Programa "Ramon y Cajal"

Memoria de la actividad de investigacion

Investigador solicitante: Jaume Gudayol Torelló.

Title: Towards a general theory of dimensions.

Keywords: Geometric measure theory, dimension, density.

Área temática: Matemáticas

Sumario: Nuestro objetivo es construir una teoria general de las dimensiones. Se sabe que a cada conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ le podemos asociar un numero $\alpha \in [0, n]$, llamado dimension, de varias maneras, y que para una cierta clase de conjuntos, en particular para los conjuntos autosimilares, algunas de estas definiciones coinciden. A pesar de ello, cada una de estas dimensiones se define 'ad-hoc', y no hay por lo tanto en este momento una manera de demostrar el resultado que hemos mencionado de una manera general.

Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de todas las funciones $h : [0,1] \mapsto [0,1]$ crecientes. Se sabe que a algunos conjuntos les podemos asociar una funcion $h \in \mathcal{H}$ que juega el papel de la dimension. Por lo tanto, una dimension puede ser definida como una funcion $D : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{H})$ que asigna a cada conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto $D(E) \subset \mathcal{H}$, de manera que D satisface las propiedades que se esperan de una dimension. No todas estas funciones D pueden ser utiles. A parte de las propiedades que se esperan de una dimension, las funciones D interesantes deberan satisfacer ciertas propiedades de continuidad y regularidad. Es natural esperar que, en una cierta topologia, solo estudiemos dimensiones continuas. En lo referente a la regularidad, observemos que si D es una dimension, y $h \in \mathcal{H}$, entonces en general $h(D)$ tambien sera una dimension. Por lo tanto, deberemos tratar solo con dimensiones que sean, en un cierto sentido, lisas.

Entonces, y para un cierto tipo de conjuntos (al menos para conjuntos autosimilares), se satisfacera el resultado mencionado, es decir, todas las dimensiones continuas y lisas tendran el mismo valor en el conjunto.

Tambien pretendemos estudiar las densidades superiores e inferiores, ya que creemos que algunas de las funciones que en la literatura son llamadas dimensiones son mas bien supremos o infimos de densidades. En mas, pretendemos tambien estudiar la relacion implicita de dualidad que existe entre dimensiones de conjuntos y dimensiones de medidas.

Summary: Our goal is to build a general theory of dimensions. It is well kown that to each set $E \subset \mathbb{R}^n$ one can associate a number $\alpha \in [0, n]$, called dimension, in several ways, and that for some class of sets (namely self-similar sets) some of these definitions coincide. However, each of these dimensions is defined in a particular way, and thus there is at the moment no way to prove the aforementioned result in general.

Let $\mathcal{H}$ be the set of all increasing functions $h : [0, 1] \mapsto [0, 1]$. It is well known that to some sets we can associate some function $h \in \mathcal{H}$ as the dimension of the set. Thus a dimension can be defined as a function $D : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{H})$ that assigns to each $E \subset \mathbb{R}^n$ some set $D(E) \subset \mathcal{H}$, and such that D satisfies the properties expected for a dimension. Not all of these functions D are going to be useful. Besides the expected properties for a dimension, some kind of continuity and regulatity is going to be required. The continuity assumption is natural. As for the regularity, observe that if D is a dimension, and $h \in \mathcal{H}$, then usually $h(D)$ is also going to be a dimension. Thus, we will need some flatness of the dimensions we deal with.

Then, for a certain class of sets (at least for self-similar sets), the previous result will hold, that is, all flat continuous dimensions will have the same value on the set.

We also plan to study upper and lower densities, as we consider that some of the objects that are called dimensions in the literature behave as suprema or infima of densities, rather than as dimensions. Moreover, we intend to study the underlying duality between dimensions of sets and dimensions of measures.

Objetivos:

Mas alla de la dimension topologica, la primera dimension fue introducida por Hausdorff, basandose en una construccion de Caratheodory. Deste entonces muchas otras dimensiones han sido introducidas, con definiciones hechas caso a caso. A pesar de que todas ellas comparten ciertas propiedades, una teoria general que las englobe esta todavia por hacer.

Una dimension no es mas que una manera de medir el tamao de un conjunto en un espacio metrico. Si suponemos que este espacio metrico es R^n, entonces para cada subconjunto E de R^n hay muchas maneras de associar a este algun numero s entre 0 y n. Las mas habituales son las dimensiones de Hausdorff, Box-counting y Packing. Hay, sin embargo, muchas otras maneras de associarle un numero a cada subconjunto de R^n, cada una de ellas es util para un proposito. De hecho, y de una manera general, se podria decir que a cada problema en el cual intervenga el medir el tamao de un conjunto se le puede asociar una dimension que es la adecuada para este problema.

