto en (H, \mathcal{T}_H) es abierto en (X, \mathcal{T}) si, y sólo si, H es abierto en (X, \mathcal{T}) .

Demostración. Si todo abierto en \mathcal{T}_H lo es en \mathcal{T} , como H es abierto en \mathcal{T}_H entonces también es abierto en \mathcal{T} .

Recíprocamente, si H es abierto en \mathcal{T} , como todo abierto A en \mathcal{T}_H es de la forma $A = H \cap B$, con B abierto en el espacio total, A será abierto en el espacio total por ser intersección de abiertos. \square

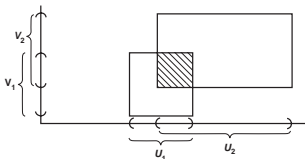
Ejemplo 2.11. Consideremos \mathbb{R} con la topología usual y el subespacio formado por los racionales \mathbb{Q} . Los abiertos en \mathbb{Q} , para la topología inducida, serán intersecciones de

abiertos de \mathbb{R} con \mathbb{Q} . Entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$ es abierto en \mathbb{Q} pero no lo es en \mathbb{R} .

4. La topología producto

Ya hemos visto como construir nuevos espacios topológicos a partir de uno dado: los subespacios topológicos. En esta sección vamos a ilustrar otro método. Si X e Y son espacios topológicos, vamos a definir una topología sobre el producto cartesiano $X \times Y$.

Definición 2.6 Sean X e Y espacios topológicos. La **topología producto** sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como base la colección \mathcal{B} de todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde U es un subconjunto abierto de X y V es un subconjunto abierto de Y .



El conjunto \mathcal{B} es, en efecto, una base. La primera condición es trivial, puesto que $X \times Y$ es ya un elemento básico. La segunda condición es casi igual de obvia, ya que la intersección de cualesquiera dos elementos básicos $U_1 \times V_1$ y $U_2 \times V_2$ es otro elemento básico. Tenemos

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2),$$

y el último conjunto es un elemento básico porque $U_1 \cap U_2$ y $V_1 \cap V_2$ son abiertos en X e Y , respectivamente. La colección \mathcal{B} no es una topología sobre $X \times Y$. La unión de

los dos rectángulos de la figura, por ejemplo, no es un producto de dos conjuntos, por lo que no puede pertenecer a \mathcal{B} ; sin embargo, es abierto en $X \times Y$.

Teorema 2.5 Si \mathcal{B} es una base para la topología de X y \mathcal{C} es una base para la topología de Y , entonces la colección

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B} \text{ y } C \in \mathcal{C}\}$$

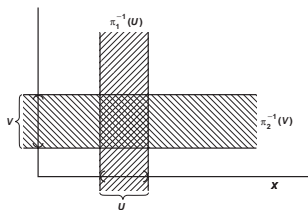
es una base para la topología sobre $X \times Y$.

Demostración. Utilizaremos la **Definición 2.3** de base. Dado un conjunto abierto W de $X \times Y$ y un punto (x, y) de W , por definición de la topología producto existe un elemento $U \times V$ básico tal que $(x, y) \in U \times V \subset W$. Puesto que \mathcal{B} y \mathcal{C} son bases para X e Y , respectivamente, podemos elegir un elemento B de \mathcal{B} tal que $x \in B \subset U$, y un elemento C de \mathcal{C} tal que $y \in C \subset V$. Por tanto, $(x, y) \in B \times C \subset W$. Así la colección \mathcal{D} cumple el criterio de la definición, por lo que es una base para $X \times Y$. \square

Ejemplo 2.12. Consideremos \mathbb{R} con la topología usual \mathcal{T}_u . Entonces podemos considerar la topología producto sobre el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Es fácil ver que esta topología producto coincide con la topología usual en \mathbb{R}^2 que hemos introducido en el **Ejemplo 2.10**.

Algunas veces es útil expresar la topología producto en términos de una subbase. Para hacer esto, primero definimos ciertas funciones llamadas proyecciones.

