CAPÍTULO 6
CÁLCULO DIFERENCIAL EN VARIAS VARIABLES

1. INTERROGANTES CENTRALES DEL CAPÍTULO

- Calcular derivadas parciales de orden superior de funciones de varias variables.
- Entender la significación geométrica de los conceptos derivada direccional y gradiente.
- Calcular extremos relativos y condicionados de funciones de varias variables en casos sencillos.
- Entender el concepto de curva parametrizada regular.
- Saber calcular e interpretar las magnitudes curvatura y torsión de una curva.
- Saber interpretar y hallar las expresiones de los vectores que forman el triedro de Frenet.
- Calcular las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante a una curva.
- Entender el concepto de superficie parametrizada regular.
- Calcular e interpretar gráficamente los coeficientes de la primera y de la segunda forma fundamental, así como la curvatura de Gauss.

2. CONTENIDOS FUNDAMENTALES DEL CAPÍTULO

2.1. Funciones vectoriales de una variable

Consideremos la base canónica para los vectores de $\mathbb{R}^3$ formada por

$$\begin{aligned} \overrightarrow{i} &= (1,0,0), \\ \overrightarrow{j} &= (0,1,0), \\ \overrightarrow{k} &= (0,0,1). \end{aligned}$$

Una función definida por

$$\overrightarrow{F}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k} = (x(t), y(t), z(t))$$

donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones reales de variable real t, se dice que es una **función vectorial en** t.

Se puede generalizar el concepto de límite de funciones reales de variable real a las funciones vectoriales de una variable, sin más que consideremos

$$\lim_{x\to a} \overrightarrow{F}(t) = (\lim_{x\to a} x(t), \lim_{x\to a} y(t), \lim_{x\to a} z(t)).$$

Esto también nos lleva a extender otros conceptos, como el de *derivada*.

Una función vectorial $\overrightarrow{F}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$ es **derivable** en $x = a$ si y sólo si cada una de sus funciones componentes es derivable en $t = a$. En estas condiciones se tiene

$$\overrightarrow{F}'(a) = (x'(a), y'(a), z'(a)).$$

Ejemplo. Sea $\overrightarrow{F}(t) = (\operatorname{sen}^2 t, \ln t, \arctan(3t))$, entonces

$$\overrightarrow{F}'(t) = \left(2\operatorname{sen} t \cos t, \frac{1}{t}, \frac{3}{1+9t^2}\right),$$

expresión válida para todos los números reales menos el cero. □

Sea $\overrightarrow{F}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$ una función diferenciable de t, y $t = g(s)$ una función diferenciable de s, entonces la función compuesta $\overrightarrow{F}(g(s))$ es una función diferenciable de s y se tiene

$$\frac{d\overrightarrow{F}}{ds} = \overrightarrow{F}'(g(s))g'(s).$$

Ejemplo. Sea $\overrightarrow{F}(t) = (1, \operatorname{sen}(t+1), e^{t+1})$ y $t = g(s) = s^2 - 1$. En este caso se tiene

$$\frac{d\overrightarrow{F}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{F}}{dt}\frac{dt}{ds} = \left(0, \cos(t+1), e^{t+1}\right).2s = \left(0, 2s\cos s^2, 2se^{s^2}\right).$$

Esta expresión también la habríamos podido haber obtenido sustituyendo $t = s^2 - 1$ y derivando respecto de s. □

2.2. Derivadas de los productos de vectores

Por aplicación directa de las propiedades de funciones reales de variable real, podemos deducir que la derivada de la suma de dos funciones vectoriales es la suma de las derivadas. No es difícil deducir de igual forma (ver bibliografía recomendada) el comportamiento de la derivada para las otras operaciones que se pueden realizar con los vectores de $\mathbb{R}^3$, el *producto escalar* y el *producto vectorial*. Si $\overrightarrow{F}(t)$ y $\overrightarrow{G}(t)$ son funciones derivables, se tiene:

- $(\overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{G}(t))' = \overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{G}'(t) + \overrightarrow{F}'(t).\overrightarrow{G}(t)$ (Observa que en virtud de la simetría del producto escalar no existe ningún problema en cambiar el orden de las funciones vectoriales que se ven afectadas en los productos)
- $(\overrightarrow{F}(t) \times \overrightarrow{G}(t))' = \overrightarrow{F}(t) \times \overrightarrow{G}'(t) + \overrightarrow{F}'(t) \times \overrightarrow{G}(t)$ (Observa que en esta ocasión es fundamental el orden de las funciones en los productos vectoriales)

Ejemplo. Dadas las funciones $\overrightarrow{F}(t) = (3t^2+1, \operatorname{sen} t, 0)$ y $\overrightarrow{G}(t) = (\cos t, 0, e^t)$ vamos a calcular $(\overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{G}(t))'$ y $(\overrightarrow{F}(t) \times \overrightarrow{G}(t))'$. Veamos:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{G}(t))' &= \overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{G}'(t) + \overrightarrow{F}'(t).\overrightarrow{G}(t)\\ &= (3t^2+1, \operatorname{sen} t, 0).(-\operatorname{sen} t, 0, e^t) + (6t, \cos t, 0).(\cos t, 0, e^t)\\ &= -(3t^2+1)\operatorname{sen} t + 6t\cos t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{F}(t) \times \overrightarrow{G}(t))' &= \overrightarrow{F}(t) \times \overrightarrow{G}'(t) + \overrightarrow{F}'(t) \times \overrightarrow{G}(t) \\
&= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3t^2+1 & \operatorname{sen} t & 0 \\ -\operatorname{sen} t & 0 & e^t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 6t & \cos t & 0 \\ \cos t & 0 & e^t \end{vmatrix} \\
&= ((\operatorname{sen} t + \cos t)e^t, -(3t^2+6t+1)e^t, \operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t).
\end{aligned}$$

□

Comprobar que estos resultados coinciden con los que se obtienen realizando antes los productos (escalar o vectorial) y después derivando el resultado.

2.3. Funciones de varias variables

En muchas ocasiones los valores de las funciones que aparecen sometidas a estudio están determinados por valores que dependen de más de una variable.

Supongamos D una colección de n-uplas de números reales. Una función f con dominio D es una regla que asigna a cada $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ un número $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. El **rango** de la función es el conjunto de valores que toma z. A z se le denomina **variable dependiente** y a $x_1, x_2, ..., x_n$ se les llama **variables independientes**.

Ejemplo. El dominio de la función $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, y \geqslant x^2 \right\}$ y el rango viene dado por $Rango(f) = [0, +\infty)$. □

2.3.1. *Límites y continuidad*

Primero veamos el caso para funciones de dos variables. El límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (x_0, y_0)$ es el número real L si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos los puntos (x,y) sucede una de las dos siguientes situaciones equivalentes:

- $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$
- $0 < |x - x_0| < \delta$ y $0 < |y - y_0| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$

2.3.1.1. Propiedades de los límites

Si los límites

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

existen y son finitos, entonces se verifican las siguientes propiedades:

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y).g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y). \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$

(3) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (\lambda f(x,y)) = \lambda \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

(4) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)}$ siempre que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) \neq 0$

Observación. El límite de una función puede no existir. Al igual que cuando asegurábamos la existencia de los límites de funciones de una variable real decíamos que debían coincidir los límites laterales (las dos aproximaciones posibles al punto al que se tendía en la recta real), en nuestro caso al movernos en $\mathbb{R}^2$ aseguramos con la existencia del límite la coincidencia de los límites sobre cualquiera de las infinitas aproximaciones al punto (x_0, y_0) que pudiéramos tomar en el plano. Lo que dicho de otra forma quiere decir que si encontramos dos o más aproximaciones al punto (x_0, y_0) que obtengan valores distintos para el límite, estaríamos demostrando que el límite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ no existe.

Ejemplo. Podemos demostrar que el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

no existe calculando las aproximaciones de $f(x,y)$ sobre la recta $y = x$ y sobre la parábola $y = x^2$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{sobre}\, y=x}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2x}{x^4+x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

Por otra parte

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{sobre}\, y=x^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2x^2}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$

Luego efectivamente el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ *no existe*. □

Una función $f(x,y)$ se dice que es **continua** en el punto (x_0, y_0) si:

(1) f está definida en (x_0, y_0).

(2) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe.

(3) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Es una consecuencia de las propiedades de los límites que *la suma, producto y cociente de funciones continuas es otra función continua* y esto también sucede para *la composición de funciones*.

Ejemplo. La función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en cualquier punto de $\mathbb{R}^2$ excepto en $(0,0)$. Puedes comprobar que no es continua en $(0,0)$ aproximándote por caminos diferentes al origen $(0,0)$ (las recta $y = mx$ para diferentes valores de m) y observar que dan límites distintos. □

Observación. Todos los conceptos y propiedades introducidos anteriormente para funciones de dos variables, son fácilmente extensibles a un número de variables genérico n. Basta tener en cuenta la definición de límite de

$f(x_1, ..., x_n)$ cuando $(x_1, ..., x_n) \to (a_1, ..., a_n)$ como el número real L cumpliendo que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos los puntos $(x_1, ..., x_n)$:

$$0 < \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < \delta \Longrightarrow |f(x_1, x_2, ..., x_n) - L| < \varepsilon$$

2.3.2. *Derivadas parciales de primer orden*

Consideremos $z = f(x, y)$ una función real de dos variables reales. Denominaremos **derivada parcial de** f **respecto de** x **en el punto** (a, b) a la derivada en $x = a$ de la función de una variable $f(x, b)$. Es decir,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

denotándose por $f_x(a, b)$,$f_1(a, b)$, $z_x(a, b)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ o $\frac{\partial z}{\partial x}(a, b)$.

Análogamente definimos la derivada parcial de f respecto de y,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} = \lim_{y\to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

denotándose por $f_y(a, b)$,$f_2(a, b)$, $z_y(a, b)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ o $\frac{\partial z}{\partial y}(a, b)$.

(1) Como ocurre con las funciones reales de variable real, las derivadas parciales de $z = f(x, y)$ respecto de x y respecto de y se pueden calcular para diversos puntos (x, y), dando lugar por tanto a dos nuevas funciones de dos variables reales.

(2) Por las definiciones introducidas anteriormente resulta inmediato que las reglas de derivación establecidas para funciones reales de una variable real serán aplicables a las derivadas parciales de funciones de dos variables.

Ejemplo. Si consideramos la función $f(x, y) = x^2y^3 + e^{x^2}y$ se puede comprobar fácilmente que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xy^3 + 2xe^{x^2}y, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 3x^2y^2 + e^{x^2}. \end{aligned}$$

□

2.3.3. *Interpretación geométrica*

Sea $z = f(x, y)$ y consideremos $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$. La superficie $z = f(x, y)$ la cortamos por el plano $\Pi : x = a$ y obtenemos una curva γ cuya ecuación referida a los ejes $O'Y'$y $O'Z'$ es $z = f(a, y)$ (donde O' es el nuevo origen con coordenadas $(a, 0, 0)$ y $O'Y'$,$O'Z'$ son ejes paralelos respectivamente a OY y OZ pasando por O').

La recta tangente a la curva γ en el punto $P(a, b, c)$, donde $c = f(a, b)$, está contenida en el plano $x = a$ y tiene por ecuación

$$z - c = f_y(a, b)(y - b)$$

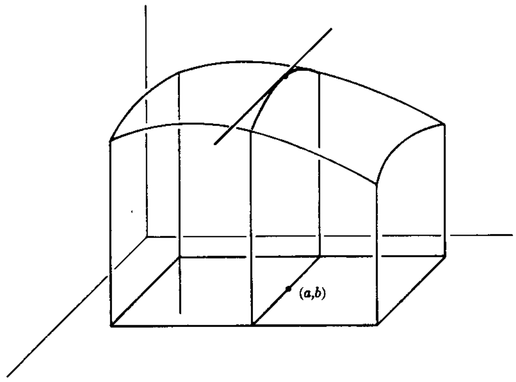


Figura 6.1: Interpretación geométrica de la derivada parcial.

respecto a los ejes $O'Y'$ y $O'Z'$ y referida al espacio es la recta determinada por intersección de los planos $x = a$ y $z - f(a,b) = f_y(a,b)(y-b)$.

