UNIVERSIDAD DE MURCIA
Departamento de Matemáticas

Topología

1. Conjuntos, aplicaciones y números

Pedro José Herrero y Pascual Lucas

Resumen: En este capítulo presentamos los conceptos fundamentales sobre la teoría de conjuntos que nos serán muy útiles en el desarrollo de la asignatura. Hablaremos, entre otros tópicos, de conjuntos, operaciones entre conjuntos, aplicaciones, conjuntos finitos e infinitos, numerables y no numerables, y recordaremos las principales propiedades de los números reales.

Actualizado el 18 de febrero de 2002

Versión 0.2

Indice general

Documento Principal

1. Teoría de conjuntos

A la hora de estudiar los conjuntos se puede caer en el error de presentar una teoría demasiado formalista y rigurosa que se aleje, a veces demasiado, de los objetivos de la asignatura. Por esto, nosotros adoptaremos un punto de vista, mayoritario por otra parte, simple: supondremos que todo el mundo sabe lo que es un conjunto, al menos una idea intuitiva bastante razonable.

Para avanzar un poco también supondremos conocidos algunos conceptos básicos sobre los conjuntos. No obstante, los recordaremos brevemente sin entrar en muchos detalles.

1.1. Operaciones básicas

Como siempre, fijaremos un poco de notación antes de empezar. La primera operación que se define con un conjunto es la de pertenencia de sus elementos: si un **elemento** a pertenece a un conjunto A escribiremos

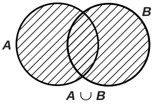
$$\mathsf{a} \in \mathsf{A},$$

mientras que utilizaremos el símbolo $\notin$ para indicar que el objeto a no es un elemento del conjunto A.

Utilizaremos la notación $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$ para indicar que todos los elementos de A son también elementos de B. Entonces se dirá que A es un **subconjunto** de B. Si existe algún elemento de B que no está en A, entonces diremos que A es un **subconjunto propio** de B, y se representará como $A \subsetneq B$.

Dados dos conjuntos A y B, podemos definir tres operaciones elementales entre ellos:

- **Unión de conjuntos**

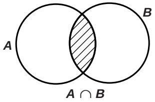


La **unión** de los conjunto A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A, a B o a ambos, y se representa por

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Los elementos que están en ambos conjuntos no se duplican. Por ejemplo, $\{1\} \cup \{1,2\} = \{1,2\}$.

- **Intersección de conjuntos**

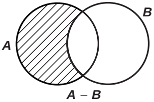


La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen simultáneamente a los conjuntos A y B, y se representa como

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

La intersección de dos conjuntos puede ser el conjunto vacío ($\varnothing$). Por ejemplo, $\{1,2\} \cap \{3,4\} = \varnothing$.

- **Diferencia de conjuntos**



La **diferencia** de los conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B, y se representa como

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

El conjunto $A - B$ se llama a veces el **complemento** o el **complementario** de B en A.

Antes de poner un ejercicio recordemos la notación habitual para referirnos a los conjuntos de números: $\mathbb{N}$ (números enteros positivos), $\mathbb{Z}$ (números enteros), $\mathbb{Q}$ (números racionales), $\mathbb{R}$ (números reales) y $\mathbb{C}$ (números complejos).

EJERCICIO 1.1. Considera los conjuntos A y B definidos como sigue:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)^2 < 4\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\}. \end{aligned}$$

Determina los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$.

CUESTION 1.1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. $A \subset B$ y $A \subset C \Rightarrow A \subset B \cup C$.

(a) Verdadero (b) Falso

2. $A \subset B$ y $A \subset C \Rightarrow A \subset B \cap C$.

(a) Verdadero (b) Falso

3. $A \subset B$ o $A \subset C \Leftrightarrow A \subset B \cup C$.

(a) Verdadero (b) Falso

4. $A \subset B$ y $A \subset C \Leftrightarrow A \subset B \cap C$.

(a) Verdadero (b) Falso

1.2. Otras operaciones

- **El producto cartesiano**

Ya hemos visto que la unión ($\cup$), la intersección ($\cap$) y el diferencia son operaciones que nos permiten obtener, a partir de dos conjuntos dados, un nuevo conjunto. Pero también podemos construir el conjunto formado por todas las parejas de elementos de ambos conjuntos.

