NIVEL I

1. Calcula el cociente de las siguientes divisiones:

a) $(4x^3) : (3x)$

b) $(5/2)x^4 : (5x^2)$

c) $(3x^3 - 4x^2 + 6x) : (2x)$

d) $(4x^4 - 2x^3 + x^2) : (3x^2)$

Solución:

a) $\frac{4}{3}x^2$

b) $\frac{1}{2}x^2$

c) $\frac{3}{2}x^2 - 2x + 3$

d) $\frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

2. Halla un polinomio que multiplicado por $2x$ dé como resultado

$4x^4 - 2x^2+5x$.

Solución:

$(4x^4 - 2x^2+5x):(2x)$ = $2x^2 - x + \frac{5}{2}$

3. Efectúa las siguientes divisiones y comprueba que el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto:

a) $(x^3 - 2x - 1) : (x^2+1)$

b) $(3x^4 + x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 3x + 2)$

c) $(x^4 - 8) : (x^2 - 2)$

d) $(6x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 14) : (2x^2 - 3x + 7)$

e) $(2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x) : (x^3 - x + 1)$

¿En algún caso es el dividendo múltiplo del divisor?

Solución:

Como muestra solo se resuelve la primera. El resto las podéis comprobar usando la regla de la división. El dividendo será múltiplo del divisor en los casos en que el resto sea cero.

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & -2x+1 & x^2+1 \\ \cline{3-3} \underline{-x^3} & \underline{-x} & x \\ & -3x+1 & \end{array}$$

$$cociente \rightarrow x$$

$$resto \rightarrow -3x+1$$

4. Halla, si es posible, un polinomio que multiplicado por $x^2 + 1$ dé como resultado $x^4 + 3x^2 + 3$.

Solución:

No es posible, ya que al dividir $x^4 + 3x^2 + 3$ entre $x^2 + 1$ el resto es 1

5. Halla el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

a) $(3x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 5) : (x - 2)$

b) $(2x^4 + 3x^3 - 2x + 7) : (x + 1)$

c) $(x^3 - 2x + 6) : (x + 4)$

d) $(x^3 + x - 3) : (x + (1/2))$

Solución:

Servirá como muestra el último apartado

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 1 & -3 \\
\frac{-1}{2} & & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-5}{8} \\
\hline
 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{-29}{8}
\end{array}
$$

Por tanto, el cociente es $c(x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{5x}{4}$ *y el resto* $r = -\frac{29}{8}$

Otros resultados:

a) $c(x) = 3x^3 + 4x^2 + 9x + 21; \quad r = 37$

b) $c(x) = 2x^2 + x - 2; \quad r = 9$

c) $c(x) = x^2 - 4x + 14: \quad r = -50$

6. Sin efectuar la división, comprueba si las siguientes divisiones son o no exactas. ¿Qué resultado teórico aplicas?

a) $(x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3) : (x - 1)$

b) $(3x^4 + 2x^2 - 2x + 7) : (x + 2)$

c) $((2/3)x^2 - x + 2) : (x - [1/2])$

d) $(x^{11} - 2x^9 + 1) : (x + 1)$

Cuando la división sea exacta, halla dos divisores del dividendo.

Solución:

Se aplica el teorema del resto:

"El resto de dividir P(x) entre (x-a) coincide con el valor numérico del polinomio para x = a, es decir, con P(a)"

a) $P(1) = 1^5 - 2.1^3 + 2.1^2 + 2.1 - 3 = 1 - 2 + 2 + 2 - 3 = 0$
división exacta

b) $P(-2) = 3.(-2)^4 + 2.(-2)^2 - 2.(-2) + 7 = 3.16 + 2.4 + 4 + 7 = 67 \neq 0$
división inexacta

c) $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{1-3+12}{6} = \frac{10}{6} \neq 0$
división inexacta

d) $P(-1) = (-1)^{11} - 2.(-1)^9 + 1 = -1 + 2 + 1 = 2 \neq 0$
división inexacta

Para hallar otro divisor del dividendo es necesario hacer la división, usando el método de Ruffini. Volvemos al apartado a)

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & -2 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

Por tanto, $x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = (x - 1) . (x^4 + x^3 - x^2 + x + 3)$.

Los dos divisores del dividendo son $x - 1$ y $x^4 + x^3 - x^2 + x + 3$.

7. El valor numérico de p(x) = $x^3 + 2x + k$ para $x = 2$ es 14. Calcula el valor de k.

Solución:

Hecho en clase. k = 2

8. En el problema anterior, el número 14 es el resto de la división de p(x) por otro polinomio. ¿De cuál?

Solución:

Por el teorema del resto, hemos de saber que se trata de x - 2

9. En una división de polinomios, el divisor es $3x^2 - 1$, el cociente, $2x - 1$ y el resto $-x + 1$. Halla el dividendo.