Análogamente la tangente a la curva

$$\begin{cases} y = b \\ z = f(x,y) \end{cases}$$

en el punto $(a, b, f(a,b))$ es la recta

$$\begin{cases} y = b \\ z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a). \end{cases}$$

El plano de ecuación

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

contiene a las rectas tangentes anteriores. Cada recta tangente a una curva de la superficie se dice *tangente a la superficie*. El plano que contiene a toda las rectas tangentes a la superficie en un punto se denomina **plano tangente a la superficie** en ese punto. En el caso de que exista, el plano tangente en el punto $P(a, b, f(a,b))$ viene determinado por la ecuación anterior.

Ejemplo. Dada la función $f(x,y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$ la ecuación del plano tangente a la superficie que determina (una esfera) en el punto $P(1,1,1)$ vendría expresada por $z - 1 = f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)$. Simplificando obtenemos $z = -x - y + 3$. $\square$

2.3.4. *Regla de la cadena para funciones de varias variables*

¿Qué sucede cuando intentamos derivar la composición de funciones de varias variables? La variedad de casos a los que podemos enfrentarnos puede ser amplia y es conveniente que tratemos el problema de forma gradual.

Si $z = f(x,y)$ tiene derivadas parciales continuas f_x y f_y y si $x = x(t)$, $y = y(t)$ son funciones derivables en t, entonces la función compuesta $z = f(x(t), y(t))$ es derivable como función de t y cumple

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dy}{dt}.$$

Ejemplo. Sea $f(x,y) = xy$, con $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$. En estas condiciones se obtiene aplicando la regla de la cadena

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dy}{dt} = (\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + (\cos t)(\cos t) = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = \cos 2t.$$

Puedes obtener también este resultado sustituyendo x e y y derivando la expresión resultante respecto de t. □

(1) Sea $w = f(x,y,z)$ una función de tres variables con derivadas parciales continuas, y además $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ son funciones derivables en t. ¿Cuál sería de la *regla de la cadena* para $\frac{df}{dt}$? ¿Y si tuvieramos una función de cuatro variables? Generaliza el resultado a n variables.

(2) Aplicar las conclusiones anteriores para calcular $\frac{dw}{dt}$ si $w = xy + z$ con $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ y $z = t$. (La curva sobre la que calculamos la derivada es una *hélice*).

Supongamos ahora que tenemos la siguiente situación:

- $w = f(x,y,z)$ función de tres variables con derivadas parciales continuas.
- $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ funciones de dos variables con derivadas parciales continuas.

En estas condiciones obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\
\frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}
\end{aligned}$$

Ejemplo. Sea $f(x,y,z) = x + 2y + z^2$ y

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \frac{u}{v} \\ y &=& u^2 + e^v \\ z &=& 2u \end{array}\right.$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{u} + 12v, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{u}{v^2} + 2e^u.$$

□

Las mismas condiciones de derivabilidad y continuidad expuestas anteriormente para los distintos casos, se pueden expresar de forma genérica como sigue:

Consideremos $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ una función de n variables con todas sus derivadas parciales continuas y consideremos a su vez

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(u_1, u_2, ..., u_m), \\
x_2 &= \varphi_2(u_1, u_2, ..., u_m), \\
\vdots &= \vdots \\
x_n &= \varphi_n(u_1, u_2, ..., u_m)
\end{aligned}$$

funciones de m variables con todas sus derivadas parciales también continuas. En estas condiciones podemos expresar:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial u_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\
\vdots &= \vdots \\
\frac{\partial f}{\partial u_m} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial u_m} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_m} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_m}
\end{aligned}$$

2.3.5. *Derivación de funciones implícitas*

Sea $y = f(x)$ una función continua definida implícitamente por la ecuación $F(x, y) = 0$, donde F, F_x y F_y son funciones continuas, además con $F_y(x, y) \neq 0$. Entonces se cumple que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Puedes intentar deducir este resultado derivando respecto de x (aplicando la regla de la cadena) en la ecuación $F(x, y) = 0$.

La expresión de derivación de una función implícita se puede hacer extensiva para un número mayor de variables, razonando de forma similar.

Ejemplo. Vamos a calcular la derivada en los puntos que correspondan al valor $x = 1$ de la función definida por la ecuación $y^3 - 3xy + 2x^3 = 0$. Si sustituimos $x = 1$ en la ecuación, obtenemos que los puntos para los que hay que evaluar la derivada son $(1, 1)$ y $(1, -2)$. Para aplicar el resultado anterior basta con calcular $F_x = -3y + 6x^2$ y $F_y = 3y^2 - 3x$. Particularizando en los puntos que sometemos a estudio obtenemos $F_x(1, 1) = 3$, $F_y(1, 1) = 0$, $F_x(1, -2) = 12$, $F_y(1, -2) = 9$. De aquí deducimos que $\frac{dy}{dx}(1, 1)$ no se puede hallar y por otro lado se tiene

$$\frac{dy}{dx}(1, -2) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, -2)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1, -2)} = -\frac{4}{3}$$

□

Ejemplo. Supongamos que la superficie dada por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a la función $z = f(x, y)$. La ecuación del plano tangente a la mencionada superficie en el punto (a, b, c) vendría expresado por

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Ahora bien, aplicando la regla de derivación para funciones implícitas se tiene:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano tangente y simplificando (quitando los denominadores F_z) obtenemos finalmente

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c)(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c)(y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)(z - c) = 0.$$

Expresión de la ecuación del plano tangente a una superficie que no hace referencia explícita de la función que la define. □

2.3.6. *Gradientes y derivadas direccionales*

Sea la superficie $z = f(x, y)$ y supongamos que las derivadas parciales f_x y f_y son continuas.

Consideremos el plano Π que pasa por los puntos $(a, b, 0)$ y $(x, y, 0)$ y es perpendicular al plano $z = 0$. Este plano tiene de ecuación $y - b = \tan\theta(x - a)$ o bien, en forma paramétrica

$$\Pi : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a + t\cos\theta \\ y & = & b + t\operatorname{sen}\theta \end{array} \right.$$

Este plano corta a la superficie según una curva γ de ecuación

$$\gamma : \begin{cases} z &= f(x,y) \\ x &= a + t\cos\theta \\ y &= b + t\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Es decir, $z = f(a + t\cos\theta, b + t\operatorname{sen}\theta)$. Consideremos en el plano Π el nuevo sistema de ejes coordenados $O'T'Z'$, donde $O'(a,b,0)$, $O'T'$ es la intersección de plano Π con el plano $z = 0$, y el eje $O'Z'$ es paralelo al eje OZ pasando por el punto O'. En el plano Π, podemos estudiar la pendiente de la recta tangente a γ e el punto $P(a,b,c)$ respecto del eje $O'T'$, que coincide con la derivada respecto de t, es decir, aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\operatorname{sen}\theta$$

La recta que pasa por el punto $P(a,b,c)$ y tiene esta pendiente es la recta tangente a γ en el punto P. Esta recta tangente tiene por ecuaciones paramétricas respecto a $OXYZ$:

$$\begin{aligned} x &= a + t\cos\theta \\ y &= b + t\operatorname{sen}\theta \\ z &= c + (\tfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cos\theta + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\operatorname{sen}\theta)t \end{aligned}$$

y está contenida en el plano tangente a la superficie en el punto $P(a,b,c)$ de ecuación

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

A la expresión $f_x(a,b)\cos\theta + f_y(a,b)\operatorname{sen}\theta$ se le llama **derivada direccional** de $f(x,y)$ en (a,b) según la dirección θ y se denota por f_θ o por $D_{\overrightarrow{u}} f$ donde $\overrightarrow{u} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{j}$.

La derivada de $f(x,y)$ en (a,b) según la dirección θ, es la pendiente de la recta tangente a la curva resultante de la intersección de la superficie $z = f(x,y)$ con el plano de ecuación $y - b = \tan\theta(x-a)$. A veces también se dice de la derivada direccional que es *el ritmo al que cambia $f(x,y)$ cuando nos movemos desde el punto (a,b) en la dirección que forma un ángulo θ con el eje OX*.

Es importante que observes lo que sucede cuando $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$. Aplica la definición y comprueba que en estos casos las mencionadas derivadas direccionales coinciden con las derivadas parciales.

Ejemplo. Vamos a calcular la derivada de $f(x,y) = x^2y^3$ en el punto $(1,2)$ en la dirección determinada por el ángulo $\pi/3$. Para ello calcularemos primero las derivadas parciales $f_x = 2xy^3$ $f_y = 3x^2y^2$. Particularizándolas en el punto que nos piden se tiene $f_x(1,2) = 16$ y $f_y(1,2) = 12$. Habida cuenta que $\cos(\pi/3) = 1/2$ y $\operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, obtenemos finalmente $D_{\overrightarrow{u}} f(1,2) = 8 + 6\sqrt{3}$. □

La expresión

$$D_{\overrightarrow{u}} f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\operatorname{sen}\theta$$

se puede ver como el resultado del producto escalar de los vectores

$$\overrightarrow{u} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{j} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,\overrightarrow{j}.$$

A este último vector se le denomina **gradiente de f en** (a,b) denotándose por $\nabla f(a,b)$.

En definitiva, si $z = f(x,y)$ tiene derivadas parciales continuas f_x , f_y y $\overrightarrow{u} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{j}$ entonces se cumple

$$D_{\overrightarrow{u}} f = \nabla f . \overrightarrow{u}.$$

Por definición del producto escalar de dos vectores, tenemos $D_{\overrightarrow{u}} f = \nabla f . \overrightarrow{u} = |\nabla f| \, . \, |\overrightarrow{u}| \cos\alpha$ donde α es el ángulo que forman los vectores∇f y $\overrightarrow{u}$. Pero $|\overrightarrow{u}| = 1$ y de aquí deducimos $D_{\overrightarrow{u}} f = |\nabla f| \, . \cos\alpha$, esto nos lleva a deducir que el valor máximo de la derivada direccional $D_{\overrightarrow{u}}f$ coincide con $|\nabla f|$ y además la dirección del vector gradiente es la que indica la mayor derivada direccional.

