CAPÍTULO 2
CÁLCULO DIFERENCIAL

1. INTERROGANTES CENTRALES DEL CAPÍTULO

- Límite de una función
- Límites laterales
- Reglas para el cálculo de límites
- Regla del ‘bocadillo’
- Continuidad de una función
- Propiedades de las funciones continuas
- Teorema del valor intermedio
- Derivada de una función
- Interpretación geométrica de la derivada
- Teorema de Rolle
- Teorema del valor medio
- Máximos y mínimos relativos
- Polinomios de Taylor
- Series de potencias
- Teorema de Taylor
- Algoritmo de bisección
- Método de iteración del punto fijo
- Método de Newton-Raphson
- Polinomio interpolante de Lagrange
- Método de interpolación iterada
- Método de diferencias divididas

2. CONTENIDOS FUNDAMENTALES DEL CAPÍTULO

2.1. Límite de una función

2.1.1. *Definiciones*

La noción de límite es básica en todo el cálculo, por lo que es sumamente importante adquirir un buen manejo y conocimiento de los límites antes de adentrarnos en otros temas.

Sea $f(x)$ una función y consideremos x_0 un número real (no necesariamente en el dominio de f). Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un único valor L cuando x se aproxima a x_0 por ambos lados (sin llegar nunca a ser igual a x_0), decimos que el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L, y escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

En la definición anterior observamos que sólo interesa conocer cómo está definida la función f cerca del punto

x_0. Si la función existe o no en el punto x_0 no tiene importancia. La cuestión crucial aquí es la siguiente: ¿qué significa que $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L? ¿qué ocurre si x se aproxima a x_0 sólo por un lado?

El comportamiento de las funciones en relación a los límites puede ser de lo más diverso. Sólo como un botón de muestra, veamos las siguientes funciones.

$f(x) = x/(\sqrt{x+1} - 1)$: El límite de $f(x)$ cuando $x \to 0$ vale 2, ya que si nos acercamos por la izquierda obtenemos valores menores que 2 pero cada vez más próximos a 2; y si nos acercamos por la derecha obtenemos valores mayores que 2 pero cada vez más próximos a 2. Sin embargo, la función f no está definida en $x = 0$.

$f(x) = |x|/x$: Cuando nos acercamos a 0 por la izquierda, entonces $f(x) = -1$ por lo que el límite vale -1. Pero si nos acercamos por la derecha entonces $f(x) = 1$ y así el límite vale 1. Por tanto, no existe el límite.

$f(x) = 1/x^2$: Cuando x se aproxima a 0, $f(x)$ se va haciendo cada vez más grande, por lo que no existe ningún número real L al cual tienda $f(x)$. Por tanto no existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to 0$.

En los ejemplos anteriores hemos visto que hay funciones que se aproximan a un valor L_1 cuando x se aproxima a x_0 por la izquierda y se aproximan a L_2 si nos acercamos por la derecha. Este comportamiento nos lleva a considerar las siguientes definiciones.

Sea $f(x)$ una función y consideremos x_0 un número real (no necesariamente en el dominio de f).

(1) Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un único valor L cuando x se aproxima a x_0 por la izquierda (sin llegar nunca a ser igual a x_0), decimos que el **límite por la izquierda** de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L, y escribimos
$$\lim_{x \to {x_0}^-} f(x) = L.$$

(2) Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un único valor L cuando x se aproxima a x_0 por la derecha (sin llegar nunca a ser igual a x_0), decimos que el **límite por la derecha** de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L, y escribimos
$$\lim_{x \to {x_0}^+} f(x) = L.$$

Entonces existe el límite de una función $f(x)$ en x_0 si existen los límites laterales en x_0 y coinciden.

2.1.2. *Reglas para el cálculo de límites*

Si b y c son números reales, n un entero positivo y f, g son funciones que tienen límite cuando x tiende a c, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

(1) Múltiplo escalar: $\lim_{x \to c} [bf(x)] = b[\lim_{x \to c} f(x)]$

(2) Suma/Diferencia: $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$

(3) Producto: $\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \lim_{x \to c} g(x)$

(4) Cociente: $\lim_{x \to c} [\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$, siempre que $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$.

(5) Potencia: $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$

(6) Raíz: $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$. Si n es par suponemos que $\lim_{x\to c} f(x)$ es no negativo.

Para poder calcular límites sólo es necesario, además de utilizar las reglas anteriores, tener en cuenta que $\lim_{x\to c} b = b$ y $\lim_{x\to c} x = c$.

Como una consecuencia de la aplicación de las propiedades anteriores tenemos las siguientes reglas:

(1) Si $p(x)$ es un polinomio entonces
$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c).$$

(2) Si $r(x) = p(x)/q(x)$, $q(c) \neq 0$, es una función racional entonces
$$\lim_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}.$$

(3) Si $c > 0$ y n es cualquier entero positivo, o si $c < 0$ y n es un entero positivo impar, entonces
$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}.$$

(4) Si f y g son funciones tales que $\lim_{x\to c} g(x) = L$ y $\lim_{x\to L} f(x) = f(L)$ entonces
$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L).$$

Para finalizar este apartado vamos a enunciar la *regla del bocadillo* o *teorema de intercalación*, herramienta muy útil que permite calcular límites por comparación.

Regla del Bocadillo. Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a c (no importa lo que suceda en c) y
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L,$$
entonces
$$\lim_{x\to c} g(x) = L.$$

2.2. Continuidad de una función

El término continuidad en matemáticas tiene exactamente el mismo significado que tiene en el lenguaje cotidiano: una función f es continua en un punto a si su gráfica no se interrumpe en a, no tiene saltos ni huecos en ese punto. La única diferencia que existe es en la formulación rigurosa.

Continuidad en un punto: Una función f es continua en a si se verifican las siguientes condiciones:
1. $f(a)$ está definida. 2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. 3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Continuidad en un intervalo abierto: Una función f se dice continua en un intervalo abierto (b, c) si lo es en todos los puntos de ese intervalo.

Si f es continua en toda la recta real $(-\infty, \infty)$ diremos simplemente que f es una **función continua**. Se dice que f es **discontinua** en a si no es continua en dicho punto.

Existen varios tipos de discontinuidades: las **evitables** y las **no evitables**. Se dice que una discontinuidad en $x = a$ es evitable si la función f puede hacerse continua en a redefiniéndola en dicho punto. En caso contrario, se dirá que la discontinuidad es no evitable.

Continuidad por la derecha: Una función f es continua por la derecha en a si se verifican las siguientes condiciones:

1. $f(a)$ está definida. 2. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe. 3. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

Continuidad por la izquierda: Una función f es continua por la izquierda en a si se verifican las siguientes condiciones:

1. $f(a)$ está definida. 2. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existe. 3. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Continuidad en un intervalo cerrado: Una función f se dice continua en un intervalo cerrado $[b, c]$ si es continua en (b, c) y también es continua por la derecha en b y por la izquierda en c.

2.2.1. *Propiedades de las funciones continuas*

Teniendo en cuenta que la continuidad se ha definido como un límite, podemos utilizar las propiedades de los límites para comprobar inmediatamente las siguientes propiedades acerca de la continuidad.

Sean f y g dos funciones continuas en un punto a, entonces también son continuas en a las siguientes funciones:

(1) Suma y diferencia: $f \pm g$.

(2) Múltiplo escalar: λf, siendo λ un número real.

(3) Producto: fg.

(4) Cociente: f/g siempre que $g(a) \neq 0$.

Listamos a continuación algunos de los tipos más comunes de funciones continuas en todo punto de su dominio:

(1) Funciones polinómicas: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

(2) Funciones racionales: $r(x) = p(x)/q(x)$, si $q(x) \neq 0$.

(3) Funciones radicales: $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$, si $p(x) \geqslant 0$ cuando n es par.

Uno de los resultados que nos permitirá combinar las propiedades anteriores para probar la continuidad de funciones más complejas es el siguiente: "*Si g es continua en c y f es continua en $g(c)$ entonces la función compuesta $f \circ g$ es continua en c*".

Finalizamos esta sección con un teorema relativo al comportamiento de las funciones continuas en un intervalo cerrado, cuya demostración hace uso de la 'completitud' de los números reales.

Teorema del valor intermedio: *Si f es una función continua en $[a, b]$ y k es cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.*

El teorema del valor intermedio es útil para localizar los ceros de una función continua en un intervalo cerrado. Más concretamente, se tiene el siguiente resultado.

Teorema de Bolzano: *Si f es una función en $[a, b]$ y $f(a)$, $f(b)$ difieren de signo, entonces existe al menos un número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.*

Es importante hacer notar que tanto en el teorema del valor intermedio como en el teorema de Bolzano es capital que la función sea continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Pueden encontrarse ejemplos muy sencillos de funciones discontinuas que no verifican los teoremas anteriores.

2.3. Límites infinitos

En la sección previa donde hemos definido el concepto de límite L de una función f en un punto a, sólo hemos considerado el caso en que tanto a como L fuesen números reales. Sin embargo, es posible extender el concepto de límite a otros casos, en un cierto sentido que ahora pasamos a precisar.

