

CAPÍTULO 5

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

1. INTERROGANTES CENTRALES DEL CAPÍTULO

- Hallar un sistema triangular que sea equivalente a uno dado.
- Conocer los distintos tipos de matrices y manejar las distintas operaciones que se definen entre ellas, usando correctamente sus propiedades.
- Hallar el determinante de una matriz de cualquier orden.
- Hallar la matriz inversa de una matriz dada.
- Discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Conocer y utilizar la estructura de espacio vectorial y los conceptos de base y dimensión.
- Identificar cuando una matriz es diagonalizable.
- Calcular la matriz diagonal semejante a una matriz A dada como recurso para efectuar su potencia n -ésima.
- Calcular la forma Jordan de matrices de órdenes 2 y 3, usándola como recurso para efectuar potencias n -ésimas.
- Conocer y utilizar los conceptos de producto escalar, norma y distancia en el espacio.
- Identificar geoméricamente el producto vectorial y el producto mixto de vectores.
- Identificar y calcular las ecuaciones de algunas secciones cónicas y superficies cuádricas.
- Manejar expresiones en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.
- Conocer el concepto de aplicación lineal e identificar el núcleo y la imagen de la misma.
- Calcular la matriz asociada a una aplicación lineal y saber obtener la nueva expresión de la misma al efectuar un cambio de base.

2. CONTENIDOS FUNDAMENTALES DEL CAPÍTULO

2.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Una **ecuación lineal de n variables** X_1, X_2, \dots, X_n es una ecuación del tipo $a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n = b$.

Los números a_i ($i = 1, \dots, n$) se denominan **coeficientes** y a b se le llama **término independiente**.

Una **solución de la ecuación lineal** anteriormente mencionada es una n -upla de números reales $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tal que $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = b$.

Ejemplo. $3x - 2y + z = 0$ es una ecuación lineal de tres variables, y $(1, 1, -1)$ es una solución de la misma. Nótese que la ecuación anterior tiene un número infinito de soluciones. \square

A un conjunto de varias ecuaciones lineales se le denomina **sistema de ecuaciones lineales**. Es decir un sistema de m ecuaciones lineales y n variables o incógnitas, es una expresión del tipo

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n & = & b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n & = & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \dots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n & = & b_m \end{cases}$$

Una solución de este sistema es una n -upla de números reales $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ que sea a su vez solución de las m ecuaciones de las que se compone el sistema.

Ejemplo. En el siguiente sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

la terna $(\frac{13}{11}, \frac{14}{11}, 0)$ es una solución del sistema, ya que lo es de cada una de las ecuaciones que lo forman. La terna $(4, 6, 1)$ no es solución del mismo ya que aunque es solución de la primera ecuación no lo es de la segunda. Se puede demostrar que este sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones. \square

Atendiendo a la existencia o no de soluciones y a su número (finito o infinito), los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican de la siguiente manera:

$$\text{s.e.l.} \begin{cases} \text{Compatible (existe solución)} \\ \text{Incompatible (No existe solución)} \end{cases} \begin{cases} \text{Determinado (Solución única)} \\ \text{Indeterminado (Infinitas soluciones)} \end{cases}$$

2.1.1. Reglas de equivalencia de sistemas

Dos sistemas de ecuaciones lineales se dice que son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales se basan en la idea de transformar el sistema original del cual queremos encontrar sus soluciones, en otro equivalente que tenga una estructura más sencilla.

Después de lo dicho conviene aclarar qué entendemos por “*estructura sencilla*” y cuáles van a ser las operaciones que van a ser válidas para transformar el sistema original en otro equivalente.

Ejemplos de sistemas sencillos de resolver, en el caso de igual número de ecuaciones que de incógnitas, son los llamados **triangulares**.

Un sistema triangular de tres ecuaciones con tres incógnitas vendría expresado de una manera genérica por:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & b_1 \\ & a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 \\ & & a_{33}z & = & b_3 \end{cases}$$

Obsérvese que $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$.

Intenta responder ahora a las siguientes preguntas: ¿Cómo sería un sistema triangular de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas? ¿Sabrías definir el mismo concepto para un sistema de n ecuaciones y n incógnitas?

En este tipo de sistemas con n ecuaciones y n incógnitas (si $a_{nn} \neq 0$) se obtiene fácilmente una solución única, despejando y sustituyendo sucesivamente de la última ecuación a la primera.

Parece claro que nuestro interés principal lo centraremos en realizar operaciones en las ecuaciones que forman el sistema original del que queremos conocer sus soluciones, hasta transformarlo en otro que sea lo más parecido posible a un sistema triangular. Debemos por tanto hacer referencia a las reglas u operaciones que consideramos válidas, es decir, que transforman un sistema en otro equivalente:

- (1) Intercambiar dos ecuaciones.
- (2) Multiplicar (o dividir) una ecuación por un número distinto de cero.
- (3) Sumar o restar a una ecuación el resultado de multiplicar (o dividir) otra por un número.
- (4) Expresar una ecuación despejando una variable, y sustituir el resultado en las demás.

Ejemplo 1. Vamos a obtener un sistema triangular equivalente a:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - 2y + 5z = 3 \\ 7x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} 2^a ec. \times 2 + 1^a ec. \times (-3) \\ 3^a ec. \times 2 + 1^a ec. \times (-7) \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ -13y + 22z = 3 \\ -13y + 22z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3^a ec. + 2^a ec. \times (-1)) \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ -13y + 22z = 3 \\ 0.z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ -13y + 22z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Despejando } y \text{ en la segunda} \\ \text{ecuación y sustituyendo} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{13} - \frac{7}{13}z \\ y = -\frac{3}{13} + \frac{22}{13}z \end{cases}$$

y el conjunto de soluciones viene expresado por:

$$S = \left\{ \left(\frac{11}{13} - \frac{7}{13}\lambda, -\frac{3}{13} + \frac{22}{13}\lambda, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Como vemos el sistema tiene infinitas soluciones.

Obviamente no todos los sistemas que vamos a intentar resolver tienen el mismo número de ecuaciones y de incógnitas. ¿Cómo procederíamos con un sistema de este estilo?

Ejemplo 2. Vamos a triangular el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y - z + t = 1 \\ -2x + y + 2z = 7 \\ y - t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2^a ec. + 1^a ec. \times 2) \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - z + t = 1 \\ 7y + 2z = 9 \\ y - t = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{(Intercambiamos la 2ª ec. y la 3ª ec)} \implies \begin{cases} x + 3y - z + t = 1 \\ y - t = 0 \\ 7y + 2t = 9 \end{cases}$$

$$\implies (3ª ec. - 2ª ec. \times 7) \implies \begin{cases} x + 3y - z + t = 1 \\ y - t = 0 \\ 9t = 9 \end{cases}$$

$$\implies (3ª ec. \times \frac{1}{9}) \implies \begin{cases} x + 3y - z + t = 1 \\ y - t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\implies (1ª ec. - 2ª ec. \times 3) \implies \begin{cases} x - z = -3 \\ y - t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

de donde el conjunto de soluciones vendría dado por

$$S = \{(-3 + \lambda, 1, \lambda, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

¿Sabrías explicar por qué?

Observaciones. Debemos extraer algunas conclusiones de los ejemplos anteriores.

- (1) En las operaciones que realizamos con los sistemas en realidad nos bastaría con hacer referencia sólo a los coeficientes, obviando así la repetición de las incógnitas. Si eliminamos estos símbolos el sistema anterior se escribiría como

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Esta ordenación de los coeficientes recibirá el nombre de **matriz ampliada**. La matriz

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

recibe el nombre de **matriz de los coeficientes del sistema**.

Las operaciones que hemos realizado sobre las ecuaciones se realizarán ahora sobre las filas de esta última matriz, sin más que sustituir la palabra “ecuación” por la de “fila”.

- (2) Dada la matriz genérica de un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right)$$

(ver Ejemplo 1), al intentar resolverlo y por lo tanto transformarlo en uno equivalente que sea triangular, llegaremos a un sistema representado por una matriz del tipo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & b'_3 \end{array} \right)$$

que tendrá solución única si y sólo si $a'_{33} \neq 0$.

- (3) En el caso representado en el Ejemplo 2, observemos que la matriz ampliada resultado de efectuar las sucesivas transformaciones a las que hemos sometido el sistema original es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

¿Qué tiene de común esta matriz con la correspondiente a un sistema triangular? Resaltamos a continuación una característica que podemos considerar común a las dos:

Ambas son **matrices escalonadas**, en el sentido de que puede trazarse una “escalera descendente”, por debajo de cuál todos los elementos serán ceros.

Método de Gauss. El método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales consiste en realizar transformaciones en la matriz del sistema de partida hasta conseguir una matriz “escalonada”, de las características descritas anteriormente.

Como es lógico, no todos los sistemas son compatibles (determinados o indeterminados), y algunas veces nos encontraremos con sistemas que no tengan solución. ¿Cómo los podremos identificar?

Ejemplo 3. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + z = -2 \\ 3x + 2y + 2z = -3 \\ 7x + 5y - 3z = 3 \end{cases}$$

es equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & -27 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{array} \right)$$

(Intenta dar los pasos pertinentes para lograr llegar a esta última expresión de un sistema equivalente). Observa que como la última ecuación no tiene solución el sistema no tiene solución.

Observación. En general, cuando al efectuar operaciones en la matriz de un sistema, conseguimos una matriz en la que todos los elementos de una fila son ceros menos el coeficiente que corresponde el término independiente de la ecuación, el sistema será incompatible.

Resumimos a continuación las situaciones genéricas con las que nos encontramos al aplicar el método de eliminación de Gauss.

- (1) Obtenemos una solución imposible y el sistema de partida es incompatible.
- (2) El número de ecuaciones resultantes no eliminadas y de incógnitas coincide. Entonces el sistema de partida es compatible y determinado y la matriz ampliada se podrá transformar en una de la forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & \dots & * & * \\ 0 & * & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & * & * \end{array} \right)$$

(donde con * expresamos cualquier valor posible de los coeficientes)

(2) $5m - 1 \neq \frac{1}{5} \iff m \neq \frac{1}{5}$. Sistema compatible y determinado. □

Ejemplo. Discute según los valores de m :

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

Debes transformar esta ecuación en:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & (1-m)(2+m) & 1-m \end{array} \right)$$

¿Qué transformaciones son necesarias? La discusión surge de la ecuación $(1 - m)(2 + m) = 0$.

¿Qué sucede si $m \neq 1$ y $m \neq -2$? ¿Y si $m = -2$? ¿Y cuando $m = 1$? (Es interesante que razones convenientemente las respuestas a todas estas preguntas). □

2.2. Operaciones con matrices

Un conjunto de $m \times n$ números reales colocados de forma rectangular en m filas y n columnas recibe el nombre de matriz real de dimensión $m \times n$.

De forma genérica notaremos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Con la notación a_{ij} significamos el elemento de la matriz A que ocupa el lugar perteneciente a la fila i y a la columna j . De forma abreviada también notaremos $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

Al conjunto de todas las matrices con coeficientes reales, con m filas y n columnas (dimensión $m \times n$) lo denotaremos por $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. En general abusaremos del lenguaje y cuando hablemos de “matrices” entenderemos que sus coeficientes son números reales.

A las matrices que sólo tienen una fila se les llama **matrices fila**. Análogamente a las que tienen sólo una columna se les denomina **matrices columna**.

Dada una matriz A , se denomina **traspuesta** de A , denotándose tA , a la matriz que se obtiene cambiando en A las filas por columnas.

Las matrices en las que coincide el número de filas con el de columnas se denominan **matrices cuadradas**.

Para una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$ se suele decir que es de orden n . El conjunto de elementos $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ se denomina **diagonal principal**.

Una matriz cuadrada A se dice que es **simétrica** cuando $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$.

Otros tipos especiales de matrices son:

Matriz nula: Aquella en que todos sus elementos son cero.

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es un ejemplo de matriz nula de orden 2.

Matriz diagonal: Cualquier matriz cuadrada en la que los elementos que no están ubicados en la diagonal principal son ceros.

$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ es un ejemplo de matriz diagonal de orden 3.

Matriz unidad o identidad: Se denomina así a cualquier matriz diagonal en la que todos los elementos pertenecientes a la diagonal principal son iguales a 1. La matriz diagonal de orden n será denotada por I_n .

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es un ejemplo de matriz identidad de orden 3.

Matriz triangular: Se denomina de esta manera a toda matriz cuadrada en la que los elementos que están por encima o por debajo de la diagonal principal son iguales a cero. Se dice **triangular superior** cuando los elementos nulos están por debajo o **triangular inferior** si están por encima.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ es un ejemplo de matriz triangular superior de orden tres.

2.2.1. Suma de matrices

Sean $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, es decir, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$ y $B = (b_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$. Definimos la matriz suma $C = A + B$, como $C = (c_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$ donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $i = 1\dots m$ y $j = 1\dots n$.

Más explícitamente podemos expresar

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2.2.2. Propiedades de la Suma

- (1) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (propiedad asociativa).
- (2) $A + B = B + A$ (propiedad conmutativa).
- (3) $A + O = A$ (Por O indicamos la matriz nula).
- (4) La matriz $-A$ que denominaremos **matriz opuesta** y que se obtiene cambiando de signo todos los elementos de A , cumple la siguiente propiedad: $A + (-A) = O$.