Ejemplo. Dada la función $f(x, y) = x^2y^3$ ¿cuál es la mayor derivada direccional en $(2, 3)$ y en que dirección se obtiene esta derivada direccional máxima? La respuesta a esta pregunta la tiene el vector gradiente. Puedes comprobar que $\nabla f(2, 3) = 108\overrightarrow{i} + 108\overrightarrow{j}$ y por tanto el valor de la máxima derivada direccional es $|\nabla f| = 108\sqrt{2}$ y este valor se alcanza para la dirección que marca el gradiente, que sería en este caso $\overrightarrow{u} = \cos(\pi/4)\overrightarrow{i} + \operatorname{sen}(\pi/4)\overrightarrow{j}$. □

Ejemplo. Una interpretación igualmente gráfica como curiosa del significado del gradiente lo da el siguiente ejemplo. Supongamos una montaña sobre el plano XY. La altitud de la superficie sobre el punto (x, y) la denotaremos por $z = f(x, y)$. La derivada direccional indica *el ritmo al cual cambia la altitud por unidad de cambio en distancia horizontal*. El gradiente $\nabla f(a, b)$ apunta a la dirección que un montañero debería seguir si desea escalar en la dirección de mayor pendiente. El módulo $|\nabla f|$ indica la mayor pendiente disponible. □

2.3.7. *Derivadas parciales de orden superior*

Sea $z = f(x, y)$, llamaremos **derivada parcial segunda (o de segundo orden)** de f respecto de x dos veces a la derivada respecto de x de la derivada parcial primera respecto de x, es decir,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_x(x+h, y) - f_x(x, y)}{h}$$

denotándose por z_{xx}, f_{xx}, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ o $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Análogamente llamaremos derivada parcial segunda (o de segundo orden) de f respecto de y dos veces a la derivada respecto de y de la derivada parcial primera respecto de y:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_y(x, y+h) - f_y(x, y)}{h}$$

denotándose por z_{yy}, f_{yy}, $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ o $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Se llama derivada segunda de f respecto de y y respecto de x, a la derivada parcial respecto de x de la derivada parcial de f respecto de y, denotándose por z_{yx}, f_{yx}, $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ o $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Ejemplo. Para la función $f(x, y) = y\cos(xy)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -y^2 \operatorname{sen}(xy), \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(xy) - yx \operatorname{sen}(xy), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -y^3 \cos(xy), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2x \operatorname{sen}(xy) - yx^2 \cos(xy), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2y \operatorname{sen}(xy) - xy^2 \cos(xy)
\end{aligned}$$

□

En el ejemplo anterior hemos observado que las derivadas mixtas coinciden, ¿en qué casos esto vuelve a suceder? La respuesta a esta pregunta la da el **Teorema de Schwartz** (ver bibliografía recomendada) que se enuncia en los siguientes términos:

Sea $z = f(x, y)$ una función tal que existen f_x, f_y y f_{xy} en un entorno U del punto (a, b) y son continuas en (a, b), entonces existe $f_{yx}(a, b)$ y además $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

Para la función $z = f(x, y)$ hemos visto las cuatro derivadas segundas f_{xx}, f_{yx}, f_{xy}, f_{yy}, aunque ya sabemos que bajo las hipótesis del Teorema de Schwartz las derivadas mixtas coinciden. Siguiendo este proceso podemos definir las derivadas terceras f_{xxx}, f_{xyx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yxx}, f_{yyx}, f_{yxy} y f_{yyy} aunque sólo hay 4 distintas bajo las hipótesis del Teorema de Schwartz. En general existen 2^p derivadas de orden p , pero sólo $p+1$ son distintas bajo las hipótesis del mencionado teorema:

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^p}, \frac{\partial^p f}{\partial y \partial x^{p-1}}, \frac{\partial^p f}{\partial y^2 \partial x^{p-2}}, \ldots, \frac{\partial^p f}{\partial y^{p-1} \partial x} \text{ y } \frac{\partial^p f}{\partial y^p}$$

2.3.8. *Extremos relativos y absolutos*

Consideremos $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables con valores reales, con dominio de definición en A, que habitualmente denotamos como $z = f(x, y)$. Consideraremos a continuación el problema de maximizar o minimizar a la mencionada función en A.

Si existe un punto $(x_0, y_0) \in A$ tal que $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ para todo $(x, y) \in A$, entonces diremos que f tiene un **máximo absoluto** en A.

Análogamente definimos el concepto de **mínimo absoluto** sin más que exigir ahora que $f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$ para todos los puntos de A.

No siempre existe un punto en el dominio de la función que cumpla las características anteriores. De hecho hay que buscar un cierto tipo de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que aseguran la existencia de máximos y mínimos absolutos, son los llamados *conjuntos compactos*.

Recordemos primero (ver Capítulo 2 y bibliografía recomendada) que para funciones reales de una variable real se define la noción de extremo relativo como un punto x_0 del dominio de la función para el que existe un entorno (puntos suficientemente próximos al valor x_0) tal que para cualquier punto de ese entorno se cumple la condición de máximo o mínimo absoluto descrita con anterioridad. Es decir hacemos un estudio “local”, entendiendo por ello las proximidades del punto sometido a estudio.

¿Qué procedería hacer ahora para una función de $\mathbb{R}^2$, $z = f(x, y)$? ¿Cómo se introducen el concepto de entorno y de proximidad en el plano?

Las respuestas a estas dos cuestiones la hemos estudiado ya al introducir la definición de límite para funciones de varias variables. Debeis recordar que el concepto de *distancia* entre dos puntos de $\mathbb{R}^2$ puede definirse como $d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$. Así los puntos que distan menos que δ de un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, vienen expresado por los puntos (x, y) que satisfagan la inecuación $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

¿Cómo piensas que se representaría graficamente esta situación en el plano? ¿Qué es ahora gráficamente un entorno de (x_0, y_0)?

Pues bien, ahora estamos en condiciones de definir el concepto de **máximo relativo** (resp. **mínimo relativo**) como un punto $(x_0, y_0) \in A$ tal que exista un $\delta > 0$ verificando que para todo $(x, y) \in A$ que cumpla $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ se tiene $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ (resp. $f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$).

¿Cómo definirías los conceptos de máximo y mínimo relativo para una función de tres variables $w = f(x, y, z)$?

Observa que el concepto ahora depende de la definición de distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^3$, que vendría dado por

$$d((x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

¿Cómo se representaría con esta distancia un entorno en el espacio $\mathbb{R}^3$ de un punto (x_0, y_0, z_0)?

Puedes completar, consultando la bibliografía recomendada, la definición de máximo y mínimo de una función $w = f(x, y, z)$.

Para completar el estudio, ¿como piensas que se puede definir una distancia en $\mathbb{R}^n$? ¿Cómo definirías los conceptos de máximo y mínimo relativos para una función de n variables $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$?

Condición necesaria para la existencia de extremo: *Sea $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ una función que cumple que todas sus derivadas parciales son continuas. Si tiene un máximo o un mínimo relativo en un punto de su dominio entonces las n derivadas parciales de f particularizadas en dicho punto deben ser todas iguales a cero.*

Esto es, para una función $z = f(x, y)$ se traduce en que si existe un máximo o mínimo relativo (extremo relativo) en (x_0, y_0) entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Recuerda que en funciones de una variable la condición de derivada nula venía a indicar la existencia de recta tangente paralela al eje OX. Evidentemente la tradución al caso de funciones de dos variables (superficies) vendría dada por la existencia del *plano tangente paralelo al plano XY*.

Al igual que ocurría en funciones de una variable, el recíproco de este resultado no se cumple.

Ejemplo. Consideremos la función $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Se puede comprobar fácilmente que se cumple $f_x(0, 0) = 0$ y $f_y(0, 0) = 0$. Ahora bien $f(0, 0) = 0$, pero la función toma tanto valores positivos como negativos en cada entorno de $(0, 0)$. ¿Cómo probarías esta última afirmación? $\square$

Dada una función $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ con derivadas parciales continuas, diremos que un punto de su dominio es **estacionario** o **crítico** si todas las derivadas parciales se anulan en él. O lo que es lo mismo si el vector gradiente es nulo. Más explícitamente, para una función de dos variables $z = f(x, y)$, se debería cumplir que $\nabla f(x_0, y_0) = \overrightarrow{0}$.

Es importante, al igual que hacíamos en el estudio local de funciones de una variable, encontrar condiciones suficientes que nos garanticen la existencia de extremos relativos, identificando en cada caso si son máximos o mínimos.

Sea $z = f(x, y)$ una función con derivadas parciales de segundo orden f_{xx}, $f_{yx} = f_{xy}$, f_{yy} continuas en un punto estacionario $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y consideremos el siguiente determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - (\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0))^2.$$

Entonces se verifica lo siguiente:

(1) Si $\Delta > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, f tiene un *mínimo relativo* en (x_0, y_0).

(2) Si $\Delta > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, f tiene un *máximo relativo* en (x_0, y_0).

(3) Si $\Delta < 0$, f no tiene ni *máximo ni mínimo relativo* en (x_0, y_0) (**punto de silla**, ver Figura 6.2).

Puedes consultar la bibliografía recomendada para comprobar que no es demasiado complicado a efectos prácticos, generalizar este criterio para funciones de n variables, estudiando el signo de una sucesión de determinantes.

Ejemplo. La función $f(x, y) = (2x - y + 1)^2 + (x - 3y)^2 + 1$ alcanza un *mínimo* en el punto $(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$, conclusión que podemos sacar de igualar las derivadas parciales a cero, obteniendo las ecuaciones $2x - y + 1 = 0$

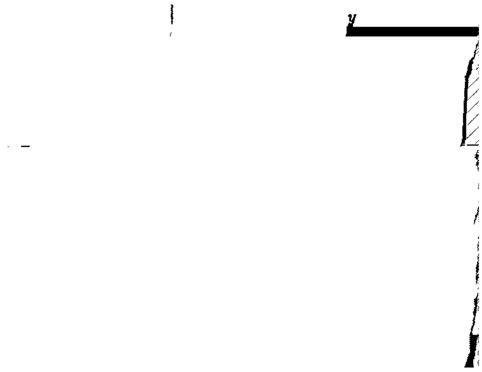


Figura 6.2: La superficie de la figure tiene un punto de silla en el origen.

y $x - 3y = 0$. Después aplicamos el criterio de la condición suficiente que hemos descrito con anterioridad, obteniéndose que

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 20 \end{vmatrix} = 300 > 0.$$

□

Ejemplo. Dada la función $f(x, y) = (x + 1)^2 + 3(y - \frac{2}{3})^2 - \frac{21}{9}$, puedes comprobar siguiendo un procedimiento análogo al descrito para el ejemplo anterior, que f tiene un *mínimo* en $(-1, \frac{2}{3})$. □

2.3.9. *Extremos condicionados*

Hemos visto en el epígrafe anterior cómo se pueden estudiar los extremos relativos de una función $z = f(x, y)$. Ahora bien, es posible que la ecuación de la superficie esté dada de manera implícita, es decir, se pueda dar por ejemplo con una ecuación $g(x, y, z) = 0$, de la cual pueda ser muy complicado en la práctica despejar una variable en función de las otras dos. Incluso podemos complicar todavía más la situación si pedimos estudiar los extremos en los puntos de una curva en el espacio que se puede dar como intersección de dos superficies, que a su vez vengan expresadas de forma implícita por sendas ecuaciones $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$.

En el caso de tres variables, el problema se podría exponer de la manera siguiente:

(1) Sea $w = f(x, y, z)$ con derivadas parciales primeras y segundas continuas en un punto (x_0, y_0, z_0).

(2) Consideremos en la función las siguientes *condiciones de ligadura*, es decir, condiciones a las que sometemos a las variables en la búsqueda de los valores extremos de la función:

$$g_1(x, y, z) = 0, \quad g_2(x, y, z) = 0, \ldots, \quad g_m(x, y, z) = 0.$$

En las mismas condiciones descritas anteriormente, buscamos una *condición necesaria* para que la función $f(x, y, z)$ tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) restringido a las siguientes condiciones de ligadura: $g_1(x, y, z) = 0$, $g_2(x, y, z) = 0, \ldots, g_m(x, y, z) = 0$. Para ello construimos la función

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z) + \cdots + \lambda_m g_m(x, y, z),$$

en donde los λ_i $(i = 1...n)$ se consideran constantes (se conocen con el nombre de **multiplicadores de Lagrange**).

