

Capítulo 3

Variables Aleatorias

3.1. Distribuciones univariantes

Este capítulo lo empezamos definiendo uno de los conceptos más importantes en la teoría de la probabilidad que es el de *variable aleatoria*. Luego enunciamos propiedades y teoremas entorno a este concepto.

Definición 3.1 Una *variable aleatoria*¹ es una función sobre el espacio muestral que asigna a cada punto de éste un número.

Una variable aleatoria (v.a.) generalmente se denota por una letra mayúscula.

Definición 3.2 Sea $A \subset \mathbb{R}$ y sea $\Pr\{X \in A\}$ la probabilidad de que el valor de X pertenezca al subconjunto A . Y sea, además, s un resultados posible del experimento, entonces $\Pr\{X \in A\}$ es igual a:

$$\Pr\{X \in A\} := \Pr\{s : X(s) \in A\}.$$

Definición 3.3 Se dice que una variable aleatoria X tiene una **distribución discreta** si X sólo puede tomar un número finito k de valores distintos x_1, \dots, x_k o, a lo sumo, una sucesión infinita de valores distintos x_1, x_2, \dots . Si una variable aleatoria X tiene una distribución discreta, la función de probabilidad (f.p.) de X se define como la función f_X tal que para cualquier número real x ,

$$f_X(x) := \Pr\{X = x\}.$$

¹O variable estocástica.

Definición 3.4 Se dice que una variable aleatoria X tiene una **distribución continua** si existe una función no negativa f_X , definida sobre la recta real, tal que para cualquier intervalo A ,

$$\Pr(X \in A) := \int_A f_X(x) dx.$$

La función f_X se denomina **función de densidad de probabilidad** (f.d.p.) de X .

Toda f.p. y f.d.p. debe satisfacer los siguiente:

- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad \text{o} \quad \sum_x f_X(x) = 1$

Definición 3.5 La **función de distribución** F_X de una variable aleatoria X es una función definida como:

$$F_X(x) := \Pr\{X \leq x\} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Abreviamos la función de distribución como f.d.

Además observamos que:

- F_X está definida sobre \mathbb{R} .
- $F_X(x) \in [0, 1] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Además de la definición de $F_X(x)$, resulta que la f.d. de cualquier variable aleatoria X debe tener las tres propiedades siguientes:

Propiedad 3.1 Las tres propiedades que cumple $F_X(x)$ son:

P1 La función $F_X(x)$ es no decreciente a medida que x crece; esto es, si $x_1 < x_2$, entonces $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.

P2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1.$

P3 Una f.d. siempre es continua por la derecha; esto es, $F_X(x) = F_X(x^+)$ en todo punto x .

Se deduce de la propiedad 3 que para cualquier punto x en el que $F_X(x)$ da un salto,

$$F_X(x^+) = F_X(x) \quad \text{y} \quad F_X(x^-) < F_X(x).$$

También vemos que una f.d. no necesariamente es continua, y en caso de ser continua en x cumple con:

$$F_X(x^-) = F_X(x^+) = F_X(x) .$$

Conociendo la f.d. de una v.a., podemos calcular probabilidades para ciertos intervalos. Obsérvense los siguientes teoremas: distintos de intervalos.

Teorema 3.1 *Para cualquier valor x ,*

$$\Pr(X > x) = 1 - F_X(x).$$

Teorema 3.2 *Para cualesquiera valores concretos x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$,*

$$\Pr(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

Teorema 3.3 *Para cualquier valor x ,*

$$\Pr(X < x) = F_X(x^-).$$

Teorema 3.4 *Para cualquier valor x ,*

$$\Pr(X = x) = F_X(x^+) - F_X(x^-).$$

Además también tenemos:

- Para una distribución discreta:

$$F_X(x) = \sum_{u \leq x} f_X(u)$$

- Para una distribución continua:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) \, du .$$

También para una distribución continua:

$$F'_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x) ,$$

lo que hace que sea indiferente dar su f.d.p. o f.d.

3.2. Distribuciones bivariantes

Definición 3.6 La distribución de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias se denomina **distribución bivalente**.