Estas propiedades dotan a $(M_{m \times n}, +)$ de la estructura de grupo abeliano.

2.2.3. Producto de un escalar (número real) por una matriz

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$, es decir:

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, $4 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 20 & 24 \\ 28 & 32 \end{pmatrix}$.

Para cualquier $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, se verifican las siguientes propiedades:

- (1) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
- (2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu B$.
- (3) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
- (4) $1A = A$.

Todas estas propiedades, así como las vistas anteriormente para la suma de matrices, se pueden resumir diciendo que $(M_{m \times n}, +, \cdot)$ es un *espacio vectorial sobre* \mathbb{R} (cuerpo de los números reales).

2.2.4. Producto de matrices

Sean $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$ y $B = (b_{ij})_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots p}}$. Definimos el producto AB como la nueva matriz $C = (c_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots p}}$, tal que $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ o en expresión más reducida

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Obsérvese que para que esté bien definido el producto de matrices, *el número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el número de filas de la segunda*.

Ejemplo. En el siguiente producto de matrices, el punto \cdot denota la multiplicación en los números reales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 30 \end{pmatrix}$$

□

2.2.5. Propiedades del producto de matrices

- (1) $A(BC) = (AB)C$.
- (2) $AB \neq BA$ en general. ¿Puedes encontrar algún ejemplo que demuestre esta afirmación?

(3) Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $AI_n = A$ (donde I_n representa la matriz identidad de orden n) y también $I_m A = A$.

(4) $A(B + C) = AB + AC$.

De todo lo anterior se deduce que $M_n(\mathbb{R})$ (conjunto de matrices cuadradas de orden n , con coeficientes reales) dotado de las operaciones suma y producto de matrices *tiene estructura de anillo* (no conmutativo) con elemento unidad.

2.2.6. Algunas matrices relevantes: las matrices invertibles

Consideremos el anillo $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ anteriormente mencionado. Dada la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ no siempre existe otra matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AB = BA = I_n$ (intenta encontrar algunos ejemplos de matrices que ilustren esta afirmación).

En los casos en los que existe B se dice que es la matriz inversa de A y la denotaremos por A^{-1} .

Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$ que posea inversa se dice que es **invertible** o también **regular**. Si no la tiene se denomina **matriz singular**.

2.2.7. Un método sencillo para calcular la matriz inversa

Intentemos calcular la matriz inversa de la siguiente matriz de orden 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Procedemos de la siguiente manera. Ampliamos con la matriz identidad por la derecha

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y seguidamente realizamos operaciones elementales (justo aquellas que fueron mencionadas en el método de Gauss), con las filas de la matriz hasta conseguir:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{array} \right).$$

Lo que resulta a la derecha en el lugar de las anteriores es justo la matriz inversa que buscábamos.

Veamos cómo se calcula la inversa para la matriz propuesta en el ejemplo.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) &\Rightarrow (2^{\text{a}} \text{ fila} \times (-\frac{1}{2})) + 1^{\text{a}} \text{ fila} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ (1^{\text{a}} \text{ fila} \times 2) + 2^{\text{a}} \text{ fila} &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow (1^{\text{a}} \text{ fila} \times 2) + 2^{\text{a}} \text{ fila} \Rightarrow \\ &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Después de los anteriores cálculos y según lo expresado al comienzo concluiremos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3. Determinantes: definición, propiedades, reglas de cálculo y aplicaciones

Vamos a empezar definiendo el concepto de determinante de una matriz cuadrada de orden n , $A = (a_{ij})$. Para introducir este concepto hacen falta algunas definiciones preliminares.

Dado el conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, cualquier n -upla ordenada formada por los n elementos de este conjunto diremos que es una *permutación*. Denotaremos por \mathbb{P}_n el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Diremos que una permutación $\sigma \in \mathbb{P}_n$ tiene una **inversión** (o **trasposición**), cuando el orden que presentan dos números es el contrario al que tienen los números naturales.

Ejemplo. Dado $\{1, 2, 3\}$, $(1, 3, 2)$ es una permutación que pertenece a \mathbb{P}_3 . El número de permutaciones de \mathbb{P}_3 es $3! = 6$. Son las formadas por $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 1, 3)$ y $(1, 3, 2)$. La permutación $(1, 3, 2)$ tiene una inversión (3 antes que 2) y $(3, 2, 1)$ tiene 3 inversiones (3 antes que 2, 3 antes que 1 y 2 antes que 1). \square

Sea $\sigma \in \mathbb{P}_n$, definimos el **signo** de σ como $s(\sigma) = (-1)^{i(\sigma)}$, donde por $i(\sigma)$ indicamos el número de inversiones que tiene la permutación σ .

Antes de introducir la definición general de determinante, lo haremos primero para una matriz de orden 3. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y formemos todos los posibles productos de tres elementos de dicha matriz con las siguientes restricciones:

- (1) En cada producto sólo puede aparecer un elemento de cada fila y uno de cada columna.
- (2) Dotaremos de un signo a cada producto que coincidirá con el signo de la permutación de \mathbb{P}_3 formada por los segundos subíndices de los elementos.

Permutación	Número de inversiones	Producto
123	0	$+a_{11}a_{22}a_{33}$
231	2	$+a_{12}a_{23}a_{31}$
312	2	$+a_{13}a_{21}a_{32}$
321	3	$-a_{13}a_{22}a_{31}$
213	1	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
132	1	$-a_{11}a_{23}a_{32}$

Llamaremos determinante de A y lo notaremos por $\det(A)$ o por $|A|$, a la suma de todos estos productos. Es decir, $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Siguiendo esta misma técnica de definición podemos llegar a definir el concepto de determinante para una matriz genérica de orden n , $A = (a_{ij})$.

Definimos el determinante de A por la expresión

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathbb{P}_n} (-1)^{s(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

donde por $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ indicamos los subíndices que representa la permutación σ .

Observación. En un determinante de orden n aparecen $n!$ sumandos. Como vemos el número de sumandos crece rápidamente en relación con el orden del determinante. No es por tanto demasiado operativo como método de

cálculo la definición de determinante que hemos introducido con anterioridad. Procede por tanto que introduzcamos un método más práctico que nos facilite el trabajo en el cálculo de determinantes.

Dada la matriz $A = (a_{ij})$, llamaremos **menor complementario** del elemento a_{ij} al determinante de la matriz que resulta de suprimir en A la fila i y la columna j . Lo denotaremos por M_{ij} .

Llamaremos **adjunto de** a_{ij} a la expresión $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Ejemplo. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

el menor complementario de 4 es

$$M_{44} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

y el del 1 corresponde a

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 24.$$

Los adjuntos son $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 24$ y $A_{44} = (-1)^{4+4} M_{44} = 0$. □

2.3.1. Cálculo del determinante por el desarrollo de los elementos de una fila o columna

Se puede demostrar sin demasiada dificultad (ver bibliografía recomendada) que dada una matriz genérica de orden n , $A = (a_{ij})$, el determinante viene dado por

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1}.$$

A esta expresión se llama *desarrollo del determinante de la matriz A por los elementos de la primera columna*, puesto que son $(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})$ los elementos que forman la primera columna de la matriz A .

Esta importante propiedad se puede hacer más genérica y la expresión anterior será también válida eligiendo para el desarrollo los elementos de cualquier fila o columna del determinante.

Por ejemplo para la fila i -ésima $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ obtendríamos $\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ y para la columna j -ésima $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ se tiene $\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$.

La gran ventaja que presentan estas expresiones es que podemos reducir el cálculo de un determinante de orden n al cálculo de otros (los adjuntos) que tienen el orden disminuido en una unidad (una fila y una columna menos).

Aplicando sucesivamente este criterio, podremos acabar reduciendo cualquier determinante a cálculos de determinantes de orden 2.

Ejemplo. Desarrollando por los elementos de una línea (fila o columna) vamos a calcular el valor del siguiente determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

La primera cuestión que nos surge es la fila o columna que más nos conviene escoger para el posterior desarrollo. Parece claro para este ejemplo que es la *cuarta fila* y en general debemos escoger aquella que tenga el mayor número de elementos iguales a cero. Así

$$\Delta = -(-4) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{c} \text{Desarrollando por la} \\ 2^{\text{a}} \text{ fila} \end{array} \right) = 4(-3 \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}) = 388.$$

□

2.3.2. Propiedades de los determinantes

Para poder expresar mejor las siguientes propiedades usaremos la notación $\det(A) = \det(C_1, C_2, \dots, C_n)$, donde C_i indica la columna i -ésima de la matriz A .

- (1) Si una columna se multiplica por un escalar λ el valor del determinante queda multiplicado por λ :

$$\det(C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

- (2) $\det(C_1, \dots, C_i + C'_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C'_i, \dots, C_n)$

- (3) El determinante de una matriz que tenga dos columnas iguales vale cero:

$$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i, \dots, C_n) = 0$$

- (4) $\det(\mathbf{0}_n) = 0$ (donde $\mathbf{0}_n$ es la matriz de orden n con todos sus elementos iguales a 0), $\det(I_n) = 1$.

- (5) Si se intercambian dos columnas el determinante cambia de signo:

$$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

- (6) Si a una columna se le suma una combinación lineal de las demás, el determinante no varía:

$$\det(C_1, \dots, C_n) = \det(C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + \dots + \lambda_n C_n, C_2, \dots, C_n)$$

- (7) Si en una matriz cambiamos filas por columnas el valor del determinante no varía:

$$\det(A) = \det({}^t A)$$

- (8) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden n , $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Observación. La propiedad (7) demuestra que en todas las propiedades anteriormente enunciadas podemos cambiar las referencias a *columnas* por *filas*, verificándose igualmente el enunciado resultante.

De las propiedades de los determinantes y del desarrollo de los mismos por los elementos de una fila o columna, podemos deducir que es posible mediante operaciones elementales entre las filas o columnas (según las propiedades anteriormente descritas) conseguir poner *ceros* en el mayor número de elementos de la fila o columna por la que vayamos a desarrollar, con la finalidad de simplificar considerablemente los cálculos.

Ejemplo. Calculemos el valor de

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Restamos la 1ª columna a la 2ª y a la 4ª y también podemos restar a la 3ª columna, la 1ª columna multiplicada por 2, para obtener finalmente

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Observa que de la cuarta columna podemos sacar factor común 3. Así tendremos

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los elementos de la primera fila obtenemos

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ahora podemos restar la 1ª columna a la tercera, para obtener finalmente

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

y desarrollando por la primera fila se tiene

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 12.$$

□

2.3.3. Aplicación de determinantes al cálculo de la matriz inversa

Llamaremos **matriz adjunta** de $A = (a_{ij})$ a la matriz

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

donde por A_{ij} entendemos el adjunto del elemento a_{ij} concepto que ya hemos introducido con anterioridad.

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ tiene inversa si y sólo si $\det(A) \neq 0$, verificándose la siguiente igualdad

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A).$$

Ejemplo. Como ejemplo de que se cumple la expresión anterior, puedes comprobar que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

□

$$X_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Observación. Para obtener el valor correspondiente a la incógnita X_i , efectuamos el cociente entre el determinante de la matriz resultado de sustituir en la matriz de los coeficientes del sistema la columna i -ésima por la columna de los términos independientes, y el determinante Δ de la matriz de los coeficientes.

Ejemplos.

(1) El sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

es un sistema de Cramer, puesto que la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene por determinante $|A| = 4$. Aplicando la regla de Cramer se tiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{3}{4}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{15}{4}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{4} = -\frac{25}{4}$$

(2) El sistema homogéneo

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

admite sólo la solución trivial $x = y = z = 0$, ya que la matriz de los coeficientes coincide con la del sistema anterior y es por tanto un sistema de Cramer.

(3) La regla de Cramer también se puede usar para resolver sistemas de ecuaciones que tengan infinitas soluciones. Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z + 6t = 4 \\ 2x + y + 3z - t = 2 \\ x - 3y + 2z + 5t = 0 \end{cases}$$

si pasamos los términos en los que aparece la incógnita t al otro lado del signo igual obtendremos:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 4 - 6t \\ 2x + y + 3z = 2 + t \\ x - 3y + 2z = -5t \end{cases}$$

Considerando como incógnitas sólo a x, y, z para cada valor de t obtendríamos un sistema de Cramer, puesto que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

(Comprueba que es cierto lo que afirmamos). Finalmente obtendríamos aplicando la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4-6t & 2 & -5 \\ 2+t & 1 & 3 \\ -5t & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = 1 - \frac{5}{3}t, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4-6t & -5 \\ 2 & 2+t & 3 \\ 1 & -5t & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{3}{11} + \frac{56}{33}t,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4-6t \\ 2 & 1 & 2+t \\ 1 & -3 & -5t \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{1}{11} + \frac{29}{33}t.$$

Es decir, el conjunto de soluciones viene expresado por

$$S = \left\{ \left(1 - \frac{5}{3}\lambda, \frac{3}{11} + \frac{56}{33}\lambda, -\frac{1}{11} + \frac{29}{33}\lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.4. Espacios vectoriales: base y dimensión

Se han estudiado en los epígrafes anteriores algunos conjuntos que con las operaciones definidas sobre ellos, en virtud de las propiedades de las mismas, decíamos que tienen estructura de *espacio vectorial*. Recordemos por ejemplo el conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ que tiene estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{R} con las operaciones “+” (suma de matrices) y “.” (producto de un escalar por una matriz). Son numerosos e importantes los ejemplos en álgebra en los que se puede observar esta estructura (ver bibliografía).