2.3.1. *Límites infinitos cuando a es un número real*

Se dice que $f(x)$ **crece sin tope** cuando x tiende a a si para todo número real M siempre existe un intervalo I de a tal que $f(x) > M$ para todo punto x de I. Análogamente, se dice que $f(x)$ **decrece sin tope** cuando x tiende a a si para todo número real M siempre existe un intervalo I de a tal que $f(x) < M$ para todo punto x de I.

Si $f(x)$ crece sin tope cuando x tiende hacia a diremos que el límite de f cuando x tiende a a es ∞ y escribiremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Por el contrario, si $f(x)$ decrece sin tope cuando x tiende hacia a diremos que el límite de f cuando x tiende a a es $-\infty$ y escribiremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

El signo de igualdad en las expresiones anteriores no significa que exista un límite, sino que nos dan una razón por la que la función f no puede tener límite en el punto a: porque no está acotada. Lo que de verdad se quiere decir es que el límite no existe y la función f tiene una discontinuidad no evitable (de salto infinito).

Los límites infinitos por la izquierda y por la derecha se definen análogamente. Los cuatro posibles límites laterales son los siguientes:

(1) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$,

(2) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$,

(3) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$,

(4) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$.

Si alguno de los límites laterales anteriores se satisface, decimos que f tiene en a una discontinuidad infinita. En este caso, diremos que la recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de f. Uno de los ejemplos más típicos de existencia de asíntotas verticales se da en las funciones racionales: "*si f y g son funciones continuas en un intervalo conteniendo a c, y se satisface $f(c) \neq 0$ y $g(c) = 0$, entonces la función racional $r(x) = f(x)/g(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = c$*".

Terminamos esta sección con las siguientes propiedades de límites infinitos. Si c, L son números reales y f, g son funciones tales que

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \qquad y \qquad \lim_{x\to c} g(x) = L,$$

entonces las siguientes propiedades se verifican:

(1) Suma y diferencia: $\lim\limits_{x\to c}[f \pm g] = \infty$.

(2) Múltiplo escalar: $\lim\limits_{x\to c}[\lambda f] = \infty$, si $\lambda > 0$ y $\lim\limits_{x\to c}[\lambda f] = -\infty$, si $\lambda < 0$.

(3) Producto: $\lim\limits_{x\to c}[fg] = \infty$ si $L > 0$ y $\lim\limits_{x\to c}[fg] = -\infty$ si $L < 0$.

(4) Cociente: $\lim\limits_{x\to c}[g/f] = 0$.

(Propiedades similares son válidas para límites laterales y para funciones para las cuales el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es $-\infty$).

2.3.2. *Límites infinitos cuando L es un número real*

Si $f(x)$ tiende a L cuando x se hace arbitrariamente grande, entonces decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito es L, y escribimos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

Análogamente, si $f(x)$ tiende a L cuando x se hace arbitrariamente pequeño, entonces decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito es L, y escribimos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

En ambos casos se dice que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la función f. Uno de los ejemplos más típicos de existencia de asíntotas horizontales se da en las funciones racionales: "*si f y g son dos polinomios del mismo grado, entonces la función racional $r(x) = f(x)/g(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = L$, siendo L el cociente entre los coeficientes principales de f y g*".

Terminamos esta sección con las siguientes propiedades de límites infinitos. Si L_1, L_2 son números reales y f, g son funciones tales que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1 \qquad y \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = L_2,$$

entonces las siguientes propiedades se verifican:

(1) Suma y diferencia: $\lim\limits_{x\to\infty}[f \pm g] = L_1 \pm L_2$.

(2) Múltiplo escalar: $\lim\limits_{x\to\infty}[\lambda f] = \lambda L_1$.

(3) Producto: $\lim\limits_{x\to\infty}[fg] = L_1 L_2$.

(4) Cociente: $\lim\limits_{x\to\infty}[f/g] = L_1/L_2$ si $L_2 \neq 0$.

(Propiedades similares son válidas para límites de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$).

Las propiedades anteriores también pueden ser válidas si $L_1 = \pm\infty$ o $L_2 = \pm\infty$ o ambas condiciones al mismo tiempo. No obstante, existen ciertas restricciones con el fin de evitar las indeterminaciones: $\infty - \infty$, $0.\infty$, ∞/∞, etc.

2.4. Derivada de una función

El cálculo matemático nació y se fortaleció a raíz de cuatro clásicos problemas sobre los que los matemáticos europeos trabajaron durante el siglo XVII. Estos problemas son:

(1) El problema de la recta tangente.

(2) El problema de la velocidad y la aceleración.

(3) El problema de los máximos y mínimos.

(4) El problema del área.

En este capítulo abordaremos los tres primeros problemas, dejando el último para el capítulo siguiente. Cada uno de los problemas anteriores requiere el concepto de límite, ya introducido al comienzo del capítulo, y es por sí solo suficiente para motivar e introducir el cálculo.

La derivada de una función f en un punto a, que se denota por $f'(a)$, se define como

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

supuesto que tal límite exista.

2.4.1. *Interpretación geométrica: Recta tangente*

Si consideramos los puntos del plano $(x, f(x))$ y $(a, f(a))$, entonces la recta que los une tiene una pendiente m dada por

$$m=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

En consecuencia, $f'(a)$ es el límite de las pendientes de las rectas secantes que unen los puntos $(x, f(x))$ y $(a, f(a))$, y por tanto constituye la pendiente de la recta tangente a f en a (ver Figura 2.1).

Utilizando la forma punto-pendiente para expresar la ecuación de una recta, podemos decir que si $f'(a)$ existe entonces la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ viene dada por

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Una función f definida en un intervalo abierto (a, b) se dice que es **derivable** (o **diferenciable**) si existe $f'(c)$ en todo punto c del intervalo. Si f es una función derivable entonces podemos definir otra función, denominada la derivada de f y denotada por f', por la siguiente fórmula:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

El dominio de f' siempre es un subconjunto del dominio de f y una de las propiedades fundamentales de la derivada queda recogida en el siguiente teorema: "*si f es derivable en $x = a$ entonces f es continua en $x = a$*".

De lo anterior se deduce que podemos definir un operador en el conjunto de las funciones derivables que asocia a cada función $f(x)$ su derivada $f'(x)$. Dicho operador se denomina la derivada y se denota por

$$\frac{d}{dx}$$

de manera que $\frac{d}{dx}(f)$ es una notación para indicar f'. Asimismo, otra notación para $f'(a)$ es $\frac{df}{dx}(a)$.

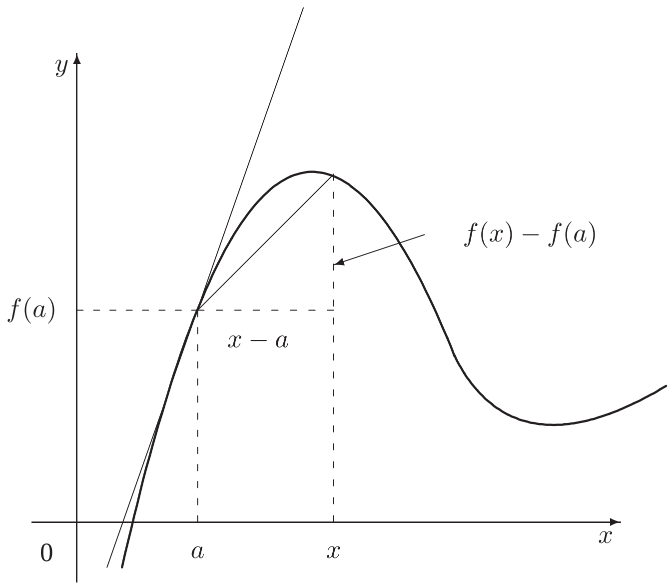


Figura 2.1: Interpretación geométrica de la derivada.

2.4.2. *Reglas de derivación*

Aunque la noción de derivada se apoya en el concepto de límite, no es conveniente calcular las derivadas recurriendo a la definición, ya que los cálculos son engorrosos y en ocasiones difíciles de realizar. En esta sección vamos a presentar una serie de reglas que nos permitirán hallar derivadas sin recurrir a la definición, de una forma más sencilla.

Regla de la constante. La derivada de una constante c es cero:

$$\frac{d}{dx}[c] = 0.$$

Regla de las potencias. Si n es un número racional,

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

Regla del múltiplo constante. Si c es un número real,

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x).$$

Regla de la suma y diferencia. La derivada de una suma (o diferencia) de dos funciones derivables es la suma (o diferencia) de sus derivadas:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x).$$

Regla del producto. El producto de dos funciones derivables es también derivable y su derivada viene dada por

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Regla del cociente. El cociente de dos funciones derivables es también derivable y su derivada viene dada por

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Regla de la cadena. La composición de dos funciones derivables es también derivable y su derivada viene dada por

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

2.4.3. *Derivación implícita*

En las secciones anteriores hemos visto cómo derivar funciones $y = f(x)$. Sin embargo, en ocasiones las variables x e y se hallan relacionadas por una ecuación $F(x, y) = 0$ que no permite despejar y en función de x. En estos casos se utiliza la técnica de la derivación implícita, la cual presupone que la variable y es función de x.

