

CAPÍTULO 4

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1. INTERROGANTES CENTRALES DEL CAPÍTULO

- Tipo y orden de una ecuación diferencial
- Solución de una ecuación diferencial
- Ecuaciones de primer orden separables
- Ecuaciones de primer orden homogéneas
- Ecuaciones de primer orden lineales
- Ecuaciones de primer orden exactas
- Ecuaciones lineales de segundo orden
- Método de los coeficientes indeterminados
- Método de variación de parámetros
- Ecuaciones lineales de orden superior

2. CONTENIDOS FUNDAMENTALES DEL CAPÍTULO

2.1. Definiciones y conceptos básicos

Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que interviene una función incógnita y una o varias de sus derivadas. Este tipo de ecuaciones aparece en el estudio de numerosos fenómenos físicos y químicos: desintegración radiactiva, crecimiento de poblaciones, reacciones químicas, problemas gravitatorios, etc. No es exagerado afirmar que la naturaleza se describe por medio de ecuaciones diferenciales, de modo que un conocimiento de esta última materia nos ayudará a entender mejor los fenómenos naturales.

Las ecuaciones diferenciales se pueden clasificar, básicamente, atendiendo a dos criterios:

- (1) **TIPO:** Si la función incógnita contiene una única variable independiente, entonces la ecuación se denomina **ecuación diferencial ordinaria**, abreviadamente E.D.O. En otro caso, cuando la función incógnita contiene dos o más variables independientes, la ecuación se dice que es una **ecuación diferencial en derivadas parciales**.
- (2) **ORDEN:** Es la derivada de orden más alto que aparece en la ecuación diferencial.

Es innecesario decir que el estudio de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales requiere unas técnicas matemáticas que están fuera del alcance del alumno, por lo que nos restringiremos al análisis de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0.$$

Diremos que una función $y = f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial si la ecuación se satisface al sustituir en ella y y sus derivadas por $f(x)$ y sus derivadas respectivas.

La **solución general** de una ecuación diferencial ordinaria es una función $y = f(x, c_1, c_2, \dots)$ dependiente de una o varias constantes tal que cualquier solución de la ecuación diferencial se obtiene dando valores específicos a una o más de las constantes. Cuando damos valores concretos a todas las constantes de la solución general, surge una **solución particular**. Geométricamente, la solución general de una ecuación diferencial de primer orden representa una familia de curvas, denominadas **curvas solución**, una para cada valor concreto asignado a la constante arbitraria.

En la práctica, la determinación de las constantes que aparecen en la solución general se realiza a partir de las **condiciones iniciales** del problema. Las condiciones iniciales del problema son los valores que adquiere la función solución o sus derivadas en determinados puntos. Por ejemplo, para una ecuación diferencial de primer orden

$$y' = F(x, y),$$

una condición inicial se expresaría en la forma

$$y(x_0) = y_0.$$

En consecuencia, $y = f(x)$ es solución si $f'(x) = F(x, f(x))$ para todo valor de x en cierto intervalo, y $f(x_0) = y_0$.

2.2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una ecuación de la forma

$$y' = F(x, y),$$

donde F es una función que depende de las variables x e y . Esta clase de ecuaciones diferenciales son de las más sencillas, y su resolución se puede realizar utilizando diversas técnicas. Describimos a continuación las más importantes.

2.2.1. Ecuaciones separables

Una ecuación diferencial de primer orden se dice que es **separable** si puede escribirse en la forma

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

donde $M(x)$ es una función continua que sólo depende de x y $N(y)$ es una función continua que sólo depende de y . Para resolver este tipo de ecuaciones se utiliza el procedimiento de **separación de variables**, que consiste en situar todos los términos que contienen x a la izquierda (o la derecha) del signo de igualdad, y todos los términos que contienen y en el lado contrario. A continuación se integran ambos miembros de la igualdad, cada uno respecto de la variable correspondiente. En consecuencia, la solución viene dada por

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

2.2.2. Ecuaciones homogéneas

Una función $z = f(x, y)$ se dice que es **homogénea de grado n** si

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y),$$

donde n es un número real.

Una **ecuación diferencial homogénea** es cualquier ecuación diferencial que se puede escribir en la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

donde M y N son funciones homogéneas del mismo grado. La ecuación anterior puede escribirse como

$$y' = F(x, y),$$

donde la función F satisface $F(tx, ty) = F(x, y)$.

Este tipo de ecuaciones diferenciales se convierten en ecuaciones separables tras un cambio de variables. Concretamente si $y' = F(x, y)$ es una ecuación homogénea, entonces el cambio de variable $y = vx$, donde v es una función derivable de x , transforma la ecuación anterior en una nueva ecuación diferencial en las variables x y v que es separable.

2.2.3. Ecuaciones lineales

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es toda ecuación que se puede escribir en la forma

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

donde P y Q son funciones continuas de x .

La resolución de este tipo de ecuaciones se consigue utilizando la técnica de los factores integrantes. Un **factor integrante** es una función $u(x)$ tal que al multiplicarla por el lado izquierdo de la ecuación se obtiene la derivada del producto $u(x)y$, es decir,

$$u(x)y' + u(x)P(x)y = \frac{d[u(x)y]}{dx}.$$

Es fácil probar que un factor integrante es la función

$$u(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Entonces la solución de la ecuación diferencial es

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Hay ecuaciones no lineales que se transforman, mediante una sustitución adecuada, en una ecuación lineal. Entre estas ecuaciones debemos destacar la **ecuación diferencial de Bernoulli**, que puede escribirse como

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Esta ecuación es lineal si $n = 0$ y de variables separables si $n = 1$. Para otros valores de n , el cambio de variable $z = y^{1-n}$ transforma la ecuación anterior en la siguiente ecuación lineal:

$$z' + (1 - n)P(x)z = (1 - n)Q(x).$$

2.2.4. Ecuaciones exactas

Esta sección debe estudiarse después del cálculo diferencial en varias variables, ya que se hace uso del concepto de derivada parcial.