Todo lo expresado anteriormente se puede generalizar para un conjunto V , a cuyos elementos le llamaremos genéricamente *vectores*, denotándolos por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ y con un *cuerpo* (ver definición en bibliografía) genérico de escalares que denotaremos por \mathbb{K} , y a sus elementos con letras griegas λ, μ, \dots

Consideramos definidas en V dos operaciones, una interna: $\vec{u} + \vec{v}$ (suma de dos vectores que da otro vector) y otra externa: $\lambda \vec{u}$ (producto de un escalar por un vector que da otro vector). Las propiedades *verificadas para todos los vectores de V y todos los escalares de \mathbb{K}* , que hacen de V con las operaciones anteriormente citadas un **espacio vectorial** son las siguientes:

- (1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- (2) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.
- (3) Existe un elemento de V que denotaremos por $\vec{0}$ (elemento neutro) tal que $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.
- (4) Para todo vector \vec{u} existe $-\vec{u} \in V$ (elemento opuesto) tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.
- (5) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ (1 es el elemento unidad de \mathbb{K}).
- (6) $\lambda(\mu \vec{u}) = (\lambda\mu) \vec{u}$.
- (7) $(\lambda + \mu) \vec{u} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u}$.
- (8) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$.

Habitualmente en el caso en que el cuerpo sea el conjunto de los números reales, diremos que V es un **espacio vectorial real**.

Ejemplo. El conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ con } i = 1, \dots, n\}$ con las operaciones:

- (1) $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
- (2) $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} (Compruébalo). □

Se dice que G es un **sistema de vectores generadores** de V si $L(G) = V$.

Observación. Son especialmente importantes los casos de los espacios vectoriales formados por los *vectores libres del plano* \mathbb{R}^2 y *del espacio* \mathbb{R}^3 , por la interpretación gráfica que los conceptos introducidos anteriormente sugieren. Conceptos que seguro te son familiares, pero es fundamental que los recuerdes ahora, consultando si es necesario la bibliografía recomendada.

En ocasiones es posible eliminar un vector de un sistema generador sin que el subespacio generado se altere. Pero el vector que eliminemos no puede ser uno cualquiera, sino alguno que se pueda expresar como combinación lineal de los restantes. La idea de quedarnos con el menor número de generadores posible de todo el espacio vectorial es la que nos lleva a introducir el concepto de *base*.

Un sistema de vectores generadores y linealmente independientes de un espacio vectorial recibe el nombre de **base**. Se puede demostrar que *en todo espacio vectorial existe una base*.

En el espacio vectorial \mathbb{R}^n existe una base que distinguimos de las demás y que llamaremos *base canónica*, formada por los vectores

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \vec{e}_n &= (0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

Puedes comprobar que efectivamente se trata de un sistema de vectores linealmente independientes y generadores.

Ejemplo. Los vectores $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ y $\vec{v}_3 = (1, 0, 0)$ forman una base de \mathbb{R}^3 . No sucede lo mismo con los vectores $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, 3)$, $\vec{u}_3 = (1, -5, 3)$ ya que $3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$. \square

En un espacio vectorial dado V , todas las bases tienen el mismo número de elementos, a ese número se le llama **dimensión del espacio vectorial**, la denotaremos por $\dim V$.

Observaciones.

- Después de lo visto anteriormente queda demostrado que la dimensión del espacio vectorial \mathbb{R}^n es n .
- Observa que en \mathbb{R}^n (en general en cualquier espacio vectorial de dimensión n) n vectores linealmente independientes forman una base. Análogamente sucede con n vectores generadores. Nunca puede haber más de n vectores linealmente independientes ni menos de n vectores generadores.
- Aunque la dimensión de \mathbb{R}^n está clara, es muy importante para nosotros establecer algún método que nos pueda dar la dimensión de los subespacios generados por vectores de \mathbb{R}^n . Supongamos que tenemos el siguiente sistema de vectores de \mathbb{R}^4 :

$$\vec{u}_1 = (1, 0, 2, 3), \vec{u}_2 = (2, 1, 4, 0), \vec{u}_3 = (3, 1, -1, 2), \vec{u}_4 = (-1, 1, -16, -11)$$

Queremos calcular $\dim L(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\})$. La dimensión de este subespacio será la misma, si sustituimos en el sistema de vectores generadores, cualquier vector por una combinación lineal de los vectores generadores en la que necesariamente aparezca él. Esto se traduce en que podemos hacer operaciones elementales (las que ya hacíamos con el método de Gauss y para la resolución de los determinantes) sin que la dimensión varíe. Es decir, en nuestro caso particular, poniendo las coordenadas de los vectores como filas de una matriz obtenemos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \\ \vec{u}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -16 & -11 \end{pmatrix} \implies \\ \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2' = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1 \\ \vec{u}_3' = \vec{u}_3 - 3\vec{u}_1 \\ \vec{u}_4' = \vec{u}_4 + \vec{u}_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 1 & -16 & -8 \end{pmatrix} \implies \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2' \\ \vec{u}_3' \\ \vec{u}_4' - 2\vec{u}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como vemos, se puede deducir fácilmente que la dimensión del subespacio es

$$\dim L(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}) = \dim L(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2', \vec{u}_3', \vec{u}_4' - 2\vec{u}_3'\}) = 3.$$

2.4.4. Rango de una matriz. Teorema de Rouché-Frobenius

Consideremos la matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$; en ella podemos distinguir m vectores fila pertenecientes a \mathbb{R}^n y n vectores columna pertenecientes a \mathbb{R}^m . Denotemos por F_i , $i = 1, 2, \dots, m$ a los vectores fila y por C_j , $j = 1, 2, \dots, n$ los vectores columna. Enunciamos a continuación un resultado fundamental que hace posible la definición del concepto de rango de la matriz A .

Dada la matriz A anteriormente introducida, se tiene que $\dim L(F_1, F_2, \dots, F_m) = \dim L(C_1, C_2, \dots, C_n)$ y a este número se le denomina **rango de la matriz** A , denotándose por $r(A)$.

Ejemplo. Puede comprobarse que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

tiene rango $r(A) = 2$. □

2.4.5. Una método para calcular el rango: los orlados

Es importante que recuerdes el siguiente método práctico para calcular el rango de una matriz, llamado a veces *método de los orlados*. Dada la matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, consideramos en ella un menor M_k de orden k . Llamaremos **orlado de M_k con la columna i y la fila j** al determinante obtenido añadiendo a M_k los elementos de la fila j que corresponden en la matriz A a las columnas de M_k y añadiendo también a su vez los elementos de la columna i que corresponden a las filas de M_k y el elemento a_{ji} , conservando siempre el orden original que tienen todos los elementos mencionados en la matriz A . Por ejemplo, para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

y dado el menor de orden 2

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix},$$

el orlado de M_2 con la fila 3 y la columna 4 es el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

El *método de los orlados* consiste en lo siguiente:

- Tomamos en A un elemento no nulo (menor M_1 de orden 1).
- Se calculan los orlados de M_1 hasta que obtengamos uno que sea distinto de cero. (Si todos los orlados valen cero se tiene que $r(A) = 1$).
- A partir de este momento sabemos que $r(A) \geq 2$. Procedemos como antes orlando este menor de orden 2 hasta que obtengamos uno que sea distinto de cero (Si todos los orlados valen cero se tiene $r(A) = 2$).
- A partir de este momento sabemos que $r(A) \geq 3$. Procedemos como antes orlando este menor de orden 3 hasta que obtengamos uno que sea distinto de cero (Si todos los orlados valen cero se tiene $r(A) = 3$).
- Así sucesivamente hasta obtener el rango de la matriz A .

También es conveniente que repases las justificaciones teóricas de este método, pudiéndolas encontrar en cualquier libro de matemáticas generales (ver bibliografía recomendada).

2.4.5.1. Teorema de Rouché-Frobenius

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n & = & b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n & = & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \dots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n & = & b_m \end{cases}$$

La condición necesaria y suficiente para que tenga soluciones (sea **compatible**) es que el rango de la matriz de los coeficientes A coincida con el rango de la matriz ampliada A^* .

Una de las principales aplicaciones de este teorema es la discusión de un sistema de ecuaciones lineales en función de uno o varios parámetros. Por ejemplo, consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales y discutamos según los valores de m .

$$\begin{cases} (m + 2)x + y + z & = & m - 1 \\ mx + (m - 1)y + z & = & m - 1 \\ (m + 1)x + (m + 1)z & = & m - 1 \end{cases}$$

Denotamos por M la matriz de los coeficientes del sistema y por M^* la matriz ampliada, es decir:

$$M = \begin{pmatrix} m + 2 & 1 & 1 \\ m & m - 1 & 1 \\ m + 1 & 0 & m + 1 \end{pmatrix} \text{ y } M^* = \begin{pmatrix} m + 2 & 1 & 1 & m - 1 \\ m & m - 1 & 1 & m - 1 \\ m + 1 & 0 & m + 1 & m - 1 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible $\iff r(M) = r(M^*)$. Además $\det(M) = m(m + 1)(m - 1)$ obteniéndose lo siguiente:

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ y $m \neq -1 \implies \text{rango}(M) = 3 = \text{rango}(M^*)$ y el sistema es *compatible* y *determinado*. (Se deja al lector continuar con la discusión del sistema, examinando qué sucede con los rangos $r(M)$, $r(M^*)$ en los demás casos).

2.5. Valores y vectores propios de una matriz

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces la matriz

$$tI_n - A = \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & t - a_{nn} \end{pmatrix}$$

se denomina **matriz característica de A**. Su determinante

$$\Delta_A(t) = \det(tI_n - A)$$

lo denominaremos **polinomio característico**.

Se tiene que

$$\Delta_A(t) = t^n - (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})t^{n-1} + p_{n-2}t^{n-2} + \dots + p_1t + (-1)^n \det(A).$$

Teorema de Cayley-Hamilton. Toda matriz es un cero de su polinomio característico.

Ejemplo. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

entonces se tiene $\Delta_A(t) = t^2 - 5t - 6$. Puedes comprobar que efectivamente se cumple

$$A^2 - 5A - 6I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Dos matrices cuadradas de orden n se dicen **semejantes** cuando existe una matriz no singular (que tiene inversa) P tal que $B = P^{-1}AP$.

Propiedad. Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

Veamos explícitamente el polinomio característico para una matriz de orden 2 y 3. Si $n = 2$ entonces:

$$\Delta_A(t) = t^2 - (a_{11} + a_{22})t + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

mientras que si $n = 3$ se satisface:

$$\Delta_A(t) = t^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})t^2 + (M_{11} + M_{22} + M_{33})t - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

donde por M_{ij} notamos el *menor del elemento de la fila i y la columna j* .

Para la matriz genérica $A = (a_{ij})$ un escalar λ se denomina **valor propio**, si existe un vector (columna) no nulo \vec{v} para el que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Todo vector que satisfaga ésta relación se denomina **vector propio** de A perteneciente al

valor propio λ . Es fácil ver que cada múltiplo $k\vec{v}$ de un vector propio es a su vez otro vector propio. El conjunto E_λ de todos los vectores propios pertenecientes a λ es un subespacio de \mathbb{R}^n , que se denomina **espacio propio de λ** .

Propiedad. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) λ es un valor propio de A .
- (b) La matriz característica $tI_n - A$ es no singular.
- (c) λ es una raíz de $\Delta_A(t)$.

El espacio propio E_λ será el espacio solución del sistema homogéneo $(\lambda I_n - A)\vec{X} = \vec{0}$ o bien $(A - \lambda I_n)\vec{X} = \vec{0}$.

Llamaremos **multiplicidad algebraica** del valor propio λ a la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico y denominaremos **multiplicidad geométrica** de λ a la dimensión de E_λ .

Propiedad. La multiplicidad geométrica de un valor propio es siempre menor o igual que la multiplicidad algebraica.

2.6. Diagonalización y formas canónicas de matrices

Diremos que una matriz A es **diagonalizable** si existe una matriz no singular P tal que $D = P^{-1}AP$, siendo D una matriz diagonal.

Propiedad. Una matriz de orden n es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independientes y en ese caso los elementos diagonales de D son los valores propios correspondientes, teniéndose además que $D = P^{-1}AP$, donde P es la matriz cuyas columnas son los vectores propios. En particular esto se cumple cuando tiene n valores propios diferentes.