Más precisamente, dados dos conjuntos A y B, el **producto cartesiano** $A \times B$ es el conjunto definido por

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Dado que la notación (a, b), cuando estamos trabajando en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, indica también el intervalo abierto de extremos a y b, es posible también utilizar la notación $x \times y$ para indicar el elemento del conjunto $A \times B$.

• El conjunto potencia

¿Y qué ocurre cuando los elementos de un conjunto A son, a su vez, conjuntos? Bueno, para evitar malentendidos y no caer en contradicciones, en este caso diremos que A es una **colección** de conjuntos o una **familia** de conjuntos. No obstante, como suele ser habitual, también se utiliza el término conjunto de conjuntos. Utilizaremos letras caligráficas para referirnos a las familias de conjuntos: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, etc.

El ejemplo más inmediato es el siguiente. Dado un conjunto A, el conjunto formado por todos los subconjuntos de A se denomina **conjunto potencia** de A y se denota por $\mathcal{P}(A)$. También se suele decir que $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de las partes de A.

EJERCICIO 1.2. Si A es el conjunto de tres elementos $\{a, b, c\}$, ¿cuál es conjunto potencia de A?

Las operaciones entre dos conjuntos que hemos introducido anteriormente se pueden extender a un mayor número de conjuntos, dando lugar a nuevos conjuntos. Un problema interesante es decidir si los conjuntos así obtenidos son o no distintos. Para ello es conveniente tener en cuenta las siguientes reglas:

Leyes distributivas: Son dos:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \text{y} \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Leyes de De Morgan: También son dos:

$$\begin{aligned} A - (B \cup C) &= (A - B) \cap (A - C), \qquad y \\ A - (B \cap C) &= (A - B) \cup (A - C). \end{aligned}$$

EJERCICIO 1.3. Demuestra las leyes de De Morgan.

CUESTION 1.2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. $A \subset C$ y $B \subset D \Rightarrow (A \times B) \subset (C \times D)$.

(a) Verdadero (b) Falso

2. $(A \times B) \subset (C \times D) \Rightarrow A \subset C$ y $B \subset D$

(a) Verdadero (b) Falso

3. $(A \times B) \subset (C \times D) \Rightarrow A \subset C$ y $B \subset D$, suponiendo que A y B son no vacíos.

(a) Verdadero (b) Falso

4. $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

(a) Verdadero (b) Falso

1.3. Familias de conjuntos

Las operaciones de unión e intersección que hemos definido para dos conjuntos se pueden extender sin ninguna dificultad a una familia arbitraria de conjuntos.

Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos. Entonces la **unión** de los elementos de $\mathcal{A}$ se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a alguno de los conjuntos de $\mathcal{A}$ y lo representaremos por

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A \text{ para algún } A \in \mathcal{A}\}.$$

De modo similar, la **intersección** de los elementos de $\mathcal{A}$ se define como el conjunto formado por los elementos que pertenecen a todos los elementos de $\mathcal{A}$, es decir,

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{A}\}.$$

Las leyes distributivas y de De Morgan que hemos visto anteriormente pueden extenderse sin excesiva dificultad al caso de familias arbitrarias de conjuntos.

Proposición 1.1 (Leyes distributivas) Sea $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ una familia arbitraria de conjuntos y B un conjunto. Entonces:

(1) $B \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$.

(2) $B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$.

Demostración. Sólo demostraremos la propiedad (1), pues la otra se prueba de manera totalmente análoga.

Sea $x \in B \cup (\cap_{i\in I} A_i)$. Si $x \in B$, entonces $x \in (B \cup A_i)$ para todo i, por lo que $x \in \cap_{i\in I}(B \cup A_i)$. En otro caso, $x \in \cap_{i\in I} A_i$, por lo que $x \in A_i$ para todo i. Entonces $x \in B \cup A_i$ para todo i, por lo que estará en su intersección.

Recíprocamente, si $x \in \cap_{i\in I}(B \cup A_i)$ entonces $x \in B \cup A_i$ para todo i; si $x \in B$ entonces también $x \in B \cup (\cap_{i\in I} A_i)$. En otro caso, $x \in A_i$ para todo i, es decir, $x \in \cap_{i\in I} A_i$, y así $x \in B \cup (\cap_{i\in I} A_i)$. □

Proposición 1.2 (Leyes de De Morgan) Sea $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ una familia arbitraria de subconjuntos de un conjunto dado X. Entonces:

(1) $X - (\cup_{i\in I} A_i) = \cap_{i\in I}(X - A_i)$.

