

CAPÍTULO 1

NÚMEROS Y FUNCIONES

1. INTERROGANTES CENTRALES DEL CAPÍTULO

- Números racionales o irracionales.
- Recta (numérica) real.
- Intervalos abiertos y cerrados.
- Reglas de las desigualdades.
- Valor absoluto de un número.
- Propiedades del valor absoluto.
- Desigualdad del triángulo.
- Sistemas de coordenadas rectangulares.
- Fórmula de la distancia.
- Pendiente de una recta.
- Forma punto-pendiente de una recta.
- Forma pendiente-intersección de una recta.
- Relación entre las pendientes de rectas paralelas y perpendiculares.
- Ecuaciones de circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas.
- Función: Dominio y recorrido.
- Variables independiente y dependiente.
- Gráfica de una función.
- Función par, función impar.
- Traslaciones (horizontales y verticales) de funciones.
- Alargamiento y reflexión de funciones.
- Operaciones con funciones: +, -, *, /
- Composición de funciones.
- Funciones polinómicas, algebraicas y trascendentes.

2. CONTENIDOS FUNDAMENTALES DEL CAPÍTULO

2.1. Números, desigualdades y valores absolutos

2.1.1. *Los números reales*

Todas las matemáticas se apoyan en los números y éstos constituyen la base del cálculo. Existen distintos tipos de números: **naturales** (1, 2, 3, ...), **enteros** (... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...), **racionales** (1/2, 3/5, -3/8, ...) e **irracionales** (los que no son racionales; por ejemplo, $\sqrt{2}$). La unión de todos ellos constituye el conjunto de los **números reales** que se suele escribir como \mathbb{R} .

Para representar \mathbb{R} se utiliza una línea recta, denominada **recta real**. En dicha recta se escoge un punto, denominado **origen**, que representa al cero. La dirección positiva (derecha) indica el sentido de los valores crecientes, de tal forma que los puntos a la derecha del origen indican **números positivos** mientras que los puntos a la izquierda

representan **números negativos**. El hecho más importante es que cada número real está asociado con un único punto en la recta real y viceversa.

Una propiedad importante de los números reales es que pueden ordenarse: el número a es **menor que** el número b , y se escribe $a < b$, si $b - a$ es un número positivo. En otras palabras, $a < b$ si, y sólo si, a está a la izquierda de b en la recta real. Esta relación $<$ posee las siguientes propiedades:

- (1) Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$ (propiedad transitiva).
- (2) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.
- (3) Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.
- (4) Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.
- (5) Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.

Propiedades similares se tienen para las desigualdades $>$, \leq o \geq , las cuales se definen como sigue:

- (1) El número a es **mayor que** el número b , y se escribe $a > b$, si $a - b$ es un número positivo.
- (2) El número a es **menor o igual que** el número b , y se escribe $a \leq b$, si $a = b$ o $b - a$ es un número positivo.
- (3) El número a es **mayor o igual que** el número b , y se escribe $a \geq b$, si $a = b$ o $a - b$ es un número positivo.

2.1.2. Los intervalos

La relación de orden $<$ permite definir unos subconjuntos especiales de \mathbb{R} : los intervalos. Si $a < c < b$ entonces decimos que c está entre a y b ; un intervalo determinado por los puntos a y b es el conjunto de puntos que están entre a y b . Si en este conjunto incluimos o no los **extremos** (los puntos a y b) entonces tenemos los intervalos abiertos, cerrados o semiabiertos (semicerrados). A continuación listamos las diferentes posibilidades:

(a, b) Intervalo abierto de extremos a y b es el conjunto $(a, b) = \{x | a < x < b\}$.

$[a, b]$ Intervalo cerrado de extremos a y b es el conjunto $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$.

$(a, b]$ Intervalos semiabiertos (semicerrados) de extremos a y b son los conjuntos $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ y $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$.

Los intervalos pueden ser **acotados** (como los anteriores) o **no acotados**. En este último caso pueden presentarse las siguientes posibilidades:

$(-\infty, b)$ Intervalo abierto de extremo b no acotado inferiormente es el conjunto $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$.

$(-\infty, b]$ Intervalo cerrado de extremo b no acotado inferiormente es el conjunto $(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$.

(a, ∞) Intervalo abierto de extremo a no acotado superiormente es el conjunto $(a, \infty) = \{x | x > a\}$.

$[a, \infty)$ Intervalo cerrado de extremo a no acotado superiormente es el conjunto $[a, \infty) = \{x | x \geq a\}$.

$(-\infty, \infty)$ Intervalo abierto no acotado (ni superior ni inferiormente) es \mathbb{R} .

Los símbolos $-\infty$ y ∞ son eso: símbolos; no denotan números reales y sólo se utilizan para expresar de forma precisa ciertas afirmaciones o ciertos conjuntos.

2.1.3. El valor absoluto

El valor absoluto de un número real a se denota por $|a|$ y se define como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Geoméricamente, $|a|$ mide la distancia que hay entre el número a y el origen 0 en la recta numérica real (ver Figura 1.1).

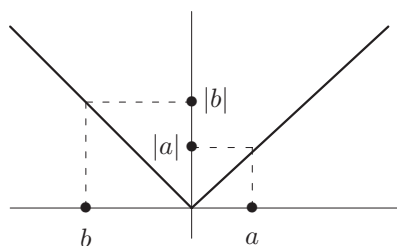


Figura 1.1: Representación del valor absoluto.

El valor absoluto satisface las siguientes propiedades:

- (1) $|ab| = |a||b|$
- (2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$
- (3) $|a| = \sqrt{a^2}$
- (4) $|a^n| = |a|^n$
- (5) $-|a| \leq a \leq |a|$
- (6) $|a| \leq r$ si, y sólo si, $-r \leq a \leq r$
- (7) $r \leq |a|$ si, y sólo si, $r \leq a$ o $a \leq -r$
- (8) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular)

2.2. Geometría plana: coordenadas y rectas

2.2.1. El plano cartesiano

De manera similar a como hemos asociado los números reales con puntos de una recta, ahora podemos relacionar los puntos del plano con pares ordenados de números reales. Para empezar se trazan dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto que denominaremos **origen**. Habitualmente, una de las rectas es horizontal y se denomina **eje x** o **eje de abscisas**, y la otra recta es vertical y se denomina **eje y** o **eje de ordenadas**. Estas dos rectas dividen al plano en cuatro partes llamadas **cuadrantes**.

Cualquier punto P del plano tiene asociado un par ordenado (a, b) de números reales, llamados **coordenadas** del punto. La manera de conseguirlos es la siguiente: por el punto P se trazan dos rectas paralelas a los ejes las cuales intersectan a los ejes en dos puntos que constituyen las coordenadas. El número a se denomina **coordenada x** o **abcisa**, y el número b se llama **coordenada y** u **ordenada** (ver Figura 1.2).