Cuando queremos calcular dy/dx a partir de una ecuación $F(x, y) = 0$ debemos tener presente que estamos derivando respecto de x. Por tanto, cuando derivemos términos en los que aparece y debemos utilizar la regla de la cadena, ya que y está definida implícitamente como una función de x.

El resultado de la derivación implícita dy/dx no suele ser una función que sólo depende de x, sino más bien una nueva función que depende de x y de y.

2.4.4. *Extremos (absolutos y relativos)*

Sea f una función definida en un intervalo I conteniendo un punto a. Entonces $f(a)$ es el **mínimo** de f en I si $f(a) \leqslant f(x)$ para todo x en I. Análogamente, $f(a)$ es el **máximo** de f en I si $f(a) \geqslant f(x)$ para todo x en I. En ocasiones, el máximo y el mínimo de una función f se denominan el **máximo absoluto** y el **mínimo absoluto** en ese intervalo, respectivamente (ver Figura 2.2).

Si el intervalo I es abierto, entonces f no tiene por qué tener un máximo o un mínimo en dicho intervalo. Sin embargo, si I es un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene un máximo M y un mínimo m (**teorema del valor extremo**).

A veces no interesa tanto el comportamiento global de la función como el comportamiento local, es decir, el comportamiento en intervalos pequeños. En este caso, las definiciones anteriores pueden ser ligeramente modificadas en el siguiente sentido.

$f(a)$ es un **mínimo relativo** de f si $f(a) \leqslant f(x)$ para todo x en un intervalo abierto I conteniendo a a. Análogamente, $f(a)$ es un **máximo relativo** de f si $f(a) \geqslant f(x)$ para todo x en un intervalo abierto I conteniendo a a (ver Figura 2.2).

¿Cómo podemos utilizar el cálculo para la determinación de los extremos relativos de una función? Para ello necesitamos introducir el concepto de punto crítico. Si f está definida en a, se dice que a es **punto crítico** de f si $f'(a) = 0$. Por convenio, todos los puntos que no pertenecen al dominio de f' son críticos.

La primera aproximación nos la da el **teorema de Fermat**, que dice lo siguiente: "*Si f tiene un extremo relativo en a entonces $f'(a) = 0$*". Como consecuencia de lo anterior, los extremos relativos de una función sólo pueden aparecer en los puntos críticos, lo que justifica la siguiente guía para determinar los extremos de una función en un intervalo cerrado:

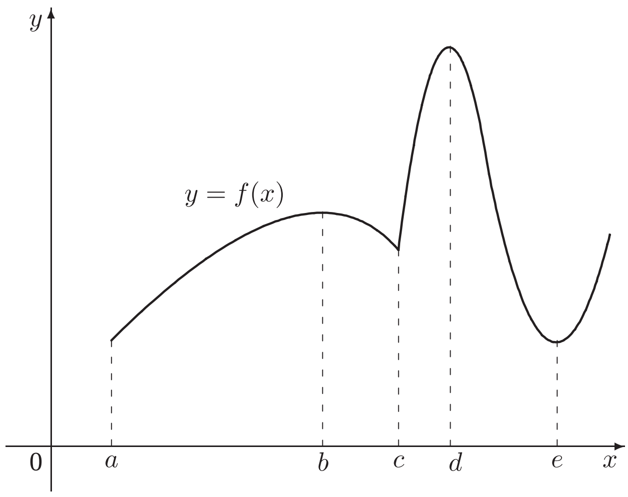


Figura 2.2: Máximos y mínimos de una función.

(1) Determinar los puntos críticos de f.

(2) Evaluar f en sus puntos críticos.

(3) Calcular $f(a)$ y $f(b)$.

(4) El menor de los valores anteriores es el mínimo; el mayor es el máximo.

2.4.5. *Teoremas de Rolle y del valor medio*

El teorema del valor extremo discutido anteriormente garantiza la existencia de extremos absolutos en las funciones continuas definidas en un intervalo cerrado, pero no sabemos si estos extremos se alcanzan en los extremos del intervalo o en el interior. El siguiente teorema garantiza la existencia de extremos en el interior del intervalo.

Teorema de Rolle. *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Debemos hacer notar que todas las hipótesis son imprescindibles. Si f no es derivable en (a, b) o $f(a) \neq f(b)$ entonces podemos encontrar ejemplos de funciones que no satisfacen el teorema de Rolle.

Como una generalización del teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

Teorema del valor medio. *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geométricamente, el teorema anterior nos dice que, en las hipótesis del teorema, siempre existe un punto c tal que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en c tiene la misma pendiente que la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

El teorema del valor medio es uno de los resultados básicos del cálculo, fundamentalmente por su utilización en la demostración de muchos otros resultados. Una de las consecuencias más bonitas es la siguiente: "*Si* $f'(x) = 0$ *para todo punto* $x \in (a, b)$ *entonces* f *es constante en* (a, b)".

2.4.6. *Funciones crecientes y decrecientes*

Una función f es (**estrictamente**) **creciente** en un intervalo I si para todo par de puntos x_1 y x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se satisface $f(x_1) < f(x_2)$. Análogamente, una función f es (**estrictamente**) **decreciente** en un intervalo I si para todo par de puntos x_1 y x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se satisface $f(x_1) > f(x_2)$.

Si la función f es derivable, podemos utilizar el signo de la derivada $f'(x)$ para saber si una función es creciente o decreciente:

(1) Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b) entonces f es creciente en (a, b).

(2) Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b) entonces f es decreciente en (a, b).

(3) Si $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b) entonces f es constante en (a, b).

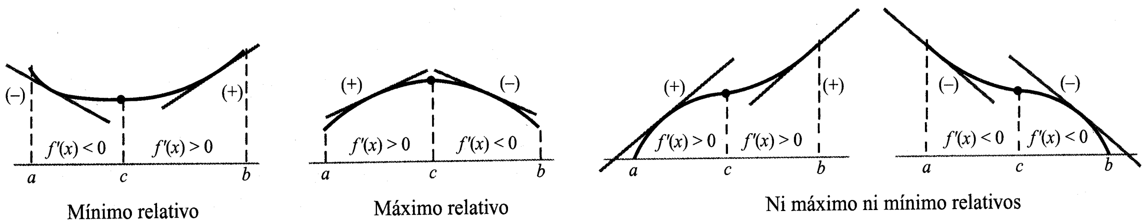


Figura 2.3: Crecimiento y decrecimiento de una función.

Las anteriores propiedades nos permiten elaborar la siguiente guía para determinar los intervalos donde una función derivable es creciente o decreciente.

(1) Localizar los puntos críticos de f

(2) Determinar el signo de f' en cada uno de los intervalos determinados por dos puntos críticos consecutivos.

(3) Utilizar las propiedades anteriores para cada uno de los intervalos obtenidos.

Una vez determinados los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función f es muy fácil determinar si los puntos críticos obtenidos son máximos o mínimos relativos, según las siguientes reglas (ver Figura 2.3):

(1) Si f' cambia de negativa a positiva en c entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de f.

(2) Si f' cambia de positiva a negativa en c entonces $f(c)$ es un máximo relativo de f.

(3) Si f' no cambia de signo en c entonces $f(c)$ no es ni máximo ni mínimo relativo.

2.4.7. *Concavidad y puntos de inflexión*

Si f es una función derivable en un intervalo abierto (a, b), se dice que la gráfica de f es **cóncava hacia arriba** si f' es creciente en dicho intervalo, y **cóncava hacia abajo** si f' es decreciente en dicho intervalo. Observemos que las definiciones anteriores significan que la gráfica de f se encuentra por arriba (resp. abajo) de todas sus tangentes.

En ocasiones se utilizan los términos *cóncava* y *convexa* para las gráficas que son cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo, respectivamente.

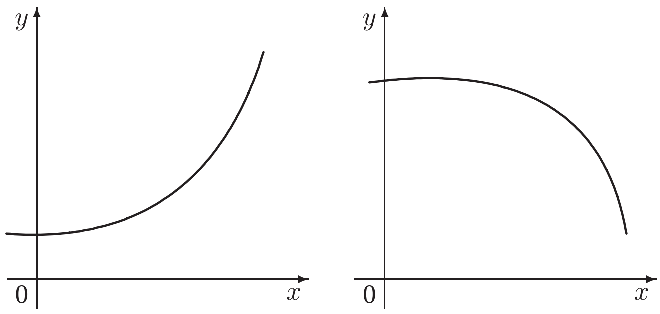


Figura 2.4: Concavidad de una función.

La determinación de los intervalos de concavidad (hacia arriba y hacia abajo) puede obtenerse teniendo en cuenta el signo de la derivada segunda, según la siguiente propiedad:

(1) Si $f''(x) > 0$ para todo x en (a, b) entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba.

(2) Si $f''(x) < 0$ para todo x en (a, b) entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo.

(3) Si $f''(x) = 0$ para todo x en (a, b) entonces f es una función lineal.

Un punto $(c, f(c))$ se dice que es un **punto de inflexión** de una curva $y = f(x)$ si la gráfica de f cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, o viceversa, en dicho punto.