Definición 3.7 La **función de probabilidad conjunta** de X e Y se define como la función $f_{X,Y}$ tal que para cualquier punto (x, y) del plano xy ,

$$f_{X,Y}(x, y) := \Pr(X = x, Y = y) .$$

Y:

$$\Pr[(X, Y) \in A] := \sum_{(x_i, y_i) \in A} f_{X,Y}(x_i, y_i).$$

Definición 3.8 Se dice que dos variables aleatorias X e Y tienen una **distribución continua conjunta** si existe una función no negativa $f_{X,Y}$ definida sobre todo el plano xy tal que para cualquier subconjunto A del plano,

$$\Pr[(X, Y) \in A] := \int_A \int f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy$$

La función $f_{X,Y}$ se denomina **función de densidad de probabilidad conjunta**, o f.d.p. conjunta, de X e Y .

Toda f.p. o f.d.p. conjunta cumple con:

- $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$
- $\sum_{(x_i, y_i)} f_{X,Y}(x_i, y_i) = 1 \quad \text{y} \quad \int \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x_i, y_i) = 1$

Definición 3.9 La **función de distribución conjunta** de dos variables aleatorias X e Y se define como:

$$F_{X,Y}(x, y) := \Pr(X \leq x, Y \leq y) \quad \text{para } x, y \in \mathbb{R} .$$

Si la f.d. conjunta de dos v.a., X e Y , es $F_{X,Y}$, entonces la probabilidad de que $(X, Y) \in \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \subset \mathbb{R}^2$, siendo $a < b$ y $c < d$, se determina del siguiente modo:

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(a < X \leq b, c < Y \leq d) &= \Pr(a < X \leq b, Y \leq d) - \Pr(a < X \leq b, Y \leq c) \\ &= [\Pr(X \leq b, Y \leq d) - \Pr(X \leq a, Y \leq d)] \\ &\quad - [\Pr(X \leq b, Y \leq c) - \Pr(X \leq a, Y \leq c)] \\ &= F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Para $x \in \mathbb{R}$, la f.d. F_X de la v.a. X se obtiene de la f.d. conjunta $F_{X,Y}$ como sigue:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(X \leq x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \Pr(X \leq x, Y \leq y) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) \end{aligned}$$

También:

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) \quad \text{para } y \in \mathbb{R}.$$

Además:

- Para una distribución discreta:

$$F_{X,Y}(x, y) := \sum_{u \leq x, v \leq y} f_{X,Y}(u, v)$$

- Para una distribución continua:

$$F_{X,Y}(x, y) := \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, v) \, du \, dv$$

Obtenemos la f.d.p. conjunta haciendo:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ en el que exista esta derivada de segundo orden.

Distribuciones marginales

Sea que X y Y tienen una distribución conjunta, con f.p. o f.d.p. conjunta $f_{X,Y}$, sus f.p. y f.d.p. marginales son:

- Para distribuciones conjuntas discretas:

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \sum_y \Pr(X = x, Y = y) = \sum_y f_{X,Y}(x, y)$$

- Para distribuciones conjuntas continuas:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \, dy \quad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

El método es análogo para obtener $f_Y(y)$ en ambas distribuciones.

Variables aleatorias independientes

Definición 3.10 *Se dice que dos variables aleatorias X e Y son **independientes** si, para dos conjuntos cualesquiera A y B de números reales,*

$$\Pr(X \in A, Y \in B) = \Pr(X \in A) \Pr(Y \in B) \quad (3.2)$$

De la definición anterior se deduce que si X y Y son v.a. independientes, entonces los sucesos $\{X \in A\}$ y $\{Y \in B\}$ son independientes. Además:

$$\Pr(X \leq x, Y \leq y) = \Pr(X \leq x) \Pr(Y \leq y).$$

De lo anterior: dos variables aleatorias X e Y son independientes si, y sólo si:

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

También tenemos que X y Y son independientes si, y sólo si, se satisface:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \text{para } x, y \in \mathbb{R}.$$

3.3. Transformación de variables aleatorias bidimensionales

Sea una variable aleatoria bidimensional (X, Y) , con f.d. $F_{X,Y}(x, y)$, obtenemos una v.a. bidimensional (U, V) mediante la transformación:

$$U = U(X, Y)$$

$$V = V(X, Y)$$

de modo que $(U, V) \in T$ sí y sólo sí $(X, Y) \in S$.

Además se verifica:

$$\Pr[(U, V) \in T] = \Pr[(X, Y) \in S]$$

lo que implica que la f.d. de (U, V) , $F_{U,V}$, queda determinada por la f.d. de (X, Y) , $F_{X,Y}(x, y)$, de igual modo el campo de variación.