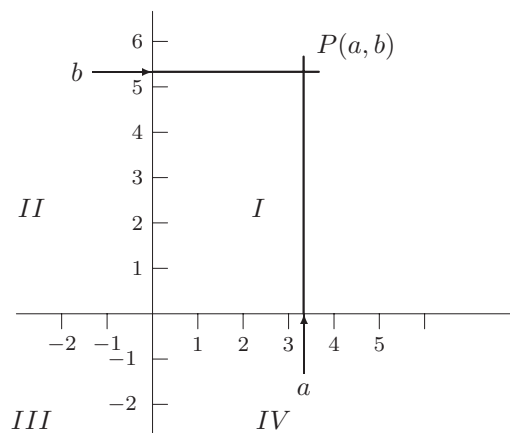


Figura 1.2: Representación de las coordenadas de un punto.

Este sistema de coordenadas fue “inventado” por el matemático francés René Descartes y, en su honor, se denomina sistema de **coordenadas cartesianas**, aunque también es habitual el nombre de sistema de **coordenadas rectangulares**.

Aunque (a, b) ha sido utilizado tanto para denotar un intervalo de la recta real como para denotar un par ordenado de números reales, esperamos que no haya confusión, pues en cada momento sólo una interpretación será posible.

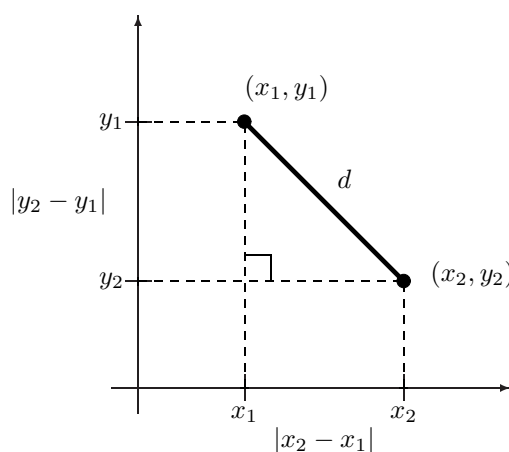


Figura 1.3: Distancia entre dos puntos del plano.

La distancia entre dos números reales a y b es el valor absoluto $|b - a|$. Para definir la distancia entre dos puntos del plano debemos recurrir al *Teorema de Pitágoras* (ver Figura 1.3). La **distancia** entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del plano se define como

$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

2.2.2. Rectas en el plano

La **pendiente** de una recta (no vertical) es el número de unidades que la recta sube (o baja) por cada unidad de cambio horizontal de izquierda a derecha. En otras palabras, la pendiente de la recta determinada por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) viene dada por

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2.$$

El orden en que se resta no tiene importancia, siempre y cuando se siga el mismo criterio en el numerador y en el denominador.

Para determinar la ecuación de una recta podemos seguir varios pasos, según los datos de que dispongamos.

Ecuación punto-pendiente: Si conocemos la pendiente m de la recta y un punto (a, b) , entonces la ecuación es

$$y - b = m(x - a).$$

Ecuación pendiente-intersección: Si conocemos la pendiente m y el punto de corte b con el eje de ordenadas, entonces la ecuación es

$$y = mx + b.$$

Ecuación general: Toda recta admite una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0,$$

donde A, B, C son constantes.

Utilizando la pendiente podemos saber si dos rectas son paralelas o perpendiculares.

Rectas Paralelas: Dos rectas (no verticales) son paralelas si, y sólo si, sus pendientes son iguales.

Rectas Perpendiculares: Dos rectas (no verticales) son perpendiculares si, y sólo si, sus pendientes m_1 y m_2 son inversas y opuestas, es decir, $m_1 m_2 = -1$.

2.3. Gráficas de ecuaciones de segundo grado

Un conjunto de elementos que poseen una determinada propiedad, y que sólo ellos la poseen, constituye un **lugar geométrico**. Esta noción se utiliza habitualmente cuando estos conjuntos son una recta, una circunferencia, una elipse, etc.

A modo de ejemplo, diremos que una 'recta' es el lugar geométrico de los puntos alineados con un punto dado A y con una dirección dada v ; es decir, un punto P está en la recta si, y sólo si, el vector determinado por los puntos A y P es paralelo al vector v .

Dentro de la geometría cartesiana, un punto P de coordenadas (x, y) pertenece a un lugar geométrico si, y sólo si, sus coordenadas satisfacen una relación o ecuación. La **ecuación de un lugar geométrico** de puntos P de coordenadas (x, y) es una ecuación entre las variables x e y tal que las coordenadas (x, y) de cualquier punto P satisfacen dicha ecuación si, y sólo si, el punto P pertenece al lugar geométrico.

2.3.1. Circunferencias: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Una **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *centro*. La distancia constante al centro se denomina *radio* (ver Figura 1.4).

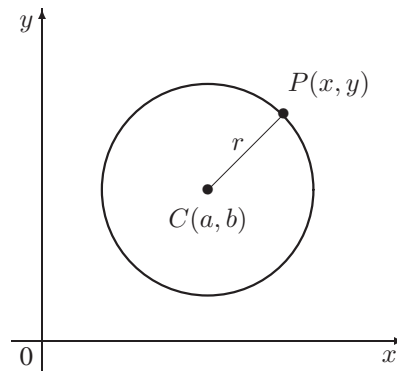


Figura 1.4: Representación de una circunferencia.

Para determinar la ecuación procedemos como sigue. Sea $P(x, y)$ un punto genérico de la circunferencia de centro el punto $C(a, b)$ y radio r . Entonces la ecuación geométrica $d(P, C) = r$ se transforma en la ecuación analítica $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$ y elevando al cuadrado obtenemos

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Si desarrollamos los cuadrados obtenemos la siguiente ecuación

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0,$$

denominada **ecuación general de la circunferencia**.

2.3.2. Elipses: $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$

Una **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es constante.

Para determinar la ecuación, denotemos por F y F' los focos de la elipse, y sean $2a$ y $2c$ la suma de distancias a los focos y la distancia focal, respectivamente. Sea $P(x, y)$ un punto genérico y denotemos por $r = PF$ y $r' = PF'$ los radios vectores, de tal forma que $r + r' = 2a$. Por fijar una referencia, supongamos que los focos son los puntos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$. Entonces

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \\ r' &= \sqrt{(x + c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Un cálculo sencillo conduce a

$$\begin{aligned} r &= a + ex, \\ r' &= a - ex, \end{aligned}$$

donde $e = c/a$ es la *excentricidad* de la elipse. Comparando las dos expresiones para r (o r') anteriores deducimos, después de laboriosos cálculos, que

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

siendo $b^2 = a^2 - c^2$. Esta es la ecuación reducida o canónica de la elipse (ver Figura 1.5).

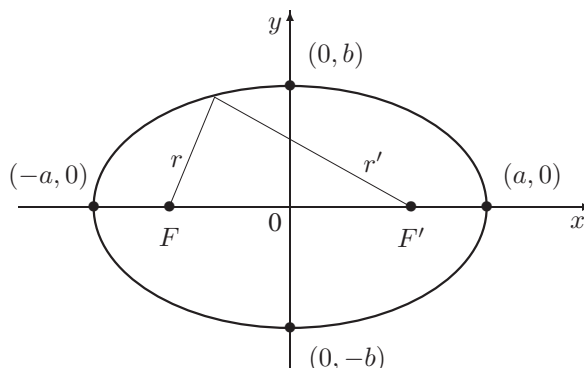


Figura 1.5: Representación gráfica de una elipse.