Como consecuencia de la definición, la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de inflexión corta a la gráfica de f. Además, si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f entonces $f''(c) = 0$ o f'' no está definida en $x = c$.

Finalizamos esta sección con el criterio de la derivada segunda para la determinación de los extremos relativos. El criterio se basa en que en que si $f'(c) = 0$ y existe un intervalo de c donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo entonces $f(c)$ es un máximo de f; por el contrario, si la gráfica de f es cóncava hacia arriba entonces $f(c)$ es un mínimo de f.

(1) Si $f''(c) > 0$ entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.

(2) Si $f''(c) < 0$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo.

(3) Si $f''(c) = 0$ entonces el criterio no decide.

2.4.8. *Representación de funciones*

Para realizar correctamente la gráfica de una función f es conveniente seguir los pasos que a continuación se indican:

- **Dominio**
- **Intersecciones con los ejes**
- **Simetrías**
- **Puntos de discontinuidad**
- **Asíntotas verticales**
- **Asíntotas horizontales**
- **Crecimiento y decrecimiento**
- **Extremos relativos**
- **Concavidad y puntos de inflexión**

En ocasiones no es necesario calcular todos los apartados anteriores. Suelen ser imprescindibles el dominio, las asíntotas (horizontales y verticales) y los siguientes puntos: de intersección con los ejes, extremos relativos y de inflexión.

2.5. Teorema de Taylor

2.5.1. *Sucesiones y límites de sucesiones*

Una **sucesión** $\{a_n\}$ es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales (o enteros positivos: 1, 2, 3, ...). Los valores $a_1, a_2, \ldots$ se llaman los **términos** de la sucesión.

2.5.1.1. Límites de sucesiones

Es posible que conforme vaya aumentando el valor de n los correspondientes números a_n se vayan aproximando a un número fijo L. Si esto ocurre, se dice que la sucesión es **convergente** y su límite es L:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

En caso contrario diremos que la sucesión es **divergente**. La definición rigurosa es la siguiente:

La sucesión $\{a_n\}$ es convergente con límite L si para todo número $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que $|a_n - L| < \epsilon$ siempre que $n > M$.

A veces es más fácil calcular el límite de una función que el de una sucesión y esto puede permitirnos, aunque no lo parezca, resolver límites de sucesiones. El siguiente resultado nos ofrece la clave.

Sea f una función de una variable real tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que $a_n = f(n)$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Los límites de sucesiones satisfacen propiedades similares a los límites de funciones, ya descritos en una sección anterior. Los recordamos aquí. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = K.$$

Entonces:

(1) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L \pm K$.

(2) $\lim_{n\to\infty} (ca_n) = cL$.

(3) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = LK$.

(4) $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = L/K$, si $b_n \neq 0$ y $K \neq 0$.

Otras propiedades importantes de los límites de sucesiones son las siguientes.

(1) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n$ y existe un entero N tal que $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ para todo $n > N$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L.$$

(2) Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.5.1.2. Tipos de sucesiones

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice **monótona** si sus términos son no decrecientes

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$$

o no crecientes

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots$$

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice **acotada** si existe un número real positivo M tal que $|a_n| \leqslant M$ para todo n. El número M se denomina cota (superior) de la sucesión.

Uno de los principales resultados acerca de sucesiones acotadas y convergentes es el siguiente: "*Toda sucesión monótona y acotada es convergente*".

2.5.2. *Polinomios de Taylor y aproximación*

El objetivo fundamental de esta sección es mostrar cómo se pueden utilizar polinomios para aproximar otras funciones. Para ello, lo primero que debemos hacer es fijar un punto c alrededor del cual vamos a realizar la aproximación. Este punto c es el centro de la aproximación y el objetivo es encontrar el polinomio (de un cierto grado predeterminado) que mejor se aproxima (en un cierto sentido) a la función f en un entorno del punto c.

Si f tiene n derivadas en c, el polinomio

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

se denomina el **n-ésimo polinomio de Taylor de f centrado en** c. Si $c = 0$, entonces el polinomio anterior se denomina el **n-ésimo polinomio de Maclaurin de** f.

Cualquier método de aproximación tiene una utilidad relativa (más bien poca) si se desconoce el error que se comete. Para medir la precisión al aproximar un valor $f(x)$ por el polinomio de Taylor $P_n(x)$ descomponemos $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, donde $R_n(x)$ es el **resto**. El error cometido en la aproximación es el valor absoluto del resto, es decir,

$$\text{error} = |R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|.$$

El siguiente teorema estima el error anterior.

Teorema de Taylor. *Si una función f es derivable hasta el orden $n+1$ en un intervalo (a,b) conteniendo a c, entonces para todo x en (a,b) existe un número z entre x y c tal que*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

La expresión anterior de $R_n(x)$ se denomina **forma de Lagrange para el resto**. A la hora de utilizar el teorema anterior no se trata de encontrar explícitamente el valor de z si no más bien encontrar cotas para $f^{(n+1)}(z)$, que nos darán una idea más o menos precisa del tamaño del resto.

2.5.3. *Series de potencias: coeficientes y radio de convergencia*

Una serie de potencias es una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

donde x denota una variable. De forma general, una serie de potencias centrada en c es una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

Los números $\{a_n\}$ se denominan los **coeficientes de la serie**.

Para una serie de potencias centrada en c ha de ocurrir exactamente una de las tres posibilidades siguientes:

1. La serie converge sólo en c.
2. Existe un número real $R > 0$ tal que la serie converge (absolutamente) si $|x-c| < R$ y diverge si $|x-c| > R$.

3. La serie converge para todo x.

El número R se llama **radio de convergencia** de la serie de potencias. Si la serie converge sólo en c diremos que el radio de convergencia es cero, y si la serie es convergente para todo x diremos que el radio de convergencia es infinito. El conjunto de valores x donde la serie es convergente se denomina el **intervalo de convergencia** de la serie de potencias.

2.5.4. *Operaciones con series de potencias*

Las operaciones básicas con series de potencias son las siguientes. Sean

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

dos series de potencias. Entonces:

(1) $f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$

(2) $f(x^m) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nm}$

(3) $f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$

(4) $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \right) x^n$

2.5.5. *Series de Taylor y de Maclaurin*

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ es una serie de potencias (convergente) entonces los coeficientes $\{a_n\}$ de la serie quedan determinados por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Como consecuencia, si una función $f(x)$ admite un desarrollo en serie de potencias, tal desarrollo tiene que ser necesariamente el siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n.$$

La serie anterior se denomina **serie de Taylor** en c. Cuando $c = 0$, tal serie se conoce con el nombre de **serie de Maclaurin** de f.

Una función $f(x)$ se dice que es **analítica** si coincide con su serie de potencias en todos los puntos del dominio, es decir, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n.$$

Algunas de las series de potencias asociadas a funciones elementales aparecen recogidas en la Tabla 2.1, junto con los intervalos de convergencia.

Función	Serie	Intervalo
$\dfrac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$	$-1 < x < 1$
$\ln(x)$	$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$	$0 < x \leqslant 2$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$	$-\infty < x < \infty$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$-\infty < x < \infty$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$-\infty < x < \infty$

Tabla 2.1: Series de potencias asociadas a algunas de las funciones más usuales.

2.6. Cálculo Numérico

2.6.1. *Métodos numéricos de resolución de ecuaciones*

Uno de los problemas más básicos del análisis numérico consiste en encontrar los valores x que satisfacen una determinada ecuación $f(x) = 0$, para una función f dada. Este problema, conocido como el problema de búsqueda de raíces, no es un problema trivial y prueba de ello es que sigue estando de plena actualidad. La dificultad no estriba en encontrar métodos para obtener soluciones, sino encontrar métodos que permitan encontrar las soluciones en un "tiempo razonable". En esta sección vamos a discutir tres métodos: el algoritmo de bisección, el método de iteración del punto fijo y el método de Newton-Raphson.

2.6.1.1. Algoritmo de bisección

La justificación teórica de este método debemos buscarla en el teorema de Bolzano: si f es una función continua en $[a, b]$ con signos opuestos en los extremos (es decir, $f(a)f(b) < 0$), entonces existe un cero de f en (a, b).

El **algoritmo de bisección** o **método de búsqueda binaria** puede describirse como sigue. Comenzamos definiendo $a_1 = a$ y $b_1 = b$, y sea p_1 el punto medio del intervalo (a_1, b_1). Si $f(p_1) = 0$, ya hemos encontrado el cero. De lo contrario, $f(p_1) \neq 0$ y entonces puede suceder una de las dos afirmaciones siguientes:

1. $f(p_1)f(a_1) < 0$. En este caso tomamos $a_2 = a_1$ y $b_2 = p_1$.
2. $f(p_1)f(b_1) < 0$. En este caso tomamos $a_2 = p_1$ y $b_2 = b_1$.

Ahora repetimos el proceso anterior al intervalo $[a_2, b_2]$.