Sea $h : [0,1] \mapsto [0,1]$ una funcion creciente. Todas las definiciones de dimension consisten en asociarle a cada conjunto E un numero D(h,E), y luego decir que E tiene dimension $\sup\{s, D(E, x^s) > 0\}$. Algunos conjuntos satisfacen que, si s es su dimension, entonces $0 < D(E, x^s) < \infty$. Para algunos otros conjuntos lo que tenemos es que $0 < D(E, h) < \infty$ para alguna h que no es una potencia de x. Entonces esta h puede ser llamada dimension de E. Mas en general, a cada conjunto E se la puede asociar el conjunto de todas las h para las cuales $D(E, h) > 0$. De esta manera, una dimension es una aplicacion del conjunto de las partes de R^n al conjunto de las partes de H, si H es el conjunto de todas las h crecientes.

En un contexto tan abstracto, poco podremos decir de una dimension cualquiera, ya que siempre habra algunos conjuntos y funciones que se comportaran de una manera patologica. Por lo tanto nuestro primer objetivo sera restringirnos al estudio de una clase de conjuntos que tengan una cierta regularidad. Tambien nos restringiremos al estudio de dimensiones sobre funciones de variacion regular, es decir, funciones para las cuales tenemos algun control sobre la manera en la que estas crecen. Para estos conjuntos y funciones, se puede definir algun tipo de continuidad examinando el comportamiento de D(E,h) al variar de manera creciente o decreciente las funciones y/o los conjuntos. De esta manera las relaciones de orden tienen un papel importante aqui de la misma manera que en la definicion de dimension.

Sea D una dimension, y sea h una funcion creciente. Para la mayor parte de esas h, la funcion h(D) sera tambien una dimension. Es mas, si D es continua y/o regular en cierto sentido, h(D) tambien lo sera, simpre que h sea lo bastante regular. En cualquier caso, dadas dos dimensiones qualesquiera se pueden comparar sus ratios de crecimiento estudiando como estos se comportan en una clase lo suficientemente grande de conjuntos o bien estudiandolos en una clase de conjuntos que dependan de un parametro. Diremos que una dimension es lisa respecto a otra cuando sus ratios de crecimiento son los mismos, y diremos que una dimension es lisa si es lisa respecto de la dimension de Hausdorff.

Nuestro objetivo sera enunciar de una manera precisa lo que acabamos de decir, asi como demostrar que, para los conjuntos autosimilares, todas las dimensiones lisas tienen el mismo valor. Incidentalmente, tambien estudiaremos dimensiones de medidas como duales de las dimensiones de conjuntos.

Objectives:

Beyond the topological dimension, the first dimension that was introduced was the Hausdorff dimension (based on the previous work of Caratheodory). Since then many dimensions have been introduced, each with an 'ad hoc' definition. Even though almost all these dimensions share some properties, a general theory for them is yet to be done.

A dimension (sometimes called 'fractal dimension') is a way of measuring the size of a set in a metric space. If we assume the space to be $\mathbb{R}^n$, then for any subset E of $\mathbb{R}^n$ there are many ways to associate to it some number s lying between 0 and n. The more usual are the Hausdorff, Box-counting, and Packing dimensions. There are, however, many other ways of associating a number to each subset of $\mathbb{R}^n$, each useful to its purpose. In fact, as a general principle, one could say that to each problem that involves measuring the size of a set one can associate a specific dimension that is fit to the problem.

Let $h : [0,1] \mapsto [0,1]$ be an increasing function. Then each definition of dimension involves associating to each set E a number $D(h, E)$, and then saying that E has dimension $\sup\{s, D(E, x^s) > 0\}$. Some sets satisfy that, if s is its dimension, then $0 < D(E, x^s) < \infty$. For some other sets we have that $0 < D(E, h) < \infty$ for some h which is not a power of x. Then this h can be called the dimension function of E. More in general, we can associate to each set E the set of all h so that $D(E, h) > 0$. Then a dimension is a map fom the set of all subsets of $\mathbb{R}^n$ to the set of all subsets of H, H being the set of all increasing h.

In this abstract setting, few can be said of any dimension D, as there are always some sets and functions that behave pathologically. Thus our first goal will be to restrict ourselves to the study of a more limited class of sets having some regularity. We will also restrict ourselves to the class of regularly varying functions, that is, functions for which we have some control in the way they grow. For these sets and functions, one can define some kind of continuity by regarding the behavior of $D(E, h)$ as E (or h) varies by increasing or decreasing (thus the order relationship plays a role here as well as in the definition of what will be called a dimension).