2.3.3. Hipérbolas: $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$

Una **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es constante.

Para determinar la ecuación, denotemos por F y F' los focos de la hipérbola, y sean $2a$ y $2c$ la diferencia de distancias a los focos y la distancia focal, respectivamente. Sea $P(x, y)$ un punto genérico y denotemos por $r = PF$ y $r' = PF'$ los radios vectores, de tal forma que $r - r' = 2a$. Por fijar una referencia, supongamos que los focos son los puntos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$. Entonces

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \\ r' &= \sqrt{(x + c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Un cálculo sencillo conduce a

$$\begin{aligned} r &= ex + a, \\ r' &= ex - a, \end{aligned}$$

donde $e = c/a$ es la *excentricidad* de la hipérbola. Comparando las dos expresiones para r (o r') anteriores deducimos, después de laboriosos cálculos, que

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

siendo $b^2 = a^2 - c^2$. Esta es la ecuación reducida o canónica de la hipérbola (ver Figura 1.6).

2.3.4. Parábolas: $y = ax^2$

Una **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *foco* y de una recta fija llamada *directriz*.

Consideremos como eje de abscisas a la recta que, pasando por el foco, es perpendicular a la directriz; por eje de ordenadas se toma la recta paralela a la directriz por el punto medio O entre el foco y la directriz; esta recta se denomina *eje* de la parábola. El punto O es el punto en que la parábola corta a su eje y se denomina *vértice* de la parábola. Realizando un procedimiento similar a los anteriores deducimos que la ecuación reducida de la parábola es

$$y^2 = 2px,$$

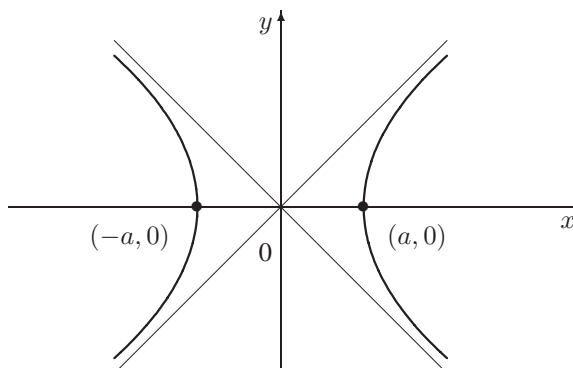


Figura 1.6: Representación gráfica de una hipérbola.

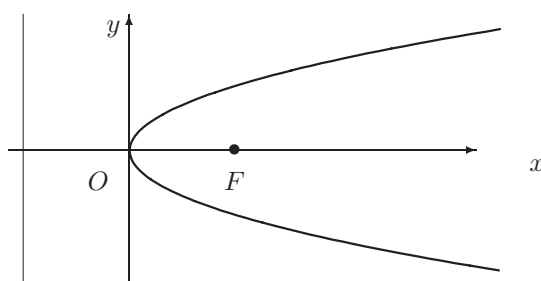


Figura 1.7: Representación gráfica de una parábola.

siendo p la distancia del foco a la directriz.

Otras posibles ecuaciones de una parábola son las siguientes:

- $x^2 = 2py$: El eje de la parábola es el eje OY y el vértice es el origen.
- $y = ax^2 + bx + c$: El eje de la parábola es paralelo al eje OY pero el vértice no es el origen.
- $x = ay^2 + by + c$: El eje de la parábola es paralelo al eje OX pero el vértice no es el origen.

2.4. Funciones y sus gráficas

Una **función** es una correspondencia que asocia a cada elemento x de un conjunto A , denominado **dominio**, exactamente otro elemento $f(x)$ en un conjunto B . El elemento $f(x)$ se dice que es el valor de f en x o la imagen de x mediante f . El conjunto formado por todas las imágenes $f(x)$ es denominado **conjunto imagen** o **recorrido**. Si a cada valor del recorrido le corresponde exactamente un elemento en su dominio, la función se llama **inyectiva**. Si el recorrido es todo el conjunto B , la función se dice que es **suprayectiva** o **sobreyectiva**. Una función inyectiva y sobreyectiva se llama **biyectiva**.

Cuando pensamos en una función arbitraria f , es usual utilizar un símbolo para designar un elemento arbitrario en el dominio de f y otro símbolo para un elemento del recorrido. Al primero se le denomina **variable independiente** y al segundo **variable dependiente**. Por ejemplo, sea la función f definida en \mathbb{N} (los números naturales) y con valores en \mathbb{N} que asocia a cada número natural su inmediato sucesor. Entonces es usual escribir $f(x) = x + 1$ o

bien $y = x + 1$, donde x denota un número natural arbitrario e y indica el número natural que le asocia la función f .

El **grafo** o **gráfica** de una función f es el conjunto de pares ordenados dado por

$$\{(x, f(x)) | x \in A\}.$$

Por ejemplo, para la función anterior la gráfica sería el subconjunto de puntos de \mathbb{R}^2 definido por

$$\{(x, x + 1) | x \in \mathbb{N}\}.$$

No todos los subconjuntos de \mathbb{R}^2 son la gráfica de una determinada función f definida en \mathbb{R} : se tiene que cumplir que *toda recta vertical debe intersectar a lo más un sola vez al subconjunto*.

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **positiva** (resp. **negativa**) si $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$) para todo valor de x . Geométricamente esto significa que la gráfica de la función está contenida en el semiplano superior (resp. inferior) de \mathbb{R}^2 . En general, una función no tiene por qué ser positiva o negativa; probablemente será positiva en partes de su dominio y negativa en otras partes.

2.4.1. Simetrías de una gráfica

Para dibujar una gráfica puede ser interesante conocer los tipos de simetría de la ecuación que la determina. Son los siguientes:

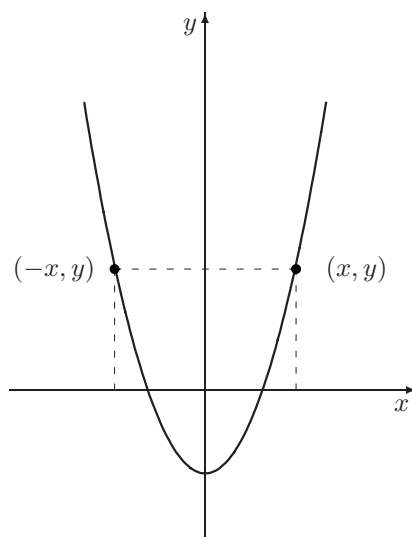


Figura 1.8: Gráfica simétrica respecto al eje OY .

Simetría respecto al eje OY : Cuando al sustituir x por $-x$ queda una ecuación equivalente. Si la ecuación es $y - f(x) = 0$, cuando $f(-x) = f(x)$ para todo valor de x . Diremos que la función f es **par** (ver Figura 1.8).

Simetría respecto al eje OX : Cuando al sustituir y por $-y$ queda una ecuación equivalente (ver Figura 1.9).