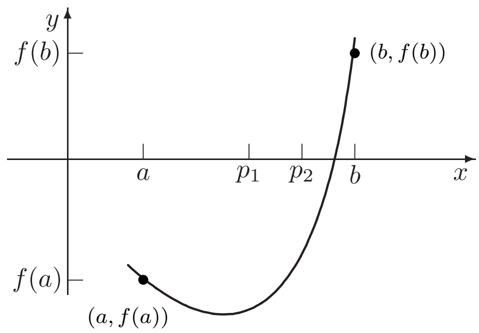


Figura 2.5: Algoritmo de bisección.

Observemos que en cada etapa la longitud del intervalo resultante es la mitad de la longitud del intervalo precedente, por lo que

$$L([a_n, b_n]) = \frac{1}{2^n} L([a, b]) = \frac{1}{2^n}(b - a)$$

Esto significa que, siempre que se verifiquen las condiciones del teorema de Bolzano, el método proporciona una solución, ya que la sucesión $\{p_n\}$ es de Cauchy y, por tanto, convergente.

No obstante, en la práctica no se suele encontrar el valor exacto de la solución por lo que conviene introducir algún mecanismo de paro. Algunos de los mecanismos de paro más usuales son:

(1) Fijar un número máximo n_0 de iteraciones.

(2) Seguir hasta que $|p_n - p_{n-1}| < \epsilon$.

(3) Seguir hasta que $\dfrac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \epsilon$ con $p_n \neq 0$. Este mecanismo es el mejor criterio de paro, ya que mide el error relativo.

(4) Seguir hasta que $|f(p_n)| < \epsilon$.

2.6.1.2. Método de iteración del punto fijo

Un **punto fijo** de una función g es un punto a tal que $g(a) = a$. Dada una función f, podemos considerar la función $g(x) = x \pm f(x)$, de forma que a es un cero de f si y sólo si a es punto fijo de g. Por tanto, la determinación de puntos fijos puede ayudar a la determinación de raíces.

En este punto surge un problema: ¿todas las funciones tienen puntos fijos? Si la respuesta es negativa, entonces ¿qué condiciones debe satisfacer una función para que tenga puntos fijos?

Condiciones para la existencia de puntos fijos. *Si g es una función continua definida en $[a, b]$ y con valores en el mismo intervalo, entonces g tiene un punto fijo. Si además g es derivable en (a, b) y satisface $|g'(x)| \leqslant k < 1$ en (a, b) entonces sólo existe un punto fijo.*

Si g es una función que satisface el resultado anterior y p_0 es un punto cualquiera del intervalo $[a, b]$ entonces la sucesión

$$p_n = g(p_{n-1})$$

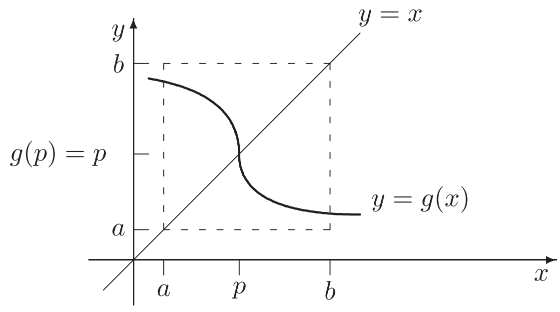


Figura 2.6: Método de iteración del punto fijo.

converge al único punto fijo p de g en $[a, b]$. Además, una cota para el error cometido si se utiliza p_n para aproximar a p viene dada por

$$|p_n - p| \leqslant k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}.$$

2.6.1.3. Método de Newton-Raphson

Este método, también conocido sólo como método de Newton, es uno de los algoritmos más conocidos y poderosos en la resolución de ecuaciones $f(x) = 0$. La idea del método es construir una sucesión de puntos que se aproximan a la solución utilizando para ello las rectas tangentes a la función f.

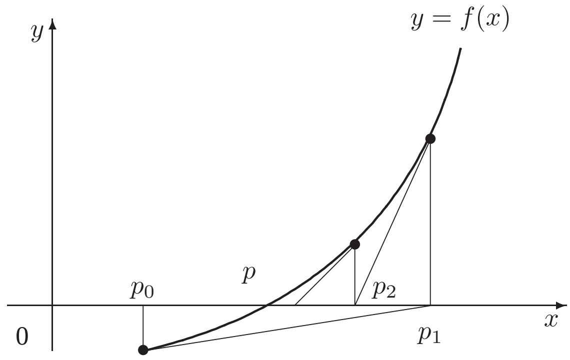


Figura 2.7: Esquema del método de Newton.

La justificación teórica del método es la siguiente. Sea p el punto fijo y consideremos un punto y próximo a p que no es una raíz de f', es decir, $f'(y) \neq 0$. Utilizando el polinomio de Taylor de grado 1 para la función f alrededor del punto y obtenemos

$$f(x) = f(y) + f'(y)(x - y) + \frac{f''(z)}{2}(x - y)^2,$$

donde z es un número entre x e y. Particularizando la ecuación anterior en $x = p$ obtenemos

$$0 = f(y) + f'(y)(p - y) + \frac{f''(z)}{2}(p - y)^2.$$

Si suponemos que $|p - y|$ es pequeño, entonces $(p - y)^2$ es despreciable frente a $|p - y|$ por lo que la ecuación anterior queda $0 \approx f(y) + f'(y)(p - y)$. Despejando p es esta ecuación se obtiene

$$p \approx y - \frac{f(y)}{f'(y)},$$

lo que es una aproximación mejor a p que y. El método de Newton consiste en considerar la sucesión de puntos

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, n \geqslant 1.$$

En consecuencia, el método no puede seguir aplicándose cuando $f'(p_{n-1}) = 0$ para algún n.

2.6.2. *Interpolación polinómica*

El problema de la interpolación polinómica consiste en determinar el polinomio de menor grado que pasa por $n + 1$ puntos (x_0, y_0), …, (x_n, y_n) prefijados. El grado de dicho polinomio es a lo más n.

2.6.2.1. Polinomio de interpolación de Lagrange

Si (x_0, y_0), …, (x_n, y_n) son $n + 1$ pares de puntos tales que sus abcisas $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son todas distintas, entonces existe un único polinomio P, denominado **polinomio interpolante de Lagrange**, de grado a lo más n con la propiedad de que

$$P(x_k) = y_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Este polinomio está dado por

$$P(x) = y_0 L_{n,0}(x) + y_1 L_{n,1}(x) + \ldots + y_n L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_{n,k}(x)$$

donde

$$L_{n,k}(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}.$$

Una pregunta importante en análisis numérico es la referida al error cometido cuando se realiza una aproximación. En este caso, el término residual o cota de error cometido en la aproximación de una función por su polinomio interpolante viene dado en el siguiente resultado.

Cota de error. *Sea f una función suficientemente derivable en el intervalo $[a, b]$ y consideremos (x_0, y_0), …, (x_n, y_n) $n + 1$ pares de puntos tales que $y_k = f(x_k)$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n$. Entonces*

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

con $z \in (a, b)$, donde P es el polinomio interpolante de Lagrange.

Observemos la similitud existente entre el resto en la aproximación anterior y el resto en el polinomio de Taylor estudiado anteriormente.

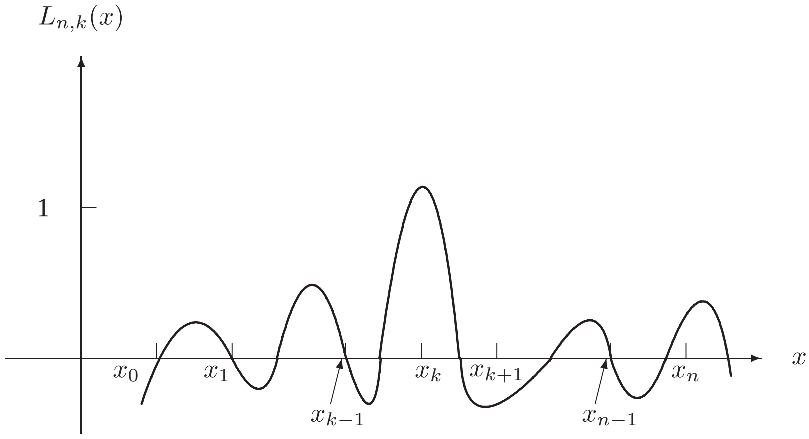


Figura 2.8: Polinomio interpolante de Lagrange.

2.6.2.2. Método de interpolación iterada

El método descrito en la sección anterior para calcular el polinomio interpolante es muy complicado y poco práctico. En primer lugar, la precisión del polinomio no se puede determinar hasta que los cálculos han sido completados. En segundo lugar, los cálculos realizados para la obtención de unos polinomios interpolantes no se pueden utilizar para calcular los polinomios interpolantes de grados superiores: siempre es necesario partir de cero. En esta sección vamos a describir un método que permite aprovechar el trabajo realizado. La justificación teórica del método es el siguiente resultado.

Sea f una función definida en x_0, x_1, …, x_n y supongamos que m_1, m_2, …, m_k son k enteros distintos con $0 \leqslant m_i \leqslant n$ para cada i. El polinomio de Lagrange de grado menor que k que coincide con f en x_{m_1}, x_{m_2}, …, x_{m_k} se denota por $P_{m_1,m_2,\ldots,m_k}$. Si x_j, x_i son dos números distintos y

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{(x_i - x_j)}$$

entonces P es el polinomio interpolante de Lagrange de grado menor o igual que k que interpola a f en x_0, x_1, …, x_k.

