Vol. X, № X
Matemáticas: 1–16

Matemáticas: Enseñanza Universitaria

Método numérico para un modelo de ondas dispersivas

Juan Carlos Muñoz

Resumen

Presentamos un esquema numérico de alta precisión para estudiar las soluciones de la ecuación de T.B. Benjamin, J. Bona y J.J. Mahony (BBM). Este es un modelo dispersivo uni-direccional que describe la propagación de una onda con pequeña amplitud en la superficie del agua en un canal raso con profundidad constante. La ecuación BBM tiene soluciones de onda solitaria que calculamos de manera explícita. En el caso lineal también existen soluciones exactas que se pueden calcular mediante la trasformada de Fourier. Este tipo de soluciones son utilizadas para verificar la precisión, estabilidad y convergencia del modelo numérico.

Palabras y frases claves: Dispersión, Ondas solitarias, Diferencias finitas

1 Introducción

En este artículo estudiamos numéricamente las soluciones de la ecuación deducida por T.B. Benjamin, J. Bona y J.J. Mahony (BBM) [2]

$$u_t + (1 + \alpha u)u_\xi - \beta u_{\xi\xi t} = 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

sujeto a la condición

$$u(\xi, 0) = f(\xi). \tag{2}$$

Esta ecuación describe el movimiento de ondas con pequeña amplitud en la superficie de un canal raso limitado inferiormente por fondo impermeable constante. El fluido que llena el canal se supone incompresible, irrotacional y no se consideran efectos de la viscosidad. Estos supuestos son razonables debido a que los efectos de vorticidad y viscosidad son apreciables sólo cerca del fondo. La posición en el canal unidimensional se representa con ξ y el tiempo con t. La función real $u = u(\xi, t)$ representa la amplitud de la onda medida con respecto al nivel de reposo del agua. Los parámetros adimensionales positivos α, β miden la magnitud de los efectos no lineales y dispersivos, respectivamente, en el fenómeno. En el régimen de aguas rasas y ondas de pequeña amplitud tenemos $\beta << 1$ y $\alpha << 1$.

Señalamos que la ecuación (1) está relacionada con otros modelos unidireccionales de aguas rasas a través de la expresión formal

$$u_t = -u_\xi + O(\alpha, \beta).$$

Por ejemplo, insertando esta relación en (1) obtenemos la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + (1 + \alpha u)u_x + \beta u_{\xi\xi\xi} = 0, \tag{3}$$

donde se han retenido hasta términos de primer orden $O(\alpha, \beta)$.

Aspectos teóricos relativos a la ecuación BBM tales como existencia, unicidad y estabilidad de ondas solitarias han sido estudiados por Benjamin [1] y Bona et al. [3], [4]. El propósito de este trabajo es presentar un esquema de diferencias finitas diseñado específicamente para ecuaciones de evolución del tipo dispersivo, tal como (1).

Si se intenta una aproximación en diferencias finitas directamente en la ecuación BBM, encontramos que el error de truncamiento en las discretizaciones de la derivada de primer orden u_ξ contiene términos dispersivos de tercer orden, tales como $u_{\xi\xi\xi}$, $u_{\xi tt}$, u_{ttt}, semejantes al término dispersivo de la ecuación. Tales errores pueden introducir dispersión numérica significativa deteriorando la precisión de la aproximación final. Para resolver esta dificultad, la idea fundamental es escribir la ecuación (1) de manera conveniente, como una ecuación diferencial ordinaria en el tiempo la cual se discretiza usando un método del tipo predictor-corrector que combina esquemas de tercer y cuarto orden. Las derivadas de primer orden en el espacio se discretizan a cuarto orden. Esta estrategia tomada del trabajo de Wei y Kirby [10], elimina automáticamente los errores de truncamiento de la misma forma que el término dispersivo en el modelo BBM.

Para verificar algunas propiedades del esquema numérico, tales como la estabilidad, la precisión y la convergencia, usamos algunas soluciones exactas de la ecuación BBM. Presentamos varios experimentos numéricos para diferentes valores de los parámetros α y β. En todos los casos, encontramos que la aproximación reproduce con alta precisión la respectiva solución exacta del modelo. El esquema ha sido adaptado por el autor para explorar problemas de transmisión-reflección de ondas en una dimensión en medios aleatorios mediante sistemas del tipo Boussinesq con coeficientes variables [7], [8],[9].