Solución:

D(x) = d(x) . c(x) + r(x)

Haciendo las operaciones indicadas, resulta que el dividendo es

$D(x) = 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

10. Comprueba, sin efectuar la división, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

a) $x^{23} - 1$ tiene por factor $x - 1$

b) $x^{43} + 1$ es divisible por $x + 1$

c) $x - 4$ es un divisor de $x^4 - 4x^3 + 2x - 8$

d) $2x^3 + 3x - 1$ es múltiplo de $x + 2$

e) $x^8 - 1$ es divisible por $x + 1$

f) $x - 3$ divide a $x^3 + 27$

g) $x + 2$ no es múltiplo de $x^4 + 16$

Solución:

a) Verdad, 1 es raíz de $x^{23} - 1$, por tanto x – 1 es divisor del polinomio

b) Verdad. -1 es raíz de $x^{43} + 1$, por tanto x + 1 lo divide.

c) Verdad. Basta comprobar que P(4) = 0

$P(4) = 4^4 - 4.4^3 + 2.4 - 8 = 0 + 8 - 8 = 0$

d) Falso. $P(-2) = 2.(-2)^3 + 3.(-2) - 1 = -16 - 6 - 1 = -23 \neq 0$

e) Verdad. $P(-1) = (-1)^8 - 1 = 1 - 1 = 0$

f) Falso. $P(3) = 3^3 + 27 = 27 + 27 = 54 \neq 0$

g) Verdad. No es múltiplo porque $P(-2) = (-2)^4 + 16 = 16 + 16 = 32 \neq 0$

11. Factoriza los siguientes polinomios sacando factor común y haciendo uso de los productos notables:

a) $x^3 - 3x$

b) $2x^4 + 4x^2 - 4x$

c) $x^2 - 4$

d) $x^2 + 6x + 9$

e) $x^3 - x$

f) $x^6 - x^2$

Solución:

a) $x(x^2 - 3) = x\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$

b) $2x(x^3 + 2x - 2)$ y lo dejamos así (por las condiciones del enunciado).

c) $(x + 2)(x - 2)$

d) $(x + 3)^2$

e) $x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$

f) $x^2(x^4 - 1) = x^2(x^2 + 1)(x^2 - 1) = x^2(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

12. Halla las raíces de los siguientes polinomios:

a) $3x - 2$

b) $2x^2 - 3x + 1$

c) $3x^2 - 12x + 12$

d) $(x - 3)(2x + 4)$

e) $x^2 + x + 1$

Solución:

a) $x = \dfrac{2}{3}$

b) Resolviendo la ecuación $x_1 = 1, \quad x_2 = \dfrac{1}{2}$

c) Igual que antes. Aunque también podemos darnos cuenta de que en la descomposición sale $3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2$, por lo que 2 es raíz doble.

d) No se os ocurra multiplicarlo. Las raíces son las de los factores:

$x_1 = 3$ (raíz de x – 3) y $x_2 = -2$ (raíz de 2x + 4)

e) No tiene raíces

13. Factoriza, cuando sea posible, los siguientes polinomios de segundo grado, calculando previamente sus raíces:

a) $x^2 - 3x + 2$

b) $x^2 + 4x - 12$

c) $3x^2 - 4x + 6$

d) $2x^2 - 5x + 6$

e) $2x^2 - x - 1$

14. Factoriza los siguientes polinomios e indica cuáles son sus raíces:

a) $x^3 - x^2 - 4$

b) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

c) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

d) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$

e) $2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$

Dejo sin resolver estos dos ejercicios. Buena parte de ellos se han hecho en clase. En cualquier caso, os será fácil comprobar si están bien.

15. Si $x^3 - 4x$ + k es un múltiplo de $x + 3$, ¿cuánto vale el resto de la división? ¿Cuánto vale k?

Solución:

Evidentemente, el resto de la división será cero. Gracias a esa afirmación podremos calcular el valor de k.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -4 & k \\ -3 & & -3 & 9 & -15 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & -15+k \end{array}$$

$-15 + \mathrm{k} = 0 \Rightarrow \mathrm{k} = 15$

Pero hay otra forma de hacerlo ...

16. Determina un polinomio de grado dos cuyas raíces sean 3 y 1.

Solución:

Ese polinomio puede ser, por ejemplo

$(x - 3).(x - 1) = x^2 - 4x + 3$

¿Podrías encontrar otro?