Simetría respecto al origen: Cuando al sustituir x por $-x$ e y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente. Si la ecuación es $y - f(x) = 0$, cuando $f(-x) = -f(x)$ para todo valor de x . Diremos que la función f es **impar** (ver Figura 1.10).

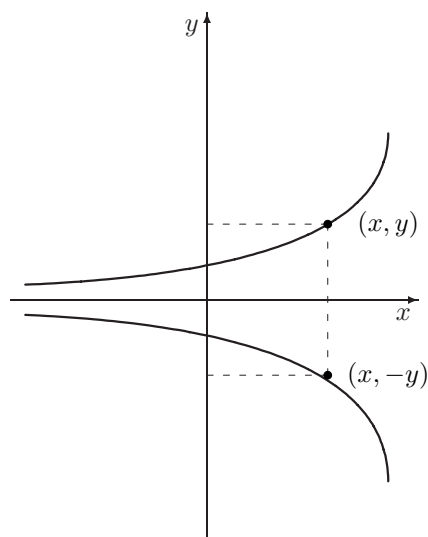
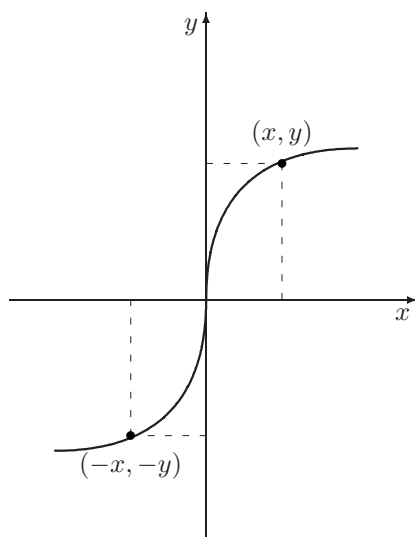
Figura 1.9: Gráfica simétrica respecto al eje OX .

Figura 1.10: Gráfica simétrica respecto al origen.

2.5. Transformaciones y operaciones con funciones

Es fácil ver que transformando la gráfica de una función podemos obtener las gráficas de otras funciones relacionadas con la anterior, sin necesidad de repetir el trabajo que supone realizar una gráfica. Entre las transformaciones más usuales están las traslaciones, los alargamientos (homotecias) y las reflexiones.

2.5.1. *Traslaciones*

Existen cuatro tipos de traslación. Para describirlas, sea $c > 0$ el número que indica las unidades que vamos a desplazar la gráfica original.

Traslación a la derecha: $y = f(x - c)$.

Traslación a la izquierda: $y = f(x + c)$.

Traslación hacia arriba: $y = f(x) + c$.

Traslación hacia abajo: $y = f(x) - c$.

2.5.2. *Alargamientos y reflexiones*

Otro tipo de transformación consiste en modificar la escala de los ejes: podemos alargar o achatar las gráficas con sólo multiplicar la x o la y por una constante $c > 1$ apropiada. También podemos reflejar la gráfica en los ejes de coordenadas. Estas transformaciones se pueden resumir como sigue:

Alargamiento vertical: $y = cf(x)$.

Estrechamiento vertical: $y = c^{-1}f(x)$.

Alargamiento horizontal: $y = f(x/c)$.

Estrechamiento horizontal: $y = f(cx)$.

Reflexión respecto OX: $y = -f(x)$.

Reflexión respecto OY: $y = f(-x)$.

2.5.3. *Operaciones con funciones*

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar nuevas funciones de muy diversas maneras. A continuación veremos que las funciones pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse de una manera similar a los números reales. El álgebra de las funciones reales de variable real puede resumirse de la siguiente manera. Sean f y g dos funciones con dominios A y B , respectivamente. Entonces definimos las operaciones elementales como sigue:

Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, dominio= $A \cap B$.

Resta: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, dominio= $A \cap B$.

Producto: $(fg)(x) = f(x)g(x)$, dominio= $A \cap B$.

Cociente: $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, dominio= $\{x \in A \cap B | g(x) \neq 0\}$.

Composición: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, dominio= $\{x \in A | f(x) \in B\}$.

2.6. Clasificaciones de funciones

El concepto actual de función es fruto del esfuerzo colectivo de numerosos matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Los matemáticos de esa época pensaban que cualquier fenómeno físico podía ser descrito con la ayuda de una colección básica de funciones: las funciones elementales. Estas funciones pueden dividirse en tres bloques: (1) algebraicas; (2) exponenciales y logarítmicas; y (3) trigonométricas.

Las funciones **algebraicas** más habituales son los polinomios, los cuales pueden escribirse en la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde a_0, a_1, \dots, a_n son números reales. El entero positivo n se llama el **grado** del polinomio, a_n es el **coeficiente dominante** y a_0 es el **término constante**. Como casos particulares tenemos las funciones constantes ($f(x) = c$) y las funciones potencia ($f(x) = x^n$).

Otras funciones básicas son las funciones raíz ($f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$) y las funciones racionales ($f(x) = P(x)/Q(x)$, P y Q polinomios). En general, las funciones algebraicas son aquellas que pueden expresarse en términos de un número finito de sumas, restas, productos, cocientes y raíces de polinomios.

Las funciones que no son algebraicas se llaman **transcendentes**. Por ejemplo, las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son trascendentes.

3. ACTIVIDADES DE APLICACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS

A.1.1. Probar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

para todo entero positivo n .

A.1.2. Probar que

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

para todo entero positivo n .

A.1.3. Probar que $n! > 3^n$ para n suficientemente grande.

A.1.4. Suponiendo cierta la desigualdad triangular, probar

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

para todo entero positivo n .

A.1.5. Probar que si $r \neq 1$ entonces

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

para todo entero positivo n .

A.1.6. Probar que

$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$$

para todos los enteros positivos n .

A.1.7. Probar que $2^n > n^2$ para n suficientemente grande.

A.1.8. Hallar el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2$.

b) $f(x) = \sqrt{x+4}$.

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

d) $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

A.1.9. Determinar si las funciones siguientes son o no biyectivas:

a) $f(x) = (x-3)(x-5)$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = |x|x^2$

d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

A.1.10. Determinar si las siguientes funciones son pares o impares:

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x(x-1)$

c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

d) $f(x) = x(x^2+1)$

A.1.11. Hallar las composiciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x+1$; $g(x) = x^2$.

b) $f(x) = x^2 - 5$; $g(x) = \frac{1}{x} + 1$.

c) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$.

d) $f(x) = x^2 + 5$; $g(x) = x(x-1)$.

A.1.12. Hallar las funciones inversas de las siguientes, especificando su dominio:

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = 1 + 3x^3$

c) $f(x) = (4x-1)^3$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

4. ACTIVIDADES PRÁCTICAS DEL CAPÍTULO

4.1. Introducción

La práctica se va a realizar con el programa de cálculo matemático *DERIVE for Windows*, versión 4.05, de Soft Warehouse. *DERIVE for Windows* permite realizar cálculos y manipulaciones matemáticas de carácter general, lo cual significa que realiza muchas cosas de forma aceptable aunque no tiene la potencia de otros programas específicos. No obstante, *DERIVE for Windows* permite realizar todos los cálculos que un usuario medio puede necesitar.