Let D be a dimension, and let h be an increasing function. Then for most of such h, the function $h(D)$ will also be a dimension. Moreover, whenever D is continuous in some sense for some class of sets, $h(D)$ will also be continuous, provided that h is regular enough. However, given any two dimensions we can compare their rates of growth either by examining their values on a suficiently large class of sets or by studying how they behave on a given series of sets depending on a parameter. We will say that a dimension D is flat with respect to another dimension if its rates of growth are the same, and we will say that a dimension is flat if it is flat with respect to the standard Hausdorff dimension.

Our goal will be to state precisely all the previous facts, and to prove that, on self similar sets, all flat continuous dimensions take the same values. Incidentally we will also study dimensions of measures as duals of dimensions of sets.

Metodologia de la investigacion:

La metodologia sera la habitual en el analisis matematico, y en particular en teoria geometrica de la medida. La principal herramienta de trabajo de un matematico es la biblioteca. Un estudio exhaustivo de la bibliografia existente es lo primero que se debe hacer, y ya esta en parte hecho. La asistencia a congresos, seminarios y conferencias es un metodo muy util de recoger informacion, y dar charlas en estos sitios es una manera de compartir este conocimiento. En este tipo de encuentros puedo tambien hablar con expertos, recogiendo de esta manera la sabiduria popular nunca publicada. Considero que el objeto de este proyecto entrara pronto en el 'mainstream' de las matematicas, y creo importante formar un buen grupo de trabajo en el tema. Pretendo hacerlo, siempre que el personal de la institucion de acogida se muestre receptivo. Los resultados de este proyecto seran hechos publicos en articulos y conferencias, pero el objetivo ultimo del proyecto sera escribir un libro sobre el tema.

Tambien pretendo realizar experimentos con el ordenador con el objetivo de visualizar el comportamiento de diferentes dimensiones sobre varios conjuntos.

Por lo que respecta a la bibliografia, tanto mi tesis

"Boundary behaviour of functions in Hardy-Sobolev spaces",

donde se estudia el comportamiento de ciertas funciones analiticas en ciertos conjuntos en funcion de la dimension (de Larman) de estos, como el articulo

"On the existence of doubling measures with certain regularity properties", Per Bylund and Jaume Gudayol, Proc. of the AMS, Vol 128, n.11, pp 3317-3327.

Donde se estudia la relacion entre las dimensiones de un conjunto y el tipo de medidas doblantes que soporta, me ha ayudado a desarrollar las ideas que aparecen en este proyecto.

Otra bibliografia relevante para este estudio es:

C. A. Rogers, "Hausdorff measures", Cambridge university press, Cambridge, 1970.

K. Falconer, "Fractal geometry. Mathematical foundations and its applications", John Wiley and sons, New York, 1993.

P. Mattila, "Geometry of sets and measures in euclidean spaces", Cambridge university press, 1995.

E. Seneta, "Regularly varying functions", Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

"On the Hausdorff dimensions of general cantor sets", A.F. Beardon, Proc. Camb. Phil. Soc. 61 (1965), pp. 679-694.

Methodology of reseach:

The methodology will be the usual of mathematical analysis, and in particular that of geometric measure theory. The main tool of a mathematician is the library. A thorough study of the existing books and articles is needed, and indeed has been in part made. Assisting to congresses, seminars and conferences on the subject is also a very useful way of collecting information, and giving talks in such places is a way of sharing this knowledge, and I plan to do so. In these kind of meetings I plan also to get to talk with the experts, thus getting the knowledge that is in the lore, but has never been written. I think the subject of the study is going to get into the mainstrean in the next few years, and thus it is important to have a good team working on it. Hence I also plan to create, if the staff of the receiving institution is interested in it, a work team on the subject. The results of the research will be made public in articles and conferences, but the ultimate goal of the reseach is to write a book on the subject.

I also plan to use some computer experiments in order to visualize the behaviour of different dimensions on different families of sets.

As for the bibliography, both my thesis

"Boundary behaviour of functions in Hardy-Sobolev spaces",

where a study of the behaviour of some analytic funcions on some sets is made in terms of the (Larman) dimensions of these sets, and the joint article

"On the existence of doubling measures with certain regularity properties", Per Bylund and Jaume Gudayol, Proc. of the AMS, Vol 128, n.11, pp 3317-3327.

where the relation between the dimensions of a set and the kind of doubling measures it supports is studied, have helped me to shape the ideas on this project.

Other relevant bibliography for this study will be:

C. A. Rogers, "Hausdorff measures", Cambridge university press, Cambridge, 1970.

K. Falconer, "Fractal geometry. Mathematical foundations and its applications", John Wiley and sons, New York, 1993.

P. Mattila, "Geometry of sets and measures in euclidean spaces", Cambridge university press, 1995.

E. Seneta, "Regularly varying functions", Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

"On the Hausdorff dimensions of general cantor sets", A.F. Beardon, Proc. Camb. Phil. Soc. 61 (1965), pp. 679-694.