(2) $X - (\cap_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I}(X - A_i)$.

Demostración. Probaremos sólo el apartado (1), pues el (2) es totalmente análogo.

Si $x \in X - (\cup_{i\in I} A_i)$ entonces $x \notin A_i$ para todo i, de modo que $x \in X - A_i$ para todo i, luego $x \in \cap_{i\in I}(X - A_i)$. Recíprocamente, si $x \in \cap_{i\in I}(X - A_i)$ entonces $x \notin A_i$ para todo i, por lo que $x \notin \cup_{i\in I} A_i$; entonces debe estar en su complementario. □

Para finalizar esta sección enunciamos el siguiente resultado acerca de la diferencia de conjuntos.

Proposición 1.3 Sean A y B dos subconjuntos de X. Entonces se verifica lo siguiente:

(1) $A - B = A \cap (X - B)$.

(2) $A - (A - B) = A \cap B$.

(3) $A - (A \cap B) = A - B$.

Demostración. La prueba es bastante sencilla y basta repetir las ideas expuestas en las demostraciones anteriores. Demostremos, por ejemplo, el apartado (2).

Si $x \in A - (A - B)$ entonces $x \in A$ y $x \notin A - B$. Esta segunda condición implica que $x \in B$. Entonces $x \in A \cap B$. Recíprocamente, si $x \in A \cap B$ entonces $x \in A$ y $x \in B$, que implica $x \in A$ y $x \notin A - B$. Y así $x \in A - (A - B)$. □

2. Aplicaciones

En esta sección nos proponemos recordar otro concepto igual de importante que el de conjunto: el concepto de aplicación o función. A grosso modo, una aplicación entre dos conjuntos A y B es una regla que asigna a cada elemento del conjunto A otro elemento del conjunto B.

Definición 1.1 Sean X e Y dos conjuntos. Una **aplicación** f entre X e Y es una correspondencia o regla de asignación entre ellos tal que a cada punto x de X se le asocia un único punto y de Y, denominado **imagen** de x y denotado por $f(x)$. La denotaremos por

$$f : X \longrightarrow Y \qquad \text{o} \qquad X \xrightarrow{f} Y$$

X se llama el **origen** de f e Y se llama **recorrido** o **rango** de f. El subconjunto de X en el que está definida f se denomina **dominio** y se denota por $\mathrm{Dom}(f)$; el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de elementos del dominio se denomina **conjunto imagen** y se denota por $\mathrm{Im}(f)$.

Por tanto, una función $f : X \longrightarrow Y$ es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$ con la propiedad de que cada elemento de X aparece como la primera coordenada de a lo sumo un par ordenado. Podemos concebir f como el conjunto $\Gamma(f)$ definido por

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in \mathrm{Dom}(f),\ y = f(x)\}$$

y que denominaremos **gráfica** de f o **grafo** de f.

Definición 1.2 Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función y sea $A \subset X$. El **conjunto imagen** de A por f, que denotaremos por $f(A)$, es el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los elementos de A, es decir:

$$f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}.$$

La aplicación f restringida al subconjunto A se denomina la **restricción** de f a A y se denota por $f|_A$.

CUESTION 1.3. Consideremos las aplicaciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $g(x) = x^4$, donde $\mathbb{R}^+$ denota los números reales no negativos. ¿Son iguales estas aplicaciones?

(a) Sí (b) No

Definición 1.3 Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función y sea $B \subset Y$. La **imagen inversa** de B por f, que denotaremos por $f^{-1}(B)$, es el subconjunto de X formado por todos los elementos cuya imagen pertenece a B, es decir:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Si B es un conjunto unipuntual $\{y\}$, usaremos la notación $f^{-1}(y)$ para referirnos a $f^{-1}(\{y\})$.

También es importante tener en cuenta que $f^{-1}(B)$ no es más que una notación, y el símbolo f^{-1} no indica que exista una aplicación entre Y y X que sea inversa de f.

Proposición 1.4 Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación y consideremos los subconjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$. Entonces se satisface:

(1) $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(2) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Demostración. La demostración de ambas propiedades es inmediata y se deja para el lector. □

Las inclusiones que aparecen en la proposición anterior no son, en general, igualdades. Pueden encontrarse ejemplos de funciones donde las inclusiones son propias.