Este trabajo está organizado como sigue. En la sección 2 se deduce una solución exacta de la ecuación (1) con $\alpha = 0$ usando la técnica de la tranformada de Fourier. En la sección 3 encontramos una familia de soluciones de onda solitaria para (1). La sección 4 describe con detalle el esquema numérico propuesto. Sus propiedades son analizadas en la sección 5, a través de un conjunto de experimentos numéricos en diferentes regímenes. Finalmente, las conclusiones se presentan en la sección 6.

2 Solución exacta en el caso lineal

Considere la linealización ($\alpha = 0$) de la ecuación (1)

$$u_t + u_x - \beta u_{\xi\xi t} = 0, \tag{4}$$

con la condición inicial (2). Aplicando la transformada de Fourier en ξ tenemos

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(k,t) &= -\frac{ikt}{1+\beta k^2}\hat{u}(k,t), \\ \hat{u}(k,0) &= \hat{f}(k), \end{aligned}$$

con solución

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)e^{-\frac{ikt}{1+\beta k^2}}.$$

Usando el teorema de inversión de Fourier obtenemos finalmente

$$u(\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{-\frac{ikt}{1+\beta k^2}}e^{ik\xi}dk. \tag{5}$$

Para computar la solución explícita $u(\xi,t)$ del problema linearizado, la integral en la ecuación (5) se aproxima usando el algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) [5]. Hay una consecuencia importante que se puede deducir de la ecuación (5). Cuando $t \to \infty$ entonces

$$u(\xi,t) \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{(-kt+\beta tk^3)i}e^{ik\xi}dk,$$

lo cual implica que

$$u(\xi,t) \approx \frac{1}{(3t\beta)^{1/3}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Ai}\left(\frac{\xi - t - y}{(3t\beta)^{1/3}}\right) f(y)dy. \tag{6}$$

Aquí $\mathrm{Ai}(z)$ denota la función de Airy

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z\omega+\frac{1}{3}\omega^3)}d\omega.$$

La aproximación (6) indica que la amplitud de la solución $u(\xi, t)$ decrece como efecto de la dispersión β con un factor aproximadamente de $1/(3t\beta)^{1/3}$ cuando $t \to \infty$. También, como consecuencia de la convolución del pulso inicial f con la función de Airy, la solución se descompone en un pulso principal y una cola oscilatoria que se desarrolla progresivamente con el tiempo. La tasa de dispersión del pulso es también proporcional a la raíz cúbica del tiempo t y aumenta con el parámetro β.

3 Solución de onda solitaria para la ecuación BBM

Un equilibrio entre los órdenes del término dispersivo $\beta u_{\xi\xi t}$ y el término no lineal $\alpha u u_\xi$ en la ecuación (1) hace posible la existencia de soluciones que mantienen su forma para todo tiempo, esto es, que pueden escribirse la forma $u(\xi, t) = \phi(\xi - Ct)$ para alguna función ϕ. La constante C corresponde a la velocidad con que se propaga la onda. Este tipo de solución recibe el nombre de **solución de onda viajante**. En el caso en que ϕ satisface la condición adicional

$$\lim_{\zeta \to \pm\infty} \phi^{(n)}(\zeta) = 0, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

la solución recibe el nombre de **onda solitaria** o simplemente **soliton**. Aquí el superíndice de ϕ denota la $n-$ ésima derivada.