Plan de trabajo:

El primer objetivo es enunciar precisamente las definiciones de dimension y de 'continuidad' de una dimension. Esto se puede hacer a partir de la literatura existente usada sabiamente. Luego (pero simultaneamente), Se debe trabajar con los ejemplos de dimensiones que existen en la literatura. Hay que comprobar que satisfacen la definicion de dimension, y que son continuas en un cierto sentido para una clase lo bastante grande de conjuntos. Etso es facil de ver para dimensiones con definiciones simples, pero mas complicado si trabajamos con la dimension de Hausdorff. La razon de esto es que cuando para una dimension parlicular la dimension de un conjunto es la misma que la dimension de su adherencia, entonces esta dimension es mejor porque esta mas relacionada con la metrica del espacio. Esta propiedad no es considerada deseable desde un punto de vista de teoria de la medida, pero si que lo es desde el punto de vista de las aplicaciones, asi como con respecto a su computabilidad.

El siguiente paso es determinar clases adecuadas de conjuntos y de funciones con las cuales trabajar. Para obtener resultados utiles la clase de funciones con las que trabajamos tiene que ser la clase de las funciones de variacion regular, es decir, funciones para las cuales $h(at)/h(t) \approx a^s$ cuando t tiende a cero. La clase de conjuntos tiene que tener propiedades de regularidad similares. Un estudio exhaustivo de las propiedades de dichas clases y su comportamiento con respecto a los ejemplos de dimensiones conocidos es parte del proyecto.

Lo siguiente que se debe hacer es estudiar las propiedades de crecimiento de las dimensiones. Para hacerlo, debemos restringirnos a las dimensiones que se expresan como limites de sus truncadas, en la clase que ya hemos escogido de conjuntos. Por lo tanto, es necesario estudiar que dimensiones pueden ser generadas de esta manera (como minimo, todas las dimensiones usuales pertenecen a esta clase). De esta manera, simplificamos el estudio del crecimiento de las dimensiones sobre determinados conjuntos, ya que hemos introducido la fititud en el problema. Usando esto, podemos estudiar si una dimension es lisa con repecto a otra simplemente examinando el comportamiento limite de sus truncadas respectivas.

Para acabar solo hay que tomar todos los conceptos que hemos introducido anteriormente y usar la teoria de sistemas de iterados de funciones para obtener el resultado para conjuntos autosimilares. Tambien se puede intentar generalizar el resultado para una clase mas grande de conjuntos.

El ultimo paso seria dar una definicion de dimension de una medida que permita la construccion de un concepto de dualidad entre dimensiones de conjuntos y dimensiones de medidas que nos permita demostrar un teorema dual a el anterior.

Work programe: The first goal is to state the definitions of dimension and continuous dimension. This is done using the existing literature. Then (and at the same time) one has to work with the existant exemples of dimensions that appear in the literature. One has to check that they satisfy the definition of dimension, and that they are continuous in some sense for a suficiently large class of sets. This is easy to see for dimensions with simple definitions, such as the Box-Counting dimension, but more involved when we work with the Hausdorff dimension. The reason for it is that when for a particular dimension the dimension of a set is the same as the dimension of its closure then this dimension is nicer in the sense that it is in some sense related to the metric of the space. The previous property is not desirable from a measure theoretic point of view, but it is most desirable for many applications, as well as for computability.

Then one has to determine suitable classes of sets and of functions to work with. To produce useful results, the class of functions we work with has to be restricted to regularly varying functions, that is, functions for which $h(at)/h(t) =\approx a^s$ as t tends to zero. The class of sets has to have some similar regularity properties. A thorough study of the properties of these classes and their behaviour with respect to the known dimensions is needed.

Next one has to study growth properties of dimensions. To do so, one has to restrict oneself to the class of dimensions that can be expressed as limits of its truncates, on the previously chosen class of sets. Thus it is interesting to study which dimensions can be generated in this way (but in any case all the commonly used dimensions belong to this class). In this way, we simplify the problem of the study of growth of dimensions on sets because everything will then be finite. Using it, one can study the flatness of a dimension with respect to another one by examining the limit behaviour of its respective truncates.

In the end one takes all the previously introduced concepts and uses the iterated function system theory to obtain the result for self-similar sets. One can also try to generalize the result to a larger class of sets.

The last step would be to give a definition of dimension of a measure that allows the construction of a duality between dimensions of sets and dimensions of measures, thus allowing us to prove a dual theorem to the result previously obtained.