2.6.2.3. Método de diferencias divididas

Los métodos que nos permiten representar explícitamente el polinomio interpolante a partir de datos tabulados se conocen con el nombre de **métodos de diferencias divididas**. Sean x_0, x_1, …, x_n puntos distintos y consideremos P_n el polinomio de Lagrange que interpola a f en dichos puntos. Entonces existen constantes apropiadas a_0, a_1, …, a_n tales que

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Tales constantes pueden determinarse de la siguiente manera. En primer lugar, $a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$. Si ahora evaluamos en x_1 se obtiene $f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = P_n(x_1) = f(x_1)$ de donde

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Para determinar el resto de constantes vamos a introducir la siguiente notación.

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f(x_i), \\ f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, \\ &\vdots \\ f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \end{aligned}$$

Ahora es un mero ejercicio de manipulación algebraica deducir que

$$a_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k], \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

3. ACTIVIDADES DE APLICACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS

A.2.1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3^{2x^2+1}$ en el punto $(0, 3)$.

A.2.2. Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 8x + 12$, determinar el punto donde la tangente es paralela al eje de abscisas.

A.2.3. Escribir la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $xy = 1$ en el punto de abscisa $x = 3$.

A.2.4. ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ la tangente es paralela al eje de abscisas?

A.2.5. Determinar los puntos de la curva $y = x^3 + 9x^2 - 9x + 15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta $y = 12x + 5$.

A.2.6. Determinar los puntos de la curva $y = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + x + 1$ que tienen la tangente formando un ángulo de $\pi/4$ radianes con el eje de abcisas.

A.2.7. Probar que la recta tangente a la curva $f(x) = \log^2(x)$ en el punto $(a, f(a))$ se traza uniéndolo con el punto $(0, f(a) - 2\log a)$.

A.2.8. Obtener las ecuaciones de la rectas tangente y normal a la curva $y = x^3$ en los puntos $(1, 2)$ y $(2, 8)$.

A.2.9. Obtener las ecuaciones de la rectas tangente y normal a la curva $y = (x + 1)(3 - x)^{1/3}$ en el punto $(2, 3)$.

A.2.10. La curva dada por $y = x^2 + ax + b$ pasa por el punto $(-2, 1)$ y alcanza un extremo relativo en $x = -3$. Hallar a y b.

A.2.11. Hallar a, b, c y d para que la curva dada por $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo en el punto $(-2, 21)$ y un mínimo en el punto $(-1, 6)$.

A.2.12. Hallar dos números cuya suma sea 20 y su producto el mayor posible.

A.2.13. Descomponer el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.

A.2.14. Calcular las dimensiones del mayor rectángulo cuyo perímetro es 40 metros.

A.2.15. Demostrar que la suma de un número real positivo no nulo y su inverso es mayor o igual que 2.

A.2.16. Hallar dos números cuya suma es 18, sabiendo que el producto del uno por el cuadrado del otro ha de ser máximo.

A.2.17. Hallar las dimensiones de un campo rectangular de 3600 metros cuadrados de superficie para poderlo cercar mediante una valla de longitud mínima.

A.2.18. Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 800 pesetas/metro y la de los otros lados cuesta 100 pesetas/metro, hallar el área del mayor campo que se puede cercar con 288000 pesetas.

A.2.19. Un jardinero ha de construir un parterre en forma de sector circular con perímetro de 20 metros. ¿Cuál será el radio que da el parterre de área máxima? ¿Cuál será la amplitud en radianes del sector?

A.2.20. Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica y una capacidad de 160 litros. Hallar las dimensiones del barril para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.

A.2.21. De todos los triángulos isósceles de 12 metros de perímetro, hallar las dimensiones del que tenga área máxima.

A.2.22. Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de 12 metros de radio, hallar las dimensiones del que tenga área máxima.

A.2.23. Averiguar cómo ha de ser un triángulo isósceles de área máxima inscrito en una circunferencia de radio r.

A.2.24. Entre todos los cilindros rectos de volumen fijo V, hallar el de menor superficie.

A.2.25. Una hoja de papel debe contener 18 centímetros cuadrados de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 centímetros cada uno y los laterales 1 centímetro. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

A.2.26. Hallar los puntos de la curva $y^2 = 6x$ cuya distancia al punto $(4, 0)$ sea mínima.

A.2.27. Determinar la distancia mínima del origen a la curva $xy = 1$.

A.2.28. Determinar las dimensiones de una piscina no cubierta de volumen $32\ m^3$ con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y del suelo necesiten la mínima cantidad de material.

A.2.29. De una lámina cuadrada de 10dm de lado se cortan cuadrados en cada uno de los vértices con el objeto de hacer una caja abierta por arriba. Calcular el lado del cuadrado que se debe cortar para que el volumen de la caja sea máximo.

A.2.30. Las agujas de un reloj miden 4 y 6cm. Uniendo sus extremos se forma un triángulo. Determinar el instante entre las 12h y las 12h30m en el cual el área del triángulo es máxima.

A.2.31. La tangente en un punto a una curva es paralela al eje horizontal. ¿Qué puede decirse de su inclinación? ¿Y de su pendiente? ¿Y de la derivada de la curva en ese punto?

A.2.32. **a)** Calcular el polinomio de Taylor de tercer grado alrededor de $x_0 = 0$ para $f(x) = (1 + x)^{1/2}$.

b) Usar el polinomio de la parte (a) para aproximar $\sqrt{1.1}$.

A.2.33. Con el polinomio de Taylor de tercer grado $P_3(x)$ obtenido en el ejercicio anterior, aproximar $f(0.1)$, $f(0.5)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(10)$. Calcular el error cometido en cada caso.

A.2.34. Encontrar el polinomio de Taylor de grado 2 para $f(x) = x^2 - 3$ alrededor del punto
a) $x_0 = 1$.
b) $x_0 = 0$.

A.2.35. Obtener el polinomio de Taylor de tercer grado para $f(x) = (1 + x)^{-2}$ alrededor de $x_0 = 0$, y usar este polinomio para aproximar $f(0.05)$.

A.2.36. Sea $f(x) = \ln(1 + x)$. Encontrar el polinomio de Taylor de grado 4 para f alrededor de $x_0 = 0$, y usarlo para aproximar $\ln(1.1)$.

A.2.37. Usando los números, o nodos, $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$ y $x_2 = 4$, calcular el polinomio interpolante de Lagrange de segundo grado para la función $f(x) = 1/x$. Usar dicho polinomio para calcular el valor de $f(3)$ y obtener el error cometido.

A.2.38. Usar los polinomios interpolantes de Lagrange apropiados, de grado uno, dos, tres y cuatro, para aproximar

(a) $f(2.5)$ si
$f(2) = 0.5103757$, $f(2.2) = 0.5207843$, $f(2.4) = 0.5104147$,
$f(2.6) = 0.4813306$, $f(2.8) = 0.435916$.

(b) $f(0)$ si
$f(-0.3) = -0.20431$, $f(-0.1) = -0.08993$, $f(0.1) = 0.11007$,
$f(0.3) = 0.39569$, $f(0.5) = 0.79845$.

(c) $f(1.25)$ si
$f(1) = 0.24255$, $f(1.1) = 0.48603$, $f(1.2) = 0.8616$, $f(1.3) = 1.59751$, $f(1.4) = 3.76155$.

(d) $f(0.5)$ si
$f(0.2) = 0.9798652$, $f(0.4) = 0.917771$, $f(0.6) = 0.8080348$,
$f(0.8) = 0.6386093$, $f(1) = 0.3843735$.

(e) $f(0.2)$ si
$f(0.1) = 1.2314028$, $f(0.3) = 1.9121188$, $f(0.4) = 2.3855409$,
$f(0.5) = 2.9682818$, $f(0.6) = 3.6801169$.

A.2.39. Usar los valores siguientes para construir un polinomio de Lagrange de grado dos o menor. Encontrar una aproximación para $\operatorname{sen}(0.34)$.

$$\operatorname{sen} 0.3 = 0.29552 \quad \operatorname{sen} 0.32 = 0.31457 \quad \operatorname{sen} 0.35 = 0.3429$$

A.2.40. Agregar el valor $\operatorname{sen} 0.33 = 0.32402$ a los datos del ejercicio anterior y construir un polinomio de Lagrange de grado tres o menor. Aproximar $\operatorname{sen} 0.34$.

A.2.41. Usar los valores siguientes para construir una aproximación polinómica de Lagrange de tercer grado para $f(1.09)$. La función que se está aproximando es $f(x) = \log_{10} \tan(x)$.

$$f(1) = 0.1924 \quad f(1.05) = 0.2414 \quad f(1.1) = 0.2933 \quad f(1.15) = 0.3492$$

A.2.42. Usar el polinomio interpolante de Lagrange de grado tres o menor para aproximar $\cos 0.75$ usando los siguientes valores:

$$\cos 0.698 = 0.7661 \quad \cos 0.733 = 0.7432$$
$$\cos 0.768 = 0.7193 \quad \cos 0.803 = 0.6946$$

A.2.43. La función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ tiene una raíz en $[1, 2]$. Utilizar el algoritmo de bisección (10 etapas) para calcular una aproximación de la raíz. Calcular el error sabiendo que la raíz exacta, con nueve cifras decimales, es $p = 1.365230013$.