Si $u(\xi, t) = \phi(\xi - Ct)$ es una solución de onda solitaria para la ecuación (1) entonces ϕ debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria

$$-C\phi'(\zeta) + (1 + \alpha\phi(\zeta))\phi'(\zeta) + C\beta\phi'''(\zeta) = 0, \tag{8}$$

donde $\zeta = \xi - Ct$.
La ecuación anterior puede también escribirse como

$$(1 - C)\phi' + \frac{\alpha}{2}(\phi^2)' + C\beta\phi''' = 0. \tag{9}$$

Integrando la ecuación (9) se llega a

$$(1 - C)\phi + \frac{\alpha}{2}\phi^2 + C\beta\phi'' = 0. \tag{10}$$

Multiplicando la ecuación (10) por ϕ' y reescribiendo las derivadas se tiene

$$\left(\frac{1 - C}{2}\right)(\phi^2)' + \frac{\alpha}{6}(\phi^3)' + \frac{C\beta}{2}((\phi')^2)' = 0. \tag{11}$$

Integrando esta última ecuación tenemos

$$\frac{C\beta}{2}(\phi')^2 + \left(\frac{1-C}{2}\right)\phi^2 + \frac{\alpha}{6}\phi^3 = 0. \tag{12}$$

La ecuación (12) tiene soluciones de la forma

$$u(\xi, t) = \phi(\xi - Ct) = \phi(\zeta) = ASech^2(B\zeta), \tag{13}$$

donde A, B son constantes que están determinadas de las propiedades del soliton (7). Sustituyendo (13) en la ecuación (12) obtenemos

$$\begin{aligned} 2C\beta A^2 B^2 Sech^4(B\zeta)Tanh^2(B\zeta) \quad &+ \quad \frac{(1-C)A^2}{2}Sech^4(B\zeta) \\ &+ \quad \frac{\alpha}{6}A^3 Sech^6(B\zeta) = 0, \end{aligned}$$

la cual después de simplificación se convierte en

$$2C\beta B^2 Tanh^2(B\zeta) + \frac{1-C}{2} + \frac{\alpha A}{6}Sech^2(B\zeta) = 0. \tag{14}$$

Ahora tomando el límite $\xi \to \infty$ en la ecuación (14) se llega a

$$\frac{1-C}{2} + 2C\beta B^2 = 0,$$

de donde

$$B = \sqrt{\frac{C-1}{4C\beta}}.$$

Haciendo $\zeta = 0$ en la ecuación (14) se tiene

$$\frac{1-C}{2} + \frac{\alpha}{6}A = 0,$$

de donde $A = \frac{3(C-1)}{\alpha}$.
La velocidad C del soliton puede determinarse de una condición inicial tal como $\phi(0) = 1$. El resultado es $C = 1 + \frac{\alpha}{3}$.

4 El esquema numérico

En esta sección describiremos el esquema numérico que proponemos para resolver la ecuación (1). La estrategia es tomada del trabajo de Wei y

Kirby [10] para un sistema del tipo Boussinesq bidireccional para ondas acuáticas.

En primer lugar, escribimos la ecuación (1) como

$$V_t = F(u), \tag{15}$$

donde

$$F(u) = -(1 + \alpha u)u_\xi, \tag{16}$$

y V es una variable intermedia definida por

$$V = u - \beta u_{\xi\xi}.$$

Aproximamos la solución de (15) usando un esquema del tipo predictor-corrector. El dominio espacio-tiempo $\xi \in [\xi_1, \xi_J]$, $t \geq 0$ es discretizado como $\xi_j = \xi_1 + (j-1)\Delta\xi, 1 \leq j \leq J$ and $t_n = (n-1)\Delta t, 1 \leq n \leq N$, respectivamente. Las constantes ξ_1 y ξ_J denotan las posiciones de los extremos del dominio computacional. Las discretizaciones de las variables u, V se denotarán por u_j^n, V_j^n. Como es bien conocido, los esquemas predictor-corrector combinan dos métodos numéricos. Primero un esquema explícito de Adams-Bashford de tercer orden se emplea para calcular una predicción de V y luego un esquema implícito Adams-Moulton de cuarto orden se aplica para obtener un valor corregido.