Muchas veces no queremos hacer una transformación a dos variables sino sólo a una, es ahí donde hemos de utilizar una *variable auxiliar*.

Supongamos que la variable que nos interesa es U , entonces hallamos la distribución de (U, V) , y luego obtenemos la marginal para U .

Variables aleatorias bidimensionales discretas

Cuando la variable bidimensional es discreta

$$\Pr(U = u, V = v) = \Pr[(X, Y) \in S] = \sum_{(x,y) \in S} \Pr(X = x, Y = y).$$

Variables aleatorias bidimensionales continuas

De la variable bidimensional (X, Y) con f.d.p. conjunta $f_{X,Y}(x, y)$, definida sobre $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, y mediante la transformación biunívoca

$$U = U(X, Y)$$

$$V = V(X, Y)$$

formamos otra variable bidimensional (U, V) cuya f.d.p. conjunta, $f_{U,V}(u, v)$, hemos de hallar. Para ello, calculamos el elemento diferencial conjunto de probabilidad de esta última variable

$$\Pr(u < U \leq u + du, v < V \leq v + dv) = f_{U,V}(u, v) du dv.$$

Ahora vamos a suponer que es posible encontrar una transformación inversa, obteniendo (X, Y) en función de (U, V) . De este modo obtenemos:

$$\begin{aligned}x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v)\end{aligned}$$

y suponemos, también, la existencia de derivadas parciales continuas de las variables x e y respecto a u y v , siendo el Jacobiano de la transformación inversa

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

finito y distinto de cero en el campo de variación de (U, V) .

En estas condiciones, el elemento diferencial conjunto de probabilidad

$$f_{U,V}(u, v) \, du \, dv = f_{X,Y}[x(u, v), y(u, v)] |J| \, dx \, dy$$

y la f.d.p. conjunta de (U, V) :

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}[x(u, v), y(u, v)] |J|.$$

Por último hemos de hallar el campo de variación conjunto de la nueva variable aleatoria (U, V) , debiendo tener presente que, a veces, el campo de una de las variables depende de la otra, lo que puede implicar alguna dificultad.

Ahora presentamos, una serie de transformaciones particulares:

$$\begin{aligned}U &= X + Y; \\ V &= X - Y; \\ V &= X \cdot Y; \\ U &= X/Y; \\ (U, V) &= (X + Y, X - Y)\end{aligned}$$

Suma de variables ($U = X + Y$)

La transformación da lugar a una sólo variable ($U = X + Y$) por lo que definimos una variable auxiliar como se ha indicado, $V = Y$, con lo cuál tenemos la variable aleatoria bidimensional (U, V)

$$U = X + Y$$

$$V = Y.$$

Expresamos la transformación en función de los valores de las variables

$$u = x + y$$

$$v = y$$

la transformación inversa es

$$x = u - v$$

$$y = v$$

y su Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

La f.d.p. conjunta de (U, V) es

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}[x(u, v), y(v)].$$

Una vez obtenida la f.d.p. conjunta $f_{U,V}(u, v)$ hallamos la de la v.a. U integrando la f.d.p. con respecto a la variable v

$$f_U(u) = \int_V f_{U,V}(u, v) \, dv.$$

Diferencias de variables ($V = X - Y$)

Consideramos la variable auxiliar $U = X$, siendo la transformación

$$\left. \begin{array}{l} U = X \\ V = X - Y \end{array} \right\} \begin{array}{l} u = x \\ v = x - y \end{array}$$

La transformación inversa es

$$x = u$$

$$y = u - v$$

y su Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1; \quad |J| = 1.$$

La f.d.p. conjunta de (U, V) es

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}[x(u), y(u, v)].$$

Hallamos la f.d.p. conjunta $f_{U,V}(u, v)$ donde se obtiene la de la variable V integrando la f.d.p. respecto a u

$$f_V(v) = \int_U f_{U,V}(u, v) \, du.$$

Producto de variables ($V = X \cdot Y$)

Consideramos la transformación

$$U = X$$

$$V = X \cdot Y$$

En otros términos,

$$u = x$$

$$v = x \cdot y$$

y su transformación inversa es

$$x = u$$

$$y = v/u$$

siendo el Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u}; \quad |J| = \frac{1}{|u|}.$$

La f.d.p. conjunta de (U, V) es

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}[x(u), y(u, v)] \frac{1}{|u|}$$

y la f.d.p. marginal de V es:

$$f_V(v) = \int_U f_{U,V}(u, v) \, du.$$

Cociente de variables ($U = X/Y$)