EJERCICIO 1.4. Encuentra dos ejemplos de funciones f en las que las inclusiones de la Proposición 1.4 sean estrictas.

2.1. Tipos de aplicaciones

Definición 1.4 Una aplicación $f : X \to Y$ se dice que es **inyectiva** (o **uno-a-uno**) si para cada par de puntos distintos de X, sus imágenes por f son distintas. Se dice que es **sobreyectiva** (o que f aplica X **sobre** Y) si cada elemento de Y es la imagen por la función f de algún elemento de X. Si f es a la vez inyectiva y sobreyectiva, se dice que es **biyectiva** (o se llama una **correspondencia uno-a-uno**).

Cuando f es biyectiva entonces existe una aplicación de Y en X, denominada **inversa** de f, que se representa por f^{-1}, definida como $f^{-1}(y) = x$, donde x es el único elemento de X tal que $f(x) = y$.

CUESTION 1.4.

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva?

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = \tan(x)$

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es sobreyectiva?

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = \tan(x)$

3. ¿Cuáles de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva?

(a) $f(x) = x^4$ (b) $f(x) = x^7$ (c) $f(x) = \cos(x)$

Proposición 1.5 Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación y consideremos los subconjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$. Entonces se satisface:

(1) Si f es inyectiva entonces $A = f^{-1}(f(A))$.

(2) Si f es sobreyectiva entonces $f(f^{-1}(B)) = B$.

Demostración. La demostración de ambas propiedades es inmediata y se deja para el lector. $\square$

Veamos ahora algunas propiedades de las aplicaciones en relación con las inclusiones, las uniones, las intersecciones y las diferencias. Las demostraciones se dejan como ejercicio al lector.

Proposición 1.6 Sea $f : X \to Y$ y sean $A_i \subset X$ y $B_i \subset Y$ para $i = 1, 2$. Entonces:

(a) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(c) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(d) $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$.

Proposición 1.7 Sea $f : X \to Y$ y sean $A_i \subset X$ y $B_i \subset Y$ para $i = 1, 2$. Entonces:

(a) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.

(b) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(c) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$; y se da la igualdad si f es inyectiva.

(d) $f(A_1 - A_2) \supset f(A_1) - f(A_2)$; y se da la igualdad si f es inyectiva.

Ejercicio 1.5.

(a) Generaliza los apartados (b) y (c) de la Proposición 1.6 a un número arbitrario de subconjuntos de Y.

(b) Generaliza los apartados (b) y (c) de la Proposición 1.7 a un número arbitrario de subconjuntos de X.

2.2. Composición de aplicaciones

Para construir nuevas aplicaciones a partir de otras dadas, podemos restringir los conjuntos origen o modificar los rangos de las mismas. Otro mecanismo para formar nuevas aplicaciones es componerlas.

Definición 1.5 Sean las funciones $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$. Se define la **composición** $g \circ f$ de f y g como la aplicación $g \circ f : X \longrightarrow Z$ dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

EJERCICIO 1.6. ¿Cuál es la composición $g \circ f$ de las aplicaciones siguientes?

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, &\quad f(x) = 3x^3 + 7, \\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, &\quad g(x) = 4x^2. \end{aligned}$$

Proposición 1.8 Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. Se verifica lo siguiente:

(a) Si $C \subset Z$, demuestre que $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.

(b) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

(c) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

(d) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

(e) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

3. Conjuntos especiales: los números

En esta última parte del capítulo nos vamos a centrar en los conjuntos numéricos. Y para una mejor comprensión de los mismos debemos introducir algunos tipos especiales de conjuntos: finitos, infinitos, numerables y no numerables.

3.1. Conjuntos finitos

Dediquemos unas palabras a los conjuntos más sencillos: los finitos.

Definición 1.6 Un conjunto X se dice que es **finito** si existe un número natural n y una aplicación biyectiva entre X y el conjunto $\{1, \ldots, n\}$. El número n se llama el **cardinal** de X. Si $X = \varnothing$ entonces su cardinal es 0.

Algunas propiedades importantes relativas a los conjuntos finitos son las siguientes.