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

se dice que es una **ecuación diferencial exacta** si existe una función f de dos variables x e y , con derivadas parciales continuas, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = N(x, y).$$

La solución general de la ecuación es $f(x, y) = C$.

No toda ecuación diferencial es exacta. Entonces, ¿cómo podemos distinguir las que son de las que no lo son? El siguiente resultado nos da la solución.

Si M y N tienen derivadas parciales continuas en un disco abierto entonces la ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta si y solamente si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Debemos hacer notar que la exactitud es una condición extremadamente frágil, ya que pequeñas alteraciones en una ecuación exacta pueden hacer que se pierda dicha propiedad. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$(xy^2 + x)dx + yx^2dy = 0$$

es exacta, pero si dividimos por x , entonces la ecuación resultante

$$(y^2 + 1)dx + xydy = 0$$

ya no es exacta.

2.3. Ecuaciones lineales de segundo orden

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden es una ecuación diferencial que puede escribirse en la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x),$$

donde P , Q y R son funciones continuas de x en un cierto intervalo. Se dice que la ecuación es **homogénea** si $R(x) = 0$ para todo x . En otro caso, la ecuación se dice que es **no homogénea**.

La resolución de las ecuaciones diferenciales de segundo orden homogéneas se apoya en dos resultados básicos: la combinación lineal de dos soluciones es otra solución, y toda solución es combinación lineal de dos soluciones independientes. Más concretamente, tenemos los siguientes resultados.

- (1) Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de una ecuación diferencial homogénea y c_1 y c_2 son dos constantes, entonces

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

es una solución de la misma ecuación diferencial.

- (2) Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes (ninguna de ellas es un múltiplo de la otra) de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, entonces la solución general está dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes.

En general, encontrar las soluciones de una ecuación de segundo orden (homogénea o no homogénea) es difícil, a veces imposible. Sin embargo, si las funciones P y Q son constantes, entonces siempre se pueden hallar soluciones. En los siguientes apartados describimos cómo hacerlo.

2.3.1. Ecuaciones lineales de coeficientes constantes homogéneas

Consideremos la ecuación de segundo orden con coeficientes constantes siguiente:

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Las soluciones de dicha ecuación se determinan a partir de las raíces de la ecuación

$$r^2 + ar + b = 0,$$

denominada **ecuación característica**. Se pueden presentar las siguientes tres posibilidades:

- (1) *Raíces reales diferentes*: Si $r_1 \neq r_2$ son las raíces reales distintas de la ecuación característica, entonces la solución general es

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

- (2) *Raíces reales iguales*: Si $r_1 = r_2$ son las raíces reales iguales de la ecuación característica, entonces la solución general es

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} = (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x}.$$

- (3) *Raíces complejas*: Si $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$ son las raíces complejas de la ecuación característica, entonces la ecuación general es

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x).$$

2.3.2. Ecuaciones lineales de coeficientes constantes no homogéneas

Consideremos la ecuación de segundo orden con coeficientes constantes siguiente:

$$y'' + ay' + by = R(x).$$

En la búsqueda de las soluciones de dicha ecuación, juega un papel importante la solución de la ecuación

$$y'' + ay' + by = 0$$

denominada **ecuación homogénea asociada**. El siguiente resultado nos resuelve la ecuación.

La solución general de la ecuación $y'' + ay' + by = R(x)$ se puede escribir como

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

en donde $y_h(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada e $y_p(x)$ es una solución particular.

El problema que se nos presenta ahora es la determinación de la solución $y_p(x)$. Describimos a continuación dos técnicas.

2.3.2.1. Método de los coeficientes indeterminados

Si la función $R(x)$ consiste en la suma o producto de factores de los siguientes tipos:

- (I) Polinómico: x^n ,
- (II) Exponencial: e^{rx} ,
- (III) Trigonométrico: $\cos \beta x$, $\sen \beta x$,

entonces podemos hallar una solución particular $y_p(x)$ por el método de los coeficientes indeterminados. La clave consiste en conjeturar que la solución y_p es de una forma especial, la cual depende de la función R . Las reglas que deben seguirse son:

- (1) Si $R(x)$ es un polinomio (tipo I), entonces se prueba con un polinomio del mismo grado.
- (2) Si $R(x)$ es exponencial (tipo II), entonces se prueba con Ae^{rx} .
- (3) Si $R(x)$ es trigonométrico (tipo III), entonces se prueba con $A \cos \beta x + B \sen \beta x$.
- (4) Si $R(x)$ es la suma o producto de factores anteriores, entonces se prueba con la suma o producto, respectivamente, de las correspondientes soluciones particulares.
- (5) Si cualquier término de y_p es solución de la ecuación homogénea asociada, se multiplica y_p por x (o x^2 si es necesario).

2.3.2.2. Método de variación de parámetros

El método de los coeficientes indeterminados descrito anteriormente funciona bien si la función $R(x)$ está formada por polinomios, exponenciales o funciones trigonométricas (senos y cosenos). La razón hay que buscarla en que las derivadas de este tipo de funciones no son más complicadas que las funciones originales. Esto no ocurre, por ejemplo, con funciones como $1/x$ o $\tan x$.

El método de variación de parámetros parte de la suposición que $y_p(x)$ tiene la misma forma que $y_h(x)$, excepto que las constantes c_1 y c_2 se sustituyen por dos funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$. El método consiste en lo siguiente:

- (1) Hallar la solución general $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.
- (2) Sustituir las constantes por funciones para formar $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$.
- (3) Resolver el siguiente sistema para u'_1 y u'_2 :

$$\begin{aligned} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 &= 0 \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 &= R(x) \end{aligned}$$

- (4) Integrar para hallar u_1 y u_2 .