La condición de Lagrange dice que si el punto (x_0, y_0, z_0) es un máximo o mínimo de la función sometida a las condiciones de ligadura anteriormente expuestas, entonces es satisface el sistema de las $m+3$ ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) &= 0,\\
\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) &= 0,\\
\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) &= 0,\\
g_1(x,y,z) &= 0,\\
g_2(x,y,z) &= 0,\\
\vdots &= \vdots\\
g_m(x,y,z) &= 0.
\end{aligned}$$

Observación. **(1)** Existe un procedimiento para distinguir cuando tenemos máximos o mínimos, pero en general suele ser más útil el uso de procedimientos intuitivos (preferentemente de tipo geométrico) que nos permitan hacer tales distinciones.
(2) El método explicado anteriormente como ejemplo para funciones de tres variables, tiene una generalización clara para n. Bastaría considerar ahora $m+n$ ecuaciones construidas de forma análoga a las anteriormente descritas (ver bibliografía recomendada)

Ejemplo. Vamos a minimizar la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sujeta a las condiciones

$$\begin{aligned}
x+2y+3z &= 6,\\
x+3y+9z &= 9.
\end{aligned}$$

Para ello construimos la función $L(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+2y+3z-6)+\lambda_2(x+3y+9z-9)$ y de aquí obtenemos el sistema formado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) = 2x+\lambda_1+\lambda_2 &= 0,\\
\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) = 2y+2\lambda_1+3\lambda_2 &= 0,\\
\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) = 2z+3\lambda_1+9\lambda_2 &= 0,\\
x+2y+3z &= 6,\\
x+3y+9z &= 9.
\end{aligned}$$

Despejamos x, y, z en las tres primeras y sustituimos en las dos últimas obteniendo:

$$\begin{aligned}
14\lambda_1+34\lambda_2 &= -12\\
34\lambda_1+91\lambda_2 &= -18
\end{aligned}$$

y finalmente

$$\lambda_1 = -\frac{240}{59} \qquad y \qquad \lambda_2 = \frac{78}{59}.$$

Para estos valores de los multiplicadores de Lagrange obtenemos el punto $P(\frac{81}{59}, \frac{123}{59}, \frac{9}{59})$ □

Ejemplo. Puedes usar el método de Lagrange para demostrar que entre todos los paralelepípedos de volumen dado, el que tiene superficie mínima es precisamente un cubo. □

2.4. Curvas parametrizadas en $\mathbb{R}^3$

2.4.1. *Parametrización regular. Vectores velocidad y aceleración*

Una función vectorial $\overrightarrow{R}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$ definida $\overrightarrow{R} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, donde I es un intervalo abierto de la recta real, gráficamente describe una curva en el espacio para los distintos valores del parámetro t. Esta representación paramétrica diremos que es **regular** cuando tiene las siguientes propiedades:

(1) $\overrightarrow{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es de clase C^1 (continua y con derivada continua) en el intervalo I.

(2) $\frac{d\overrightarrow{R}}{dt}(t) \neq \overrightarrow{0}$ para todo t de I.

Cuando en vez de clase C^1 se exige clase C^n (continua y con derivadas sucesivas continuas hasta orden n) se suele decir que es **regular de clase** n.

Un ejemplo significativo de una curva parametrizada en el espacio es la llamada *hélice circular*, cuya parametización viene dada por:

$$\overrightarrow{R}(t) = (a\cos\theta t, a\,\mathrm{sen}\,\theta t, bt), \qquad \text{con} \qquad a, b \neq 0, t \in \mathbb{R}.$$

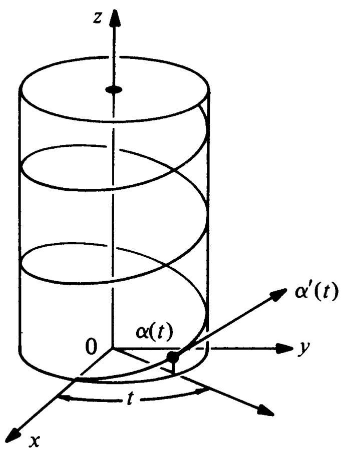


Figura 6.3: Hélice circular.

Por semejanza a la interpretación física que surge del movimiento de una partícula en el espacio, representado éste por la parametrización de una curva $\overrightarrow{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, se define el concepto de **velocidad** como el vector $\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{R}}{dt}$.

A su vez también podemos definir a partir de él, otro vector que mida la variación $\overrightarrow{v}$ en función del parámetro t. Lo llamaremos **vector aceleración** y se define como

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{R}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{k}.$$

2.4.2. *Longitud de arco para curvas en el espacio. El vector unitario tangente*

La longitud de arco de una curva $\overrightarrow{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ entre los valores del parámetro $t = a$ y $t = b$ viene dada por la siguiente expresión:

$$L = \int_a^b |\overrightarrow{v}|\, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt$$

Si elegimos un punto de referencia en la curva $P_0 = \overrightarrow{R}(t_0)$, y notamos la longitud de arco

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt$$

el teorema fundamental del cálculo integral nos lleva a deducir que

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = |\overrightarrow{v}|\,.$$

Ejemplo. Vamos a calcular la longitud de una vuelta de la hélice $\overrightarrow{R}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$. Observemos que la hélice da una vuelta completa cuando t varía de 0 a 2π. Así, obtenemos que el cálculo corresponde a

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}dt = 2\pi\sqrt{2},$$

es decir, la longitud de una vuelta de la hélice es $\sqrt{2}$ veces la del círculo unidad del plano XY en el que la hélice se proyecta. □

Si consideramos la curva $\overrightarrow{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ representada por una parametrización regular y la longitud de arco $s(t)$ medida desde un punto de referencia $P_0 = \overrightarrow{R}(t_0)$ y si además $\frac{ds}{dt} \neq 0$, podemos deducir (derivada de la función inversa) que

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\overrightarrow{v}|}.$$

Esto unido a que

$$\frac{d\overrightarrow{R}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{R}}{dt}\frac{dt}{ds} = \overrightarrow{v}.\frac{dt}{ds}$$

tomando módulos (no se olvide que $\frac{dt}{ds}$ es una magnitud escalar) se obtiene

$$\left|\frac{d\overrightarrow{R}}{ds}\right| = \left|\frac{d\overrightarrow{R}}{dt}\right|\left|\frac{dt}{ds}\right| = |\overrightarrow{v}|\,\frac{1}{|\overrightarrow{v}|} = 1.$$

Llamaremos a $\frac{d\overrightarrow{R}}{ds}$ el **vector tangente unitario** de la curva y lo denotaremos por $\overrightarrow{T}$ (o por $\overrightarrow{T}(s)$ si queremos especificar el punto de la curva en el que calculamos el vector tangente, haciendo referencia al parámetro arco).

Cuando la parametrización de la curva no está expresada en función del parámetro **longitud de arco**, la manera de calcular $\overrightarrow{T}$ es con la expresión $\frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$.

Ejemplo. Vamos a calcular el valor del vector $\overrightarrow{T}$ para los puntos de la curva dada por la parametrización

$$\overrightarrow{R}(t) = (\cos t + t\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - t\cos t, 0).$$

Para esta curva (que está contenida en el plano XY) se obtiene

$$\overrightarrow{v} = (-\operatorname{sen} t + t\cos t + \operatorname{sen} t, \cos t + t\operatorname{sen} t - \cos t, 0)$$

y de aquí $|\overrightarrow{v}| = t$. De esta forma concluimos que $\overrightarrow{T} = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$. □

2.4.3. *Curvatura y torsión de una curva. El triedro de Frenet*

Uno de los grandes problemas que plantea la geometría es determinar y cuantificar los elementos que pueden llevar a distinguir unas figuras de otras. Este problema se puede resolver para curvas lo suficientemente "suaves" (es decir, con un número suficiente de derivadas sucesivas continuas). Veremos que una curva regular viene determinada por únicamente dos magnitudes escalares que llamaremos **curvatura** y **torsión**.

Supongamos que $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}(s)$, donde s es el parámetro arco, es una curva regular de clase mayor o igual que 2. Consideremos $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \overrightarrow{R''}(s)$. Al vector $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}$ se denomina **vector curvatura** de la curva en el punto $\overrightarrow{R}(s)$ y se denota con la expresión $\overrightarrow{\kappa} = \frac{d\overrightarrow{T}}{ds}$. No es difícil demostrar que $\overrightarrow{\kappa}$ es un vector ortogonal a $\overrightarrow{T}$ (consecuencia de que $\overrightarrow{T}$ es un vector unitario y de derivar la expresión $\overrightarrow{T}.\overrightarrow{T} = 1$). Al módulo del vector curvatura $|\overrightarrow{\kappa}(s)|$ lo llamaremos **curvatura de la curva** en $\overrightarrow{R}(s)$ y lo denotaremos por $\kappa(s)$. Llamaremos **radio de curvatura** a la expresión $\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$.

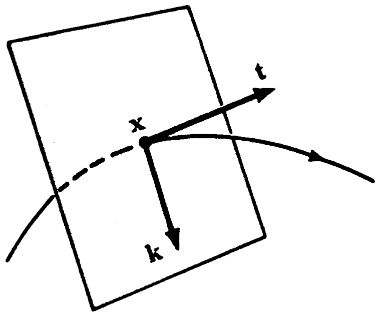


Figura 6.4: Curvatura de una curva en el espacio.

La interpretación de la curvatura es la del valor del cambio de dirección de la tangente respecto de la longitud de arco. De esta forma, una curva en la que la dirección de la tangente cambie rápidamente en relación con la longitud de arco, tiene una curvatura grande y por tanto un radio de curvatura pequeño (piensa en una circunferencia de radio pequeño).

Ejemplo. ¿Cuál será la curvatura y el radio de curvatura de la circunferencia de radio a dada por la parametrización $\overrightarrow{R}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, 0)$? Veamos:

$$\frac{d\overrightarrow{R}}{dt} = (-a(\operatorname{sen} t), a(\cos t), 0)$$

y de esta forma $\left|\frac{d\overrightarrow{R}}{dt}\right| = a$. Además se tiene

$$\overrightarrow{T} = \frac{\frac{d\overrightarrow{R}}{dt}}{\left|\frac{d\overrightarrow{R}}{dt}\right|} = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$$

y por tanto

$$\overrightarrow{\kappa} = \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}}{\left|\frac{d\overrightarrow{R}}{dt}\right|} = -\frac{1}{a}(\cos t, \operatorname{sen} t).$$

El vector curvatura siempre está dirigido hacia el origen y la curvatura es constante e igual a $1/a$, lo que demuestra que el radio de curvatura coincide precisamente con el radio de la circunferencia. □

Siempre que la curva venga parametrizada por algún parámetro t que no sea la longitud de arco se tiene

$$\overrightarrow{\kappa} = \frac{\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}}{\left|\frac{d\overrightarrow{R}}{dt}\right|}.$$

Ejemplo. Puedes comprobar que la curvatura en cada punto de la hélice expresada por la parametrización regular $\overrightarrow{R}(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, bt)$ con $a > 0, b \neq 0$ y $t \in \mathbb{R}$ viene expresada por

$$\overrightarrow{\kappa} = \frac{\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}}{\left|\frac{d\overrightarrow{R}}{dt}\right|} = \frac{a}{a^2+b^2}(-\cos t, \mathrm{sen}\,t, 0).$$

Observa que el vector $\overrightarrow{\kappa}$ es paralelo al plano XY y está dirigido hacia el origen. La curvatura es constante e igual a $\frac{a}{a^2+b^2}$. □

Propiedades.