La etapa predictor explícita está dada por

$$V_j^{n+1} = V_j^n + \frac{\Delta t}{12}(23F_j^n - 16F_j^{n-1} + 5F_j^{n-2}), \tag{17}$$

donde los valores en los niveles $n-2,\ n-1,\ n$ son conocidos. Además, usamos la notación $F_j^n = F(u_j^n)$. Hacemos las siguientes observaciones sobre este paso:

La derivada de primer orden u_ξ (en la ecuación (16)) se aproxima mediante la fórmula de cuarto orden

$$u_\xi(\xi_j) \approx \frac{8(u_{j+1} - u_{j-1}) + u_{j-2} - u_{j+2}}{12\Delta\xi} + O(\Delta\xi^4), \tag{18}$$

en puntos interiores tales que $3 \leq j \leq J-2$. En puntos de frontera usamos las aproximaciones de cuarto orden

$$
\begin{aligned}
u_\xi(\xi_1) &\approx \frac{-3u_5+16u_4-36u_3+48u_2-25u_1}{12\Delta\xi}+O(\Delta\xi^4),\\
u_\xi(\xi_2) &\approx \frac{u_5-6u_4+18u_3-10u_2-3u_1}{12\Delta\xi}+O(\Delta\xi^4),\\
u_\xi(\xi_{J-1}) &\approx \frac{3u_J+10u_{J-1}-18u_{J-2}+6u_{J-3}-u_{J-4}}{12\Delta\xi}+O(\Delta\xi^4),\\
u_\xi(\xi_J) &\approx \frac{25u_J-48u_{J-1}+36u_{J-2}-16u_{J-3}+3u_{J-4}}{12\Delta\xi}+O(\Delta\xi^4).
\end{aligned}
$$

Note que para evaluar la elevación de la onda u_j^{n+1}, debe resolverse la ecuación diferencial ordinaria (en el espacio)

$$u-\beta u_{\xi\xi}=V, \tag{19}$$

la cual es forzada por el término V el cual es conocido. La ecuación anterior da lugar a un problema del tipo Sturm-Liouville lo cual es típico en el análisis de ecuaciones del tipo KdV. La solución está dada por

$$u(\xi,t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\beta}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\sqrt{\frac{1}{\beta}}|x-s|}V(s,t)ds. \tag{20}$$

Sin embargo, para un cálculo numérico más eficiente, en lugar de computar la convolución en la fórmula (20), la ecuación (19) se discretiza directamente por la aproximación de segundo orden

$$u_j^{n+1}-\beta\left(\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta\xi^2}\right)=V_j^{n+1},$$

para $2\le j\le J-1$.

Para computar los valores de frontera u_1^{n+1}, u_J^{n+1}, η_1^{n+1} and η_J^{n+1} en el nivel $n+1$ usamos las condiciones de radiación (B. Engquist y A. Majda [6])

$$
\begin{aligned}
u_t-u_\xi &= 0, \quad \text{en } \xi=\xi_1,\\
u_t+u_\xi &= 0, \quad \text{en } \xi=\xi_J.
\end{aligned} \tag{21}
$$

El propósito de estas condiciones es absorber las ondas que llegan a los extremos del dominio computacional. Por lo tanto, el canal computacional no tiene que ser tan largo. Esto ahorra tiempo de computación porque se necesitan menos nodos en la discretización.

En conclusión, para pasar de la variable intermedia V a la elevación del fluido u, debe resolverse un sistema tridiagonal de dimensión $J-2$ x $J-2$ donde la matriz del sistema tiene la siguiente estructura:

$$\begin{pmatrix} \Delta\xi^2+2\beta & -\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta & \Delta\xi^2+2\beta & -\beta & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & -\beta & \Delta\xi^2+2\beta & -\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & -\beta \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta & \Delta\xi^2+2\beta \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Notamos que para resolver este sistema lineal sólo es necesario aplicar una descomposición LU en el punto de partida. Esta descomposición puede almacenarse para usarse en cada paso de tiempo.