2.4. Ecuaciones lineales de orden superior con coeficientes constantes

Consideremos la ecuación de orden n con coeficientes constantes siguiente:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Las soluciones de dicha ecuación se determinan a partir de las raíces de la ecuación

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0,$$

denominada **ecuación característica**.

Cada raíz r de la ecuación característica genera un término de la solución de acuerdo con las siguientes reglas:

- (1) r es raíz real: Si m es la multiplicidad de r como raíz de la ecuación característica, entonces r colabora a la solución general con

$$y = C(x)e^{rx},$$

donde $C(x)$ es un polinomio de grado $m - 1$.

- (2) $r = \alpha \pm i\beta$ es raíz compleja: Si m es la multiplicidad de r como raíz de la ecuación característica, entonces r colabora a la solución general con

$$y = e^{\alpha x} (C_1(x) \cos(\beta x) + C_2(x) \operatorname{sen}(\beta x)),$$

donde $C_1(x)$ y $C_2(x)$ son polinomios de grado $m - 1$.

En consecuencia, la solución general de la ecuación de orden n se obtiene como sigue. Sean r_1, r_2, \dots, r_k , las raíces reales distintas de la ecuación característica con multiplicidades m_1, m_2, \dots, m_k , respectivamente, y sean $z_1 = \alpha_1 \pm i\beta_1, z_2 = \alpha_2 \pm i\beta_2, \dots, z_\ell = \alpha_\ell \pm i\beta_\ell$ las raíces complejas distintas de la ecuación con multiplicidades n_1, n_2, \dots, n_ℓ , respectivamente. Entonces la ecuación general de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n viene dada por

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^k C_i(x)e^{r_i x} + \sum_{j=1}^{\ell} e^{\alpha_j x} \left(D_1^j(x) \cos(\beta_j x) + D_2^j(x) \operatorname{sen}(\beta_j x) \right),$$

donde $C_i(x)$ es un polinomio de grado $m_i - 1$ para $i = 1, \dots, k$, y $D_1^j(x), D_2^j(x)$ son polinomios de grado $n_j - 1$ para $j = 1, \dots, \ell$.

Para finalizar, baste indicar que para obtener una solución particular de la ecuación diferencial de orden n no homogénea se pueden utilizar los dos métodos descritos anteriormente para el caso de orden 2: coeficientes indeterminados y variación de parámetros.

3. ACTIVIDADES DE APLICACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS

A.4.1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales, así como la solución particular dada por las condiciones iniciales que en cada caso se indican.

$$\begin{array}{ll} y' + ky = 0, k \neq 0 & y(0) = 1, y'(0) = 0 \\ y' + ky = \operatorname{sen} x & y(0) = 2, y'(0) = 1 \\ y'' + 2y' - 3y = 0 & y(0) = 1, y(1) = 0 \\ y'' - y' = 0 & y(0) = -3, y'(0) = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
y'' + \omega^2 y = 0, \omega \neq 0 & y(0) = -2, y'(0) = 1 \\
y'' + 2y' - 3y = 6 & y(0) = 1, y'(0) = -1 \\
y'' - y' = 2\operatorname{sen}x & y(0) = 1, y'(0) = 0 \\
y'' - 3y' + 2y = 5e^x & y(0) = 0, y'(0) = -1 \\
y'' - 6y' + 9y = e^{3x} & y(1) = 1, y(2) = -2 \\
y'' - y' = 5e^x - \operatorname{sen}(2x) & y(0) = 1, y'(0) = 0 \\
y'' + 4y = \tan x & y(0) = 1, y'(0) = 0 \\
y'' + 2y' + y = e^x & y(0) = 0, y(1) = -3 \\
y''' - 3y'' + 2y' = 0 & y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1 \\
y''' - y = 0 & y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0 \\
y''' + 3y'' - 4y = xe^{-2x} & y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \\
y''' + y' = \operatorname{cosec}x & \\
y^{(4)} - 16y = 0 & \\
y^{(4)} + y = x + 1 &
\end{array}$$

- A.4.2.** Se sabe que en un horno de cerámica, la velocidad a que se calienta un cuerpo es proporcional a $4 + T^2$, donde $T(t)$ representa la temperatura del cuerpo que se calienta, medida en grados centígrados, y t mide el tiempo en minutos. Se introduce un cuerpo a temperatura inicial 2°C y se observa que al cabo de un minuto su temperatura es $2\sqrt{3}^\circ\text{C}$. Determinar la función que nos permite expresar la temperatura del cuerpo en función del tiempo.
- A.4.3.** Un grupo de biólogos ha determinado que la velocidad de aumento de una población de hormigas rojas cabezonas es proporcional al número de individuos de dicha población. Sabiendo que al cabo de 2 meses la población se ha duplicado, calcular cuánto tiempo tiene que transcurrir para que la población sea el triple de la inicial.
- A.4.4.** Según la ley de enfriamiento de Newton, la velocidad a que se enfría o calienta un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del ambiente. Si un objeto se enfría desde 100°C a 80°C en veinte minutos, siendo la temperatura del ambiente de 20°C , calcular el tiempo que ha de pasar para que la temperatura del cuerpo sea de 60°C .
- A.4.5.** En cierto cultivo de bacterias, la velocidad de crecimiento de la población es proporcional al cuadrado de la población presente.
- (1) Si la población después de 3 horas es de 10^4 individuos y al cabo de dos horas más es de 4×10^4 individuos, calcular cuantos individuos había en un principio.
 - (2) Sabiendo que después de 4 horas la población se ha duplicado, ¿cuál será la población presente al cabo de 6 horas?
- A.4.6.** Un barco retrasa su movimiento por la acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial del barco es 10 metros/segundo y al cabo de 5 segundos su velocidad es 8 metros/segundo. Calcular al cabo de cuánto tiempo su velocidad será de 1 metro/segundo.
- A.4.7.** El fondo de un depósito de 300 litros de capacidad está cubierto de sal. Suponiendo que la velocidad con que se disuelve la sal es proporcional a la diferencia entre la concentración en el instante dado y la concentración de la disolución saturada (1 kilogramo de sal para 3 litros de agua) y sabiendo que al cabo de un minuto la cantidad de sal disuelta es $1/3$ de kilogramo, hallar la cantidad de sal que contendrá la disolución al cabo de una hora.
- A.4.8.** Cuando se introduce glucosa por vía intravenosa a velocidad constante, el cambio en la concentración global $c(t)$ de glucosa en sangre con respecto al tiempo viene descrito por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dc}{dt} = \frac{G}{100V} - kc,$$