- Una curva regular de clase mayor o igual que 2 es una recta si y sólo si su curvatura es idénticamente nula.
- Sea $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}(t)$ una representación arbitraria de una curva de clase mayor o igual que 2, entonces se tiene

$$\kappa = \frac{\left|\overrightarrow{R'} \times \overrightarrow{R''}\right|}{\left|\overrightarrow{R'}\right|}.$$

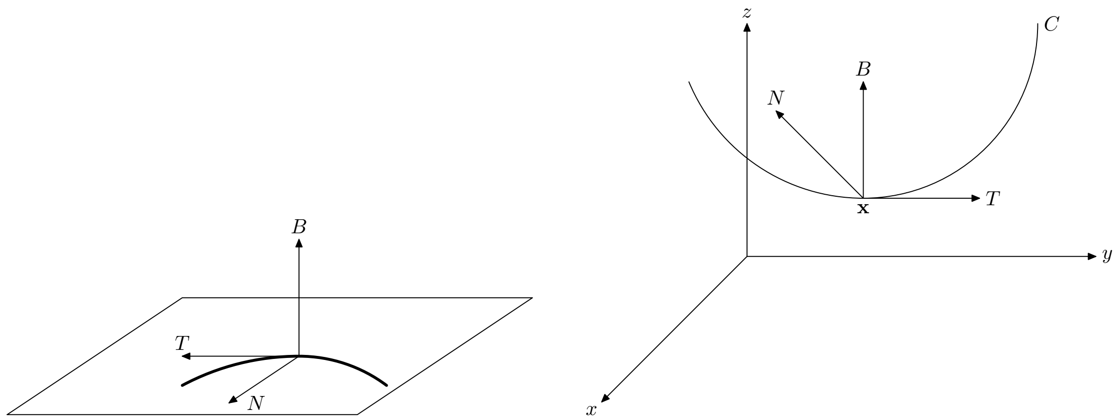
Siempre y cuando $\overrightarrow{\kappa}(s) \neq \overrightarrow{0}$ podremos escoger el vector unitario

$$\overrightarrow{N}(s) = \frac{\overrightarrow{\kappa}(s)}{|\overrightarrow{\kappa}(s)|}$$

que se denomina **vector unitario normal principal a la curva** en el punto $\overrightarrow{R}(s)$.

Observación. A lo largo de una recta $\overrightarrow{\kappa}(s) = \overrightarrow{0}$, luego $\overrightarrow{N}$ no estaría determinado.

Dado un punto de la curva representado por $\overrightarrow{R}(s)$, llamaremos **recta normal principal** a la recta que pasa por el mencionado punto y tiene como vector director el vector $\overrightarrow{N}(s)$. Llamaremos **plano normal** al plano que pasa por el punto $\overrightarrow{R}(s)$ y es perpendicular a la recta tangente a la curva en ese punto. **Plano osculador** se llama al que pasa por el punto $\overrightarrow{R}(s)$ y contiene a los vectores $\overrightarrow{N}(s)$ y $\overrightarrow{T}(s)$.



Ejemplo. Dada la hélice $\overrightarrow{R}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, t)$, vamos a calcular la ecuación de la *normal principal* y el *plano osculador* en el punto $t = \pi/2$. Como $\overrightarrow{\kappa} \neq \overrightarrow{0}$ para todo t se tiene que $\overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{\kappa}}{|\overrightarrow{\kappa}|} = (-\cos t, \mathrm{sen}\,t, 0)$. La ecuación de la normal principal vendría dada por

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 1-\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z & = & \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

La ecuación del plano osculador saldría de resolver

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-\frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$x + z = \frac{\pi}{2}$$

□

Consideremos ahora el vector $\overrightarrow{B}(s) = \overrightarrow{T}(s) \times \overrightarrow{N}(s)$. Observa que $\overrightarrow{B}$ es continuo y unitario, y que $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ forma una *base ortonormal positivamente orientada*. $\overrightarrow{B}(s)$ recibe el nombre de **vector unitario binormal** a la curva en el punto $\overrightarrow{R}(s)$. $(\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s), \overrightarrow{B}(s))$ recibe el nombre de **triedro de Frenet o triedro móvil**.

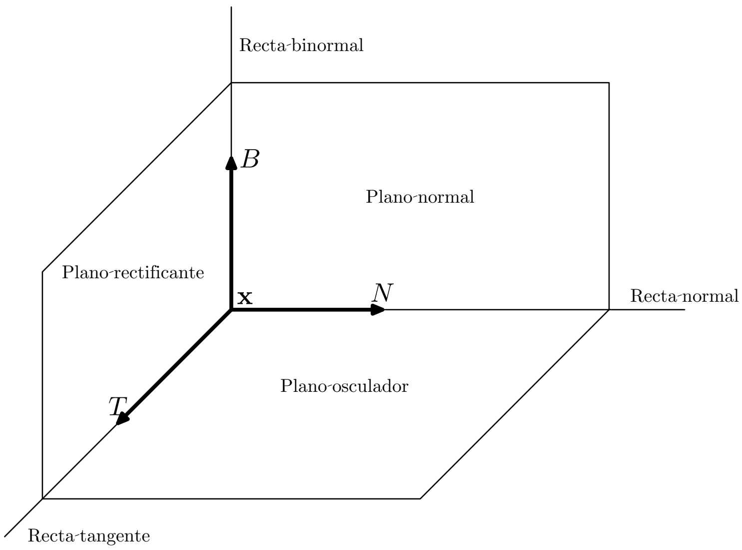


Figura 6.5: Rectas y planos asociados a una curva en el espacio.

Llamaremos **plano rectificante** al plano que pasa por el punto $\overrightarrow{R}(s)$ y contiene a los vectores $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{T}$.

Observa que el plano normal es el que contiene a los vectores $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{N}$.

Ejemplo. Dada la hélice $\overrightarrow{R}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, puedes comprobar que el plano rectificante a la curva en el punto correpondiente a $t = \frac{\pi}{2}$ tiene como ecuación $y = a$. □

Consideremos que $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}(s)$ es una curva regular de clase mayor o igual a 3 y que a lo largo de ella $\overrightarrow{N}(s)$ es de clase C^1. $\overrightarrow{B}(s) = \overrightarrow{T}(s) \times \overrightarrow{N}(s)$, derivando esta expresión obtenemos:

$$\overrightarrow{B'}(s) = \overrightarrow{T'}(s) \times \overrightarrow{N}(s) + \overrightarrow{T}(s) \times \overrightarrow{N'}(s) = \overrightarrow{T}(s) \times \overrightarrow{N'}(s) \qquad (*)$$

ya que $\overrightarrow{T'}(s)$ y $\overrightarrow{N}(s)$ son proporcionales. Se tiene además que $\left|\overrightarrow{N}\right| = 1$ y por tanto $\overrightarrow{N}$ y $\overrightarrow{N'}$ son ortogonales y por esta razón $\overrightarrow{N'}$ sería paralelo al plano rectificante y de aquí

$$\overrightarrow{N'}(s) = \lambda(s)\overrightarrow{T}(s) + \tau(s)\overrightarrow{B}(s).$$

Sustituyendo esta expresión en $(*)$ y operando (con algunas consideraciones que se dejan al lector) se llega finalmente a

$$\overrightarrow{B'}(s) = -\tau(s).\overrightarrow{N}(s) \qquad (**)$$

A la función continua $\tau(s)$ se denomina **torsión** de la curva en $\overrightarrow{R}(s)$.

Si multiplicamos $(**)$ escalarmente por $\overrightarrow{N}$ se obtiene $\tau(s) = -\overrightarrow{B'}(s).\overrightarrow{N}(s)$, expresión del valor de la torsión en un punto.

Ejemplo. Dada la hélice $\overrightarrow{R}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, se tiene

$$\overrightarrow{B} = \left(\frac{b \operatorname{sen} t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right).$$

De aquí deducimos que

$$\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = \frac{\frac{d\overrightarrow{B}}{dt}}{\left|\frac{d\overrightarrow{R}}{dt}\right|} = \left(\frac{b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b \operatorname{sen} t}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right).$$

Luego $\tau(s) = -\overrightarrow{B'}(s).\overrightarrow{N}(s) = \frac{b}{a^2+b^2}$, lo que demuestra que la torsión en esta curva es siempre constante. $\square$

Propiedades.

- Si una curva es regular de clase mayor o igual que 3 y a lo largo de ella $\overrightarrow{N}$ es de clase C^1, entonces se tratará de una curva plana si y sólo si su torsión es idénticamente nula.

- En un punto de la curva $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}(t)$ en el que $\overrightarrow{\kappa} \neq \overrightarrow{0}$ se tiene

$$\tau = \frac{\det(\overrightarrow{R'}, \overrightarrow{R''}, \overrightarrow{R'''})}{\left|\overrightarrow{R'} \times \overrightarrow{R''}\right|^2}$$

- Se verifican las siguientes expresiones (**fórmulas de Frenet**):

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} &= \kappa \overrightarrow{N} \\ \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} &= -\kappa \overrightarrow{T} + \tau \overrightarrow{B} \\ \frac{d\overrightarrow{B}}{ds} &= -\tau \overrightarrow{N} \end{aligned}$$

Ejemplo. Se puede demostrar que la curva

$$\overrightarrow{R}(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right)$$

está contenida en un plano sin más que comprobar que su torsión es 0 en cualquier punto. $\square$

Ejemplo. Para la curva $\overrightarrow{R}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t)$ el valor de la curvatura y la torsión en el punto $t = 0$ es $\kappa(0) = 1$ y $\tau(0) = 1$ (Compruébalo). $\square$

2.5. Superficies parametrizadas en $\mathbb{R}^3$

El concepto intuitivo de superficie parametrizada es el de un conjunto de puntos del espacio que es parecido a una porción de plano en un entorno de cada uno de ellos. Esto sucede cuando existe una aplicación $\overrightarrow{X} : U \subset \mathbb{R}^{\cdot} \to \mathbb{R}^3$, definida por $\overrightarrow{X}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ que es lo suficientemente regular.

Suponemos en principio que $\overrightarrow{X}$ es por lo menos de clase C^1. Además para asegurarnos de que en todo punto existe un plano tangente, supondremos que

$$\text{rango}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial v} \neq \overrightarrow{0},$$

donde consideramos

$$\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Habitualmente notaremos

$$\overrightarrow{X}_u = \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u}, \quad \overrightarrow{X}_v = \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial v}, \quad \overrightarrow{X}_{uu} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial u^2}, \quad \overrightarrow{X}_{uv} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial v \partial u}$$

y así sucesivamente.

Observa que los vectores $\overrightarrow{X}_u$ y $\overrightarrow{X}_v$ forman una base del plano tangente siempre y cuando $\overrightarrow{X}_u \times \overrightarrow{X}_v \neq \overrightarrow{0}$ y que

$$\overrightarrow{N}(u,v) = \frac{\overrightarrow{X}_u(u,v) \times \overrightarrow{X}_v(u,v)}{\left|\overrightarrow{X}_u(u,v) \times \overrightarrow{X}_v(u,v)\right|}$$

representa un vector normal unitario en cada punto de la superficie. Decimos que $\overrightarrow{X} : U \subset \mathbb{R}^{\cdot} \to \mathbb{R}^3$ es una **parametrización regular** de clase C^m de la superficie S si y sólo si:

(1) $\overrightarrow{X} \in C^m(U)$, $m \geqslant 1$.

(2) $\overrightarrow{X}_u \times \overrightarrow{X}_v \neq \overrightarrow{0}$ para todo $(u,v) \in U$.