Ejemplo. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

entonces se tiene que

$$\Delta_A(t) = \det(tI_3 - A) = t^3 - 11t^2 + 39t - 45 = (t - 3)^2(t - 5).$$

Los valores propios soluciones de la ecuación característica

$$t^3 - 11t^2 + 39t - 45 = 0$$

son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 5$. Para cada valor propio calculamos las ecuaciones del subespacio propio como sigue:

$$E_{\lambda_1} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $x + y - z = 0$, de donde obtenemos dos vectores propios linealmente independientes

$$\vec{u} = (1, -1, 0) \quad \text{y} \quad \vec{v} = (1, 0, 1).$$

$$E_{\lambda_2} : \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

de donde obtenemos el vector propio

$$\vec{w} = (1, 2, 1).$$

La matriz A es, por tanto, diagonalizable, ya que tiene tres vectores propios linealmente independientes, obteniéndose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

□

2.6.1. Potencia n -ésima de una matriz diagonalizable

Si A es una matriz diagonalizable con $P^{-1}AP = D$, despejando tenemos que $A = PDP^{-1}$. Si queremos calcular $A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$. Algo parecido ocurre con $A^3 = A^2A = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^3P^{-1}$. Razonando por inducción se tiene que $A^n = PD^nP^{-1}$, con la enorme ventaja que supone el reducir el problema al cálculo de la potencia n -ésima de una matriz diagonal, que como sabemos se calcula elevando a n todos los elementos de la diagonal principal.

Como ejemplificación de lo anteriormente expuesto vamos a calcular A^n con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para ello tendremos que calcular la matriz inversa de

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

obteniendo que está dada por

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2.6.2. Formas canónicas de matrices

Llamaremos **matriz elemental de Jordan de orden k y valor propio λ** a la matriz $J_k(\lambda)$ de orden k cuyos elementos son todos cero menos los de la diagonal principal que son iguales a λ y los que están inmediatamente

por encima de la diagonal principal que son iguales a 1. Es decir,

$$\begin{aligned} J_1(\lambda) &= (\lambda), \\ J_2(\lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \\ J_3(\lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \\ J_4(\lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

Se llama **matriz de Jordan** a la matriz que se forma yuxtaponiendo matrices elementales Jordan a lo largo de la diagonal principal, y ceros en el resto, es decir a una matriz del estilo

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \mathbf{0} \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & J_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

Propiedad. Toda matriz cuadrada es semejante a una matriz de Jordan (real o compleja), que se determina de forma única salvo permutaciones de los bloques diagonales de matrices elementales Jordan que la forman.

En lo que sigue vamos a obtener las *formas canónicas de Jordan* para matrices de órdenes 2 y 3.

Consideremos $n = 2$, sabemos que si A tiene dos valores propios λ_1 y λ_2 distintos, entonces es diagonalizable. El caso interesante lo tenemos cuando $\lambda_1 = \lambda_2$.

Ejemplo. Vamos a calcular la forma de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Primero obtenemos $\Delta_A(t) = \lambda^2 - 1 = 0$, y de aquí $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Puedes comprobar que E_{λ_1} viene expresado por las ecuaciones $x = y$. Es decir estaría generado por el vector $\vec{u} = (1, 1)$. La matriz A no es por tanto diagonalizable. Obsérvese que $(A - \lambda_1 I_2)^2 = 0$ siempre que se tengan dos valores propios iguales.

Cogemos ahora un vector del plano que no esté en E_{λ_1} , por ejemplo $\vec{v} = (1, 0)$, ya que se puede comprobar fácilmente que

$$(A - \lambda_1 I_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{w} \neq \vec{0}.$$

La matriz P de cambio de base que conduce a la forma canónica se construye tomando los vectores \vec{w} y \vec{v} como columnas respectivas (en este orden), es decir,

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

y así se puede comprobar fácilmente que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Consideremos ahora el caso $n = 3$; al igual que en el caso de orden 2, la reflexión que requiere nuestro interés la encontramos cuando la matriz A no es diagonalizable.

Ejemplo. Vamos a calcular la forma canónica de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que

$$\Delta_A(t) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0,$$

y de aquí los valores propios son:

$$\lambda_1 = 2 \text{ (simple)} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -2 \text{ (doble)}$$

Procediendo como en el ejemplo anterior obtenemos

$$E_{\lambda_1} : \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -4y - 4z = 0 \end{cases},$$

subespacio de dimensión 1, del que podemos extraer al vector

$$\vec{u}_1 = (1, 1, -1)$$

como base del mismo. Por otro lado

$$E_{\lambda_2} : \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases}$$

y de aquí observamos que $\vec{v} = (1, -1, 1)$ sería una base del mismo. Es claro que la matriz no es diagonalizable, ya que no podemos obtener una base de todo el espacio. Para obtener la forma de Jordan procedemos como sigue.

Probamos con

$$E'_{\lambda_2} : (A + 2I_3)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ -8 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x + y = 0,$$

que es un subespacio de dimensión 2, con base

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 0) \quad \text{y} \quad \vec{v}_2 = (0, 0, 1).$$

Como E_{λ_1} y E'_{λ_2} llenan todo el espacio, podemos elegir ahora una base de manera conveniente para obtener la matriz de Jordan. La forma de elegirla es la siguiente:

(1) Cogemos un vector de E'_{λ_2} que no esté en E_{λ_2} , por ejemplo $\vec{u}_3 = (0, 0, 1)$

(2) Se coge $\vec{u}_2 = (A + 2I_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- (3) La base formada por los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es la que posibilita el cambio de base para obtener la matriz de Jordan. En otras palabras las columnas de la matriz P son las coordenadas de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, obteniéndose

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

2.6.3. Potencia n -ésima de una matriz usando la forma canónica de Jordan

De forma análoga a como razonábamos para calcular la potencia n -ésima de una matriz diagonalizable, se puede ahora trabajar con una matriz que sea semejante a una forma canónica de Jordan. La idea es la misma, $A^n = PJ^nP^{-1}$, donde J indica la forma canónica de Jordan a la que reducimos la matriz A .

Para calcular A^n en el ejemplo anterior se procedería como sigue:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Dejamos para el lector la obtención final de la expresión

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^n,$$

teniendo en cuenta para ello que basta con calcular la potencia n -ésima de cada uno de los bloques diagonales, es decir, 2^n y $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^n$, poniendo ceros en el resto.

2.7. Los espacios euclídeos \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . Producto escalar. Normas y distancias.

La posibilidad de medir longitudes de segmentos y ángulos no se da en un espacio vectorial genérico. Para introducir estos conceptos (longitud de un vector, ángulo entre dos vectores,...) se debe dar la definición de un producto escalar (una regla que asocie a cada par de vectores un escalar y que cumpla un serie de propiedades).

Más concretamente precisamos a continuación la definición genérica de espacio euclídeo.

Un espacio vectorial real V se dice **euclídeo** si hay una regla que asigne a cada par de vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$ un número real llamado **producto escalar** de los vectores \vec{u} y \vec{v} , que denotaremos por (\vec{u}, \vec{v}) (también a veces por $\vec{u} \cdot \vec{v}$), de manera que se cumplan las siguientes propiedades:

- *Simétrica:* $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$.
- *Distributiva:* $(\vec{u}, (\vec{v} + \vec{w})) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w})$ para todo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$.
- $(\lambda \vec{u}, \vec{v}) = \lambda(\vec{u}, \vec{v})$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $(\vec{u}, \vec{u}) > 0$ para todo $\vec{u} \in V$, $\vec{u} \neq 0$

Ejemplos.

(1) \mathbb{R}^n se puede dotar del siguiente producto escalar (puedes comprobar las propiedades):

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

(2) En \mathbb{R}^n también se pueden definir otros productos escalares. Por ejemplo, en \mathbb{R}^2 definimos

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} (y_1, y_2).$$

Comprueba que cumple todas las propiedades del producto escalar.

En V_3 (espacio vectorial real de los vectores libres de \mathbb{R}^3) también podemos definir un producto escalar de la siguiente manera: Si consideramos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ expresiones de los vectores \vec{u} y \vec{v} en la base canónica de V_3 , definimos el producto escalar de esos dos vectores como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

La **norma** o **longitud** de un vector \vec{u} en un espacio euclídeo se define como

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

(Obsérvese que $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ tiene sentido debido a la propiedad cuarta del producto escalar). Si consideramos $\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$ la expresión del vector en la base canónica, entonces

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

El **ángulo** que forman dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ está determinado por $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$.

En particular, dos **vectores ortogonales** \vec{u} y \vec{v} (forman un ángulo de 90°) se caracterizan por la **condición necesaria y suficiente** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Ejemplo. Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 2, p)$ y $\vec{v} = (4, p, -3)$, ¿qué valor tendría que tener el parámetro p para que fueran ortogonales? Parece claro que según lo dicho anteriormente la condición es que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ y de aquí deducimos que debe ser $p = -4$. \square

2.7.1. Sistemas de vectores ortogonales y ortonormales

Un conjunto S de vectores de V_3 se dice **ortogonal** si cualquier vector de S es ortogonal a todos los demás vectores del conjunto.

Por ejemplo, los vectores $\vec{u} = (2, 1, -1)$, $\vec{v} = (-1, 4, 2)$ y $\vec{w} = (2, -1, 3)$ forman un sistema ortogonal.

Una propiedad muy importante para este tipo de conjuntos es la siguiente: “Sean \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} vectores no nulos ortogonales de V_3 , entonces son linealmente independientes”.

Un conjunto **ortogonal** de vectores S se dice que es **ortonormal** cuando todos los vectores del conjunto tienen norma igual a 1.

Especial importancia tienen las llamadas *bases ortonormales* de V_3 en las cuestiones relativas a *curvas en \mathbb{R}^3* , que desarrollaremos posteriormente en el Capítulo 6.

Distancia entre dos puntos. Dados dos puntos de \mathbb{R}^3 , $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$, se define la distancia entre ellos como la norma del vector \overrightarrow{AB} , es decir,

$$d(A, B) = \left| \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

ya que $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Ejemplo. Como un sencillo ejercicio de la definición de distancia entre dos puntos, puedes comprobar que el triángulo ABC , con $A(3, -1, 2)$, $B(0, -4, 2)$ y $C(-3, 2, 1)$ es isósceles. \square

2.8. Producto vectorial y producto mixto (o triple)

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$. Se llama producto vectorial de \vec{u} y \vec{v} y lo denotaremos por $\vec{u} \times \vec{v}$ al *vector libre* que tiene las siguientes propiedades:

- (1) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \text{sen}(\vec{u}, \vec{v})$
- (2) La dirección del vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es la perpendicular a las direcciones de los vectores \vec{u} y \vec{v} .
- (3) El sentido del vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es el indicado por la siguiente regla práctica: colocamos la mano derecha con el dedo “corazón” en posición perpendicular a los dedos “pulgar” e “índice”, de tal forma que el dedo “pulgar” indique el sentido del vector \vec{u} y el dedo “índice” indique el sentido del vector \vec{v} . Entonces el dedo “corazón” indica el sentido del vector $\vec{u} \times \vec{v}$.

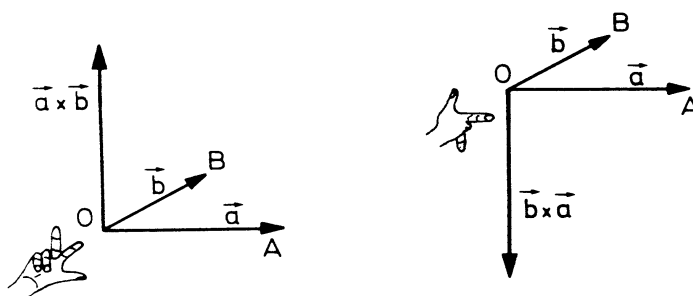


Figura 5.1: Regla del sacacorchos para determinar el sentido del producto vectorial.

2.8.1. Propiedades del producto vectorial

- (1) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.
- (2) Si \vec{u} y \vec{v} tienen la misma dirección entonces $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.
- (3) $\lambda \vec{u} \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$.
 $\vec{u} \times \lambda \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$.
- (4) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.

2.8.2. Área de un paralelogramo

Consideremos el paralelogramo formado por los puntos $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$, de forma que \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{DC} son paralelos y representantes del mismo vector libre \vec{u} , y análogamente \overrightarrow{BC} y \overrightarrow{AD} son paralelos y representan al mismo vector libre \vec{v} . En estas condiciones no es demasiado complicado demostrar (ver bibliografía recomendada) que *el área del paralelogramo viene expresada por $|\vec{u} \times \vec{v}|$* .

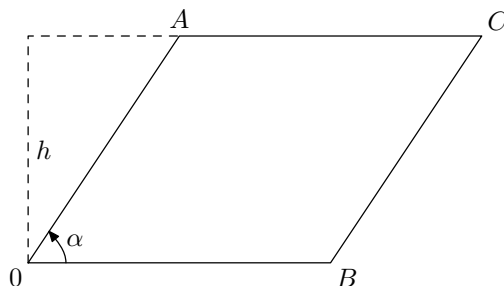


Figura 5.2: El producto vectorial de los vectores OA y OB permite obtener el área del paralelogramo $OBCA$.