A.2.44. Demostrar que $f(x) = x^3 - x - 1$ tiene exactamente un cero en el intervalo $[1, 2]$. Aproximar el cero con 0.01 de precisión usando el algoritmo de bisección.

A.2.45. Usar el algoritmo de bisección para encontrar soluciones con una exactitud de 0.01 para $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$ en

(a) $[-2, 0]$
(b) $[0, 2]$
(c) $[1, 2]$.

A.2.46. Usar el algoritmo de bisección para encontrar una solución con una exactitud de 0.01 para $x = \tan x$ en $[4, 4.5]$.

A.2.47. Usar el algoritmo de bisección para encontrar todas las soluciones de $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ con una precisión de 0.001.

A.2.48. Usar el método de iteración del punto fijo para determinar una solución exacta a 0.01 para $2 \operatorname{sen} \pi x + x = 0$ en $[1, 2]$. Tomar $p_0 = 1$.

A.2.49. Resolver $x^3 - x - 1 = 0$ para la raíz en $[1, 2]$ usando el método de iteración del punto fijo. Obtener una aproximación a la raíz exacta a 0.01.

A.2.50. Usar el método de iteración del punto fijo para determinar una solución exacta a 0.001 de $x = \tan x$ en $[4, 5]$.

A.2.51. Aproximar con 0.01 de precisión las raíces de las siguientes ecuaciones en los intervalos dados usando el método de Newton y el método de la secante.

(a) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ en $[1, 4]$.

(b) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ en $[-4, 0]$.

(c) $x - \cos x = 0$ en $[0, \pi/2]$.

(d) $x - 0.8 - 0.2 \operatorname{sen} x = 0$ en $[0, \pi/2]$.

4. ACTIVIDADES PRÁCTICAS DEL CAPÍTULO

4.1. Introducción

La práctica se va a realizar con el programa de cálculo matemático *DERIVE for Windows*, versión 4.05, de Soft Warehouse. *DERIVE for Windows* permite realizar cálculos y manipulaciones matemáticas de carácter general, lo cual significa que realiza muchas cosas de forma aceptable aunque no tiene la potencia de otros programas específicos. No obstante, *DERIVE for Windows* permite realizar todos los cálculos que un usuario medio puede necesitar.

En esta práctica nos vamos a centrar en el cálculo diferencial en una variable. Aprenderemos a calcular límites de funciones, determinaremos los máximos, mínimos, y puntos de inflexión de una función, lo que nos permitirá representar gráficamente dicha función (lo cual, dicho sea de paso, hace automáticamente el programa).

Antes de comenzar la práctica será conveniente que recordemos brevemente la 'botonera' de *DERIVE for Windows* (ver Figura 2.9), ya que simplifica enormemente la introducción de datos y la realización de cálculos. Los botones permiten realizar las siguientes tareas (de izquierda a derecha): `New` (abrir una nueva hoja de trabajo), `Open` (abrir una hoja de trabajo existente), `Save` (guardar la sesión de trabajo), `Print` (imprimir la sesión de trabajo), `Remove` (eliminar la expresión marcada), `Unremove` (recuperar la última expresión eliminada), `Renumber` (renumerar las expresiones), `Author expression` (introducir una expresión sencilla), `Author vector` (introducir un vector), `Author matrix` (introducir una matriz), `Simplify` (simplificar), `Approximate` (calcular un valor aproximado), `Solve` (resolver algebraicamente o numéricamente una expresión), `Substitute for variables` (realizar una sustitución), `Calculate limit` (calcular un límite), `Calculate derivative` (calcular una derivada), `Calculate integral` (calcular una integral), `Calculate sum` (calcular una suma), `Calculate product` (calcular un producto), `2D-plot window` (realizar un gráfico bidimensional) y `3D-plot window` (realizar un gráfico tridimensional).

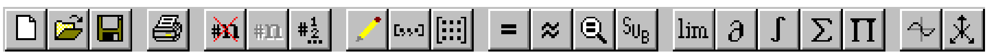


Figura 2.9: El uso de la 'botonera' de *DERIVE for Windows* nos puede simplificar mucho el trabajo. Otro elemento interesante es la existencia de 'teclas calientes' que nos permiten evitar los menús, con lo que se gana en rapidez.

4.2. Ejemplos de ilustración

Con *DERIVE for Windows* podemos calcular la derivada (de cualquier orden) de una función, el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a un número finito x_0 o infinito, los máximos, mínimos y puntos de inflexión, y también podemos utilizar la información anterior para representar gráficamente una función. Veamos mediante ejemplos cómo hacer cada una de las tareas anteriores.

Hallar el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$

Elejimos `Author` y escribimos `(ln(1+x)-ln(1-x))/x`. Después de seleccionar las opciones `Calculus|Limit` (o bien pulsamos el botón $\boxed{\lim}$) nos aparece la ventana de la Figura 2.10. El programa nos solicita la función, la variable, el punto que utilizaremos para el cálculo del límite y el tipo de aproximación: `Left` (límite por la izquierda), `Right` (límite por la derecha) y `Both` (límite ordinario). En nuestro caso, seleccionamos `x`, 0 y `Both`. Finalmente para obtener el resultado debemos pulsar la tecla `Simplify`, con lo que el programa nos devuelve como valor del límite el número 2.

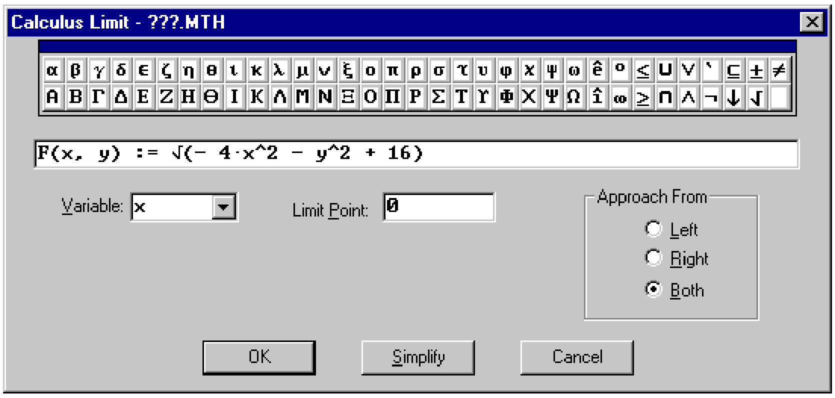


Figura 2.10: Ventana del programa que nos permite calcular límites de funciones.

Calcular la derivada de $(3x^2 + 5x - 1)^4$

Elejimos `Author` e introducimos la expresión `(3x^2+5x-1)^4`. A continuación seleccionamos las opciones `Calculus|Differentiate` (o bien pulsamos el botón $\boxed{\partial}$) y nos aparece la ventana de la Figura 2.11. Entonces el programa nos ofrece la expresión que queremos derivar (por defecto la que estaba seleccionada), la variable de derivación (por defecto `x`) y el orden de la derivada que queremos calcular (por defecto `1`). Tras pulsar la tecla obtenemos $4(6x+5)(3x^2+5x-1)^3$. Si queremos desarrollar la expresión anterior deberemos seleccionar las opciones `Simplify|Expand` (o simplemente teclear `Ctrl+B`) y nos aparece la ventana de la Figura 2.12. Tras pulsar el botón `Expand` obtendremos el siguiente polinomio: $648x^7 + 3780x^6 + 7452x^5 + 4800x^4 - 884x^3 - 960x^2 + 276x - 20$.

Calcular la derivada décima de e^{2x+1}

Seguimos los mismos pasos que en el ejemplo anterior. Introducimos la expresión `#e^(2x+1)` y seleccionamos

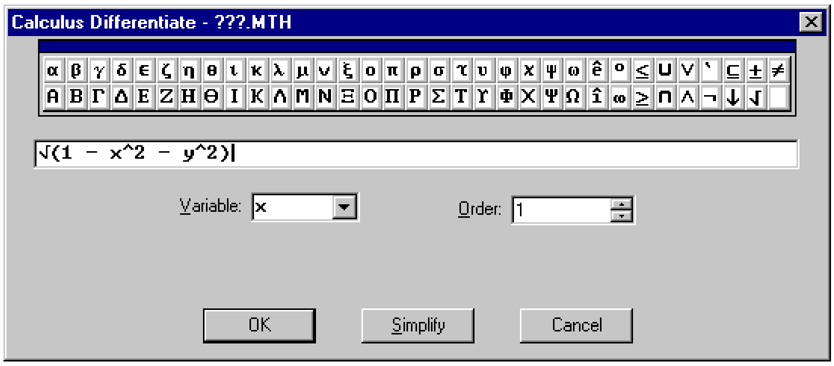


Figura 2.11: Ventana del programa que nos permite derivar funciones.