Definimos una nueva auxiliar $V = Y$, con lo cual tenemos la variable bidimensional (U, V)

$$U = X/Y$$

$$V = Y$$

Para que pueda llevarse a cabo esta transformación es preciso que la variable Y verifique $\{Y = 0\} = \emptyset$ o, lo que es equivalente, $\Pr(Y = 0) = 0$. La transformación inversa es

$$x = uv$$

$$y = v$$

y el Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v; \quad |J| = |v|.$$

La f.d.p. conjunta de (U, V) es

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}[x(u, v), y(v)]|v|$$

y la f.d.p. marginal de U

$$f_U(u) = \int_V f_{U,V}(u, v) dv.$$

Transformación de la variable bidimensional (X, Y) en otra bidimensional (U, V)

$$U = X + Y$$

$$V = X - Y$$

La transformación inversa es

$$x = \frac{u + v}{2}$$

$$y = \frac{u - v}{2}$$

y el Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}; \quad |J| = \frac{1}{2}$$

La f.d.p. conjunta de (U, V) es

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}[x(u, v), y(u, v)] \frac{1}{2} \quad .$$

3.4. Transformación de variables aleatorias n -dimensionales

Describiremos el caso continuo, el discreto es una extensión del bidimensional.

Una v.a. n -dimensional continua (X_1, X_2, \dots, X_n) mediante transformaciones continuas biunívocas genera otra variable aleatoria n -dimensional (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ Y_2 &= Y_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_n &= Y_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned}$$

Dado que las transformaciones son biunívocas podemos expresar las variables (X_1, X_2, \dots, X_n) en función de las (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ x_2 &= x_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

y suponemos que las derivadas parciales $\partial x_i / \partial y_j$ existen y son continuas, siendo el Jacobiano de la transformación

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

finito y distinto de cero en el campo de variación de las nuevas variables. La f.d.p. conjunta de (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) es continua, el elemento diferencial conjunto de probabilidad es igual a

$$f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \cdots dy_n = f_{X_1, \dots, X_n}[x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, \dots, y_n)] |J| dx_1 \cdots dx_n,$$

y la f.d.p. conjunta de (Y_1, \dots, Y_n)

$$f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = f_{X_1, \dots, X_n}[x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, \dots, y_n)] |J|.$$

En esta transformación realizada el número de nuevas variables es el mismo que el de las iniciales, n . Sin embargo, como se señaló en el caso bidimensional, cuando el número de nuevas variables es $m < n$ trabajaremos de forma similar a como se indicó con dos variables: introduciendo $n - m$ variables *auxiliares*, y la

f.d.p. conjunta de las m nuevas variables se obtiene integrando la f.d.p. conjunta n -dimensional respecto a las $n - m$ *auxiliares*.

Como caso particular, tenemos la transformación lineal:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

cuyo Jacobiano es

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y cuando la transformación es ortogonal $|J| = 1$.

3.5. Ejemplos

Ejemplo 3.1 Sea una v.a. bidimensional (X, Y) con la f.d.p.

$$f_{X,Y}(x, y) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad y \quad 0 \leq y \leq 1$$

Determinése la distribución de $U = X + Y$.

Solución. Hacemos

$$U = X + Y$$

$$V = Y$$

es decir,

$$u = x + y$$

$$v = y$$

con lo que

$$x = u - v$$

$$y = v$$

siendo $|J| = 1$, por tanto,

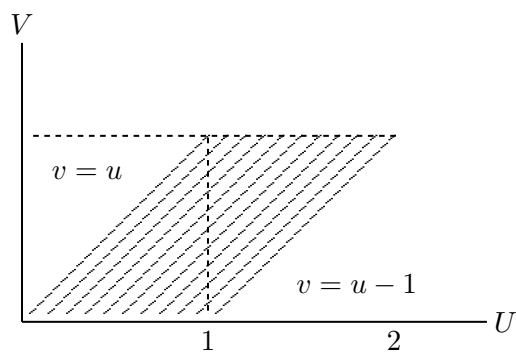
$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}[x(u, v), y(u, v)]|J| = 1$$

con el campo de variación, de acuerdo con el de X y Y :

$$0 \leq u - v \leq 1$$

$$0 \leq v \leq 1$$

Graficamente,



siendo

$$f_U(u) = \int_V f_{U,V}(u, v) \, dv$$

que para $0 \leq u \leq 1$

$$f_U(u) = \int_0^u 1 \, dv = [v]_0^u = u$$

y para $1 \leq u \leq 2$

$$f_U(u) = \int_{u-1}^1 1 \, dv = [v]_{u-1}^1 = 2 - u$$

es decir,

$$f_U(u) = \begin{cases} u & 0 \leq u \leq 1 \\ 2 - u & 1 \leq u \leq 2 \end{cases}$$