2.8.3. Expresión del producto vectorial en coordenadas cartesianas

Dados los vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$, con coordenadas en la base canónica $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, las coordenadas en esa misma base del vector $\vec{u} \times \vec{v}$ vienen expresadas por el desarrollo formal del siguiente determinante, en donde $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ representan a los vectores de la base canónica de V_3 :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Ejemplo. Si $\vec{u} = (2, -1, 3)$ y $\vec{v} = (1, 3, 5)$, entonces $\vec{u} \times \vec{v} = (-14, -7, 7)$. □

Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$, definimos el **producto mixto** como la siguiente expresión:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Dados los vectores \vec{u}, \vec{v} y $\vec{w} \in V_3$, con coordenadas en la base canónica $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ el valor del producto mixto de los tres vectores viene expresado por:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

2.8.4. Propiedades del producto mixto

Si \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} son tres vectores de V_3 y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$(1) \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}].$$

- (2) $\lambda[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w}]$.
- (3) $[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$, cumpliéndose también la propiedad distributiva para las otras dos variables.
- (4) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ si y sólo si los vectores \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} son linealmente independientes.

2.8.5. Volumen de un paralelepípedo

Tres vectores de V_3 linealmente independientes \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} determinan un paralelepípedo de vértices O, A, B, C, D, E, F, G , de forma que $\vec{OA}, \vec{CF}, \vec{ED}$ y \vec{CG} son vectores que representen a la clase del vector libre \vec{u} . Análogamente $\vec{OC}, \vec{AF}, \vec{GD}, \vec{BE}$ para \vec{v} y $\vec{OB}, \vec{AG}, \vec{FD}, \vec{CE}$ para \vec{w} . En estas condiciones se puede probar que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ determina el *volumen* del mencionado paralelepípedo.

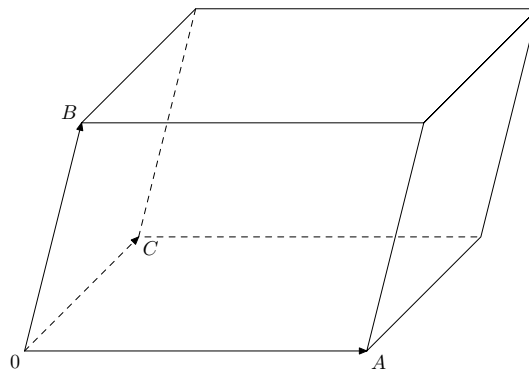


Figura 5.3: El producto mixto de OA, OB y OC permite hallar el volumen del paralelepípedo que determinan.

2.9. Cónicas en \mathbb{R}^2 y cuádricas en \mathbb{R}^3

Un *doble cono recto* es la figura que genera una recta r al girar alrededor de otra recta s que la corta. La recta s se denomina *eje del cono*, y las distintas posiciones de r *generatrices del cono*. El punto de intersección del eje con las generatrices se denomina *vértice del cono* (ver Figura 5.4).

Toda figura que se obtiene como intersección de un doble cono recto y un plano se denomina *cónica*.

Según las distintas posiciones del plano las cónicas se llaman de forma diferente:

- Si el plano es perpendicular al eje del cono y no pasa por el vértice, obtenemos una **circunferencia**. Si el plano pasa por el vértice se obtiene *un punto*.
- Si el plano no es perpendicular al eje del cono y forman entre ellos un ángulo superior al que forman el eje del cono con cualquiera de las generatrices, obtenemos una **elipse**. Si el plano pasa por el vértice se obtiene *un punto* (ver Figura 5.5).
- Si el plano es paralelo a alguna de las generatrices obtenemos una **parábola**, excepto cuando el plano pasa por el vértice que en cuyo caso se obtiene una *recta* (ver Figura 5.6).

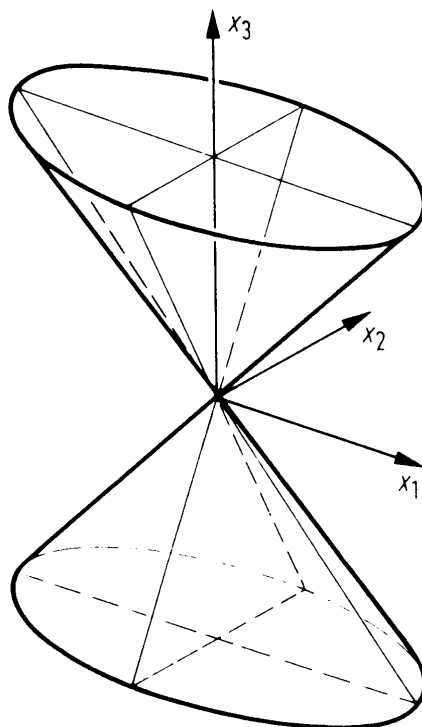


Figura 5.4: Doble cono cuyo vértice está situado en el origen de coordenadas.

- Cuando el ángulo que forman el plano y el eje es inferior al que forma el eje y las generatrices, obtenemos una **hipérbola**, excepto cuando el plano pasa por el vértice que obtendremos *dos rectas que se cortan* (ver Figura 5.7).

Los casos excepcionales que aparecen descritos con anterioridad se llaman **cónicas degeneradas**.

2.9.1. Ecuación general de una cónica

Una ecuación de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

donde $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ se denomina **ecuación general de una cónica**.

Todas las secciones cónicas anteriormente descritas verifican formas particulares de esta ecuación. Recíprocamente la ecuación describe, salvo algunos casos particulares, sólo secciones cónicas.

Si la escribimos en la forma $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$ tiene la ventaja de poder encontrar fácilmente la siguiente forma matricial de la ecuación:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

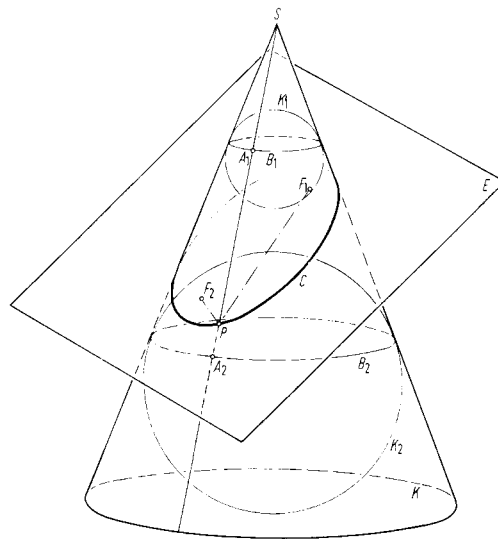


Figura 5.5: Una elipse como intersección de un cono y un plano.

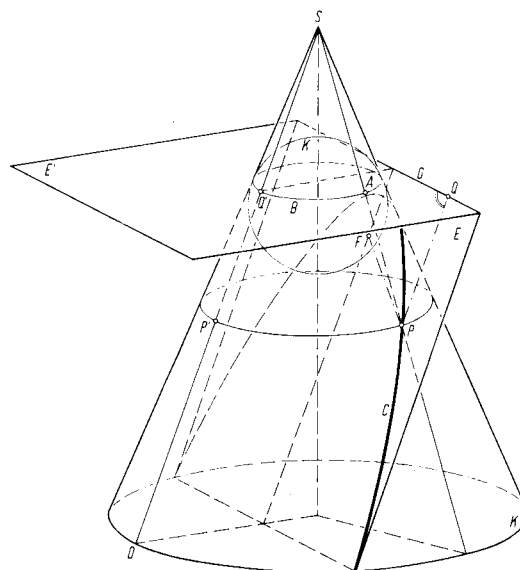


Figura 5.6: Una parábola como intersección de un cono y un plano.

La matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

se denomina **matriz asociada a la cónica**.

Ejemplo. La ecuación $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$ expresada en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

representa una *circunferencia* de centro $C(1, -\frac{3}{2})$ y radio $R = \frac{\sqrt{7}}{2}$

□

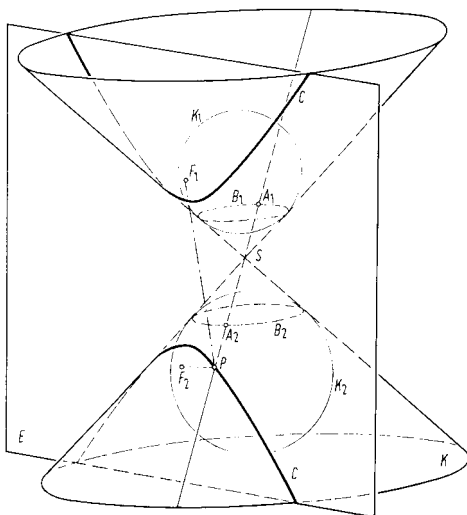


Figura 5.7: Una hipérbola como intersección de un cono y un plano.

2.9.2. Cuádricas en \mathbb{R}^3

Por rotación en torno a un eje de las secciones cónicas *circunferencia, elipse, parábola e hipérbola* se obtienen superficies de revolución en \mathbb{R}^3 , llamadas respectivamente *superficie esférica, elipsoide, paraboloides e hiperboloides*.

Eligiendo de forma adecuada los ejes coordenados las ecuaciones de las mencionadas superficies satisfacen ecuaciones bastante sencillas:

Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

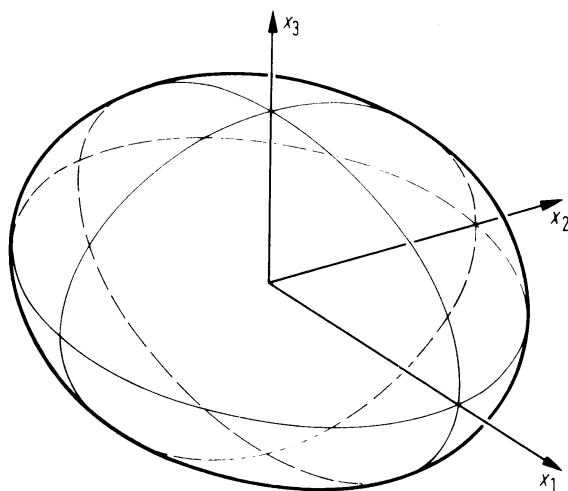


Figura 5.8: Un elipsoide en \mathbb{R}^3 .

Paraboloides: $x^2 + y^2 = a^2z$.

Hiperboloides de una hoja: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

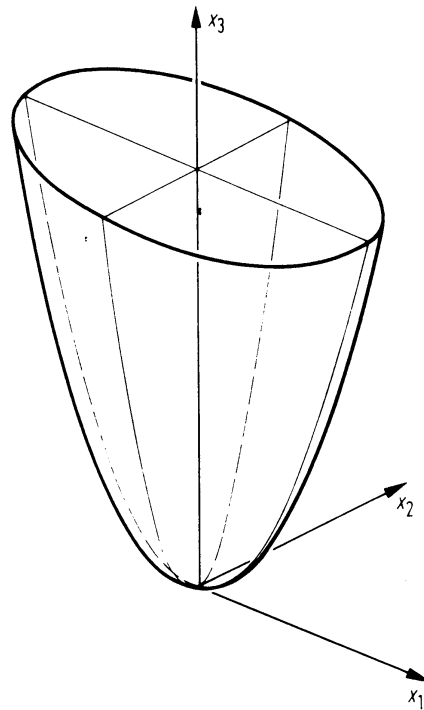


Figura 5.9: Un paraboloides en \mathbb{R}^3 .

Sin embargo la situación cambia considerablemente si se somete la superficie a un movimiento (traslación, giro,...) y aparecen ecuaciones más complicadas en sus expresiones. La forma general de todas estas ecuaciones es la siguiente:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0,$$

donde $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K \in \mathbb{R}$.

Análogamente a como hacíamos con las cónicas se puede plantear la cuestión de identificar las figuras geométricas que describe una ecuación como la anterior. Las llamaremos *superficies cuádricas*.

Si expresamos la ecuación general de las cuádricas de la siguiente forma:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$$

tenemos la ventaja de poder traducirla fácilmente a forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

Ejemplo. La ecuación $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz + 14x - 8y + 10z + 6 = 0$, que en forma matricial se expresa como

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 6 = 0$$

mediante un giro y una traslación convenientes se puede convertir en la ecuación del *elipsoide de revolución*

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2/3} = 1.$$

□

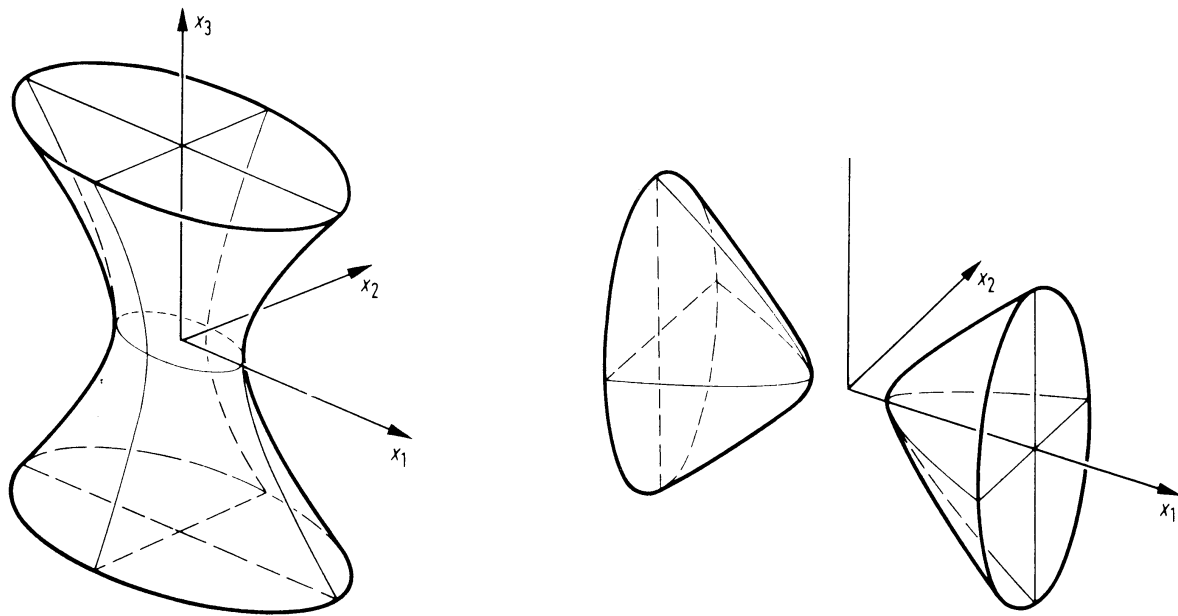


Figura 5.10: Hiperboloides de una hoja y de dos hojas.