Proposición 1.9 (1) Si X es finito, entonces no existe una aplicación biyectiva entre X y un subconjunto propio de X.

(2) El cardinal de un conjunto finito X está unívocamente determinado por el conjunto X.

(3) Si A es un subconjunto de un conjunto finito X, entonces A es finito. Si A es un subconjunto propio, entonces el cardinal de A es menor que el cardinal de X.

Demostración. La demostración de estas propiedades no es nada trivial, en contra de lo que pudiera pensarse a primera vista. Las claves son las dos propiedades siguientes:

(a) Sea n un entero positivo. Sean X un conjunto y x_0 un elemento de X. Entonces existe una aplicación biyectiva f entre el conjunto X y el conjunto $\{1, \ldots, n+1\}$ si, y sólo si, existe una aplicación biyectiva del conjunto $X - \{x_0\}$ con $\{1, \ldots, n\}$.

(b) Sea X un conjunto y supongamos que existe una biyección $f : X \to \{1, \ldots, n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea A un subconjunto propio de X. Entonces no existe biyección alguna $g : A \to \{1, \ldots n\}$, y si $B \neq \emptyset$ entonces existe una biyección $h : A \to \{1, \ldots, m\}$ para algún $m < n$.

□

Ejercicio 1.7. Prueba que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales no es finito.

Las siguientes propiedades son también fáciles de probar.

Proposición 1.10 Si X es un conjunto no vacío, son equivalentes:

(1) X es finito.

(2) Existe un número natural n y una aplicación sobreyectiva $f : \{1, \ldots, n\} \to X$.

(3) Existe un número natural n y una aplicación inyectiva $f : X \to \{1, \ldots, n\}$.

Proposición 1.11 Las uniones finitas y los productos cartesianos finitos de conjuntos finitos son finitos.

Demostración. Lo veremos sólo para el caso de dos conjuntos. La demostración en el caso general es análoga y se realiza por inducción en el número de conjuntos.

Demostraremos primero que si X e Y son conjuntos finitos, también lo es $X \cup Y$. Si X o Y es vacío no hay nada que probar. En caso contrario, existirán biyecciones

$f : \{1, \dots, m\} \to X$ y $g : \{1, \dots, n\} \to Y$ para determinados m y n. Definimos entonces una función $h : \{1, \dots, m+n\} \to X \cup Y$ de la forma $h(i) = f(i)$ si $i = 1, 2, \dots, m$ y $h(i) = g(i-m)$ si $i = m+1, \dots, m+n$. Es fácil ver que h es sobreyectiva, de lo que se deduce que $X \cup Y$ es finito.

Veamos ahora que el producto cartesiano de dos conjuntos finitos X e Y también es finito. Dado $x \in X$, el conjunto $\{x\} \times Y$ es finito, pues tiene el mismo cardinal que Y. Pero $X \times Y$ es la unión de estos conjuntos, por lo que $X \times Y$ es una unión finita de conjuntos finitos, y por tanto finito. □

Ejercicio 1.8. Demuestra la Proposición 1.11 en el caso general.

3.2. Conjuntos numerables

Definición 1.7 Todo conjunto X que no sea finito se dice que es **infinito**. Si X es un conjunto infinito que está en correspondencia biyectiva con $\mathbb{N}$, entonces se dice que es **infinito numerable**. En otro caso X se dice que es **infinito no numerable**. Diremos que X es **numerable** si es finito o infinito numerable.

Ejemplo 1.1. Todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ de los números naturales es numerable. Supongamos que A es infinito. Vamos a construir una aplicación biyectiva f entre A y $\mathbb{N}$. Sea $f(1)$ el menor elemento de A y denotemos $A_1 = A - \{f(1)\}$; sea $f(2)$ el menor elemento de A_1 y denotemos $A_2 = A_1 - \{f(2)\} = A - \{f(1), f(2)\}$; y así sucesivamente. En general, sea $f(m)$ el menor elemento de A_{m-1} y denotemos $A_m = A_{m-1} - \{f(m)\}$.

Como A no es finito, el proceso anterior no acaba y para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $f(m) > f(i)$, para $i < m$. Es fácil ver que f es una aplicación biyectiva (observemos que $f(m) \geq m$ para todo m).

La siguiente propiedad es análoga a la Proposición 1.10, pero adaptada a los conjuntos numerables.