donde G denota la velocidad constante a que se suministra la glucosa, V es el volumen total de la sangre en el cuerpo y k es una constante positiva que depende del paciente. Calcular la función que nos permite expresar la concentración de glucosa en sangre en función del tiempo.

- A.4.9.** Una fría mañana comenzó a nevar y continuó nevando a velocidad constante a lo largo del día. Una máquina quitanieves comenzó a trabajar a las doce del mediodía, quitando nieve a velocidad constante (volumen por unidad de tiempo). Desde la una hasta las dos avanzó solamente la mitad de lo que había avanzado desde las doce hasta la una. Calcular la hora en que empezó a nevar.
- A.4.10.** En la conservación de alimentos, el azúcar de caña sufre un proceso de inversión y se transforma en glucosa y fructosa. En soluciones diluidas, el ritmo de inversión es proporcional a la concentración $y(t)$ del azúcar inalterada. Si la concentración es $1/50$ cuando $t = 0$ y $1/200$ tras 3 horas, hallar la concentración del azúcar inalterada después de 6 y 12 horas.
- A.4.11.** Según las leyes de la termodinámica, el flujo del calor a través de una superficie plana es ortogonal a las curvas isotermas. Suponiendo que el flujo de calor describe una trayectoria dada por $y = C/x$, donde C es una constante no nula, obtener las curvas isotermas.
- A.4.12.** La tasa de crecimiento de una población de moscas de la fruta en un instante dado es proporcional al tamaño de la población en dicho momento. Si hay 180 moscas después del segundo día del experimento y 300 moscas después del cuarto día, ¿cuántas moscas había originalmente?
- A.4.13.** El ritmo de desintegración del radio es proporcional a la cantidad presente en un instante dado. Hallar el porcentaje de una muestra actual que quedará al cabo de 25 años si la vida media del radio es de 1600 años.
- A.4.14.** En una reacción química, un cierto compuesto se transforma en otra sustancia a un ritmo proporcional a la cantidad no transformada. Si había inicialmente 20gr. de la sustancia original y 16gr. tras 1 hora, ¿en qué momento se habrá transformado el 75% de dicho compuesto?

4. ACTIVIDADES PRÁCTICAS DEL CAPÍTULO

4.1. Introducción

La práctica se va a realizar con el programa de cálculo matemático *DERIVE for Windows*, versión 4.05, de Soft Warehouse. *DERIVE for Windows* permite realizar cálculos y manipulaciones matemáticas de carácter general, lo cual significa que realiza muchas cosas de forma aceptable aunque no tiene la potencia de otros programas específicos. No obstante, *DERIVE for Windows* permite realizar todos los cálculos que un usuario medio puede necesitar.

En esta práctica nos vamos a centrar en la resolución de ecuaciones diferenciales. *DERIVE for Windows* resuelve todas las ecuaciones diferenciales de primer grado y primer orden mediante los métodos más conocidos (variables separadas, ecuaciones diferenciales lineales, ecuaciones exactas, factores integrantes, etc.) *DERIVE for Windows* proporciona, siempre que puede, la solución explícita de la ecuación diferencial. No obstante, es posible que *DERIVE for Windows* ofrezca una solución que dependa de una integral no resoluble algebraicamente.

Antes de comenzar la práctica será conveniente que recordemos brevemente la 'botonera' de *DERIVE for Windows* (ver Figura 4.1), ya que simplifica enormemente la introducción de datos y la realización de cálculos. Los botones permiten realizar las siguientes tareas (de izquierda a derecha): New (abrir una nueva hoja de trabajo), Open (abrir una hoja de trabajo existente), Save (guardar la sesión de trabajo), Print (imprimir la sesión de trabajo), Remove (eliminar la expresión marcada), Unremove (recuperar la última expresión eliminada), Renumber (renumerar las expresiones), Author expression (introducir una expresión sencilla), Author vector (introducir un vector), Author matrix (introducir una matriz), Simplify (simplificar), Approximate (calcular un valor

aproximado), Solve (resolver algebraicamente o numéricamente una expresión), Substitute for variables (realizar una sustitución), Calculate limit (calcular un límite), Calculate derivative (calcular una derivada), Calculate integral (calcular una integral), Calculate sum (calcular una suma), Calculate product (calcular un producto), 2D-plot window (realizar un gráfico bidimensional) y 3D-plot window (realizar un gráfico tridimensional).

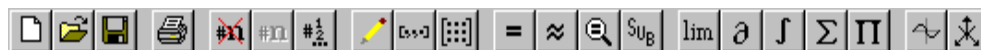


Figura 4.1: El uso de la 'botonera' de *DERIVE for Windows* nos puede simplificar mucho el trabajo. Otro elemento interesante es la existencia de 'teclas calientes' que nos permiten evitar los menús, con lo que se gana en rapidez.