Ejemplo. Vamos a hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie representada por $\overrightarrow{X}(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ en el punto correspondiente a $u = 1, v = 1$. Veamos, $\overrightarrow{X}(1,1) = (1,1,0)$, $\overrightarrow{X}_u(1,1) = (1,0,2)$ y $\overrightarrow{X}_v(1,1) = (0,1,-2)$. La ecuación del plano tangente vendría dada por

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

y la ecuación de la recta normal, habida cuenta que el vector normal unitario al plano en el punto en cuestión viene dado por:

$$\overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{X}_u(1,1) \times \overrightarrow{X}_v(1,1)}{\left|\overrightarrow{X}_u(1,1) \times \overrightarrow{X}_v(1,1)\right|} = \frac{1}{3}(-2,2,1),$$

se expresa en forma paramétrica como

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 - 2\lambda \\ y & = & 1 + 2\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z & = & \lambda \end{array}\right.$$

$\square$

2.5.1. *Coeficientes de la primera y segunda forma fundamental*

Los coeficientes de la *primera forma fundamental* vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \overrightarrow{X}_u(u,v).\overrightarrow{X}_u(u,v) = \left|\overrightarrow{X}_u(u,v)\right|^2 \\ F(u,v) &= \overrightarrow{X}_u(u,v).\overrightarrow{X}_v(u,v) \\ G(u,v) &= \overrightarrow{X}_v(u,v).\overrightarrow{X}_v(u,v) = \left|\overrightarrow{X}_v(u,v)\right|^2 \end{aligned}$$

Ejemplo. Consideremos la superficie parametrizada por

$$\overrightarrow{X}(u,v) = (u+v, u-v, uv).$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental vendrían dados por

$$\begin{aligned} E(u,v) &= 2+v^2 \\ F(u,v) &= vu \\ G(u,v) &= 2+u^2 \end{aligned}$$

□

Observemos que

$$\left|\overrightarrow{X}_u(u,v) \times \overrightarrow{X}_v(u,v)\right| = EG - F^2 = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$$

y por tanto

$$\overrightarrow{N}(u,v) = \frac{\overrightarrow{X}_u(u,v) \times \overrightarrow{X}_v(u,v)}{\left|\overrightarrow{X}_u(u,v) \times \overrightarrow{X}_v(u,v)\right|} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(\overrightarrow{X}_u \times \overrightarrow{X}_v).$$

Ejemplo. Para la superficie $\overrightarrow{X}(u,v) = (u+v, u-v, uv)$ dada en el ejemplo anterior, se tiene $EG - F^2 = 4 + 2v^2 + 2u^2$. Observa que el valor de esta cantidad es siempre estrictamente mayor que cero. □

Si llamamos θ al ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{X}_u$ y $\overrightarrow{X}_v$, se tiene

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}(\overrightarrow{X}_u \times \overrightarrow{X}_v).$$

Esto quiere decir, entre otras cosas, que en una superficie parametrizada regular, $\overrightarrow{X}_u$ y $\overrightarrow{X}_v$ son perpendiculares si y sólo si $F = 0$.

Pasamos ahora a introducir los llamados *coeficientes de la segunda forma fundamental:*

$$\begin{aligned} e &= \overrightarrow{N}.\frac{\partial^2\overrightarrow{X}}{\partial u^2} \\ f &= \overrightarrow{N}.\frac{\partial^2\overrightarrow{X}}{\partial u \partial v} \\ g &= \overrightarrow{N}.\frac{\partial^2\overrightarrow{X}}{\partial v^2} \end{aligned}$$

Se llama **curvatura de Gauss** de una superficie parametrizada regular, en el punto $\overrightarrow{X}(u,v)$, a la expresión

$$K = \frac{\begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Observa que $EG - F^2 > 0$ siempre, con lo que el signo de K depende directamente de $eg - f^2$.

Distinguiremos cuatro casos que dependen del discriminante $eg - f^2$.

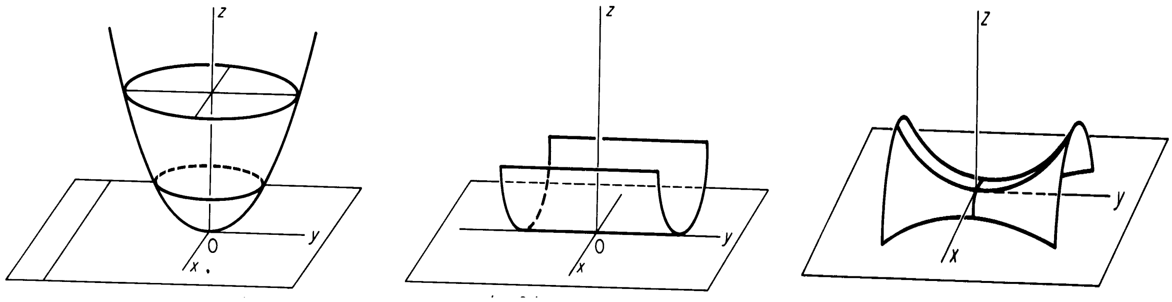


Figura 6.6: Distintos tipos de puntos en relación con su curvatura de Gauss.

Caso elíptico: Se dice que un punto es *elíptico* si $K > 0$. Viene a expresar que el comportamiento de la función en las proximidades del punto es el de un *paraboloide elíptico.*

Caso hiperbólico: Se dice que un punto es *hiperbólico* si $K < 0$. En este caso existen en el plano tangente dos rectas distintas que lo dividen en cuatro regiones.

Caso parabólico: Se dice que un punto es *parabólico* si $K = 0$ y $e^2 + f^2 + g^2 \neq 0$, es decir, los coeficientes e, f y g no son todos iguales a cero. En este caso nos encontraremos con un *cilindro parabólico* como se puede ver en la figura.

Caso plano: Se dice que un punto es *plano* si $e = f = g = 0$.

Ejemplo. Dada la parametrización regular de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio a:

$$\overrightarrow{X}(u,v) = (a(\cos u)(\operatorname{sen} v), a(\operatorname{sen} u)(\operatorname{sen} v), a\cos v)$$

se puede comprobar fácilmente (se deja para el lector) que

$$K = \frac{\begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{1}{a^2},$$

curvatura por tanto siempre constante en todos los puntos de la superficie y que depende sólo del radio de la esfera. Esto nos indicaría que $K > 0$ (caso elíptico), y sería más próxima a cero cuanto más grande fuera el radio de la esfera, es decir, estaría más cerca de parecerse a un plano. □

3. ACTIVIDADES DE APLICACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS

A.6.1. Calcular $\overrightarrow{F'}(t)$ si :

(a) $\overrightarrow{F}(x) = (xe^x, \ln(3x), 0)$ y $x = \ln t$

(b) $\overrightarrow{F}(x) = (\cos(\sqrt{x}), \arctan x, \frac{-1}{1+\sqrt{x}})$ y $x = t^2 + 2t + 1$.

A.6.2. Calcular el dominio y el rango de las siguientes funciones de dos variables:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$.

(b) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

(c) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}}$.

A.6.3. Calcular los límites (si existen) en los siguientes casos:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$.

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,2)} \frac{xy + y - 2x - 2}{x + 1}$.

A.6.4. Considerando diferentes curvas de aproximación, demostrar que las siguientes funciones no tienen límite cuando $(x,y) \to (0,0)$.

(a) $\dfrac{x+y}{x-y}$.

(b) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

(c) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

A.6.5. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en los siguientes casos:

(a) $f(x,y) = e^x \cos y$.

(b) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

(c) $f(x,y) = e^{x \ln y}$.

A.6.6. Sea $w = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $z = g(x,y) = x^2 + y^2$. Calcular $\frac{\partial w}{\partial x}$.

A.6.7. Calcular la ecuación del plano tangente al elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$$

en el punto $(1, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

A.6.8. Suponiendo que las funciones arbitrarias φ, ψ son diferenciables un número suficiente de veces, comprobar las siguientes igualdades:

(a) $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, si $z = \varphi(x^2 + y^2)$.

(b) $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, si $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$

A.6.9. Hallar las siguientes derivadas:

(a) $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$ si $w = x \ln(xy)$.

(b) $\dfrac{\partial^6 w}{\partial x^3 \partial y^3}$ si $w = x^3 \operatorname{sen} y + y^3 \operatorname{sen} x$.

A.6.10. Hallar los extremos relativos de las funciones siguientes (en el caso de que existan):

(a) $f(x, y) = y^2 + x^2y + x^4$.

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y + xy$.

(c) $f(x, y) = y^2 - x^3$.

(d) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)$.

(e) $f(x, y) = \dfrac{(ax + by + c)^2}{x^2 + y^2 + 1}$.

A.6.11. Entre todas las cajas de zapatos (sin tapa superior) de volumen dado, hallar la que tiene superficie mínima.

A.6.12. Hallar la menor distancia del punto $(0, b)$ del eje OY a la parábola $x^2 - 4y = 0$.

A.6.13. En cada uno de los siguientes casos, calcular el vector unitario tangente $\overrightarrow{T}$.

(a) $\overrightarrow{R}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$.

(b) $\overrightarrow{R}(t) = (\frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2})$.

(c) $\overrightarrow{R}(t) = (6\operatorname{sen}(2t), 6\cos(2t), 5t)$ (para $t = \pi$).

(d) $\overrightarrow{R}(t) = (e^t\cos t, e^t\operatorname{sen} t, e^t)$ (para $t = 0$).

A.6.14. Calcular la longitud de la curva $\overrightarrow{R}(t) = (1, t, t^2)$ desde el punto $(1, 0, 0)$ al punto $(1, 1, 1)$.

A.6.15. Calcular la longitud de la curva $\overrightarrow{R}(t) = (t, t, 4 - t^2)$ desde el punto $(0, 0, 4)$ al punto $(1, 1, 3)$.

A.6.16. Hallar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva $\overrightarrow{R}(t) = (1 + t, -t^2, 1 + t^3)$ en $t = 1$.

A.6.17. Hallar el vector curvatura y la curvatura de la curva $\overrightarrow{R}(t) = (t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3})$.

A.6.18. Demostrar que una curva de clase $\geqslant 2$ es una recta si $\overrightarrow{R'}(t)$ y $\overrightarrow{R''}(t)$ son linealmente dependientes para todo valor de t.

A.6.19. Hallar el vector normal principal unitario y el binormal unitario, a lo largo de la curva $\overrightarrow{R}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$.

A.6.20. Hallar la ecuación del plano osculador de la curva $\overrightarrow{R}(t) = (t, t^2, t^3)$ en $t = 1$. ¿Cuál es la ecuación del plano normal? ¿y la del plano rectificante?

A.6.21. Hallar la curvatura y la torsión en $t = 0$ de las siguientes curvas:

(a) $\overrightarrow{R}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t)$.

(b) $\overrightarrow{R}(t) = (t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t})$.

A.6.22. Demostrar las fórmulas de Frenet.

A.6.23. Calcular los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental y la curvatura de Gauss para el punto $u = 0, v = 0$ de las siguientes superficies:

(a) $\overrightarrow{X}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$.

(b) $\overrightarrow{X}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$.

(c) $\overrightarrow{X}(u, v) = (\cosh u\cos v, \cosh u\operatorname{sen} v, u)$.

(d) $\overrightarrow{X}(u, v) = (u - \frac{v^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$.

A.6.24. Demostrar que cualquier punto de la superficie

$$\overrightarrow{X}(u, v) = (f(t)\cos\theta, f(t)\operatorname{sen}\theta, t), \qquad f(t) > 0,$$

es parabólico si y sólo si la superficie es un cilindro circular ($f(t) = a$), o un cono ($f(t) = at + b$ con $a \neq 0$).

4. ACTIVIDADES PRÁCTICAS DEL CAPÍTULO

4.1. Introducción

La práctica se va a realizar con el programa de cálculo matemático *DERIVE for Windows*, versión 4.05, de Soft Warehouse. *DERIVE for Windows* permite realizar cálculos y manipulaciones matemáticas de carácter general, lo cual significa que realiza muchas cosas de forma aceptable aunque no tiene la potencia de otros programas específicos. No obstante, *DERIVE for Windows* permite realizar todos los cálculos que un usuario medio puede necesitar.

En esta práctica nos vamos a centrar en el cálculo (diferencial e integral) en varias variables. Veremos cómo calcular límites de funciones vectoriales y derivadas parciales, determinaremos el gradiente y el laplaciano de una función, así como la divergencia y el rotacional de un campo. Daremos también algunas aplicaciones en la Geometría de curvas y superficies, y finalizaremos calculando el potencial de un campo conservativo.