2.10. Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

2.10.1. Coordenadas polares

Un punto P de \mathbb{R}^2 queda totalmente determinado por la distancia de dicho punto al origen de coordenadas O , que notaremos por ρ y el ángulo φ que forma la recta OP con el eje OX (contado en el sentido positivo). Al par ordenado de números (ρ, φ) se le llaman **coordenadas polares** del punto P .

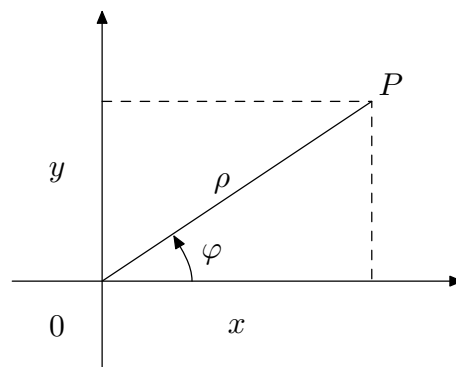


Figura 5.11: Sistema de coordenadas polares en el plano.

2.10.2. Relación entre coordenadas polares y cartesianas rectangulares

Sean (x, y) las coordenadas rectangulares y (ρ, φ) las coordenadas polares. Entonces las relaciones entre ellas son las siguientes:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}$$

y despejando ρ y φ se tiene

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

2.10.3. Coordenadas cilíndricas

Consideramos el punto $P(x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 y $P'(x, y, 0)$ su proyección ortogonal sobre el plano XY . En dicho plano el punto P' está totalmente determinado por sus coordenadas polares (ρ, φ) , en consecuencia el punto P estará ahora totalmente determinado por (ρ, φ) y por el valor de la coordenada z . A la terna de números reales (ρ, φ, z) , se le llama **coordenadas cilíndricas de P** .

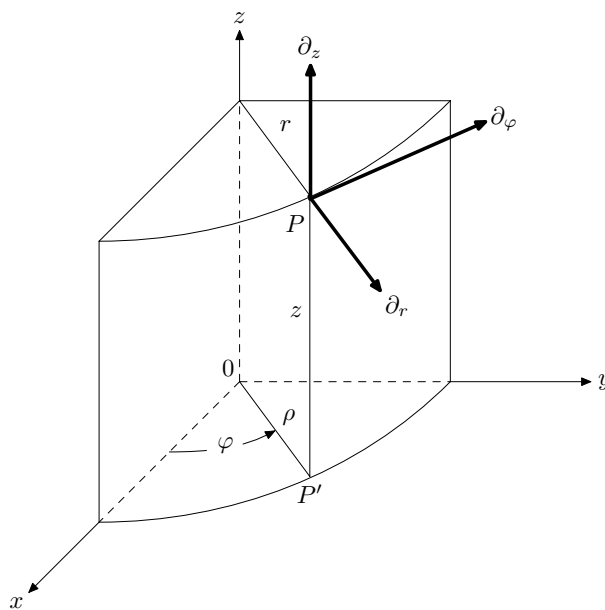


Figura 5.12: Sistema de coordenadas cilíndricas en el espacio.

Las relaciones entre coordenadas cilíndricas y cartesianas rectangulares son las ya conocidas para las coordenadas polares en el plano.

Ejemplo. Consideremos la superficie dada por su ecuación en coordenadas cilíndricas $r^2 + z^2 = c^2$, donde c es una constante. La transformación a coordenadas rectangulares es $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, que como sabemos representa a una esfera. □

2.10.4. Coordenadas esféricas

Consideremos P un punto de \mathbb{R}^3 que no esté situado en el eje OZ . P está totalmente determinado por la longitud ρ de OP , el ángulo φ que forma el plano determinado por OZ y P con el plano OXZ y el ángulo θ que forma la recta OP con el eje OZ . La terna de números (ρ, φ, θ) se llaman **coordenadas esféricas de P** respecto al sistema de referencia polar formado por el polo O , el plano polar OXZ y el eje polar OZ . Obsérvese que ρ puede tomar todos los valores reales positivos, $\varphi \in [0, 2\pi)$ y $\theta \in (0, \pi)$.

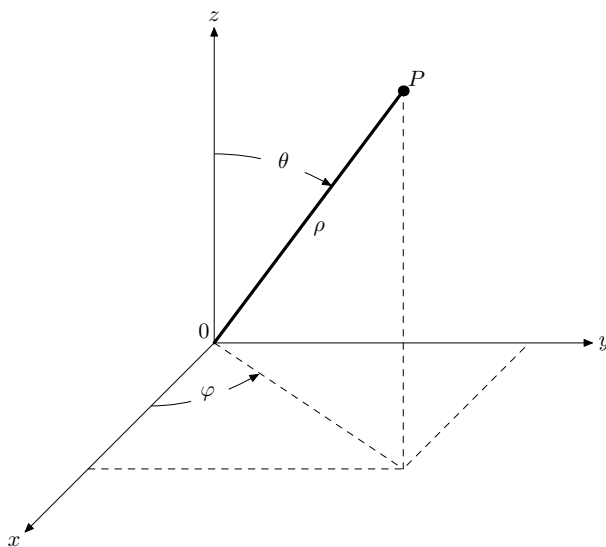


Figura 5.13: Sistema de coordenadas esféricas en el espacio.

2.10.5. Relación entre coordenadas esféricas y cartesianas rectangulares

Si consideramos el punto $P(x, y, z)$, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}x &= \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\y &= \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\z &= \rho \cos \theta\end{aligned}$$

Y despejando de estas expresiones las coordenadas esféricas en función de las cartesianas obtenemos:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x} \\ \tan \theta &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\end{aligned}$$

Ejemplo. Consideremos la superficie de ecuación en coordenadas polares $\operatorname{sen} \theta (\cos \varphi - 3 \operatorname{sen} \varphi) + \cos \theta = 0$. Dividiendo por $\cos \theta$ y usando las anteriores relaciones obtendremos

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 3 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + 1 = 0$$

y simplificando se tiene finalmente $x - 3y + z = 0$ que como sabemos expresa la ecuación de un plano que pasa por el origen de coordenadas. \square

2.11. Aplicaciones lineales

Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo \mathbb{K} . Una aplicación $f : V \rightarrow W$ se dice **lineal** si cumple las siguientes propiedades:

- (1) $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$
- (2) $f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$ para todo $\vec{u} \in V$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Cuando f es una aplicación lineal biyectiva diremos que es un **isomorfismo**. Si es inyectiva le llamaremos **monomorfismo** y si es sobreyectiva diremos que es un **epimorfismo**.

Ejemplo. Si consideramos la matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ la aplicación $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

es *lineal*. Habitualmente se le denomina *aplicación lineal asociada a la matriz A*. □

Observación. Consideremos la aplicación lineal $f : V \rightarrow W$, se verifica:

- (1) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.
- (2) $f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$ para todo $\vec{u} \in V$.

2.11.1. Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Consideremos la aplicación lineal $f : V \rightarrow W$, denominaremos **núcleo de f** al conjunto de vectores de V cuya imagen por f es el vector $\vec{0}$ de W . Es decir,

$$\text{Ker } f = \{ \vec{u} \in V \mid f(\vec{u}) = \vec{0} \}$$

Denominaremos **imagen de f** al siguiente conjunto:

$$\text{Im } f = \{ f(\vec{u}) \mid \vec{u} \in V \}$$

Se verifican las siguientes propiedades:

- (1) $\text{Ker } f$ es un *subespacio de V* y análogamente $\text{Im } f$ es un *subespacio de W* .
- (2) Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ es una *base* de V , se tiene que $f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \dots, f(\vec{v}_n)$ es un *sistema de generadores* de $\text{Im } f$.
- (3) $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim V$
- (4) La aplicación lineal f es *monomorfismo* si y sólo si $\text{Ker } f = \{ \vec{0} \}$

2.11.2. Matriz asociada a una aplicación lineal

De manera análoga a como vimos que dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ surgía una aplicación lineal asociada $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, podemos pensar recíprocamente si dada una aplicación lineal existe una matriz asociada. Puesto

que todo espacio vectorial posee una base, un aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ estará unívocamente determinada por las imágenes de los elementos de la base. En el caso en que tratemos con espacios vectoriales de dimensión finita, se puede dar una importante relación entre las aplicaciones lineales y las matrices. Supongamos que $\dim V = m$ y $\dim W = n$, considerando bases de los respectivos espacios vectoriales formadas por los vectores $\mathcal{B}_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ y $\mathcal{B}_W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\} \subset W$. Consideremos la expresión en la base \mathcal{B}_W de los vectores $\{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \dots, f(\vec{v}_n)\}$, es decir,

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_1) &= \alpha_{11}\vec{w}_1 + \alpha_{21}\vec{w}_2 + \dots + \alpha_{m1}\vec{w}_m \\ f(\vec{v}_2) &= \alpha_{12}\vec{w}_1 + \alpha_{22}\vec{w}_2 + \dots + \alpha_{m2}\vec{w}_m \\ &\dots \\ f(\vec{v}_n) &= \alpha_{1n}\vec{w}_1 + \alpha_{2n}\vec{w}_2 + \dots + \alpha_{mn}\vec{w}_m \end{aligned}$$

Estas igualdades las podemos escribir en notación más abreviada como

$$f(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}\vec{w}_i, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Después de esto diremos que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

es la *matriz de f con respecto a las bases \mathcal{B}_V y \mathcal{B}_W* .

Ejemplo. (1) Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(\vec{u}) = (x + y, 2(x + y), 3x - y)$ para cualquier $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Puedes comprobar fácilmente que la matriz asociada a f con respecto a las bases canónicas sería

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) Una rotación R_α (rotación de ángulo α en el plano alrededor del origen en sentido positivo) es una aplicación lineal $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que tiene como matriz asociada

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

□

Parece claro que la expresión de la matriz asociada a una aplicación lineal cambia si cambiamos las bases que prefijamos en los dos espacios vectoriales. Pero ¿*sabríamos encontrar una relación entre dos matrices asociadas a una misma aplicación lineal, aunque referidas a bases distintas?*

Te introduciremos en esta cuestión con un ejemplo. Supongamos que una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiene asociada en la base canónica la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

y queremos encontrar la expresión de la matriz asociada a f en la base $\vec{u}_1 = (1, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, 3)$. La *matriz cambio de base* (ver bibliografía recomendada) viene expresada por

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esto te recordamos que quiere decir que considerados como vectores columna, por ejemplo el vector $\vec{v} = {}^t(2, 5)$ expresado en la base canónica, tiene como coordenadas en la nueva base, el resultado de efectuar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De esta forma la matriz de la aplicación lineal f expresada en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ vendría dada por

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Intenta razonar por qué (consulta la bibliografía recomendada).

3. ACTIVIDADES DE APLICACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS

A.5.1. Utilizar el método de Gauss en los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 14 \\ -x + 5y - z = 1 \\ 2x - 4y - z = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} -x - y - z = 2 \\ -5x + 5y - z = 1 \\ 2x - 4y + 5z = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y - 5z + 6t = 4 \\ 2x + y + 3z - t = 2 \\ x - 3y + 2z + 5t = 0 \end{cases}$$

A.5.2. Considerar las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

y calcular $A + B$; $C + D$; $3A - 5B$; $2C - 3D$.

A.5.3. Calcular AB y BA (cuando sea posible) siendo A y B las siguientes matrices:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

A.5.4. Resolver la siguiente ecuación matricial $(X - A)B = C$, donde B es una matriz invertible.