4.2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

Para poder resolver ecuaciones diferenciales de primer orden es necesario tener cargado en el ordenador la utilidad ODE1.MTH, lo cual se consigue seleccionando las opciones File|Load|Math o File|Load|Utility. Esta utilidad proporciona una serie de funciones que nos permiten resolver las ecuaciones diferenciales utilizando distintos métodos.

Resolver la ecuación $y' = e^{x+y} + e^y$ y encontrar la solución que pasa por el punto $(0, 1)$

La ecuación diferencial es de la forma

$$y' = p(x)q(y),$$

siendo $p(x)$ una expresión cualquiera (no tiene por qué ser un polinomio) que no depende de y , y donde $q(y)$ es una expresión cualquiera que no depende de x . Entonces debemos utilizar la función de *DERIVE for Windows*

$$\text{SEPARABLE}(p, q, x, y, a, b),$$

donde a y b son los valores de x e y para los cuales queremos una solución particular. En nuestro caso, debemos introducir la expresión $\text{SEPARABLE}(\#e^{x+1}, \#e^y, x, y, 0, 1)$ y obtendremos como resultado $e^{-1} - e^{-y} = e^x + x - 1$. Para obtener y en función de x debemos seleccionar las opciones Solve|Algebraically, con la opción Variable igual a y , y obtendremos

$$y = 1 - \ln(-e^{x+1} - e^x + e + 1)$$

Resolver la ecuación diferencial $xy' + y = y^2 \ln(x)$

Observemos en primer lugar que el miembro de la izquierda coincide con la derivada de la función xy respecto de x , por lo que parece aconsejado hacer el cambio de variable $z = xy$. Entonces la ecuación se transforma en la siguiente: $z' = x^{-2} \ln(x)z^2$, que puede resolverse por la técnica de variables separables haciendo $\text{SEPARABLE}(\ln(x)/x^2, z^2, x, z, a, b)$. La solución obtenida es

$$\frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(a)}{a} + \frac{1}{x} - \frac{1}{z} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0.$$

Para obtener y en función de x debemos seleccionar las opciones Solve | Algebraically, con la opción Variable igual a z , y obtendremos

$$z = \frac{abx}{ab \ln(x) - bx \ln(a) + x(a - b) + ab}.$$

Como $z = xy$ entonces la solución a nuestra ecuación es $y = z/x$, es decir

$$y = \frac{ab}{ab \ln(x) - bx \ln(a) + x(a - b) + ab}.$$

Resolver la ecuación $xy' - 4y + 2x^2 + 4 = 0$ y hallar la solución particular que pasa por el punto $(1, 1)$

La ecuación puede ponerse en la forma $y' + p(x)y = q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son expresiones cualesquiera que sólo dependen de x . Entonces podemos resolver este tipo de ecuaciones mediante la orden

$$\text{LINEAR1}(p, q, x, y, a, b),$$

donde a y b son las condiciones iniciales. En nuestro caso, escribimos $\text{LINEAR1}(-4/x, -2x-4/x, x, y, 1, 1)$ para obtener como solución

$$y = -x^4 + x^2 + 1$$

Resolver la ecuación diferencial $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$, hallando la solución que pasa por el punto $(1, 1)$

Este tipo de ecuación diferencial es homogénea, lo cual significa que es de la forma $y' = r(x, y)$, donde r es una función tal que $r(ax, ay) = r(x, y)$ para todo número a . Para resolver este tipo de ecuaciones, *DERIVE for Windows* dispone de la orden

$$\text{HOMOGENEOUS}(r, x, y, a, b),$$

donde a y b son las condiciones iniciales. En nuestro caso, escribimos $\text{HOMOGENEOUS}((x+y)/(x-y), x, y, 1, 1)$ y obtenemos

$$\text{ATAN}\left(\frac{y}{x}\right) + \text{LN}(|x|) - \frac{\text{LN}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{2} - \frac{\pi}{4} = \text{LN}(x)$$

Para comprobar que la solución hallada es la correcta, podemos utilizar la función

$$\text{IMP_DIF}(\text{ATAN}(y/x) + \text{LN}(|x|) - \text{LN}((x^2+y^2)/2) / 2 - \text{pi}/4 - \text{LN}(x)) - (x+y)/(x-y),$$

cuyo resultado es cero, garantizando que la solución encontrada es buena. Para utilizar la función anterior es necesario haber cargado la utilidad `DIF_APPS.MTH`.

En ocasiones no sabemos si la función r es homogénea, quizás por su complicación al no estar lo bastante simplificada. Para estos casos, *DERIVE for Windows* dispone de la función `HOMOGENEOUS_TEST(r, x, y)`. Si el resultado es una función que no depende de x , entonces r es una función homogénea. En nuestro caso `HOMOGENEOUS_TEST((x+y)/(x-y), x, y)` es igual a $y - e^{-y}$.

Resolver la ecuación $y' = 1 + \sec(1 + x + y)$

Para resolver ecuaciones diferenciales de la forma $y' = r(u)$, donde u es una función lineal con coeficientes constantes de x e y (es decir, $u = ax + by + c$, con a, b, c constantes), *DERIVE for Windows* pone a nuestra disposición el comando

$$\text{FUN_LIN_CCF}(r, a, b, c, x, y, p, q),$$

donde p y q son las condiciones iniciales. En nuestro caso, escribimos

$$\text{FUN_LIN_CCF}(1+\text{SEC}(1+y+x), 1, 1, 1, x, y, p, q)$$

y la solución general obtenida es:

$$\frac{\sqrt{3} \ln \frac{\sqrt{3} \cos(x+y+1) - \text{sen}(x+y+1) + \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cos(x+y+1) + \text{sen}(x+y+1) + \sqrt{3}}}{6} - \frac{\sqrt{3} \ln \frac{\sqrt{3} \cos(p+q+1) - \text{sen}(p+q+1) + \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cos(p+q+1) + \text{sen}(p+q+1) + \sqrt{3}}}{6} + \frac{x+y-p-q}{2} = x-p$$

En este caso resulta imposible despejar y como función explícita de x .