Definición 2.7 Sean $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ definida por $\pi_1(x, y) = x$ y $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ definida por $\pi_2(x, y) = y$. Las aplicaciones π_1 y π_2 se llaman **proyecciones** de $X \times Y$ sobre su primer y segundo factor, respectivamente.



Si U es un subconjunto abierto de X , el conjunto $\pi_1^{-1}(U)$ es, precisamente, el conjunto $U \times Y$, que es abierto en $X \times Y$. De modo similar, si V es abierto en Y , ocurre que

$$\pi_2^{-1}(V) = X \times V,$$

que también es abierto en $X \times Y$. La intersección de estos dos conjuntos es el conjunto $U \times V$, como se aprecia en

la figura. Teniendo esto en cuenta, podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.6 La colección

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) \mid U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) \mid V \text{ es abierto en } Y\}$$

es una subbase para la topología producto sobre $X \times Y$.

Demostración. Sean \mathcal{T} la topología producto sobre $X \times Y$ y \mathcal{T}' la topología generada por \mathcal{S} . Puesto que cada elemento de \mathcal{S} pertenece a \mathcal{T} , también pertenecen las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S} . Así $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Por otro lado, cada

elemento básico $U \times V$ para la topología \mathcal{T} es una intersección finita de elementos de \mathcal{S} , puesto que

$$U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V).$$

Por lo tanto, $U \times V$ pertenece a \mathcal{T}' , y así $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. □

5. Subconjuntos especiales

5.1. Conjuntos cerrados

Definición 2.8 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Un subconjunto $C \subset X$ se dice que es **cerrado** si su complementario $C^c = X - C$ es abierto. La familia de todos los cerrados de X se denotará por \mathcal{C} .

Ejemplo 2.13.

- En un espacio topológico con la topología indiscreta, los únicos cerrados son X y \emptyset .
- En un espacio topológico con la topología discreta, todos los subconjuntos de X son cerrados.
- En la topología cofinita, (X, \mathcal{T}_{cf}) , un subconjunto $C \subset X$ es cerrado si, y sólo si, $C = X$, o bien C es finito.

EJERCICIO 2.6. Sea X un conjunto con la topología conumerable \mathcal{T}_{cn} . ¿Cuáles son los cerrados de (X, \mathcal{T}_{cn}) ?

CUESTION 2.3. Consideremos el siguiente subconjunto de la recta real:

$$Y = [0, 1] \cup (2, 3)$$

con la topología relativa.

1. En este espacio, ¿es el conjunto $[0, 1]$ abierto?

(a) Sí

(b) No

2. En este espacio se satisface:

(a) $(2, 3)$ y $[0, 1]$ son abiertos.

(b) $(2, 3)$ y $[0, 1]$ son cerrados.

(c) $(2, 3)$ es abierto y $[0, 1]$ es cerrado.

(d) $(2, 3)$ es cerrado y $[0, 1]$ es abierto.

El hecho de que un conjunto sea cerrado no implica, como hemos visto en el ejercicio precedente, que este conjunto no pueda ser abierto; de hecho, existen conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados. Por ejemplo, el espacio total X (en cualquier topología \mathcal{T}) o cualquier conjunto de un espacio con la topología discreta. De la misma manera, también existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados, como cualquier intervalo de la forma $[a, b)$ en \mathbb{R} con la topología usual.

Los cerrados cumplen una serie de propiedades similares (en cierto modo duales) a las propiedades de los abiertos.

Teorema 2.7 Dado un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , se satisfacen las siguientes propiedades:

- (1) X y \emptyset son cerrados.
- (2) Si $\{C_i \mid i \in I\}$ es una familia de cerrados en X , entonces $\bigcap_{i \in I} C_i$ es un cerrado.
- (3) Si $\{C_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ es una familia finita de cerrados, entonces $\bigcup_{i=1}^n C_i$ es un cerrado.

Demostración. (1) \emptyset y X son cerrados porque son los complementos de los conjuntos abiertos X y \emptyset , respectivamente.