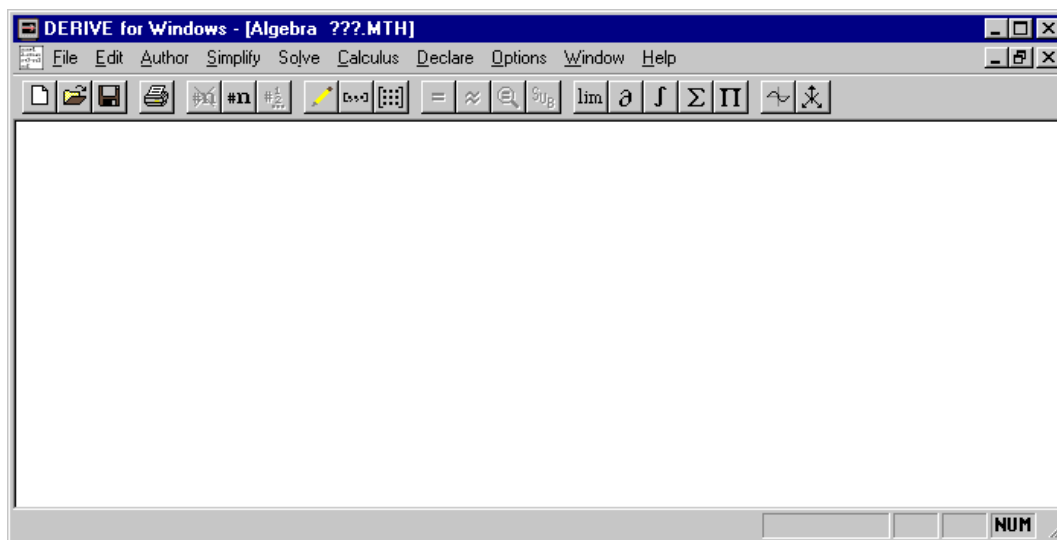


Figura 1.11: Pantalla inicial del programa donde aparece, además del menú principal, la ‘botonera’ que permite agilizar la introducción de las expresiones y la realización de los cálculos.

Para ejecutar el programa debemos acceder a la carpeta *DERIVE for Windows* y ejecutar el programa *DERIVE for Windows*. Una vez en el programa, aparecerá la pantalla de la Figura 1.11, con un menú en la parte superior que, de ahora en adelante, denominaremos *menú principal*.

En esta práctica nos vamos a limitar a familiarizarnos con el programa *DERIVE for Windows* y a la realización de algunos cálculos elementales. Sin embargo, antes de realizar los cálculos debemos introducir los datos o expresiones que necesitemos.

4.2. Introducción y edición de expresiones

Con el término *expresión* queremos indicar cualquier función, constante, variable u operador que podamos introducir en el programa. Las expresiones se introducen seleccionando la opción *Author* del menú principal. Entonces nos aparece un menú con tres posibilidades: *Expression*, *Vector* o *Matrix*, que nos permite introducir una expresión, un vector o una matriz. Para agilizar la introducción de los datos, debemos recordar que existen teclas calientes que equivalen a diversas opciones de los menús. Así, por ejemplo, para introducir una expresión es suficiente con pulsar *Ctrl+A* y nos aparece la ventana de la Figura 1.12. Conforme vamos introduciendo las expresiones, éstas se van numerando correlativamente y en orden creciente, de forma que en una expresión podemos hacer referencia a una expresión anterior (utilizando para ello el símbolo #). Una pantalla típica de trabajo se muestra en la Figura 1.13.



Figura 1.12: Ventana del programa para introducir las expresiones.

Para editar (y eventualmente modificar) una expresión ya introducida tenemos dos vías distintas. En primer lugar

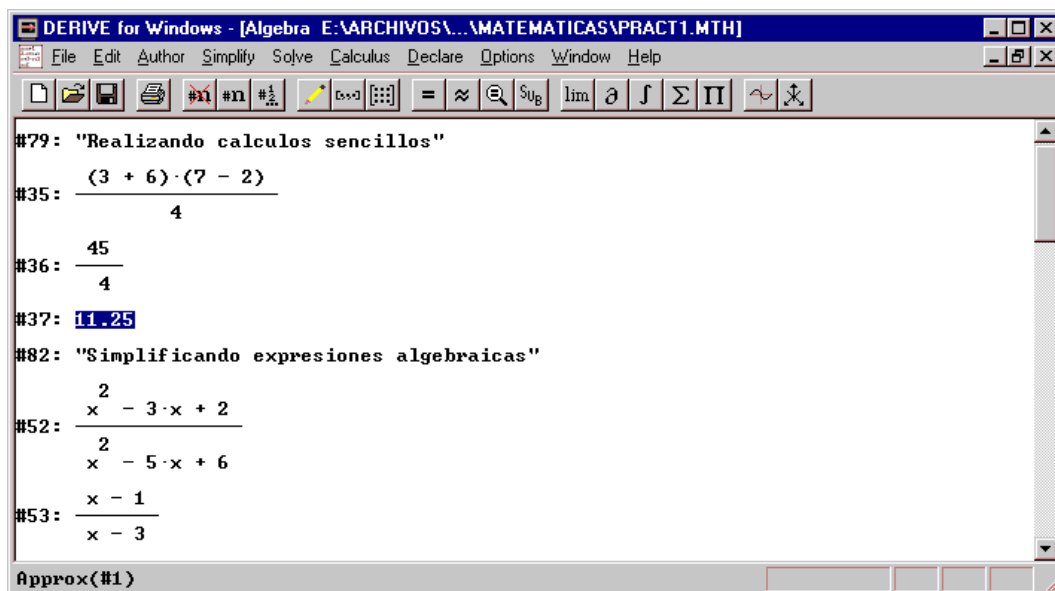


Figura 1.13: Pantalla típica del programa donde aparecen algunas instrucciones. Obsérvese que es posible introducir sentencias descriptivas que nada tienen que ver con operaciones matemáticas pero que ayudan a seguir los cálculos.

podemos marcar la expresión (haciendo 'click' con el ratón en la expresión deseada o moviéndonos con las flechas: ↑ para acceder a una expresión con un número menor y ↓ para acceder a otra con un número mayor) y seleccionar la opción Edit Expression. Otra posibilidad es elegir Edit y seguidamente Go to expression, lo cual nos permite introducir el número de la expresión que queremos editar.

4.3. ¿Qué cosas pueden aparecer en las expresiones?

En una expresión de *DERIVE for Windows* están permitidas numerosas opciones: letras griegas, constantes, operadores (aritméticos y lógicos) y funciones (exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, hiperbólicas, complejas, de probabilidad, estadísticas, de error, de cálculo financiero, de cálculo matemático, vectoriales, matriciales, y de cálculo diferencial e integral vectorial). Por el momento, es suficiente con recordar que en las expresiones podemos utilizar los siguientes elementos:

Constante	Expresión
e (base de los logaritmos neperianos)	#e
i (unidad imaginaria compleja)	#i
π (3.1415926 ...)	pi
∞ (infinito matemático)	inf

Función	Expresión	Operador	Expresión
Raíz cuadrada	SQRT(x)	Menos	-x
Exponencial	EXP(x)	Suma	x+y
Logaritmo neperiano	LN(x) ó LOG(x)	Resta	x-y
Logaritmo en base w	LOG(z,w)	Producto	x*y ó xy
Seno	SIN(x)	Cociente	x/y
Coseno	COS(x)	Exponenciación	x^y
Tangente	TAN(x)	Tanto por ciento	x%
Valor absoluto	ABS(x)	Factorial	x!