Resolver la ecuación $y' = (x + y - 1)/(x - y)$

Con este ejercicio vamos a ilustrar cómo resolver ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = r\left(\frac{ax + by + c}{px + qy + k}\right)$$

donde a, b, c, p, q, k son constantes que cumplen la condición $aq - bp \neq 0$, ya que de lo contrario estaríamos en el caso lineal. *DERIVE for Windows* resuelve este tipo de ecuaciones utilizando la siguiente función

$$\text{LIN_FRAC}(r, a, b, c, p, q, k, x, y, A, B)$$

donde (A,B) son las condiciones iniciales. En nuestro caso debemos teclear

$$\text{LIN_FRAC}((x+y-1)/(x-y), 1, 1, -1, 1, -1, 0, x, y, 0, 0)$$

y obtenemos la siguiente solución en forma implícita:

$$\text{ATAN}\left(\frac{2y-1}{2x-1}\right) + \text{LN}(|2x-1|) - \frac{1}{2}\text{LN}(2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y + 1) - \frac{\pi}{4} = \text{LN}(2x-1) - \pi i$$

Resolver la ecuación diferencial $2y^3 - 5xy + (xy^2 - 3x^2)y' = 0$

Uno de los métodos más potentes para la resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden consiste en buscar factores integrantes. Dada la ecuación $p(x, y) + q(x, y)y' = 0$, ésta se podrá resolver si existe una función $u(x, y)$ que multiplicada por la ecuación anterior la convierta en exacta. La manera de comprobar que una función u es la candidata consiste en calcular

$$\text{EXACT_TEST}(u_p, u_q, x, y)$$

Si el resultado es cero, entonces la solución implícita viene dada por

$$\text{USE_INTEG_FCTR}(u, p, q, x, y, a, b) .$$

donde (a,b) son las condiciones iniciales.

El problema en todo caso es encontrar el factor integrante. Para ayudarnos *DERIVE for Windows* dispone de la siguiente función:

$$\text{MONOMIAL_TEST}(p, q, x, y)$$

Si el resultado es del tipo $x^m y^n$ entonces

$$\text{USE_INTEG_FCTR}((x^m)(y^n), p, q, x, y, a, b)$$

nos da la solución general de la ecuación.

En nuestro caso $\text{MONOMIAL_TEST}(2y^3 - 5xy, xy^2 - 3x^2, x, y)$ proporciona como resultado $x^{-27}y^{-16}$. Por tanto la solución es

$$\frac{1}{5x^{25}y^{15}} - \frac{1}{13x^{26}y^{13}} + C = 0,$$

donde C es una constante apropiada.

4.3. Ejercicios de aplicación

A continuación se enuncian unos ejercicios sobre resolución de ecuaciones diferenciales. Si el alumno encuentra alguna dificultad debe revisar detenidamente los ejemplos anteriores.

- a) Hallar la curva solución de la ecuación

$$y\sqrt{1+y'^2} - y\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = a$$

que pasa por el punto $(0, a)$.

- b) Resolver la ecuación $3y^2y' - ay^3 = x + 1$

- c) Resolver la ecuación $y'xe^{1/x} = -x + ye^{1/x}$

- d) Resolver la ecuación $y' = (3x + y)/(x - 2y)$
- e) Resolver la ecuación $y'(x + y \ln y) = y$
- f) Resolver la ecuación $4xy + 3y^2 - x + (x^2 + 2xy)y' = 0$

4.4. Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Para poder resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden es necesario tener cargado en el ordenador la utilidad ODE2.MTH, lo cual se consigue seleccionando las opciones File|Load|Math o File|Load|Utility. Esta utilidad proporciona una serie de funciones que nos permiten resolver las ecuaciones diferenciales utilizando distintos métodos.

Resolver la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2y = e^x \sin x$

La ecuación es de la forma $y'' + p(x)y' + q(x) = r(x)$, que *DERIVE for Windows* puede resolver en determinados casos. El comando general que utiliza *DERIVE for Windows* es el siguiente

$$\text{DSOLVE2}(p, q, r, x, c1, c2)$$

DERIVE for Windows trata de encontrar la solución explícita general de la ecuación anterior en función de las constantes $c1$ y $c2$. Debemos hacer notar que los dos últimos argumentos pueden omitirse o sustituirse por otros nombres. Cuando *DERIVE for Windows* no puede encontrar una solución, el comando DSOLVE2 devuelve la palabra 'inaplicable'.

En estos casos, podemos ejecutar el comando

$$\text{LIN2_TEST}(p, q, x)$$

y si el resultado es una constante K , entonces podemos resolver la ecuación utilizando las siguientes funciones:

- Si $K > 0$, la solución vendrá dada por $\text{LIN2_POS}(p, q, r, x)$.
- Si $K < 0$, la solución vendrá dada por $\text{LIN2_NEG}(p, q, r, x)$.
- Si $K = 0$, la solución vendrá dada por $\text{LIN2_0}(p, q, r, x)$.

En los tres casos, se obtiene la solución general explícita dependiendo de dos constantes arbitrarias $c1$ y $c2$.

DSOLVE2 puede encontrar fácilmente una solución cuando p y q son constantes. Cuando q es una constante simbólica, el resultado puede adquirir una forma complicada. La solución puede contener integrales involucrando la función $r(x)$. En todo caso, para comprobar que el resultado es correcto, podemos sustituirlo en la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x) - r(x) = 0$.