Proposición 1.12 Si X es un conjunto no vacío, entonces son equivalentes:

(1) X es numerable.

(2) Existe una aplicación sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to X$.

(3) Existe una aplicación inyectiva $g : X \to \mathbb{N}$.

Hagamos un inciso aquí para referirnos a las aplicaciones $f : \mathbb{N} \to X$. Este tipo de aplicaciones se denominan **sucesiones** y habitualmente se denotan como $(x_n)_n$ o $\{x_n\}_n$, donde $x_n = f(n)$. No debemos confundir una sucesión con su conjunto imagen.

Proposición 1.13 Si A es un subconjunto de un conjunto numerable X, entonces A es también numerable.

Demostración. Como X es numerable, existe una aplicación sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to X$. Definimos una aplicación $g : X \to A$ por la condición $g|_A = 1$. Entonces $h = g \circ f : \mathbb{N} \to A$ es una aplicación sobreyectiva, lo que implica que A es numerable. $\square$

Lema 1.14 El producto finito de copias de $\mathbb{N}$ es un conjunto numerable.

Demostración. Lo demostraremos para el producto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; el caso general se hace por inducción en el número de copias.

Ordenemos el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Es fácil ver que la aplicación $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, representada por el gráfico anterior, es una aplicación sobreyectiva. $\square$

Ejercicio 1.9. Determina explícitamente la función f anterior.

Los conjuntos numerables satisfacen las siguientes propiedades.

Proposición 1.15 (1) Las uniones numerables de conjuntos numerables es un conjunto numerable.

(2) Los productos finitos de conjuntos numerables es un conjunto numerable.

Demostración. (1) Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia numerable de conjuntos numerables y supongamos, sin pérdida de generalidad, que cada conjunto X_i es no vacío.

Como cada X_i es numerable, para cada i existe una función sobreyectiva $f_i : \mathbb{N} \to X_i$. Pero I también es numerable, por lo que es posible encontrar otra aplicación sobreyectiva $g : \mathbb{N} \to I$. Ahora definimos

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X = \bigcup_{n \in I} X_i$$

mediante la ecuación

$$h(k, m) = f_{g(k)}(m).$$

Es fácil ver que h es sobreyectiva. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, podemos encontrar una aplicación sobreyectiva $\mathbb{N} \to X$, lo que concluye la demostración.

(2) Supongamos X e Y dos conjuntos numerables no vacíos. Elegimos aplicaciones sobreyectivas $f : \mathbb{N} \to X$ y $g : \mathbb{N} \to Y$. Entonces, la aplicación $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$ definida mediante la ecuación $h(n, m) = (f(n), g(m))$ es sobreyectiva, y por tanto $X \times Y$ es numerable.

La demostración en el caso general se realiza por inducción en el número de factores.
□

Ejercicio 1.10. Demuestre que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable.

También existen ejemplos de conjuntos usuales que no son numerables. Veamos algunos.

Ejemplo 1.2. El intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ no es numerable. Por tanto, $\mathbb{R}$ tampoco es numerable. En efecto, supongamos que $[0, 1]$ es numerable y consideremos una numeración del mismo: $\{x_1, x_2, \dots, \}$, es decir, supongamos que existe una función sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$, $x_n = f(n)$. Expresemos cada número x_n en notación decimal:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0'a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots \\ x_2 & = & 0'a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots \\ & \cdots & \end{array}$$

Podemos suponer que cada x_n tiene infinitos decimales; en efecto, en caso contrario podemos considerar la expresión alternativa consistente en una sucesión infinita de 9. Por ejemplo, $1/2 = 0'5$ se puede escribir como $0'499999\cdots$.

Definimos el número $y = 0'b_1b_2\cdots b_n\cdots$ mediante $b_i \neq a_{ii}$ y $b_i \neq 0$. Es claro que $y \neq x_i$ para todo i, por lo que $y \notin [0, 1]$, lo cual es absurdo.

Ejemplo 1.3. Siguiendo las mismas ideas del ejemplo anterior, prueba que el conjunto X^ω formado por todas las aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\{0, 1\}$ es no numerable.

4. Los números reales

Para finalizar este capítulo, recordemos algunas de las principales propiedades de los números reales.