Una vez que se computan las predicciones de los valores de u_j^{n+1}, el campo F_j^{n+1} se obtiene de la ecuación (16). Los valores corregidos se calculan mediante el esquema implícito

$$V_j^{n+1} = V_j^n + \frac{\Delta t}{24}(9F_j^{n+1} + 19F_j^n - 5F_j^{n-1} + F_j^{n-2}), \qquad (23)$$

donde las cantidades en el nivel $n+1$ se computan por iteración usando los valores obtenidos en la etapa predictor como valores iniciales. La elevación de la onda u_j^{n+1} se calcula de V_j^{n+1} usando la ecuación (19) como en el paso predictor. El proceso iterativo se detiene cuando el error relativo entre dos valores sucesivos del corrector u^{n+1} y $u^{(n+1)^*}$ satisface

$$\Delta u^{n+1} = \frac{\sum_j \left| u_j^{n+1} - u_j^{(n+1)^*} \right|}{\sum_j \left| u_j^{n+1} \right|} < tol.$$

En los experimentos numéricos una tolerancia de $tol = 0.001$ se consigue con sólo una iteración. Note que al menos tres niveles de tiempo tienen que ser conocidos para inicializar el esquema. Para esta tarea emplearemos el método de Runge-Kutta de cuarto orden dado por

$$V^{n+1} = V^n + \frac{\Delta t}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \qquad (24)$$

donde

$$
\begin{aligned}
K_1 &= F(u^n), \\
K_2 &= F(u^n + (1/2)\Delta t K_1), \\
K_3 &= F(u^n + (1/2)\Delta t K_2), \\
K_4 &= F(u^n + \Delta t K_3),
\end{aligned}
$$

y

$$V^n = (V_1^n, V_2^n, ..., V_J^n), u^n = (u_1^n, u_2^n, ..., u_J^n).$$

Puesto que solamente un sistema lineal tiene que resolverse en cada iteración encontramos que el esquema presentado es muy eficiente y barato. Fue implementado usando el paquete MATLAB 6.0 donde tenemos a la mano rutinas vectorizadas para tratar matrices esparsas de gran tamaño. Además, su costo computacional crece aproximadamente de manera lineal con los tamaños de las mallas espacial o temporal.

5 Experimentos numéricos

En esta sección presentamos un conjunto de simulaciones numéricas usando el esquema descrito en la sección 4. El objetivo es evaluar el desempeño del esquema numérico en diferentes regímenes, i.e., para distintos valores de los parámetros de no linealidad α y de dispersión β. Para este fin empleamos la solución de onda solitaria (13) y la solución explícita (5) en el caso lineal obtenidas en las secciones 2 y 3.

5.1 Régimen lineal ($\alpha = 0$), débilmente dispersivo ($0 < \beta << 1$)

En el primer experimento tomamos un valor de dispersión pequeño $\beta = 0.002$. El pulso inicial (en $t = 0$) es una Gaussiana con amplitud uno de la forma

$$u(\xi, 0) = f(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{\epsilon}}, \tag{25}$$

donde el parámetro $\epsilon > 0$ controla la longitud del soporte efectivo de la Gaussiana. Aquí tomamos $\epsilon = 0.3$. En la figura 1 comprobamos que la solución numérica en el tiempo $t = 40$ coincide con la solución exacta (5) en el intervalo [20,50]. Los parámetros numéricos son $J = N = 2500$ y el dominio computacional es [-5,50]. Las oscilaciones en el intervalo [30,38] son debidas al término dispersivo $\beta u_{\xi\xi t}$ presente en la ecuación BBM (c.f. ecuación (6)). Encontramos que el esquema numérico modela muy bien las características dispersivas de la ecuación. Además, damos evidencia de la estabilidad del esquema, i.e., que la solución numérica mantiene su precisión en intervalos largos de tiempo. Las condiciones de radiación (21) absorben eficientemente las ondas que salen a través de las fronteras del dominio computacional y controlan las reflecciones producidas por las mismas.

En la figura 2 aumentamos el parámetro de dispersión a $\beta = 0.02$. Observe que la Gaussiana se dispersa más rápidamente. En efecto, en $t = 20$ la cola oscilatoria que sigue el pulso principal es más extensa que en el experimento anterior y la amplitud inicial del pulso ha disminido aproximadamente en un 50 % (compare con la onda en la figura 1). En la sección 2 establecimos que la amplitud del frente de onda decae aproximadamente como $1/(3t\beta)^{1/3}$ cuando $t \to \infty$ (c.f. ecuación (6)). Esto es consistente con los resultados que hemos obtenido.