En el caso que estamos analizando, $p(x) = -3$, $q(x) = 2$ y $r(x) = e^x \sin x$, por lo que la solución vendrá dada por $\text{DSOLVE2}(-3, 2, \#e^x \text{ SIN } x, x)$.

Resolver la ecuación diferencial $y'' - \frac{y'}{x} + 4x^2y = 4x^2 \operatorname{sen}(x^2)$

En este caso, las funciones p , q y r están dadas por $p(x) = -1/x$, $q(x) = 4x^2$ y $r(x) = 4x^2 \operatorname{sen}(x^2)$, por lo que la solución vendría dada por `DSOLVE2(-1/x, 4x^2, 4x^2 SIN(x^2), x)`. Sin embargo, el programa devuelve la palabra 'inaplicable', por lo que debemos resolverla de otro modo.

En primer lugar debemos ejecutar el comando `LIN2_TEST(p, q, x)` y si el resultado es una función dependiente de x , entonces utilizamos la función `LIN2A_TEST(p, q, x)`. Si el resultado de este segundo test es una constante K , podemos resolver la ecuación utilizando las siguientes funciones:

- Si $K > 0$, la solución vendrá dada por `LIN2A_POS(p, q, r, x)`.
- Si $K < 0$, la solución vendrá dada por `LIN2A_NEG(p, q, r, x)`.
- Si $K = 0$, la solución vendrá dada por `LIN2A_0(p, q, r, x)`.

En los tres casos, se obtiene la solución general explícita dependiendo de dos constantes arbitrarias c_1 y c_2 .

En nuestro caso la solución de la ecuación diferencial es la siguiente:

$$\frac{1}{2}(2a + 1) \operatorname{sen}(x^2) - (x^2 + b) \operatorname{cos}(x^2)$$

Resolver la ecuación diferencial $y'' - e^y = 0$

Para resolver las ecuaciones diferenciales de la forma $y'' = q(y)$, donde $q(y)$ puede ser cualquier función de y , *DERIVE for Windows* dispone de la función

`AUTONOMOUS_CONSERVATIVE(q, x, y, a, b, c)`

donde los tres últimos argumentos son optativos. Si están presentes, entonces *DERIVE for Windows* determina la solución que satisface las siguientes condiciones iniciales: $x = a$, $y(a) = b$, $y'(a) = c$. En nuestro caso, la solución viene dada por `AUTONOMOUS_CONSERVATIVE(#e^y, x, y)`.

Resolver la ecuación diferencial $y'y'' = 1 + y'^2$

Haciendo el cambio de variable $v = y'$ se transforma en una ecuación de primer orden de variables separadas ($vv' = 1 + v^2$) que puede resolverse utilizando la función `SEPARABLE`. Entonces volvemos a obtener otra ecuación de primer orden que resolvemos utilizando el método apropiado.

Resolver la ecuación diferencial $yy'' + y'^2 = 0$

Esta ecuación es de tipo Liouville. En general, las ecuaciones de Liouville son de la forma

$$y'' + p(x) + q(y)(y')^2 = 0,$$

donde p y q dependen sólo de x e y , respectivamente. *DERIVE for Windows* resuelve este tipo de ecuaciones utilizando la función

$$\text{LIOUVILLE}(p, q, x, y, a, b).$$

Los dos últimos argumentos son opcionales y sirven para fijar las constantes en la solución general que se obtenga. Si se omiten, el programa trabaja con las constantes c_1 y c_2 . En nuestro caso $p(x) = 0$ y $q(y) = 1/y$, por lo que la solución viene dada por $\text{LIOUVILLE}(0, 1/y, x, y)$:

$$c_2x + \frac{1}{2}y^2 - c_1 = 0.$$

4.5. Ejercicios de aplicación

A continuación se enuncian unos ejercicios sobre resolución de ecuaciones diferenciales. Si el alumno encuentra alguna dificultad debe revisar detenidamente los ejemplos anteriores.

- a) Resolver la ecuación $y'' - 2y' - 3y = 2 \sin x$.
- b) Resolver la ecuación $y'' - 2y' = x + 2e^x$.
- c) Resolver la ecuación $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2x}$.
- d) Resolver la ecuación $y'' - \sin y = 0$.
- e) Resolver la ecuación $y'' + xy' = y'^2$.
- f) Resolver la ecuación $y'' + yy' = y$.

4.6. Métodos numéricos de resolución de ecuaciones de primer orden

Hay ocasiones en que no se puede obtener la solución exacta de una ecuación diferencial. En estos casos, lo conveniente puede ser obtener una solución numérica. Para este menester, *DERIVE for Windows* pone a nuestra disposición diferentes métodos. En primer lugar debemos cargar la utilidad ODE_APPR.MTH (mediante las opciones File|Load|Math o File|Load|Util).

El método de Euler

El método de Euler es uno de los métodos más clásicos utilizados en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. La sintaxis general es

$$\text{EULER}(f, x, y, a, b, h, n)$$

Esta función proporciona un vector de $n + 1$ puntos (pares de números) solución de la ecuación $y' = f(x, y)$, con condiciones iniciales (a, b) , empezando en a y con un paso h . El vector solución debe interpretarse como los

puntos sobre la curva solución cuyas abscisas están separadas una distancia h . Por ejemplo, para generar 5 puntos de una solución aproximada de la ecuación $y' = 26/(3 + (x + y)^2)$ en el intervalo $[1,2]$ con condición inicial $(a, b) = (1, -2)$, deberíamos escribir

EULER(26/(3+(x+y)^2), x, y, 1, -2, 0.25, 4)

El resultado es:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1.25 & -0.375 \\ 1.5 & 1.35114 \\ 1.75 & 1.93520 \\ 2 & 2.32722 \end{bmatrix}$$

El método de Runge-Kutta

El método de Euler discutido anteriormente es el método más sencillo para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, pero usualmente comete un error considerable. Sin embargo, el método clásico de Runge-Kutta es más preciso y por tanto es preferible al método de Euler. La sintaxis general es

RK(f, v, v0, h, n)

RK utiliza el método de Runge-Kutta de orden 4 para resolver una ecuación diferencial de primer orden; también puede utilizarse para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. En la expresión anterior, el programa calcula un vector de $n + 1$ puntos (pares de números) solución de la ecuación $y' = f(v)$, donde $v = [x, y]$, con condiciones iniciales $v_0 = [a, b]$, empezando en a y con un paso h .