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los **números reales** podemos definir dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$, llamadas **suma** y **multiplicación**, respectivamente, y una relación de orden $<$ sobre $\mathbb{R}$, tales que se cumplen las siguientes propiedades:

Propiedades algebraicas

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para todo x, y, z en $\mathbb{R}$.

(2) $x + y = y + x$,
$x \cdot y = y \cdot x$ para todo x, y en $\mathbb{R}$.

(3) Existe un único elemento de $\mathbb{R}$ llamado **cero**, representado por 0, de forma que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Existe un único elemento de $\mathbb{R}$ llamado **uno**, distinto de 0 y representado por 1, tal que $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(4) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$.
Para cada $x \in \mathbb{R}$ distinto de 0 existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot y = 1$.

(5) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Una propiedad mixta algebraica y de orden

(6) Si $x > y$, entonces $x + z > y + z$.
Si $x > y$ y $z > 0$, entonces $x \cdot z > y \cdot z$.

Otras propiedades

(7) La relación de orden $<$ verifica la propiedad del supremo.

(8) Si $x < y$, existe un elemento z tal que $x < z$ y $z < y$.

Un número es **positivo** si $x > 0$, y **negativo** si $x < 0$. Los reales positivos se denotarán por $\mathbb{R}_+$ y los reales no negativos por $\bar{\mathbb{R}}_+$. Las propiedades (1)-(5) implican que $\mathbb{R}$ es un **cuerpo**; y la propiedad (6) nos permite decir que es un **cuerpo ordenado**.

Por otro lado, las propiedades (7) y (8) implican sólo a la relación de orden; por satisfacer estas propiedades, se dice que $\mathbb{R}$ es un **continuo lineal**.

Otra propiedad interesante de los números reales es la propiedad arquimediana, de la que presentamos dos versiones.

Proposición 1.16 (Propiedad arquimediana, v.1) Para cualquier número real positivo $\varepsilon > 0$, existe un número natural n tal que $n\varepsilon > 1$.

Proposición 1.17 (Propiedad arquimediana, v.2) Para cualquier pareja de número reales $x < y$, existe un número racional q tal que $x < q < y$.

5. Problemas propuestos

Problema 1.1. Calcule los siguientes conjuntos:

(a) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$

(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n-1,n+1)$

(c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n,n)$

(d) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-n,n)$

Problema 1.2. Calcule la diferencia $A-B$ en cada caso:

(a) $A=[0,1]$, $B=(-1,0)$ (b) $A=(-1,1]$, $B=[-1,1]$.

Problema 1.3. Dados los conjuntos A, B y C, exprese cada uno de los siguientes conjuntos en términos de A, B y C, utilizando los símbolos $\cup$, $\cap$ y $-$:

$$\begin{aligned} D&=\{x\,|\,x\in A \text{ y } (x\in B \text{ o } x\in C)\},\\ E&=\{x\,|\,(x\in A \text{ y } x\in B) \text{ o } x\in C\},\\ F&=\{x\,|\,x\in A \text{ y } (x\in B\Rightarrow x\in C)\}.\end{aligned}$$

Problema 1.4. Dos conjuntos tienen el mismo cardinal si se pueden poner en correspondencia biyectiva. Pruebe lo siguiente:

(1) $\mathbb{R}$ y el intervalo $(-1,1)$ tienen el mismo cardinal.

(2) Dos intervalos abiertos finitos tienen el mismo cardinal.

(3) $\mathbb{R}$ tiene el mismo cardinal que cualquier intervalo (a, b).

Problema 1.5. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determine si cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es igual al producto cartesiano de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$.

(a) $\{(x, y) \mid x \text{ es un entero}\}$.

(b) $\{(x, y) \mid 0 < y \leq 1\}$.

(c) $\{(x, y) \mid y > x\}$.

(d) $\{(x, y) \mid x \text{ no es un entero e } y \text{ es un entero}\}$.

(e) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

Problema 1.6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^3 - x$. Restringiendo adecuadamente el dominio y el rango de f, obtenga a partir de f una función biyectiva g. Dibuje las gráficas de g y g^{-1} (hay diferentes elecciones posibles para g).

Problema 1.7. Represente gráficamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \mid x \in [n, n+1],\ y \in [n, n+1] \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}\} \\ B &= \{(x, y) \mid 0 \leq x - y \leq 1\} \end{aligned}$$

Problema 1.8. Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 - 2$. Determine explícitamente las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$.