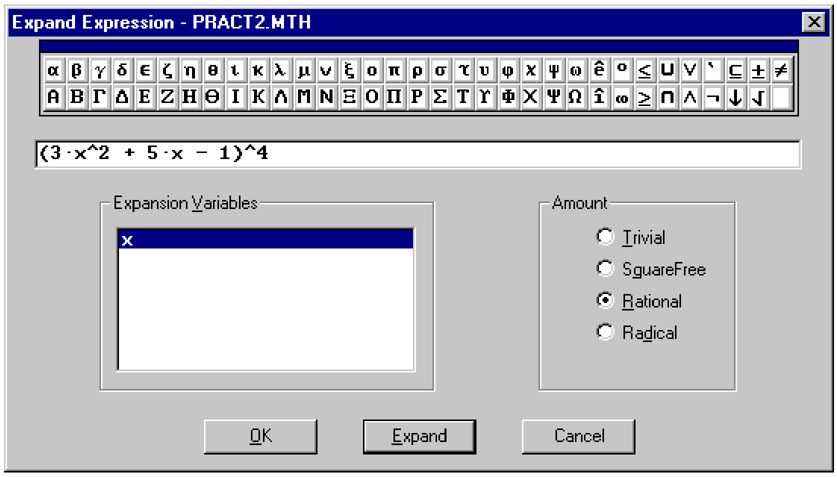


Figura 2.12: Ventana del programa que nos permite desarrollar y simplificar expresiones.

las opciones `Calculus|Differentiate`. La variable de derivación es `x` y el orden de derivación es 10. Después de desarrollar el resultado (pulsando la tecla `Simplify`) se obtiene $1024e^{2x+1}$.

Calcular los extremos y puntos de inflexión de la función $12x^5 - 105x^4 + 40x^3 + 840x^2 - 1440x$

En este caso, lo conveniente es almacenar la función. Para ello, elegimos `Declare` y a continuación `Function definition`, y nos aparece la ventana de la Figura 2.13. El programa nos solicita el nombre, la variable (o variables) independiente y la definición de la función. Tecleamos el nombre de la función (por ejemplo, `F`), el nombre de la variable (por ejemplo, `x`) y la definición mediante la expresión `12x^5-105x^4+40x^3+840x^2-1440x`. Para los extremos debemos calcular los ceros de la derivada; para ello, seleccionamos las opciones `Calculus|Differentiate` (con los valores de `x` para la variable y de 1 para el orden) y obtenemos $64x^4 - 420x^3 + 120x^2 + 1680x - 1440$. A continuación determinamos los ceros de este polinomio mediante las opciones `Solve|Algebraically`, obteniendo `x=1, x=2, x=-2, x=6`.

Para determinar el carácter de estas raíces, debemos calcular el valor de la derivada segunda en ellos. Para ello, seleccionamos la expresión que contiene la definición de la función `F` o la expresión que contiene su derivada. A continuación seleccionamos las opciones `Calculus|Differentiate`, con el valor `x` para la variable y 2 ó 1 para el orden (dependiendo de si hemos seleccionado la función `F` o su derivada). Una vez hemos calculado la derivada segunda la almacenamos en una función, que llamaremos `G`, siguiendo los mismos pasos que antes (`Declare` y `Function definition`...), recordando que para copiar automáticamente la expresión seleccionada

Figura 2.13: Venta del programa que permite declarar una función. Existen ventanas similares para declarar el valor de una variable (constante, vector o matriz).

debemos pulsar `F3`. Si ahora queremos calcular el valor de `G` en las raíces previamente calculadas, sólo tenemos que introducir la expresión `G(1)` y pulsar `Simplify` (análogamente para las demás), obteniendo los siguientes resultados : `G(1)=900` (luego en `x=1` hay un mínimo), `G(2)=-960` (máximo en `x=2`), `G(-2)=-5760` (máximo en `x=-2`) y `G(6)=9600` (mínimo en `x=6`). Otra posibilidad es calcular los cuatro valores al mismo tiempo; para ello introducimos la expresión como un vector de 4 elementos como `[G(1),G(2),G(-2),G(6)]`, y el programa nos devolverá la solución como un vector: `[900, -960, -5760, 9600]`. Para determinar las ordenadas correspondientes a cada abscisa habremos de calcular $F(1)$, $F(2)$, $F(-2)$ y $F(6)$, respectivamente, resultando: $F(1) = -653$, $F(2) = -496$, $F(-2) = 3856$ y $F(6) = -12528$.

Para calcular los puntos de inflexión debemos obtener los ceros de la derivada segunda. Si la precisión de los cálculos es `Exact` entonces obtendremos la solución en forma trigonométrica. Para obtener un resultado que podamos manejar más cómodamente es conveniente aproximar seguidamente la solución numéricamente (utilizando para ello las opciones `Simplify|Approximate` con el número de dígitos que nos parezca adecuado). Los ceros de la derivada segunda que se obtienen son los siguientes (damos también la ordenada correspondiente): $(1.51, -573.59)$, $(-0.98, 2079.11)$ y $(4.72, -7904.16)$.

4.3. Ejercicios de aplicación

A continuación se enuncian unos ejercicios sobre cálculo diferencial de funciones reales de una variable. Si el alumno encuentra alguna dificultad debe revisar detenidamente los ejemplos anteriores.

(a) Calcular el límite $\displaystyle\lim_{n\to 0} \frac{\sqrt{9n^4 - n + 3}}{2n^2 + 3n - 1}$.

(b) Calcular el límite $\displaystyle\lim_{x\to 1} (1 - x)\tan(\frac{\pi x}{2})$.

(c) Calcular la derivada quinta de $e^{3x}\ln(x)$.

(d) Calcular los extremos y los puntos de inflexión de la función $x^4 - 2x^2$.

4.4. Bibliografía

C. Paulogorrón y C. Pérez. *Cálculo matemático con DERIVE para PC*, Ed. RA-MA, 1ª Ed., 1994.

5. BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

R.L. BURDEN y J.D. FAIRES *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamericana, 1985. Secciones 2.1, 2.2, 2.3, 3.2, 3.3 y 3.4.

R.E. LARSON, R.P. HOSTETLER y B.H. EDWARDS *Calculo y Geometría Analítica*, 5ª ed., vol. 1. McGraw-Hill, Madrid, 1995. Capítulos 2,3 y 4.

J. STEWART *Cálculo*, 2ª ed. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994. Capítulos 1,2, y 3.

6. PREGUNTAS DE EVALUACIÓN

E.2.1. Representar gráficamente la función dada por

$$y = \frac{4x^2 - 4x + 1}{5x^2 - 6x + 1}.$$

E.2.2. Determinar cómo ha de ser un triángulo isósceles de área máxima inscrito en una circunferencia de radio r.

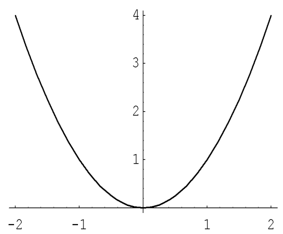
E.2.3. Se considera la siguiente tabla de datos:

x	$f(x)$
0	1
1	3
3	-2
5	4

Utilizar interpolación polinómica para calcular una aproximación a $f(2)$.

E.2.4. Se dispone de un alambre de longitud L con el que hay que construir un círculo y un cuadrado. ¿Cómo se debe dividir el alambre en dos trozos para que la suma de las áreas encerradas por el círculo y el cuadrado sea mínima? ¿Y para que dicha suma de áreas sea máxima?

E.2.5. Utilizar algún método numérico para aproximar, con una precisión de 10^{-6}, el valor de x tal que la distancia entre el punto (1,0) y los puntos de la parábola $(x, y(x))$, $y(x) = x^2$, se hace mínima.



Observación: Sea cual sea el método que se utilice, debe considerarse que un valor aproximado p_n se acerca al valor real con una precisión de 10^{-6} si se satisface que $|p_n - p_{n-1}| < 10^{-6}$.

E.2.6. Un pediatra está realizando un seguimiento del peso de los niños que pasan por su consulta. Elegida una ficha al azar de su archivo, observa los siguientes datos:

Edad (años)	1	2	4	5
Peso (Kg)	9	12	16	18

Utilizar interpolación polinómica de Lagrange para obtener una aproximación numérica del peso del niño a los 3 años de edad.

E.2.7. Una persona se somete a una dieta de adelgazamiento durante 5 semanas. A continuación se detalla su peso al término de cada una de esas semanas:

Al cabo de...(semanas)	1	2	3	4	5
Peso en Kg.	$88'5$	87	84	$82'5$	79

Calcular la ecuación de un polinomio de grado 4 que relacione las dos variables. Usando dicho polinomio ¿qué peso esperaríamos que alcance esta persona si sigue la dieta dos semanas más?

E.2.8. Representar gráficamente la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)(x-6)}.$$

Calcular sólo los elementos que sean indispensables para realizar una representación gráfica correcta.

E.2.9. Utilizar cualquier método numérico, de entre los que han sido explicados en las clases de teoría, para calcular una raíz de la ecuación

$$x^3 + 2x - 1 = 0$$

con una cota de error de $0'001$.

ANOTACIONES