4.4. Las primeras experiencias

La mejor manera de que nos aprendamos los símbolos y funciones descritos anteriormente no es dedicar mucho tiempo a memorizarlos, ya que esta tarea no es nada eficaz, además de resultarnos bastante odiosa. Lo conveniente es realizar numerosos ejercicios, sencillos en su mayoría, pero que nos ayudarán a retener lo esencial.

Calcular $(3 + 6)(7 - 2)/4$

Introducimos la expresión $(3+6)(7-2)/4$ o $(3+6)*(7-2)/4$. Entonces nos aparecerá la misma línea en pantalla. Si queremos ver el resultado debemos simplificar (seleccionando Simplify Basic o pulsando Ctrl+B) y obtendremos $45/4$, que es el valor exacto. Si queremos obtener el valor decimal aproximado, con un número de decimales predeterminado (por defecto, este número es 6), debemos seleccionar Simplify Approximate (o Ctrl+G) y nos aparece la ventana de la Figura 1.14. Tras confirmar la expresión que queremos simplificar y el número de decimales obtendremos 11.25.

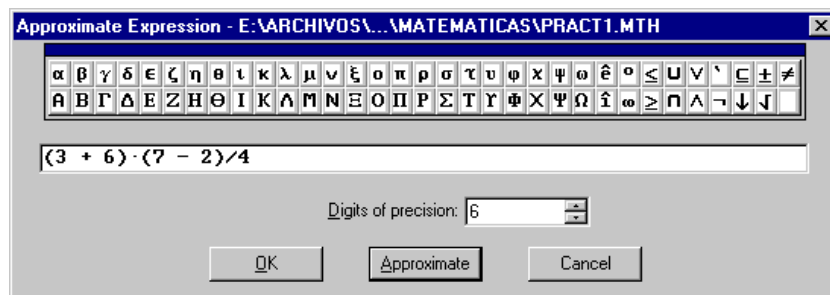


Figura 1.14: Ventana del programa para calcular aproximaciones de expresiones.

Calcular e^π

Introducimos la expresión $\#e^\pi$ obteniendo, después de seleccionar las opciones Simplify Approximate, el valor de 23.1407 (6 dígitos). Si queremos un resultado más preciso (por ejemplo, con 12 dígitos), debemos cambiar dicho número cuando seleccionemos Approximate. Entonces obtendremos el valor de 23.1406926327.

Calcular 15^{34} de forma exacta

Elejimos Author y escribimos la expresión 15^{34} . Después de seleccionar las opciones Simplify Basic (o simplemente pulsando el botón ) nos aparecerá en pantalla el siguiente número:

$$9707397373664756887592375278472900390625.$$

Si queremos un resultado aproximado (por ejemplo, con 12 cifras exactas), seleccionamos dicha configuración mediante Simplify Approximate y obtendremos: $9.70739737366 \cdot 10^{39}$.



Figura 1.15: El uso de la 'botonera' de *DERIVE for Windows* nos puede simplificar mucho el trabajo. Otro elemento interesante es la existencia de 'teclas calientes' que nos permiten evitar los menús, con lo que se gana en rapidez.

Antes de seguir adelante será conveniente que comentemos brevemente la 'botonera' de *DERIVE for Windows* (ver Figura 1.15), ya que simplifica enormemente la introducción de datos y la realización de cálculos. Los botones permiten realizar las siguientes tareas (de izquierda a derecha): New (abrir una nueva hoja de trabajo), Open (abrir una hoja de trabajo existente), Save (guardar la sesión de trabajo), Print (imprimir la sesión de trabajo), Remove (eliminar la expresión marcada), Unremove (recuperar la última expresión eliminada), Renumber (renumerar las expresiones), Author expression (introducir una expresión sencilla), Author vector (introducir un vector), Author matrix (introducir una matriz), Simplify (simplificar), Approximate (calcular un valor aproximado), Solve (resolver algebraicamente o numéricamente una expresión), Substitute for variables (realizar una sustitución), Calculate limit (calcular un límite), Calculate derivative (calcular una derivada), Calculate integral (calcular una integral), Calculate sum (calcular una suma), Calculate product (calcular un producto), 2D-plot window (realizar un gráfico bidimensional) y 3D-plot window (realizar un gráfico tridimensional).

Calcular el factorial de 75 en forma exacta y aproximada

Elejimos Author y tecleamos $75!$. Después de pulsar el botón  se obtiene el siguiente resultado:

$$24809140811395398091946477116594033660926243886570122837795894512655842677572867409443815424000000000000000000.$$

Si quisiéramos un valor aproximado, entonces elegiríamos las opciones Simplify Approximate y el valor obtenido sería $2.48091408113 \cdot 10^{109}$ (con 12 dígitos). Observemos que este valor tiene más de 80 cifras; como puede ser que en nuestra pantalla sólo se visualicen hasta 80 caracteres, debemos pulsar simultáneamente las teclas Control y las flechas \leftarrow y \rightarrow para ir visualizando el resto, o bien desplazar la 'barra' que se encuentra en la parte inferior de la ventana del programa.

Obtener el número π con 100 decimales y grabarlo en un fichero

Escogemos Author y escribimos π . Seleccionamos la opción de simplificar con precisión aproximada hasta 100 dígitos exactos y el resultado obtenido es:

$$3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067.$$

Para no tener que copiar la solución de la pantalla lo conveniente es grabarla en un archivo o enviarla a la impresora

para tenerla por escrito. Para ello debemos seguir el camino File Save o File Print según queramos una opción u otra. En cualquiera de los dos casos, el programa nos permite seleccionar las expresiones que deseamos grabar en disco o imprimir. En este segundo caso, una opción muy interesante es File Print Preview, que nos permite visualizar en pantalla lo que se va a imprimir. La Figura 1.16 muestra la sesión actual antes de ser enviada a la impresora.



Figura 1.16: Antes de enviar una sesión de *DERIVE for Windows* directamente a la impresora es conveniente visualizarla en pantalla, para comprobar que no existen errores. Cuando todo esté correcto, podremos enviarlo a la impresora desde la pantalla Print Preview

Posteriormente, cuando queramos recuperar todo lo que hemos guardado, bastará con elegir File Load para cargar en memoria todo el trabajo anterior.

4.5. Ejercicios de aplicación

A continuación se enuncian unos ejercicios sencillos sobre aritmética y operaciones con expresiones algebraicas. Si el alumno encuentra alguna dificultad debe releer lo dicho hasta ahora, en particular la sintaxis de las distintas funciones y constantes.

- Calcular $11/24 + 5/36 + 17/46$ en forma exacta y con 7 decimales exactos.
- Calcular 23^{42} en forma exacta y con 25 cifras exactas.
- Calcular la raíz cuadrada de 3972049.
- Calcular π con 200 decimales exactos.
- Calcular $\sqrt{8 + 53\sqrt{7}}$ en forma aproximada.