Antes de comenzar la práctica será conveniente que recordemos brevemente la 'botonera' de *DERIVE for Windows* (ver Figura 6.7), ya que simplifica enormemente la introducción de datos y la realización de cálculos. Los botones permiten realizar las siguientes tareas (de izquierda a derecha): `New` (abrir una nueva hoja de trabajo), `Open` (abrir una hoja de trabajo existente), `Save` (guardar la sesión de trabajo, `Print` (imprimir la sesión de trabajo), `Remove` (eliminar la expresión marcada), `Unremove` (recuperar la última expresión eliminada), `Renumber` (renumerar las expresiones, `Author expression` (introducir una expresión sencilla), `Author vector` (introducir un vector), `Author matrix` (introducir un vector), `Simplify` (simplificar), `Approximate` (calcular un valor aproximado), `Solve` (resolver algebraicamente o numéricamente una expresión), `Substitute for variables` (realizar una sustitución), `Calculate limit` (calcular un límite), `Calculate derivative` (calcular una derivada), `Calculate integral` (calcular una integral), `Calculate sum` (calcular una suma), `Calculate product` (calcular un producto), `2D-plot window` (realizar un gráfico bidimensional) y `3D-plot window` (realizar un gráfico tridimensional).

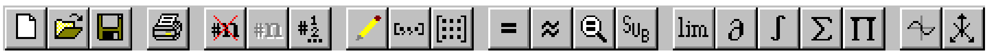


Figura 6.7: El uso de la 'botonera' de *DERIVE for Windows* nos puede simplificar mucho el trabajo. Otro elemento interesante es la existencia de 'teclas calientes' que nos permiten evitar los menús, con lo que se gana en rapidez.

4.2. Límites y continuidad de funciones vectoriales

Con *DERIVE for Windows* podemos calcular los límites iterados de funciones de dos o más variables, lo cual puede ser de utilidad para determinar si una función es continua en un punto. Por ejemplo, supongamos que queremos determinar los siguientes límites:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\sqrt{16-4x^2-y^2} \qquad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\sqrt{16-4x^2-y^2}$$

En primer lugar, definimos una apropiada función F, introduciendo la expresión `F(x,y):=SQRT(16-4x^2-y^2)`. Seleccionando las opciones `Calculus|Limit` nos aparece la ventana de la Figura 6.8. Debemos seleccionar la `Variable` (`x` o `y`), el punto límite (`Limit Point`) y el tipo de límite (`Approach Form`): por la izquierda, por la derecha o por ambos lados. En nuestro caso, ambos límites iterados valen 4.

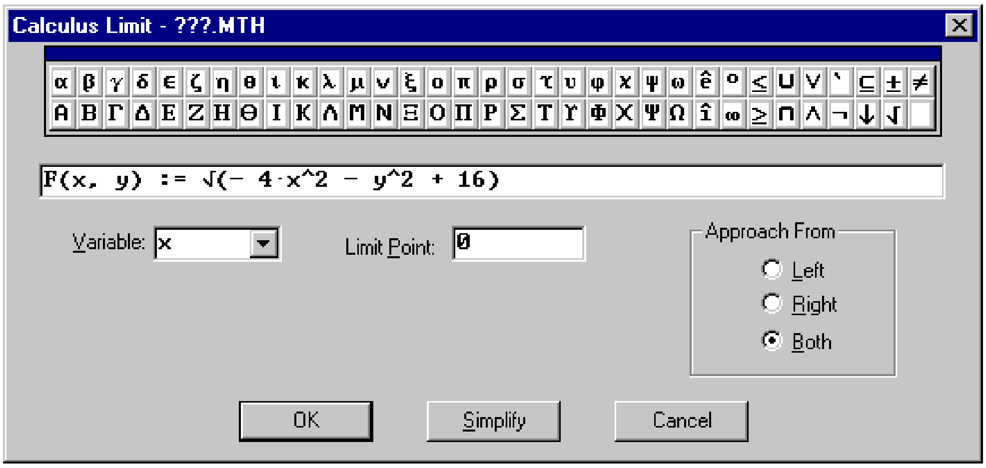


Figura 6.8: Venta del programa que permite calcular límites de funciones de varias variables.

Ejercicio. Calcular los límites iterados en (0,0) de la función

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$$

NOTA: Observemos que aunque los límites iterados existan y coincidan, puede que el límite (de ambas variables simultáneamente) no exista.

Ejercicio. Calcular los límites iterados de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{\arcsin(x/y)}{1+xy} \quad \text{en } (0,1) \\ g(x,y,z) &= xe^{yz} \quad \text{en } (2,-1,1) \end{aligned}$$

4.3. Cálculo diferencial vectorial

DERIVE for Windows realiza cálculo diferencial vectorial en cualquier sistema de coordenadas ortogonal. Podemos calcular gradientes, divergencias y rotacionales en coordenadas cartesianas, polares/cilíndricas o esféricas, siendo las coordenadas cartesianas (también llamadas rectangulares) las que se utilizan por defecto. Los nombres de las variables cartesianas son `x, y, z`, aunque podemos utilizar otros.

Derivadas Parciales

El cálculo de las derivadas parciales con *DERIVE for Windows* es sencillo, pues se sigue el mismo proceso que para las funciones de una variable. Se seleccionan las opciones `Calculus|Differentiate` (o bien pulsamos el botón $\boxed{\partial}$) y nos aparece la ventana de la Figura 6.9. En ella debemos introducir la función que vamos a derivar (por defecto la que está seleccionada), la `Variable` respecto de la cual vamos a derivar (por defecto `x`) y el orden de diferenciación (por defecto `1`). Puede ser interesante almacenar las derivadas parciales en unas nuevas funciones para poder manipularlas más cómodamente. Para ello, una vez calculada la derivada parcial, seleccionamos las opciones `Declare|Function Definition` y nos aparece la ventana de la Figura 6.10. En ella debemos rellenar el nombre de la nueva función y sus argumentos, que usualmente serán los mismos que los de la función original, y la definición de la nueva función (debemos recordar que pulsando la tecla de función F3 se copia la línea que está seleccionada).

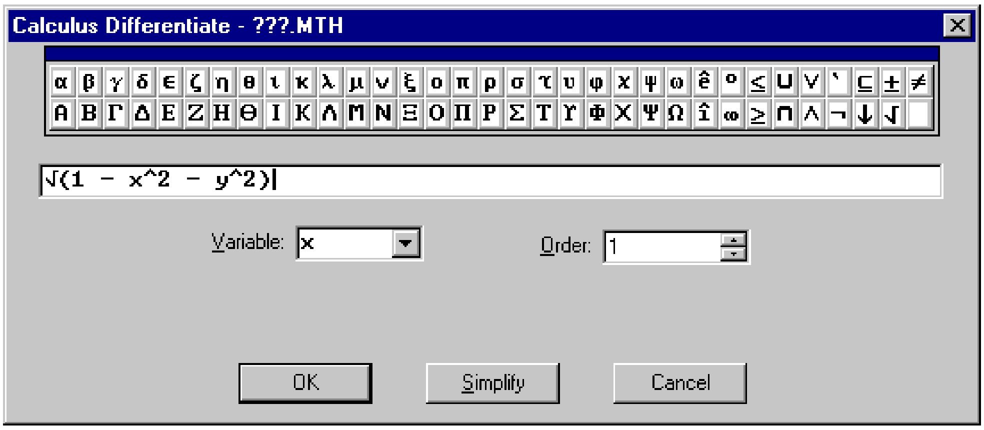


Figura 6.9: Venta del programa que permite calcular las derivadas parciales de funciones de varias variables.

Figura 6.10: Venta del programa que permite declarar una función. Existen ventanas similares para declarar el valor de una variable (constante, vector o matriz).

Ejercicio. Calcular las derivadas parciales de la siguiente función

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

y almacenarlas en dos funciones distintas (por ejemplo, FX y FY).

También es posible calcular las derivadas parciales de orden superior. Para ello sólo es necesario indicar el orden de derivación en la casilla `Order` (ver la Figura 6.9).

Ejercicio. Calcular las derivadas parciales segundas de la función

$$h(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$$

¿Cuánto vale $f_{xy}(-1, 2)$?
NOTA: Para encontrar el valor de una expresión cuando particularizamos a un punto (x_0, y_0) debemos utilizar las opciones `Simplify|Substitute For|Variables`.

Gradiente de una función

Cuando f es una función escalar de varias variables (pensemos que está definida en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$) entonces podemos calcular su gradiente como el vector

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) \quad o \quad \nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$$

DERIVE for Windows permite calcular los gradientes utilizando la función

`GRAD(F(x,y)) ó GRAD(F(x,y,z))`

según F sea una función de 2 o 3 variables. Debemos hacer notar que *DERIVE for Windows* siempre devuelve un vector de 3 componentes: si la función depende de 2 variables, entonces la tercera componente es cero.

Ejercicio. Calcular el gradiente de la función $f(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$ en el punto $(2,-3)$.

Si las coordenadas cartesianas con las que estamos trabajando no se llaman (x,y,z) o si trabajamos en dimensión superior a tres, tenemos que indicárselo convenientemente. Por ejemplo, si nuestra función es $g(a,b,c,d) = a^2 - b^2 + c^2 - d^2$, entonces su gradiente se calcularía escribiendo

```
GRAD(a^2-b^2+c^2-d^2, [a,b,c,d])
```

El resultado es `(2a,-2b,2c,-2d)`.

Hasta ahora hemos supuesto que nuestros sistemas de coordenadas (x,y,z) o (a,b,c,d) son ortonormales. Sin embargo, el gradiente se puede calcular en cualquier sistema de coordenadas (sin ninguna restricción). *DERIVE for Windows*, sin embargo, imponen ciertas restricciones: los sistemas de coordenadas deben ser ortogonales. Si la matriz de la métrica (producto escalar) no es la identidad, entonces también debemos indicarlo cuando utilicemos la función `GRAD`. Por ejemplo, supongamos que la matriz métrica del sistema de coordenadas (x,y,z) fuese $(1,2,4)$. Entonces el gradiente de una función $f(x,y,z)$ se calcularía mediante el comando

```
GRAD(f(x,y,z),[[x,y,z],[1,2,4]])
```

En general, la sintaxis del comando `GRAD` es la siguiente:

```
GRAD(f(x1,x2,x3),[[x1,x2,x3],[g1,g2,g3]])
```

donde `(x1,x2,x3)` denota el sistema de coordendas ortogonal, `(g1,g2,g3)` indica la matriz de la métrica y `f(x1,x2,x3)` es la función.

Si se carga la utilidad `VECTOR.MTH`, entonces están disponibles dos sistemas de coordenadas adicionales: las coordenadas polares/cilíndricas y las coordenadas esféricas, cuyas matrices (coordenadas y métrica) están dadas por

```
cylindrical := [[r,θ,z],[1,r,1]]
  spherical := [[r,θ,Φ],[1,r SIN(Φ),r]]
```

Por ejemplo `GRAD(r SIN(θ) COS(Φ), spherical)` da como resultado el vector

```
[COS(Φ) SIN(θ), COT(Φ) COS(θ), -SIN(Φ) SIN(θ)].
```

Observación: Todos los operadores diferenciales vectoriales admiten un segundo argumento opcional consistente en una matriz de dos filas: la primera fila representa el sistema de coordenadas y la segunda fila indica los elementos de la métrica.

Un campo vectorial F se dice que es *conservativo* si existe alguna función diferenciable f tal que $F = \mathtt{GRAD}(f)$. La función f se llama una *función potencial* de F. Un criterio de campo vectorial conservativo en el plano es el siguiente. El campo $F(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ es conservativo si, y sólo si,

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Con *DERIVE for Windows* podemos realizar el siguiente cálculo:

```
DIF(M(x,y),y)-DIF(N(x,y),x)
```

El campo será conservativo si, y sólo si, la anterior expresión vale cero.