(2) Dada una colección de conjuntos cerrados $\{C_i \mid i \in I\}$, aplicamos la ley de De Morgan,

$$X - \bigcap_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} (X - C_i).$$

Como los conjuntos $X - C_i$ son abiertos, la parte derecha de la ecuación anterior representa una unión arbitraria de conjuntos abiertos, y es también abierto. Por lo tanto, $\bigcap C_i$ es cerrado.

(3) De manera similar, si C_i es cerrado para $i = 1, \dots, n$, consideremos la ecuación

$$X - \bigcup_{i=1}^n C_i = \bigcap_{i=1}^n (X - C_i).$$

El conjunto de la parte derecha de esta ecuación, al ser una intersección finita de conjuntos abiertos, es abierto. De aquí, $\bigcup C_i$ es cerrado. \square

CUESTION 2.4. ¿La unión arbitraria de cerrados es un cerrado?

- (a) Sí (b) No

Los cerrados en la topología inducida también son intersecciones de cerrados del espacio total con el subespacio.

Proposición 2.8 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y sea $H \subset X$. Un subconjunto de $F \subset H$ es un cerrado relativo si, y sólo si, existe un cerrado C en el espacio total de forma que $F = C \cap H$.

Demostración. \Rightarrow Sea F un cerrado en (H, \mathcal{T}_H) . Entonces su complementario en H es un abierto relativo, $H - F \in \mathcal{T}_H$. Por tanto, existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $H - F = A \cap H$. Pero entonces $C = X - A$ es un cerrado en (X, \mathcal{T}) y

$$F = H - (H - F) = H - (A \cap H) = H - A = H \cap (X - A) = H \cap C.$$

← Recíprocamente, sea $F = C \cap H$ con C cerrado en el espacio total. Su complementario en H se puede expresar así:

$$H - F = H - (C \cap H) = H - C = H \cap (X - C).$$

Como $X - C \in \mathcal{T}$ es abierto, por ser complementario de un cerrado, $H - F \in \mathcal{T}_H$, de modo que F es cerrado en (H, \mathcal{T}_H) . \square

La demostración del siguiente resultado es similar a la [Proposición 2.4](#).

Proposición 2.9 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y (H, \mathcal{T}_H) un subespacio. Entonces todo subconjunto $C \subset H$ cerrado en (H, \mathcal{T}_H) es cerrado en (X, \mathcal{T}) si, y sólo si, H es cerrado en (X, \mathcal{T}) .

5.2. Entornos

Definición 2.9 Dado un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , diremos que un subconjunto $U \subset X$ es un **entorno** de un punto $x \in X$ si existe un abierto A tal que $x \in A \subset U$. El conjunto o familia de todos los entornos de un punto $x \in X$ será denotado por \mathcal{U}_x .

Ejemplo 2.14.

- En un espacio topológico trivial, el único entorno posible de un punto es el espacio total.
- En un espacio topológico discreto, un conjunto $U \in \mathcal{U}_x$ si, y sólo si, $x \in U$.

(c) En la topología cofinita, $U \in \mathcal{U}_x$ si, y sólo si, $x \in U$ y $U^c = X - U$ es finito.

Proposición 2.10 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Un conjunto A es abierto si, y sólo si, A es entorno de todos sus puntos.

Demostración. \Rightarrow Si A es abierto, se tiene que $x \in A \subset A$ y, por tanto, A es un entorno de x , para todo $x \in A$.

\Leftarrow Recíprocamente, si suponemos que A es entorno de todos sus puntos, entonces para todo $x \in A$ existe un abierto U_x tal que $x \in U_x \subset A$. De esta manera se puede escribir $A = \cup_{x \in A} U_x$, que será abierto ya que es unión de abiertos. \square

Proposición 2.11 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y un punto $x \in X$. La familia de entornos \mathcal{U}_x verifica las siguientes propiedades:

- (1) Si $U \in \mathcal{U}_x$, entonces $x \in U$.
- (2) Si $U \in \mathcal{U}_x$ y $U \subset V$, entonces $V \in \mathcal{U}_x$.
- (3) Si $U, V \in \mathcal{U}_x$, entonces $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.
- (4) Si $U \in \mathcal{U}_x$, existe $V \in \mathcal{U}_x$ tal que $x \in V \subset U$ y $V \in \mathcal{U}_y$ para todo $y \in V$.