4.6. Operaciones con expresiones algebraicas

Una de las características esenciales del programa *DERIVE for Windows* es la posibilidad de manipular expresiones algebraicas, del tipo $x^3 + 5x - 7$ o $(1 - x - y^2)^{100}$. En esta sección vamos a comentar las principales opciones

del programa en relación con las expresiones algebraicas. La función básica es Simplify (simplificar), la cual admite diversas variantes: Basic (Ctrl+B), Expand (Ctrl+E), Factor (Ctrl+F) y Approximate (Ctrl+G). En los siguientes ejemplos ilustramos su uso.

Simplificar la expresión $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$

Elejimos la opción Author y tecleamos x^2-3x+2 (supongamos que es la expresión 16). A continuación volvemos a seleccionar Author y escribimos x^2-5x+6 (que será la expresión 17). Finalmente, seleccionando de nuevo la opción Ctrl+A escribimos #16/#17 y nos aparecerá

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}.$$

Esta fracción podía haber sido introducida de una sola vez como sigue:

$$(x^2-3x+2)/(x^2-5x+6).$$

Debemos ser muy cuidadosos con los paréntesis y usarlos siempre, aunque en ocasiones nos parezcan innecesarios; un buen hábito en la escritura puede evitarnos innumerables problemas. Si ahora elegimos la opción Simplify Basic (o pulsando el botón \square) obtendremos como resultado el siguiente: $\frac{x-1}{x-3}$.

Simplificar $x^2 - (x + (y + 2)^{100})(x - (y + 2)^{100})$

Introducimos la expresión $x^2-(x+(y+2)^{100})(x-(y+2)^{100})$ y seleccionamos la opción Simplify para obtener $(y+2)^{200}$.

Desarrollar $(x + y)^4$

Introducimos la expresión $(x+y)^4$ y seleccionamos la opción Expand. Entonces el programa nos pregunta qué variable queremos desarrollar: por defecto, desarrolla todas las variables que aparecen en la expresión. En nuestro caso, el valor obtenido es: $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.

Factorizar $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$

Para factorizar un polinomio debemos seleccionar la opción Simplify Factor y a continuación debemos indicar la variable y el método (ver Figura 1.17). Existen cinco métodos de factorización: Trivial Squarefree Rational raDical Complex, siendo los tres últimos los que más factorizan. En nuestro caso, después de introducir el polinomio como $x^4-2x^3-8x^2+18x-9$, seleccionamos Ctrl+F y seguidamente Squarefree para obtener $(x-1)^2(x^2-9)$. Para mayor precisión, seleccionamos el método Rational (o raDical, Complex) y obtenemos $(x+3)(x-3)(x-1)^2$.

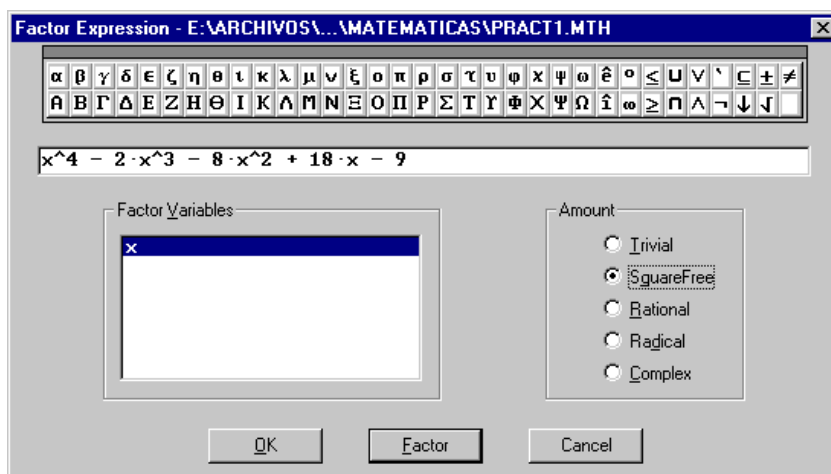


Figura 1.17: Ventana del programa que nos permite factorizar expresiones.

4.7. Resolución de ecuaciones

Una de las tareas más ingratas y complicadas con las que nos podemos encontrar es la determinación de los números que satisfacen una determinada ecuación (de una o varias variables): es el problema de la resolución de ecuaciones. Para construir una ecuación (o inecuación) se pueden utilizar los siguientes operadores:

Operador	Teclear
=	=
≠	/=
<	<
>	>
≤	<=
≥	>=

Cálculo de la pendiente de una recta

Supongamos que queremos calcular la pendiente de la recta $5x - 8y = 13$. Entonces podemos expresar la recta en la forma $y = mx + n$ de tal suerte que el número m es la pendiente. El programa *DERIVE for Windows* nos permite determinar la pendiente como sigue. Se introduce la expresión $5x-8y=13$, se eligen las opciones *Solve|Algebraically* y nos aparece la ventana de la Figura 1.18. Escogemos la variable y (por defecto, el programa nos ofrece la variable x) y como resultado obtenemos $y = \frac{5x-13}{8}$, por lo que la pendiente es $5/8$.

Resolver la ecuación $(x + 3)^2 + (x - 2)^2 = 53$

Introducimos la ecuación como $(x+3)^2+(x-2)^2=53$ y seleccionamos las opciones *Solve|Algebraically*. El resultado obtenido es: $x = 4, x = -5$.

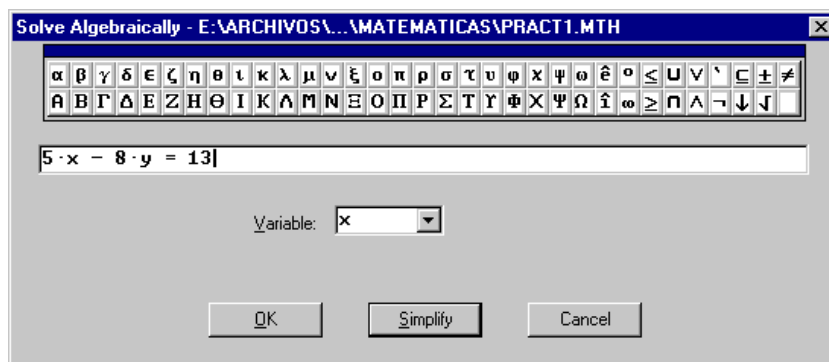


Figura 1.18: Ventana del programa que nos permite resolver algebraicamente expresiones.

Calcular las raíces del polinomio $x^8 - 8x^7 + 22x^6 - 16x^5 - 31x^4 + 56x^3 - 8x^2 - 32x + 16$

Elegimos la opción Author y escribimos el polinomio como

$$x^8 - 8x^7 + 22x^6 - 16x^5 - 31x^4 + 56x^3 - 8x^2 - 32x + 16.$$

Se eligen las opciones Solve|Algebraically y obtenemos como soluciones: $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$. Pero, ¿cuáles son sus multiplicidades? Para determinarlas, dividimos el polinomio original entre $(x - 1)(x + 1)(x - 2)$ obteniendo como resultado $x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8$. Volvemos a seleccionar las opciones Solve|Algebraically y obtenemos de nuevo $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$. Si volvemos a dividir $x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8$ entre $(x - 1)(x + 1)(x - 2)$ obtenemos $(x - 2)^2$, por lo que podemos deducir que las raíces $x = 1$ y $x = -1$ son dobles mientras que la raíz $x = 2$ es cuádruple.