4.7. Bibliografía

C. Paulogorrón y C. Pérez. *Cálculo matemático con DERIVE para PC*, Ed. RA-MA, 1ª Ed., 1994.

5. BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

R.E. LARSON, R.P. HOSTETLER y B.H. EDWARDS *Calculo y Geometría Analítica*, 5ª ed., vol. 1. McGraw-Hill, Madrid, 1995. Capítulo 18.

J. STEWART *Cálculo*, 2ª ed. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994. Capítulo 15.

6. PREGUNTAS DE EVALUACIÓN

E.4.1. Calcular la solución general de la siguiente ecuación diferencial,

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Calcular la solución particular que alcanza un máximo relativo en $x = 0$ con $y(0) = 1$.

E.4.2. Calcular la solución general de la siguiente ecuación diferencial,

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^{5x}.$$

Calcular la solución particular determinada por las siguientes condiciones iniciales, $y(0) = 2$, $y'(0) = 9$.

E.4.3. Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Hallar la solución particular de esta ecuación determinada por las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

E.4.4. Calcular la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = x.$$

Calcular la solución particular determinada por las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

E.4.5. Un trabajador de 30 años tiene un salario de 2.000.000 ptas anuales con un crecimiento estimado de 100.000 ptas anuales. Si realiza una inversión inicial de 100.000 ptas en un plan de pensiones que rinde un 8% anual, y realiza anualmente inversiones adicionales iguales al 5% de su salario, un modelo para el capital invertido x al cabo de t años es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0'08x + 0'05(2.000.000 + 100.000t) \\ x(0) &= 100.000 \end{aligned}$$

¿Cuántos años deben pasar para que acumule una inversión de 10.000.000 ptas? ¿Cuánto capital tendrá en el plan cuando se jubile? (Se considera que 65 años es la edad de jubilación.)

E.4.6. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

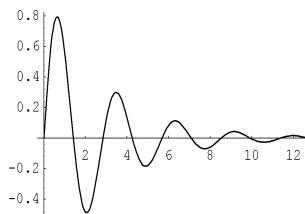
$$y'' - 2y' - 3y = e^{-x} + 2 \operatorname{sen} x$$

Determinar las constantes para que $y'(0) = 1$ e $y(0) = -1$.

E.4.7. Una boya cilíndrica, de diámetro 20cm y peso 100Kg, flota parcialmente sumergida en posición recta. Cuando es ligeramente separada de su posición de equilibrio, la boya sube y baja según la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{100}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = -16\pi x - c \frac{dx}{dt}$$

donde $c \frac{dx}{dt}$ es la resistencia por fricción que ofrece el agua y g es la aceleración gravitatoria.

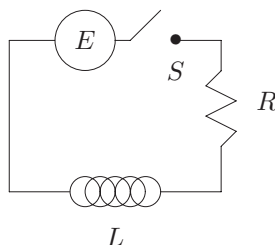


(1) Obtener $x(t)$ si la constante c es igual a $\sqrt{15\pi}$.

(2) Calcular c si el periodo de oscilación observado es de $\frac{5}{4}\sqrt{2\pi}$.

Observación: Como valor de la constante g puede tomarse $10m/s^2$.

E.4.8. En un circuito eléctrico simple hay una corriente eléctrica I (en amperios), una resistencia R (en ohmios), una inductancia L (en henrios) y una fuerza electromotriz E (en voltios), como se indica en la siguiente figura.



De acuerdo con la segunda ley de Kirchoff, si se cierra el interruptor S en $t = 0$, la fuerza electromotriz aplicada (potencial) es igual a la suma de las caídas de potencial en el resto del circuito. En otras palabras, esto significa que la corriente I satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E.$$

Determinar la corriente I como función del tiempo t (en segundos), siendo R y L constantes no nulas y $E(t) = \text{sen } 2t$.

E.4.9. Calcular la solución general de la ecuación diferencial siguiente:

$$y'' - 2y' - 3y = 2 \text{sen } x.$$

Determinar el valor de las constantes si se verifican las siguientes condiciones:

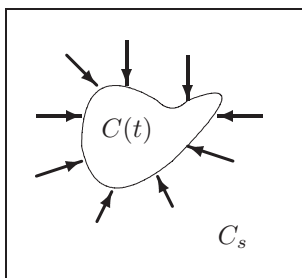
$$y(0) = 1/5, \quad y(\pi) = 0.$$

E.4.10. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

(1) $x dx - y dx = xy^2 dx$ (usar como factor integrante $\frac{1}{y^2}$).

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 5y = 3$.

E.4.11. Una célula está suspendida dentro de una solución que contiene un soluto a una concentración constante C_s . Se supone que la célula tiene un volumen constante V y que el área de su membrana permeable es igual a la constante A . Por la ley de Fick (fisiólogo alemán, 1829–1901), la razón de cambio de su masa m es directamente proporcional al área A y a la diferencia $C_s - C(t)$, donde $C(t)$ denota la concentración del soluto en el interior de la célula en el instante t .



Determinar la función $C(t)$ suponiendo que $m = VC(t)$ y $C(0) = C_0$.