Demostración.

- (1) Es evidente.

- (2) Como $U \in \mathcal{U}_x$, entonces existe un abierto A de modo que $x \in A \subset U$, pero entonces $x \in A \subset V$; por tanto, $V \in \mathcal{U}_x$.
- (3) Si $U, V \in \mathcal{U}_x$ existen abiertos A, B , tales que $x \in A \subset U$ y $x \in B \subset V$. Esto implica que $x \in A \cap B \subset U \cap V$, y como $A \cap B$ es abierto por ser intersección de dos abiertos, tendremos que $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.
- (4) Como $U \in \mathcal{U}_x$, existe un abierto $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subset U$; basta tomar $A = V$

□

La familia de todos los entornos es habitualmente muy grande y, con frecuencia, difícil de representar. Incluso en el caso de \mathbb{R} , con la topología usual, los entornos pueden ser muy complicados, lo que se resuelve trabajando sólo con los intervalos. En el caso general introduciremos un concepto que facilitará el trabajo de forma semejante.

Definición 2.10 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, un punto $x \in X$ y una subfamilia $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{U}_x$ de la familia de entornos de x . \mathcal{V}_x es una **base de entornos** de x , o **base local** de x , en (X, \mathcal{T}) si se verifica que

Para todo entorno $U \in \mathcal{U}_x$ existe $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $V \subset U$.

Ejemplo 2.15.

- (1) En \mathbb{R} con la topología usual, una base de entornos para cada $x \in \mathbb{R}$ es la familia formada por los intervalos de centro x y radio $r > 0$ variando r , es decir, $\{(x - r, x + r) : r > 0\}$.

- (2) En un espacio topológico trivial o indiscreto, (X, \mathcal{T}_I) , la única base de entornos posible es la formada únicamente por el espacio total X .
- (3) Si el espacio topológico es discreto, (X, \mathcal{T}_D) , $\{x\}$ es un entorno de x , para todo $x \in X$. Entonces la familia formada sólo por este entorno $\mathcal{V}_x = \{\{x\}\}$ es una base de entornos de x .

Veamos, para concluir esta sección, cómo son los entornos y las bases de entornos en la topología inducida.

Proposición 2.12 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y sea $H \subset X$. Dado $x \in H$, un subconjunto $V \subset H$ es un entorno relativo de x ($V \in \mathcal{U}_x^H$) si, y sólo si, existe U entorno de x en el espacio total ($U \in \mathcal{U}_x$) de forma que $V = U \cap H$.

Demostración. \Rightarrow Sea V un entorno relativo de x : existe $B \in \mathcal{T}_H$ tal que $x \in B \subset V$. Entonces existirá $A \in \mathcal{T}$ tal que $B = A \cap H$. Sea $U = A \cup V$; evidentemente $U \in \mathcal{U}_x$, pues $x \in B = A \cap H$ y $x \in A \subset A \cup V$. Además:

$$U \cap H = (A \cup V) \cap H = (A \cap H) \cup (V \cap H) = B \cup V = V.$$

\Leftarrow Recíprocamente, sea $U \in \mathcal{U}_x$ y tomemos $V = U \cap H$. Existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subset U$. Entonces $x \in A \cap H \subset U \cap H = V$. \square

Proposición 2.13 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y sea $x \in H \subset X$. Si $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos de x en (X, \mathcal{T}) , la familia $\mathcal{B}_H(x) = \{B \cap H \mid B \in \mathcal{B}(x)\}$ es una base de entornos para la topología relativa.