4.8. Ejercicios de aplicación

A continuación se enuncian unos ejercicios sencillos sobre resolución de ecuaciones. Si el alumno encuentra alguna dificultad debe releer lo dicho hasta ahora, en particular la sección referente a las expresiones algebraicas y su manipulación.

- Resolver la ecuación $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x - 2} = 2$.
- Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x} = \sqrt{2x} - 3$.
- Determinar las raíces del polinomio $x^4 - 1$.
- Resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

4.9. Realizar gráficas de funciones

Quizás en alguno de los ejercicios anteriores hemos tenido dificultades y no hemos podido encontrar la solución. En estos casos, la vía de solución consiste en representar gráficamente la ecuación y determinar un intervalo (cuanto más pequeño mejor) que contenga la raíz. Por ejemplo, si dibujamos la ecuación $x^5 - 6x^4 + 11x^3 -$

$2x^2 - 12x + 8 = 0$ obtenemos la Figura 1.19. Nos damos cuenta que hay raíces alrededor de los puntos $-1, 1, 2$ (en este caso, esas son las raíces), por lo que podríamos determinar el valor exacto resolviendo numéricamente la ecuación anterior en los intervalos $[-2, 0]$, $[0, 2]$ y $[1, 3]$, respectivamente.

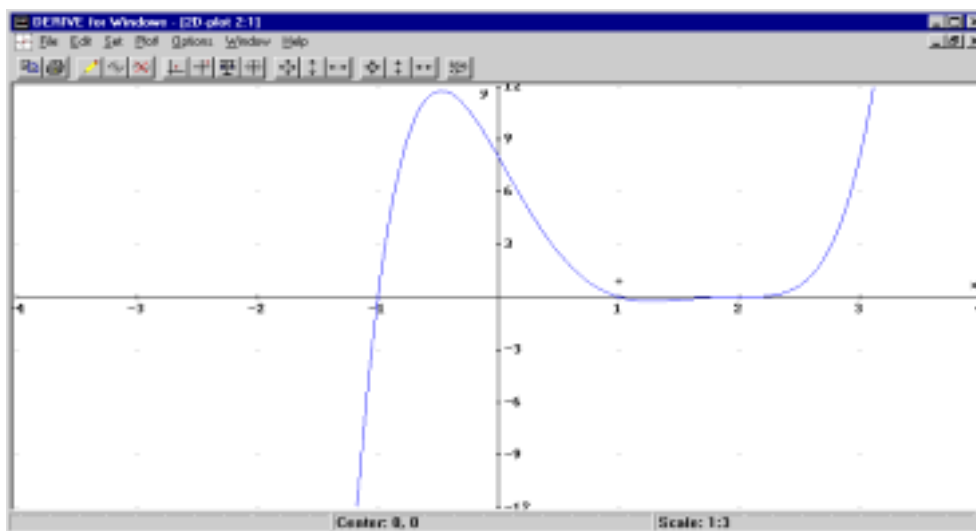


Figura 1.19: Gráfica de la función $x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$

Para resolver numéricamente una ecuación (es decir, encontrar un valor que satisfaga dicha ecuación) debemos elegir las opciones *Solve* | *Numerically* y nos aparece la ventana de la Figura 1.20, donde debemos introducir la ecuación y el intervalo donde queremos que *DERIVE for Windows* busque la solución: *Lower* y *Upper*.

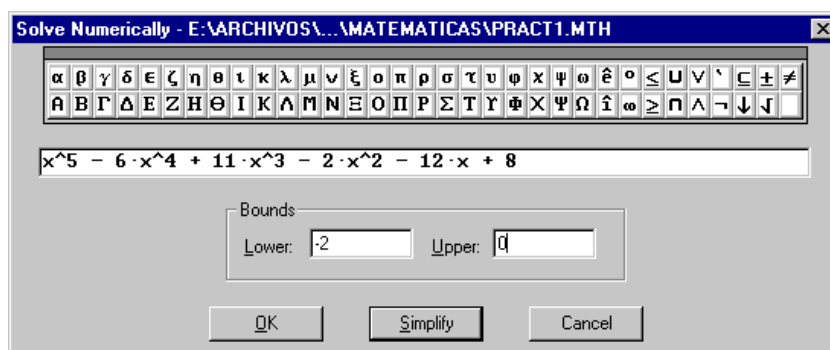


Figura 1.20: Ventana del programa que nos permite resolver numéricamente ecuaciones.

Para dibujar una función es suficiente con marcar la expresión que la define y seleccionar la opción *New 2D-plot window* (o bien pulsar el botón correspondiente). Con esto conseguimos que se abra una nueva ventana gráfica; a continuación debemos seleccionar la opción *Plot!*. Cada ventana gráfica está asociada a una ventana de cálculos algebraicos, por lo que todas las representaciones gráficas de una ventana de álgebra se realizarán en la misma ventana gráfica. En el caso de realizar varias representaciones gráficas en una misma ventana, cada gráfica irá en un color distinto.

4.10. Bibliografía

C. Paulogorrón y C. Pérez. *Cálculo matemático con DERIVE para PC*, Ed. RA-MA, 1ª Ed., 1994.

5. BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

R.E. LARSON, R.P. HOSTETLER y B.H. EDWARDS *Cálculo y Geometría Analítica*, 5ª ed., vol. 1. McGraw-Hill, Madrid, 1995. Capítulo 1.

J. STEWART *Cálculo*, 2ª ed. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994. Capítulo 0.

6. PREGUNTAS DE EVALUACIÓN

E.1.1. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (1,3) y cumple además en cada caso:

- a) Tiene pendiente $-2/3$.
- b) Es perpendicular a la recta $x + y = 0$.
- c) Pasa por el punto (2,4).
- d) Es paralela al eje x .

E.1.2. Hallar la ecuación de la recta bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas $y = \sqrt{3}x$ e $y = 2$.

E.1.3. Un avión vuela con rumbo constante y a velocidad constante entre dos ciudades. La distancia s (en kilómetros) que ha recorrido en t horas es $s = 950t$.

- a) Dibujar la gráfica de esta ecuación para $t \geq 0$.
- b) ¿Qué información contiene la pendiente de la recta?

E.1.4. Un empresario adquiere una máquina por 4500000 pesetas. La máquina gasta en promedio 1000 pesetas en mantenimiento y gasoil. El operario que la maneja cobra 1850 pesetas por hora y a los clientes se les cargan 5000 pesetas por hora.

- a) Escribir una ecuación para el coste C de funcionamiento de la máquina durante t horas.
- b) Idem para los ingresos R derivados de t horas de funcionamiento.
- c) Hallar el punto de equilibrio de esa máquina, calculando en qué tiempo t ocurre que $R = C$.