Figura 1: Elevación de la onda $u(\xi, t)$ según la ecuación BBM en $t = 40$. Línea contínua: solución numérica. Línea punteada: solución exacta (5). Parámetros del modelo: $\alpha = 0$, $\beta = 0.002$. Este pequeño valor de β es suficiente para afectar la forma de la Gaussiana inicial.

Figura 2: Elevación de la onda $u(\xi, t)$ en $t = 20$. Línea contínua: solución numérica. Línea punteada: solución exacta (5). Parámetros del modelo: $\alpha = 0$, $\beta = 0.02$.

5.2 Régimen débilmente no lineal ($0 < \alpha << 1$), débilmente dispersivo ($0 < \beta << 1$)

En la anterior sección todos los experimentos se dan en el régimen lineal. En lo que sigue consideramos efectos no lineales en la ecuación BBM. La perturbación inicial es de nuevo una Gaussiana de la forma (25). Como se espera, conforme el parámetro α aumenta, la solución no lineal se desvía de la solución (5). En la figura 3 comparamos la solución numérica no lineal para $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.002$ con la solución (5) para el mismo valor de dispersión. Este experimento proporciona evidencia numérica de que la presencia del término no lineal altera el mecanismo de dispersión lineal de la ecuación BBM. Como consecuencia, la amplitud del pulso decrece más lentamente y la cola dispersiva que sigue al pulso principal tarda más tiempo en desarrollarse.

5.3 Ondas solitarias

En esta sección analizamos la capacidad del esquema numérico para describir efectos conjuntos de dispersión y no linealidad en el modelo BBM.

Figura 3: Elevación de la onda $u(\xi, t)$ en $t = 40$. Línea contínua: solución numérica para $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.002$. Línea punteada: solución exacta (5) para $\alpha = 0$ y $\beta = 0.002$.

En particular estamos interesados en las soluciones de onda solitaria encontradas en la sección 3. Para confirmar la precisión del esquema realizamos una serie de experimentos tomando $\Delta t = 0.001$ (tamaño paso tiempo) fijo y $\Delta\xi = 60/2^k$ (tamaño paso espacio), alternativamente usando $k = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$. Medimos en cada caso el error relativo $\|u_e - u_{num}\|_\infty / \|u_e\|_\infty$ entre la onda solitaria exacta u_e en (13) y la correspondiente solución numérica u_{num}. Los resultados se muestran en la tabla 1. Allí también se incluyen los tiempos de computación en MATLAB 6.0 de cada simulación. Como se puede ver, el costo computacional aproximadamente se duplica cuando el número de nodos en el espacio se duplica. Los valores de los parámetros del modelo son $\alpha = \beta = 0.03$. Los errores disminuyen cuando se refina la malla espacial lo cual muestra la convergencia en este caso de la solución numérica a la solución exacta.

En el próximo experimento, en la figura 4 superponemos la onda solitaria exacta para la ecuación BBM dada en (13), con la simulación numérica no lineal en $t = 40$ para $\alpha = \beta = 0.03$. En este caso, la perturbación inicial es $f(\xi) = ASech^2(B\xi)$, donde las constantes A y B fueron definidas en la sección 3. Los parámetros numéricos son $J = 2500$

k	Error relativo	Tiempo de cómputo (seg)
7	2.1e-4	1.2
8	7e-6	1.8
9	5.6e-6	2.8
10	1.6e-6	5.2
11	4.2e-7	9.5
12	1.1e-7	19.3
13	9e-8	43.0

Tabla 1: Error relativo $\|u_e - u_{num}\|_\infty / \|u_e\|_\infty$ entre la solución exacta u_e en (13) y la solución numérica u_{num}.