A.5.5. Encontrar todas las matrices M de la forma $M = \begin{pmatrix} x & y \\ x & t \end{pmatrix}$ que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A.5.6. Determinar las matrices A y B , tales que

$$\begin{cases} 3A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ 2A + 7B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

A.5.7. Para completar la idea del método que sugerimos en el texto para calcular la matriz inversa sin usar determinantes, responder a las siguientes cuestiones:

- (a) Explicar las razones en las que se basa el método descrito anteriormente para calcular la matriz inversa.
 (b) Aplicarlo en el cálculo de matrices inversas de órdenes superiores a dos. Por ejemplo demostrar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

A.5.8. Determinar usando determinantes si las siguientes matrices son invertibles y calcular su inversa en el caso de que exista:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -6 \end{pmatrix}.$$

A.5.9. Calcular A^n para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A.5.10. A continuación se propone completar el siguiente cuadro hasta obtener el determinante de una matriz

$$2 \times 2, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Permutaciones	Nº de inversiones	Producto
12		
21		

A.5.11. Demostrar usando la Regla de Sarrus que

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -5 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -178 \quad y \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 24$$

A.5.12. Calcular los determinantes propuestos en el ejercicio anterior, pero desarrollando esta vez por los elementos de sus filas o columnas.

A.5.13. Responder a las siguientes cuestiones:

- (a) ¿Cómo se puede calcular el determinante de una matriz triangular superior? ¿Y de una inferior?
 (b) Si A es una matriz con $\det(A) = 5$ ¿Cuanto vale $\det(A^{-1})$? (Indicación: $AA^{-1} = I_n$, aplicar después la propiedad **(8)** de los determinantes).

A.5.14. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

A.5.15. Consideremos los vectores de \mathbb{R}^3 , $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, 3)$ y $\vec{u}_3 = (2, -1, 1)$. Escribir el vector $\vec{u} = (1, -2, 5)$ como combinación lineal de los anteriores.

A.5.16. Determinar si los vectores $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, 3)$, $\vec{u}_3 = (1, -5, 3)$ son linealmente dependientes o independientes.

A.5.17. Demostrar que cualquier conjunto de vectores que contenga el vector $\vec{0}$ es linealmente dependiente.

A.5.18. Determinar si los siguientes vectores son linealmente independientes y en caso de no serlo expresar uno de ellos como combinación lineal de los otros:

(a) $\vec{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, 3)$, $\vec{u}_3 = (3, 2, 5)$.

(b) $\vec{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$.

A.5.19. Determinar a y b para que los siguientes vectores sean linealmente dependientes:

$$\vec{u}_1 = (3, -2, -1, 3), \vec{u}_2 = (1, 0, 2, 4), \vec{u}_3 = (1, -3, a, b)$$

A.5.20. Estudiar para qué valores de los parámetros a y b son compatibles los siguientes sistemas y resolverlos cuando sea posible:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + az = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} ax - y + z = 2x \\ x + 2ay - az = y \\ x + ay - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = b^2 \end{cases}$$

A.5.21. Determinar si son o no diagonalizables cada una de las siguientes matrices, y en el caso en que lo sean calcular la potencia n -ésima:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(f) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & -6 & -2 \end{pmatrix}$,

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

A.5.22. Estudiar la posibilidad de diagonalizar la matriz

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

según los distintos valores del parámetro a .

A.5.23. Determinar los valores de x_n e y_n , para todo $n \geq 0$, sabiendo que

$$x_{n+1} = 2x_n + 4y_n$$

$$y_{n+1} = 3x_n + y_n$$

y que $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$.

A.5.24. Calcular la forma de Jordan de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

indicando la matriz P de cambio de base.

A.5.25. Estudiar si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

A.5.26. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

estudiar para que valores de a es diagonalizable.

A.5.27. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} 2(D-2)y_1 + (D-1)y_2 = e^x \\ (D+3)y_1 + y_2 = 0 \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} (D+6)y_1 + 3y_2 - 14y_3 = 0 \\ -4y_1 + (D-3)y_2 + 8y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_2 + (D-5)y_3 = \operatorname{sen} t \end{cases} \end{aligned}$$

A.5.28. Demostrar que el producto definido en V_3 por $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 - u_2)(v_1 - v_2) + u_2v_2 + a_3b_3$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es un producto escalar. ¿Cuánto vale $\|\vec{u}\|$ con este producto?

A.5.29. Sabiendo que $ABCD$ es un cuadrado, con $A(2, 0, \sqrt{2})$, $B(1, 1, 0)$ y $C(0, y, z)$, hallar las coordenadas que faltan en C .

A.5.30. Sea $ABCD A' B' C' D'$ un paralelepípedo. Sabiendo que $A(0, 1, 1)$, $B(-2, 1, 0)$, $C(1, 1, 3)$ y $A'(2, 0, 1)$, hallar los vértices restantes y el volumen del mencionado paralelepípedo.

A.5.31. ¿Qué tipo de cónica representan las siguientes ecuaciones?

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0; \quad 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y - 104 = 0.$$

A.5.32. ¿Qué tipo de cuádrica representan las siguientes ecuaciones?

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 2 = 0; \quad 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 8x - 8y - 8z + 11 = 0.$$

A.5.33. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por las expresiones referidas a coordenadas en la base canónica $f(x, y, z) = (x + y, z, y - z)$. Se pide:

(a) Demostrar que es una aplicación lineal y encontrar la matriz asociada en la base canónica.

(b) ¿Cuál es la expresión de la matriz asociada en la base formada por los vectores $\vec{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, 0, 0)$?

4. ACTIVIDADES PRÁCTICAS DEL CAPÍTULO

4.1. Introducción

La práctica se va a realizar con el programa de cálculo matemático *DERIVE for Windows*, versión 4.05, de Soft Warehouse. *DERIVE for Windows* permite realizar cálculos y manipulaciones matemáticas de carácter general, lo cual significa que realiza muchas cosas de forma aceptable aunque no tiene la potencia de otros programas específicos. No obstante, *DERIVE for Windows* permite realizar todos los cálculos que un usuario medio puede necesitar.

Antes de comenzar la práctica será conveniente que recordemos brevemente la ‘botonera’ de *DERIVE for Windows* (ver Figura 5.14), ya que simplifica enormemente la introducción de datos y la realización de cálculos. Los botones permiten realizar las siguientes tareas (de izquierda a derecha): New (abrir una nueva hoja de trabajo), Open (abrir una hoja de trabajo existente), Save (guardar la sesión de trabajo), Print (imprimir la sesión de trabajo), Remove (eliminar la expresión marcada), Unremove (recuperar la última expresión eliminada), Renumber (renumerar las expresiones), Author expression (introducir una expresión sencilla), Author vector (introducir un vector), Author matrix (introducir una matriz), Simplify (simplificar), Approximate (calcular un valor aproximado), Solve (resolver algebraicamente o numéricamente una expresión), Substitute for variables (realizar una sustitución), Calculate limit (calcular un límite), Calculate derivative (calcular una derivada), Calculate integral (calcular una integral), Calculate sum (calcular una suma), Calculate product (calcular un producto), 2D-plot window (realizar un gráfico bidimensional) y 3D-plot window (realizar un gráfico tridimensional).

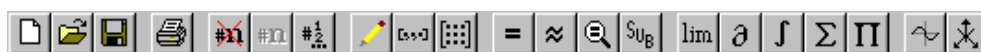


Figura 5.14: El uso de la ‘botonera’ de *DERIVE for Windows* nos puede simplificar mucho el trabajo. Otro elemento interesante es la existencia de ‘teclas calientes’ que nos permiten evitar los menús, con lo que se gana en rapidez.

En esta práctica vamos a manipular vectores y matrices de cualquier orden, resolver sistemas de ecuaciones lineales, operar matrices (cálculo de la matriz inversa, suma, producto) y calcular los valores y vectores propios de una matriz. Por tanto, debemos saber en primer lugar cómo introducir estos datos en el programa. Aunque algunas aplicaciones funcionan sin cargar ningún paquete adicional, es conveniente que para esta práctica se cargue la utilidad VECTOR.MTH mediante las opciones File|Load|Utility.

4.2. Introducción de vectores y matrices

Para introducir un vector en *DERIVE for Windows* tenemos dos formas: particular y general. La forma particular se obtiene seleccionando las opciones Author|Vector y nos aparece la ventana de la Figura 5.15, demandándonos la dimensión del vector. Una vez introducida dicha dimensión (por ejemplo, 4) nos aparece una nueva ventana (ver Figura 5.16) para que vayamos introduciendo los elementos del vector.

La forma general consiste en seleccionar las opciones Author|Expression e introducir un vector en la forma $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, donde x_i son los diferentes elementos del vector. Por ejemplo, el vector $(2, 1, -3)$ se introduciría como $[2, 1, -3]$; debemos notar que los vectores deben estar delimitados por los corchetes $[]$ y no por los paréntesis $()$ o las llaves $\{\}$.

Análogamente, podemos introducir una matriz de dos formas distintas. La forma particular consiste en seleccionar las opciones Author|Matrix y nos aparece la ventana de la Figura 5.17 donde debemos indicar el número de

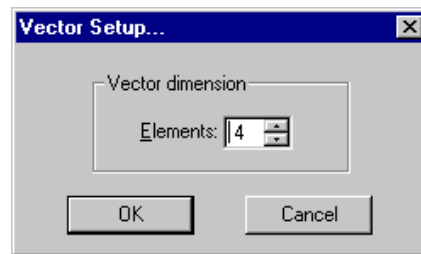


Figura 5.15: Ventana para introducir la dimensión de un vector.

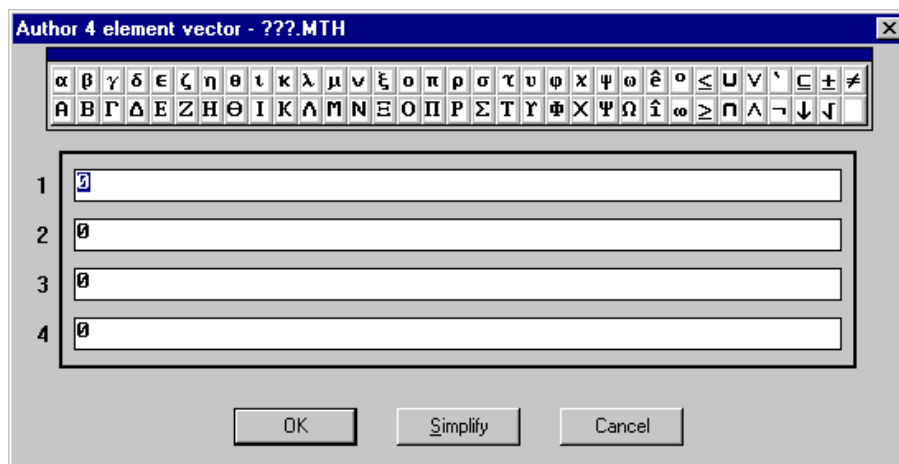


Figura 5.16: Ventana para introducir los elementos de un vector.

filas (Rows) y de columnas (Columns). A continuación debemos completar los elementos de la matriz (ver Figura 5.18).

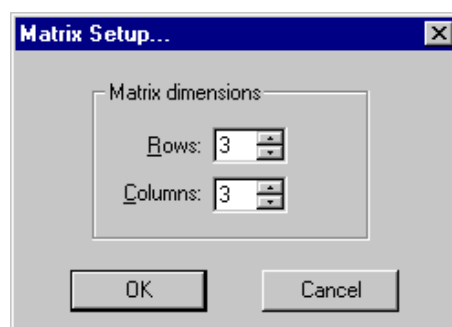


Figura 5.17: Ventana para introducir las dimensiones de una matriz.

La forma general consiste, como antes, en seleccionar las opciones Author | Expression e introducir la matriz en la forma $[f_1, f_2, \dots, f_m]$, donde cada f_i es una fila de la matriz. Por ejemplo, la matriz de orden 3×3 siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$$

se introduciría como sigue: $[[1,2,3], [1,4,9], [1,8,27]]$. Notemos que los delimitadores de las matrices son también los corchetes y no los paréntesis ni las llaves.

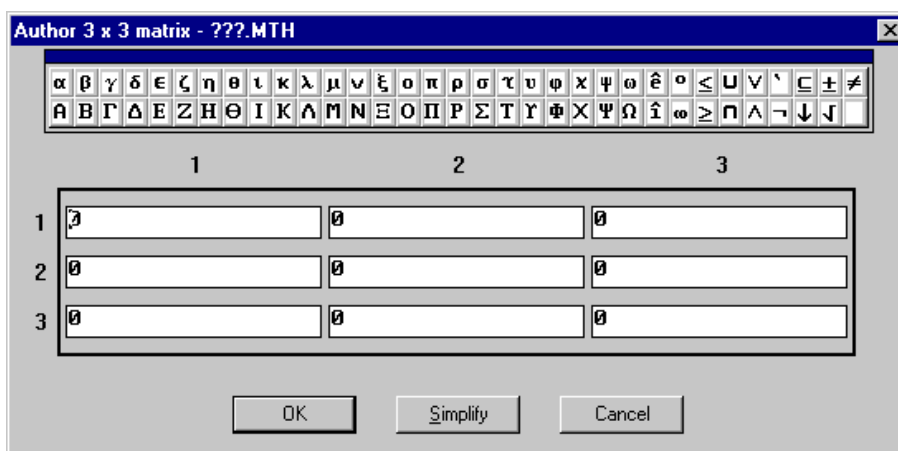


Figura 5.18: Ventana para introducir los elementos de una matriz.