Ejercicio. Determinar si los siguientes campos son conservativos:
(a) $F(x, y) = (x^2y, xy)$
(b) $F(x, y) = (2x, y)$
(c) $F(x, y) = (2xy, x^2 - y)$

La divergencia de un campo

La divergencia de un campo de vectores $X = (f_1, f_2, f_3)$, donde f_i es una función diferenciable definida en $\mathbb{R}^3$, es la función diferenciable dada por $\mathrm{div}(X) = (f_1)_x + (f_2)_y + (f_3)_x$. Para calcular la divergencia, *DERIVE for Windows* dispone de la función

```
DIV([f1(x,y,x),f2(x,y,z),f3(x,y,z)]
```

donde `[f1,f2,f3]` es el vector de componentes del campo. Por ejemplo, $\mathtt{DIV}([y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2])$ da como resultado $x(6y^2z + 2z^3)$.

Ejercicio. Calcular la divergencia de los siguientes campos de vectores:
(a) $X = (x^2yz, (y^2 - 1)\cos z, (y^2 + 1)\cos(xy))$
(b) $Y = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, x^2 - y^3, x + y^2 + z^3)$

Si queremos calcular la divergencia de un campo en el plano, debemos añadirle una tercera componente constante (por ejemplo, cero) y calcular la divergencia del nuevo campo. Sea el campo $G = (f(x, y), g(x, y))$ definido en el plano. Su divergencia se calcularía de la siguiente manera:

- Consideramos el campo `G:=[f,g,0]` en $\mathbb{R}^3$.
- Calculamos su divergencia: `DIV(G)`.

Ejercicio. Calcular la divergencia de los siguientes campos planos: $(x^2y, y^2 - x)$, $(xy, x^3 - y^3)$.

El rotacional de un vector

El rotacional de un campo $F(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z))$ es el campo

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}F(x,y,z) &= (\nabla \times F)(x,y,z) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}\end{aligned}$$

donde $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Cuando $\mathbf{rot}(F) = 0$ decimos que el campo F es *irrotacional*.

Para calcular el rotacional con *DERIVE for Windows* debemos utilizar la siguiente función:

```
CURL([f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)])
```

donde (f, g, h) son las componentes del campo de vectores.

Ejercicio. Hallar el rotacional del campo $(2xy, x^2 + z^2, 2zy)$

Un criterio para campos conservativos en el espacio es el siguiente. Un campo vectorial $F = (M, N, P)$, donde M, N y P son funciones de clase C^1 (es decir, con derivadas parciales primeras continuas) es conservativo si, y sólo si, $\mathbf{rot}F(x,y,z) = 0$.

Ejercicio. ¿Es conservativo el campo de vectores (x^3y^2z, x^2z, x^2y)?

El laplaciano de una función

El laplaciano de una función diferenciable $f(x,y,z)$ es la nueva función dada por

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Para calcular el laplaciano con *DERIVE for Windows* debemos utilizar la siguiente función:

```
LAPLACIAN(f(x,y,z))
```

La función f puede ser de dos variables.

Ejercicio. Calcular el laplaciano de las siguientes funciones:
(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$
(b) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + \sqrt{x + y + z^4}$

4.4. Aplicaciones a la Geometría Diferencial

4.4.1. *Longitud de una curva*

Sea $R(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ una curva diferenciable en $\mathbb{R}^3$. Entonces su longitud viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt$$

Si queremos utilizar *DERIVE for Windows* podemos hacerlo directamente siguiendo los siguientes pasos:

(1) Definimos las funciones `x(t)`, `y(t)` y `z(t)`.

(2) Definimos la función longitud como sigue:

```
L(p,q) := INT(SQRT(DIF(x(t),t)^2+DIF(y(t),t)^2+DIF(z(t),t)^2),t,p,q)
```

(3) Introducimos la expresión `L(a,b)` para obtener el resultado final.

Ejercicio. Calcular la longitud de una vuelta de la hélice circular cuya parametrización es

$$R(t) = (A\cos\theta t, A\operatorname{sen}\theta t, Bt), \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

Otra posible solución al problema de determinar la longitud de la curva consiste en utilizar álgebra vectorial:

(1) Definimos un vector `R(t)` por `R(t):=[X(t),Y(t),Z(t)]`.

(2) Definimos la función longitud como sigue:

```
L(p,q) := INT(SQRT(DIF(R(t),t).DIF(R(t),t)),t,p,q)
```

4.4.2. *Cálculo de la curvatura y la torsión de una curva*

El problema consiste en definir dos funciones que se encarguen de calcular dichas cantidades. La función curvatura está dada por

$$\kappa(t) = \frac{|R'(t) \times R''(t)|}{|R'(t)|}$$

y la función torsión está dada por

$$\tau(t) = \frac{\det(R'(t), R''(t), R'''(t))}{|R'(t) \times R''(t)|^2}$$

Dichas funciones pueden definirse en *DERIVE for Windows* del siguiente modo:

```
K(t) := ABS(CROSS(R′(t),R″(t)))/ABS(R′(t))

T(t) := DET([R′(t),R″(t),R‴(t)])/ABS(CROSS(R′(t),R″(t)))^2
```

Ejercicio. Calcular la curvatura y torsión de la hélice circular cuya parametrización es

$$R(t) = (A\cos\theta t, A\operatorname{sen}\theta t, Bt), \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

4.4.3. *Coeficientes de la primera y segunda forma fundamental*

Dada una superficie parametrizada regular $S(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ se definen los coeficientes de la primera forma fundamental como sigue:

$$\begin{aligned} E(u,v) &= S_u(u,v).S_u(u,v) = |S_u(u,v)|^2 \\ F(u,v) &= S_u(u,v).S_v(u,v) \\ G(u,v) &= S_v(u,v).S_v(u,v) = |S_v(u,v)|^2 \end{aligned}$$

y los coeficientes de la segunda forma fundamental son:

$$\begin{aligned} e &= N.\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} \\ f &= N.\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} \\ g &= N.\frac{\partial^2 S}{\partial v^2} \end{aligned}$$

donde N representa el vector unitario normal a la superficie:

$$N(u,v) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(S_u \times S_v).$$

Para calcular estos elementos con *DERIVE for Windows*, definimos las siguientes funciones:

```
S(u,v) := [x(u,v),y(u,v),z(u,v)]
E(u,v) := DIF(S(u,v),u).DIF(S(u,v),u)
F(u,v) := DIF(S(u,v),u).DIF(S(u,v),v)
G(u,v) := DIF(S(u,v),v).DIF(S(u,v),v)
N(u,v) := SQRT(E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2)^(-2).CROSS(DIF(S(u,v),u),DIF(S(u,v),v))
EE(u,v) := N(u,v).DIF(S(u,v),u,2)
FF(u,v) := N(u,v).DIF((DIF(S(u,v),u)),v)
GG(u,v) := N(u,v).DIF(S(u,v),v,2)
```

Ejercicio. Calcular los coeficientes de la primera y de la segunda forma fundamental de la siguiente superficie parametrizada:

$$S(u,v) = (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\operatorname{sen}(v), u)$$

4.4.4. *Curvatura de Gauss*

A partir de los coeficientes determinados en el apartado anterior podemos calcular la curvatura de Gauss de la superficie como sigue:

$$KG(u,v) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

En *DERIVE for Windows* podemos definir la siguiente función:

```
KG(u, v) := (EE(u,v).GG(u, v)-FF(u, v)^2)/(E(u,v).G(u,v)-F(u,v)^2)
```

Ejercicio. Calcular la curvatura de Gauss de la superficie parametrizada del ejercicio anterior.

4.5. Cálculo integral vectorial

Sea el campo de vectores $F = (M, N, P)$ y supongamos que es conservativo. Entonces existe una función diferenciable f tal que

$$\begin{aligned} f_x &= M \\ f_y &= N \\ f_z &= P \end{aligned}$$

¿Cómo determinar f? Podemos hacerlo directamente mediante integración; sin embargo, *DERIVE for Windows* pone a nuestra disposición la siguiente función:

```
POTENTIAL([f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)])
```

donde (f, g, h) son las componentes del campo de vectores.

Como en el cálculo de primitivas, las funciones potenciales son únicas salvo constantes. Por tanto, la función `POTENTIAL` puede proporcionar un resultado diferente a uno calculado manualmente. Las constantes aditivas pueden ser desechadas (especialmente en funciones que involucran logaritmos o funciones trigonométricas inversas).

No todos los campos de vectores admiten una función potencial; no todos los campos son conservativos. En este caso, la función `POTENTIAL` determina una función diferenciable cuyo gradiente no es el campo de vectores original. Por tanto, antes de utilizar la función `POTENTIAL` es conveniente verificar primero si el campo es conservativo.

La función `POTENTIAL` admite un segundo argumento opcional que es un vector especificando las coordenadas del punto inicial para las integrales involucradas. Por defecto, este vector es el vector nulo. Una elección inapropiada puede conducir a un potencial infinito o desconocido; si esto ocurriese es conveniente probar con otros valores.

Finalmente, la función `POTENTIAL` admite un tercer argumento opcional que es un vector de coordenadas cartesianas o una matriz métrica (esto es, una matriz con dos filas: un vector de coordenadas y una vector con la métrica). Por defecto, este argumento es `[x,y,z]`.

Ejercicio. Sea el campo de vectores $F(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, 2zy)$. Probar que F es un campo conservativo y encontrar una función potencial para F.

4.6. Bibliografía

C. Paulogorrón y C. Pérez. *Cálculo matemático con DERIVE para PC*, Ed. RA-MA, 1ª Ed., 1994.

5. BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

R.E. LARSON, R.P. HOSTETLER y B.H. EDWARDS *Calculo y Geometría Analítica*, 5ª ed., McGraw-Hill, Madrid, 1995. Capítulo 15.

J. STEWART *Cálculo*, 2ª ed. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994. Capítulo 12.

6. PREGUNTAS DE EVALUACIÓN

E.6.1. La posición de un punto en un instante t viene dada por la función vectorial

$$R(t) = \left(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{9}(6t+9)^{\frac{3}{2}} \right).$$

Se pide:

(a) Hallar el espacio recorrido desde $t = 0$ hasta $t = 4$.

(b) Hallar un vector tangente unitario y otro normal a la curva en el punto de parámetro $t = 1$.

(c) ¿Cuál es el valor de la curvatura en ese punto?

E.6.2. **(a)** Demostrar que los vectores tangentes a lo largo de la curva

$$\alpha(t) = \left(at, bt^2, t^3\right)$$

(siendo $2b^2 = 3a$) forman un ángulo constante con el vector $\overrightarrow{A} = (1,0,1)$. ¿Cuál es el valor de ese ángulo?

(b) Hallar las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante de la curva del apartado anterior para $a = b = 1$.

E.6.3. Demostrar que la curva definida por la parámetrización

$$\alpha(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right)$$

está contenida en un plano.

E.6.4. Comprobar que $z = yf(x^2 - y^2)$, donde f es una función diferenciable arbitraria, satisface la ecuación

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

E.6.5. Calcular la ecuación del plano tangente al elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

en los puntos que correspondan a las coordenadas $x = 0$ e $y = 1$.

E.6.6. Un palo de longitud ℓ se parte en tres trozos de longitudes x, y, z. Hallar x, y, z para que el producto xyz sea máximo.

E.6.7. Demostrar que los puntos de la siguiente superficie

$$\overrightarrow{X}(u,v) = (u, v, u^2 + v^3)$$

son elípticos si $v > 0$, hiperbólicos si $v < 0$ y parabólicos si $v = 0$.

ANOTACIONES