Problema 1.9. Sea el intervalo $A = [-1, 1]$ y considere las funciones $f, g, h : A \to A$ definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ y $h(x) = \operatorname{sen}(\pi x/2)$. Estudie si estas funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

Problema 1.10. Considere las familias de conjuntos $A_n = \{x \mid x \text{ es múltiplo de } n\}$, $n \in \mathbb{N}$, y $B_m = [m, m+1]$, $m \in \mathbb{Z}$. Determine los siguientes conjuntos:

(a) $A_3 \cap A_5$

(b) $\bigcup_{i \in P} A_i$, donde P denota el conjunto de los números primos.

(c) $B_3 \cap B_4$

(d) $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} B_m$

(e) $A_5 \cap (\bigcup_{m \geq 7} B_m)$

Problema 1.11. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Calcule:

(a) $f^{-1}(25)$

(b) $f^{-1}(\{x \mid x \geq 0\})$

(c) $f^{-1}(\{x \mid 4 \leq x \leq 25\})$

Problema 1.12. Para toda aplicación $f : X \to Y$ se define la aplicación asociada $\hat{f}$ entre los conjuntos potencia $\hat{f} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ como sigue:

$$\hat{f}(A) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}.$$

Demuestre que si f es inyectiva entonces $\hat{f}$ también lo es.

Problema 1.13. Calcule los siguientes conjuntos:

(a) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0, \frac{1}{n}]$

(b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0, \frac{1}{n}]$

(c) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0, \frac{1}{n})$

(d) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[n, +\infty)$

Problema 1.14. ¿Son ciertas o falsas las siguientes igualdades? Razone la respuesta.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1] \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) = [a, b]$$

Fin del Capítulo

Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 1.1.

- $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ o } x > -1\}$.
- $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\} = (2, 3)$.
- $A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)^2 < 4 \text{ y } |x| \geq 2\} = (-1, 2]$.

Ejercicio 1.1

Ejercicio 1.2. $\mathcal{P}(A)$ es la colección de (¡todos!) los subconjuntos de A. Así pues:

$$\mathcal{P}(A) = \{\{\varnothing\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Ejercicio 1.2

Ejercicio 1.4.

(1) Consideremos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, y el conjunto $A = [1, \sqrt{2}]$. Entonces

$$f^{-1}(f(A)) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}] \supsetneq A.$$

(2) Consideremos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, y el conjunto $B = [-2, 2]$. Entonces

$$f(f^{-1}(B)) = [-1, 1] \subsetneq B.$$

Ejercicio 1.4

Ejercicio 1.5(a) Sea $\{B_i \subset Y \mid i \in I\}$ una familia de subconjuntos de Y. Entonces se verifica:

(1) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

(2) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

$\square$

Ejercicio 1.5(b) Sea $\{A_i \subset X \mid i \in I\}$ una familia de subconjuntos de X. Entonces se verifica:

(1) $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

(2) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, y se da la igualdad si f es inyectiva.

$\square$

Ejercicio 1.6. La función compuesta es $g \circ f(x) = 4(3x^3 + 7)^2$. Ejercicio 1.6

Ejercicio 1.7. La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} - \{1\}$ definida por $f(n) = n + 1$ es una biyección entre $\mathbb{N}$ y un subconjunto propio de sí mismo, lo que contradice el apartado (1) de la Proposición 1.9. Ejercicio 1.7

Ejercicio 1.9. Si ponemos $f(k) = (m(k), n(k))$, entonces

$$\begin{aligned} m(k) &= k - \frac{r(r-1)}{2} \\ n(k) &= r + 1 - m \end{aligned}$$

donde r es el único número natural tal que

$$\frac{r(r-1)}{2} < k \leq \frac{(r+1)r}{2}.$$

Ejercicio 1.9

Ejercicio 1.10. Observemos que el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es numerable, ya que es la unión de tres conjuntos numerables: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) \cup \{0\}$. Pero $\mathbb{Q}$ se puede considerar incluido en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, que es numerable, y por tanto es también numerable.

Ejercicio 1.10

Soluciones de las cuestiones

Cuestión 1.3. Las aplicaciones son distintas, ya que aunque están definidas de la misma manera y tienen el mismo origen, sin embargo el recorrido de ambas funciones es distinto.

Fin de la cuestión