Ejercicio. Introducir los siguientes vectores y matrices:

$$(-1, x^2, a) \quad (3/5, 0.15, x - y) \quad \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -x \end{pmatrix}$$

4.3. Sistemas de ecuaciones lineales

Como es natural, los elementos de un vector pueden ser cualquier expresión válida en *DERIVE for Windows*, no sólo números. Por ejemplo, un sistema de ecuaciones lineales es un vector cuyos elementos son ecuaciones; así, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ 4x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

se introduciría así: [3x+2y=5, 4x+3y=2]. Una vez introducido el sistema podemos resolverlo de dos formas distintas: directamente o a través de menús. En el primer caso debemos introducir la expresión `Solve(#1, [x, y])` (suponiendo que el sistema es la línea número 1) y nos aparecerá la solución: [x=11 y=-14]. En el segundo caso, debemos seleccionar el botón `Solve` de la botonera y nos aparecerá la ventana de la Figura 5.19; ahora basta pulsar el botón `Simplify`.

Cuando necesitemos utilizar un vector o una matriz en varias expresiones, lo conveniente es almacenarla en una variable. Por ejemplo, podemos escribir `v:= [1, 2, 3]` o `a:= [[1, 2], [3, 4]]`.

Ejercicio. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x - 7y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 4y - 2z = 5 \\ 4x - 3y + 9z = -3 \\ 5x - 4y + 2z = 1 \end{cases}$$

4.4. Operaciones básicas con vectores y matrices

Con *DERIVE for Windows* podemos sumar, restar y multiplicar matrices, siempre que las dimensiones sean apropiadas. Pero con *DERIVE for Windows* podemos realizar otro tipo de productos: el producto escalar y el producto vectorial de dos vectores. La sintaxis de estas operaciones figura en la siguiente tabla:

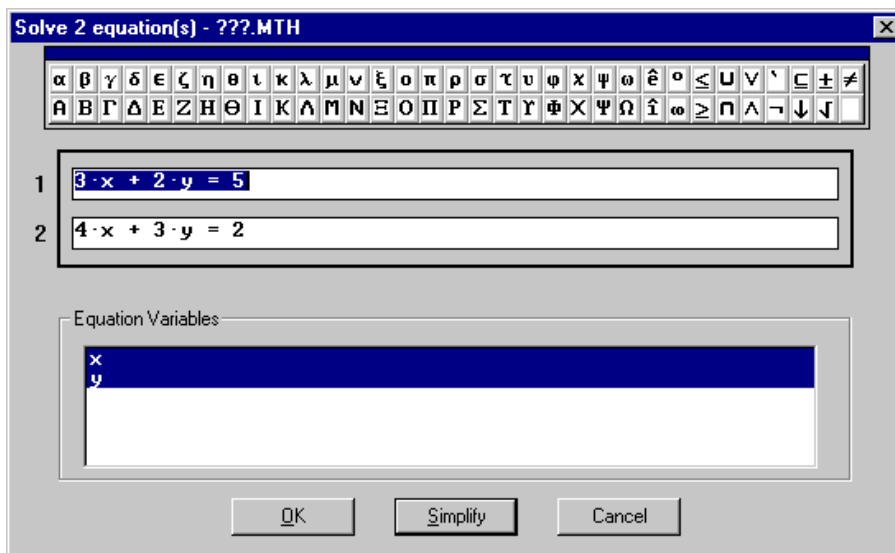


Figura 5.19: Ventana para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Operación	Sintaxis
Suma de a y b	$a + b$
Resta de a y b	$a - b$
Producto de a y b	$a . b$
Producto de a por un escalar t	$t*a$ ó ta
Producto escalar de v y w	$v . w$
Producto vectorial de v y w	$CROSS(v, w)$
a y b son vectores o matrices con las dimensiones apropiadas.	

Observemos que para no confundir el punto decimal ‘.’ con el punto de las operaciones producto anteriores, debemos dejar un espacio en blanco antes y después del punto; así, no es válido indicar el producto de a y b como $a.b$ ó $a . b$ ó $a . b$. En relación con el producto vectorial debemos hacer una precisión: si los vectores son tridimensionales, entonces $CROSS(v, w)$ devuelve el producto vectorial de v y w , pero si los vectores son de dimensión dos entonces $CROSS(v, w)$ devuelve el determinante de v y w .

Ejercicio. Calcular las siguientes operaciones:

- $(1, 2, 3) + (2, 4, 6), (2, 4, 8) - (4, 9, 13)$
- El producto escalar de $(5(-1, 3, 5) + 2(3, 2, 1))$ y $(-1, -3, -5)$.
- El producto vectorial de $(3, 8, -1)$ y $(3, 1, 10)$.

4.5. Funciones de manipulación

Para manipular los elementos de un vector o matriz, *DERIVE for Windows* dispone de numerosas funciones, todas ellas con una sintaxis muy intuitiva. A continuación listamos las más importantes.

IDENTITY_MATRIX(n): Construye la matriz identidad de orden n .

DIMENSION(a): Determina el número de elementos o el número de filas de a , según a sea un vector o una matriz. Por ejemplo, $DIMENSION([x, y, z])$ es 3.

SUB: Es un sufijo que permite extraer un elemento de un vector o una fila de una matriz. Por ejemplo, $[a, b, c]$ SUB 2 aparece en pantalla como $[a, b, c]_2$ y se simplifica a b . Sin embargo $[[1, 2], [3, 4]]$ SUB 1 permite extraer la primera fila de la matriz, es decir, $[1, 2]$, por lo que $[[1, 2], [3, 4]]$ SUB 1 SUB 2 identifica al segundo elemento de la primera fila, es decir, 2.

ELEMENT(v, n): Extrae el elemento n -ésimo del vector v .

ELEMENT(a, m, n): Extrae el elemento (m, n) (fila m y columna n) de la matriz a .

APPEND(v1, v2, . . . , vn): Concatena dos o más vectores. Por ejemplo, $APPEND([3, 1], [2, 4])$ produce como resultado el vector $[3, 1, 2, 4]$. Si a es una matriz, entonces $APPEND(a)$ produce un vector cuyos elementos son todos los elementos de la matriz.

DELETE_ELEMENT(v, n): Elimina el elemento n -ésimo del vector v . Si v es una matriz, entonces se borra la fila n -ésima.

INSERT_ELEMENT(u, v, n): Agrega el elemento u al vector v antes del elemento n -ésimo. Por ejemplo, $INSERT_ELEMENT(d, [a, b, c], 2)$ da lugar al vector $[a, d, b, c]$. Si se omite n , entonces el elemento se coloca al principio del vector, y si el valor de n es uno más que la dimensión del vector, el nuevo elemento se colocará al final del vector.

REPLACE_ELEMENT(u, v, n): Reemplaza el n -ésimo elemento del vector v por la expresión u . Por ejemplo, $REPLACE_ELEMENT(d, [a, b, c], 2)$ da lugar al vector $[a, d, c]$. Si se omite n , entonces el elemento reemplazado será el primero.

REVERSE_VECTOR(v): Construye un nuevo vector cambiando de orden los elementos del vector v . Así, $REVERSE_VECTOR([1, 2, 3, 4])$ produce el vector $[4, 3, 2, 1]$.

SELECT(u, k, v): Produce un nuevo vector con los elementos k del vector v tales que $u(k)$ es cierto. Por ejemplo, $SELECT(PRIME(k), k, [1, 2, 3, 4, 5, 6])$ produce el vector $[1, 2, 3, 5]$ formado por los números primos que hay en el vector original.

SELECT(u, k, m, n, s): Permite seleccionar los elementos k de la sucesión que empieza en m , acaba en n y está construida con un paso s tales que $u(k)$ es cierta. Por defecto $s = 1$, de forma que $SELECT(PRIME(k), k, 1, 100)$ da lugar a un vector cuyos elementos son los números primos entre 1 y 100.

Ejercicio. Generar todos los números pares entre 1 y 100 y todos los números impares entre 100 y 200. (En este ejercicio debe utilizarse la función $FLOOR(n)$, que genera la parte entera del número n).

4.6. Operaciones con matrices

Las operaciones típicas con matrices están disponibles en *DERIVE for Windows*. La sintaxis que debe utilizarse aparece en la siguiente tabla:

Operación	Sintaxis
Matriz inversa de m	$m \wedge -1$
Matriz traspuesta de m	m'
Matriz adjunta de m	$ADJOINT(m)$
Traza de la matriz m	$TRACE(m)$
Determinante de la matriz m	$DET(m)$
Producto de las matrices m y n	$m \cdot n$
Exponenciación de m : m^k	$m \wedge k$

Ejercicio. Se consideran las siguientes matrices:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 11 \\ 13 & 17 & 19 \end{pmatrix}$$

Calcular a^{-1} , $a^t + b$, $(a + b^t)^{-1}$, $(a^{10} - b^{-5})^3$, $\det(a^2 + b^2)$.

Ejercicio. Resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

4.7. Cálculo de los valores y vectores propios

Aunque no es estrictamente necesario, es conveniente calcular el polinomio característico, ya que sus raíces son los valores propios. Para ello disponemos de la función

CHARPOLY(a, t)

que desarrolla el polinomio característico de la matriz a en términos de la variable t . Por ejemplo, CHARPOLY([[2, 3], [a, b]], t) produce $t^2 - (b + 2)t - 3a + 2b$.

Para el cálculo de los valores propios disponemos de la función

EIGENVALUES(a, t)

que determina los valores propios de la matriz a en términos de la variable t .

Cómo es muy frecuente que los polinomios de grado superior a cuatro no se puedan factorizar por métodos racionales, y la factorización de polinomios de grado cuatro es de una complejidad enorme, la función anterior sólo es útil para matrices de orden 2×2 o 3×3 . En consecuencia, suele ser habitual calcular primero el polinomio característico y posteriormente utilizar métodos aproximados para determinar sus raíces (es decir, los valores propios de la matriz).

Una vez determinados los valores propios de una matriz A , disponemos de dos funciones para calcular los vectores propios asociados:

EXACT_EIGENVECTOR(A, μ): Se utiliza cuando μ es un valor propio exacto de la matriz A . Cuando μ es una aproximación a un valor propio, entonces la matriz $A - \mu I$ no es singular, por lo que esta función devolvería el vector cero como solución.

APPROX_EIGENVECTOR(A, μ): Aproxima a un vector propio numérico de A cuyo valor propio asociado es aproximado por μ y el resultado es un vector de norma uno. Naturalmente, μ no debe ser un valor propio exacto. Para mayor generalidad, podemos multiplicar el resultado por un parámetro, por ejemplo @1. Los parámetros en *DERIVE for Windows* se indican por @1, @2, @3, ... Por ejemplo, un resultado como [@1, 3@2, -5@1] es lo que usualmente se escribe como [s, 3t, -5s].

Ejercicio. Hallar el polinomio característico, los valores propios y los vectores propios asociados de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4.8. Bibliografía

C. Paulogorrón y C. Pérez. *Cálculo matemático con DERIVE para PC*, Ed. RA-MA, 1ª Ed., 1994.

5. BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

J. HEINHOLD y B. RIEDMULLER *Algebra Lineal y Geometría Analítica*, Ed. Reverté SA, 1981. Capítulos 1 y 2.

R.E. LARSON, R.P. HOSTETLER y B.H. EDWARDS *Calculo y Geometría Analítica*, 5ª ed., McGraw-Hill, Madrid, 1995. Capítulos 11, 13 y 14.

J.L. MALAINA y otros *Lecciones Básicas de Algebra Lineal*, Universidad del País Vasco, 1995. Capítulos 1–6, 9, 11 y 12.

J. STEWART *Cálculo*, 2ª ed. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994. Capítulo 11.

J.R. TORREGROSA y C.JORDAN *Algebra Lineal y sus Aplicaciones*, serie Schaum, McGraw Hill, Madrid, 1987. Capítulos 1 y 2.

6. PREGUNTAS DE EVALUACIÓN

E.5.1. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de a y b :

$$\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \\ x + by + az &= 1 \end{aligned}$$

E.5.2. Hallar la inversa de la siguiente matriz siempre que sea posible:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

E.5.3. Encontrar la dimensión y una base del subespacio vectorial generado por los vectores $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{u}_4 = (1, 2, 3, 4)$ y $\vec{u}_5 = (0, 1, 2, 3)$. Determinar las ecuaciones cartesianas de este subespacio.

E.5.4. Decidir cuáles de las siguientes matrices pueden reducirse a una matriz diagonal y encontrar matrices P_i que hagan posible la diagonalización ($P^{-1}A_iP = D_i$):

$$(a) A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(b) A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(c) A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E.5.5. Calcular la forma de Jordan de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y utilizarla para determinar A^7 .

E.5.6. Hallar las ecuaciones que describen los subespacios $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$ donde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x + 2y + z, -x + 2y, 2y + z)$.

E.5.7. ¿Qué tipo de cónica es la que viene dada por la ecuación $9x^2 - 18x + 4y^2 - 24y + 9 = 0$? ¿Qué tipo de cuádrica es la que viene dada por la ecuación $4x^2 + 2y^2 + z^2 - 8x - 12y - 4z + 22 = 0$?