$N = 2000$ y el dominio computacional es el intervalo [-15,60]. Observe que estas soluciones coinciden con alta precisión. En particular, no se observa disipación numérica en la solución obtenida, la cual conserva su forma y se propaga con velocidad aproximadamente constante $C \approx 1.01$. Como indicamos antes, la presencia de los términos no lineal y dispersivo en el modelo BBM es lo que hace posible que existan soluciones de onda solitaria. Corroboramos este aspecto en figura 5 donde presentamos la solución numérica en $t = 40$ con $\beta = 0$. Como perturbación inicial tomamos la onda solitaria (13) con $\alpha = \beta = 0.07$. Observe que en este caso la solución no mantiene su forma y se inclina hacia adelante. La razón es que la velocidad de las partículas que están en la cresta de la onda es mayor que aquellas próximas a su base. Si la situación persiste, en tiempo finito la solución deja de existir en el sentido clásico y se forma un choque. Esto ya era esperado debido a que la ecuación BBM sin dispersión ($\beta = 0$) se convierte en la ecuación de Burgers en una dimensión.

6 Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado numéricamente las soluciones de la ecuación BBM a través de un esquema de diferencias finitas de alta precisión. La discretización en el tiempo combina una etapa predictor explícita de tercer orden y un esquema corrector implícito de cuarto orden. Las derivadas de primer orden en el espacio se discretizan a cuarto orden. La capacidad del esquema propuesto para modelar soluciones de un modelo dispersivo tal como la ecuación BBM fue puesta a prueba a través de varios experimentos numéricos para diferentes valores de los

Figura 4: Onda solitaria de la ecuación BBM en $t = 40$. Línea contínua: solución numérica. Línea punteada: solución exacta (13). Parámetros del modelo: $\alpha = 0.03$, $\beta = 0.03$.

parámetros de interés. Se dió evidencia numérica de la estabilidad, precisión y convergencia de la solución numérica en el régimen lineal usando la solución exacta (5) y en el régimen débilmente no lineal, débilmente dispersivo empleando la solución de onda solitaria (13). No se observó disipación numérica ni reflecciones provenientes de las fronteras del dominio computacional. Esto indica que las condiciones de radiación (21) funcionan correctamente. El esquema puede ser adaptado para resolver otras ecuaciones que tengan términos dispersivos de la forma $u_{\xi\xi t}$. El código es flexible y con pequeños ajustes pueden implementarse también condiciones de frontera periódicas o condiciones apropiadas para modelar ondas en un canal finito de extremos L_1, L_2, tales como $u(L_1, t) = f(t)$, $u(L_2, t) = g(t)$.

Figura 5: La onda solitaria inicial (13) no mantiene su forma en ausencia de dispersión ($\beta = 0$) en el modelo BBM. Los parámetros restantes del modelo son: $\alpha = 0.07$ y $t = 40$.

Referencias

[1] T.B. Benjamin. The stability of solitary waves. *Proc. Royal Soc. London* A 338, pp. 153-183, 1972.

[2] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philos. Trans. Roy. Soc. London* Ser. A 272, no. 1220, pp. 47-78, 1972.

[3] J.L. Bona. On the stability theory of solitary waves. *Proc. Royal Soc. London* A 344, pp. 363-374, 1975.

[4] J.L. Bona, W.G. Pritchard, L.R. Scott. A comparison of solutions of two model equations for long waves. *Lectures in Applied Mathematics* vol. 20, pp. 235-267, 1983.

[5] E.O. Brigham. *The Fast Fourier Transform and its Applications*. Prentice Hall, 1988.

[6] B. Engquist, A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.* 31 (139), pp. 629-651, 1977.

[7] J.C. Muñoz Grajales, A. Nachbin. *Dispersive wave attenuation and refocusing due to disordered orographic forcing*, por aparecer en SIAM J. Appl. Math., 2003.

[8] J.C. Muñoz Grajales, A. Nachbin. *Stiff microscale forcing and solitary wave refocusing*, sometido para publicación SIAM Multiscale Modeling and Simulation, 2003.

[9] J.C. Muñoz Grajales, A. Nachbin. *A new set of Boussinesq equations for variable depth*. En preparación

[10] G. Wei, J. Kirby. Time-Dependent Numerical Code for Extended Boussinesq Equations. *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 121, No. 5, pp. 251-261, 1995.

Dirección del autor: Juan Carlos Muñoz Universidad del Valle, A.A. 25360, Cali, Colombia, jcarlmz@yahoo.com