Demostración. Evidentemente $\mathcal{B}_H(x) \subset \mathcal{U}_x^H$. Sea $V \in \mathcal{U}_x^H$; entonces $V = U \cap H$, con $U \in \mathcal{U}_x$. Por tanto, existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in B \subset U$; entonces $B \cap H \subset U \cap H = V$ y $B \cap H \in \mathcal{B}_H(x)$. \square

6. Problemas propuestos

Problema 2.1. Sea X un conjunto y p un punto de X . Demuestre que la colección $\mathcal{T}_{-p} = \{X\} \cup \{A \subset X : p \notin A\}$ es una topología sobre X . \mathcal{T}_{-p} se denomina **topología del punto excluido**.

Problema 2.2. Sea X un conjunto infinito y p un punto de X . Demuestre que la colección $\mathcal{T} = \{A \subset X \mid p \notin A\} \cup \{A \subset X \mid X - A \text{ es un conjunto finito}\}$ es una topología sobre X . Se denomina **topología Fort**.

Problema 2.3. Sea \mathcal{T} la familia formada por \mathbb{R} , \emptyset y todos los intervalos infinitos abiertos $A_q = (q, +\infty)$, con $q \in \mathbb{Q}$. Demuestre que \mathcal{T} no es una topología sobre \mathbb{R} .

Problema 2.4. Sea \mathcal{T} la familia de subconjuntos de \mathbb{R} constituida por \mathbb{R} , \emptyset y todos los intervalos abiertos infinitos $B_a = (a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$. Pruebe que \mathcal{T} es una topología sobre \mathbb{R} .

Problema 2.5. Sean A y B dos subconjuntos de X . Se considera la familia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, A, B\}$. Encuentre condiciones sobre A y B para que (X, \mathcal{T}) sea un espacio topológico.

Problema 2.6. Sea $X = \{1, 2, 3\}$. ¿Se puede encontrar una topología sobre X con dos abiertos? ¿tres? ¿cuatro? ¿cinco? ¿seis? ¿siete? ¿ocho? ¿nueve?

Problema 2.7. En el conjunto de los números naturales \mathbb{N} se considera la familia de subconjuntos $\{\emptyset, A_n\}$, donde $A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que se trata de una topología sobre \mathbb{N} . Halle todos los conjuntos abiertos que contengan a un número dado. ¿Cuáles son los cerrados que contienen al número 2?

Problema 2.8. Sean X un conjunto cualquiera, (Y, \mathcal{T}) un espacio topológico y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación. Pruebe que la familia de subconjuntos de X dada por $\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{T}\}$ es una topología sobre X . Suponga ahora que (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, Z es un conjunto cualquiera y $g : X \rightarrow Z$ es una aplicación. Se considera la familia $\{g(B) \mid B \in \mathcal{T}\}$. ¿Es una topología sobre Z ?

Problema 2.9. Pruebe que la intersección de cualquier colección de topologías sobre un conjunto X es una nueva topología sobre X . Sin embargo, la unión de dos topologías no es necesariamente una topología.

Problema 2.10. En \mathbb{R} con la topología usual, estudie si los siguientes intervalos son entornos de 0 o no lo son: $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; $(-1, 0]$; $[0, \frac{1}{2})$; $(0, 1]$.

Problema 2.11. Encuentre sobre $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ una topología que contenga al conjunto $\{1, 2, 5\}$. Halle los entornos del número 5 y encuentre una base de entornos del mismo.

Fin del Capítulo

Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 2.1.

(1) $\mathcal{T}_5 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$.

La unión $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ no está en \mathcal{T}_5 .

(2) $\mathcal{T}_6 = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}\}$.

La intersección $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$ no está en \mathcal{T}_6 .

Ejercicio 2.1

Ejercicio 2.2. Tanto X como \emptyset están dentro de \mathcal{T}_{cf} , puesto que $X - X$ es finito y $X - \emptyset$ es todo X .

Sea $\{U_\alpha\}$ una familia indexada de elementos no vacíos de \mathcal{T}_{cf} ; entonces

$$X - \bigcup U_\alpha = \bigcap (X - U_\alpha)$$

El último conjunto es finito, puesto que cada conjunto $X - U_\alpha$ es finito, por lo que $\bigcup U_\alpha$ pertenece a \mathcal{T}_{cf} .

Si U_1, \dots, U_n son elementos no vacíos de \mathcal{T}_{cf} , entonces

$$X - \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n (X - U_i).$$

Este último conjunto es una unión finita de conjuntos finitos y es, por tanto, finito. Esto implica que $\bigcap U_i$ está en \mathcal{T}_{cf} .

Ejercicio 2.2

Ejercicio 2.3. Tanto X como \emptyset están dentro de \mathcal{T}_{cn} , puesto que $X - X = \emptyset$ es finito (numerable) y $X - \emptyset$ es todo X .

Sea $\{U_\alpha\}$ una familia indexada de elementos no vacíos de \mathcal{T}_{cn} ; entonces

$$X - \bigcup U_\alpha = \bigcap (X - U_\alpha)$$

El último conjunto es numerable, puesto que cada conjunto $X - U_\alpha$ es numerable, por lo que $\bigcup U_\alpha$ pertenece a \mathcal{T}_{cn} .

Si U_1, \dots, U_n son elementos no vacíos de \mathcal{T}_{cn} , entonces

$$X - \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n (X - U_i).$$

Este último conjunto es una unión finita de conjuntos numerables y es, por tanto, numerable. Esto implica que $\bigcap U_i$ está en \mathcal{T}_{cn} .

Ejercicio 2.3

Ejercicio 2.4. Será suficiente mostrar que la colección \mathcal{B} de todas las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S} es una base. La primera condición para una base es trivial. Para comprobar la segunda condición, sean

$$B_1 = S_1 \cap \cdots \cap S_m \quad \text{y} \quad B_2 = S'_1 \cap \cdots \cap S'_n$$

dos elementos de \mathcal{B} . Su intersección

$$B_1 \cap B_2 = (S_1 \cap \cdots \cap S_m) \cap (S'_1 \cap \cdots \cap S'_n)$$

es también una intersección finita de elementos de \mathcal{S} , por lo que pertenece a \mathcal{B} .

Ejercicio 2.4

Ejercicio 2.5. Dados un abierto U en X y un punto $y \in U \cap H$, podemos elegir un elemento B en \mathcal{B} tal que $y \in B \subset U$. Entonces $y \in B \cap H \subset U \cap H$. Se sigue que \mathcal{B}_H es una base para la topología inducida sobre H .

Ejercicio 2.5

Ejercicio 2.6. Un subconjunto $C \subset X$ es cerrado si, y sólo si, $C = X$, o bien C es numerable.

Ejercicio 2.6

Soluciones de las cuestiones

Cuestión 2.1. Dado un elemento (a, b) básico para \mathcal{T}_u y un punto x de (a, b) , el elemento $[x, b)$ básico para \mathcal{T}_ℓ contiene a x y está en (a, b) . Por otro lado, dado un elemento $[x, d)$ básico para \mathcal{T}_ℓ , no existe intervalo abierto alguno (a, b) que contenga a x y esté dentro de $[x, d)$. Así \mathcal{T}_ℓ es estrictamente más fina que \mathcal{T}_u . Fin de la cuestión

Cuestión 2.2. El intervalo $[0, 1)$ no es abierto en \mathbb{R} con la topología usual; sin embargo, sí es abierto en $[0, +\infty)$ con la topología inducida.

Fin de la cuestión

Cuestión 2.3(1) El conjunto $[0, 1]$ es la intersección del conjunto abierto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ de \mathbb{R} con Y .

Fin de la cuestión

Cuestión 2.4. La unión arbitraria de cerrados no es, en general, un cerrado. Consideremos la familia

$$\left\{ \left[0, 1 - \frac{1}{n} \right] : n \in \mathbb{N} \right\}$$

de intervalos cerrados en \mathbb{R} . Su intersección es

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 1 - \frac{1}{n} \right] = [0, 1),$$

que obviamente no es cerrado.

Fin de la cuestión