◀

Ejemplo 3.2 En la distribución bidimensional del ejemplo anterior, determinar la distribución de

$$V = X - Y$$

Solución. Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} U &= X \\ V &= X - Y \end{aligned}$$

es decir,

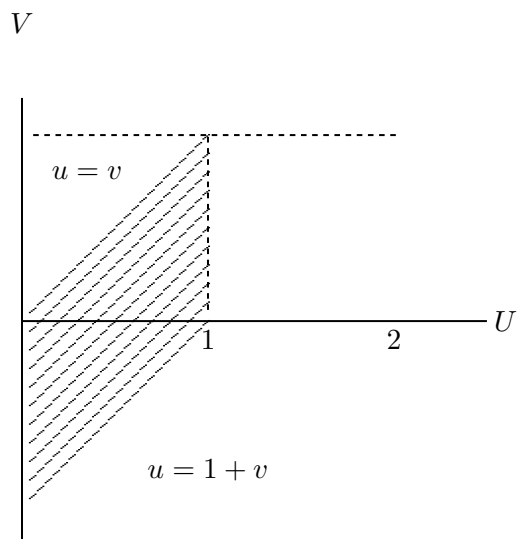
$$\begin{aligned} u &= x \\ v &= x - y \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= u - v \end{aligned}$$

siendo

$$|J| = 1.$$



Así

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}[x(u, v), y(u, v)]|J| = 1$$

con el campo de variación

$$0 \leq u \leq 1$$

$$0 \leq u - v \leq 1$$

Observemos la gráfica.

siendo

$$f_V(v) = \int_U f_{U,V}(u, v) du$$

que para $-1 \leq v \leq 0$

$$f_V(v) = \int_0^{1+v} 1 du = [u]_0^{1+v} = 1 + v$$

y para $0 \leq v \leq 1$

$$f_V(v) = \int_v^1 1 du = [u]_v^1 = 1 - v$$

es decir

$$f_V(v) = \begin{cases} 1 + v & -1 \leq v \leq 0 \\ 1 - v & 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

◀

Ejemplo 3.3 Con la misma distribución de los ejemplos anteriores, determínese la distribución de $V = X \cdot Y$

Solución. Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} U &= X \\ V &= X \cdot Y \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} u &= x \\ v &= x \cdot y \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= \frac{v}{u} \end{aligned}$$

siendo $|J| = \frac{1}{|u|}$.

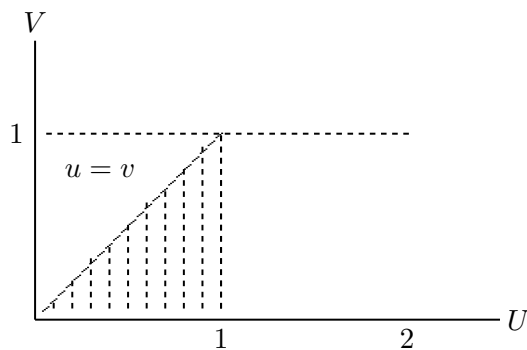
Por tanto

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}[x(u,v), y(u,v)]|J| = 1 \cdot \frac{1}{|u|} = \frac{1}{u}$$

con el campo de variación

$$\begin{aligned} 0 &\leq u \leq 1 \\ 0 &\leq \frac{v}{u} \leq 1 \end{aligned}$$

Observemos la gráfica.



siendo

$$f_V(v) = \int_U f_{U,V}(u,v) du = \int_v^1 \frac{1}{u} du = [\ln u]_v^1 = -\ln v \quad v \in [0, 1]$$

◀

Ejemplo 3.4 Dada la variable (X, Y) con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = 1 \quad x, y \in [0, 1]$$

determinése la distribución de

$$U = \frac{X}{Y}$$

Solución. Hacemos el cambio

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{y} \\ v &= y \end{aligned}$$

siendo la transformación inversa

$$x = u \cdot v$$

$$y = v$$

$$|J| = |v|$$

Por tanto

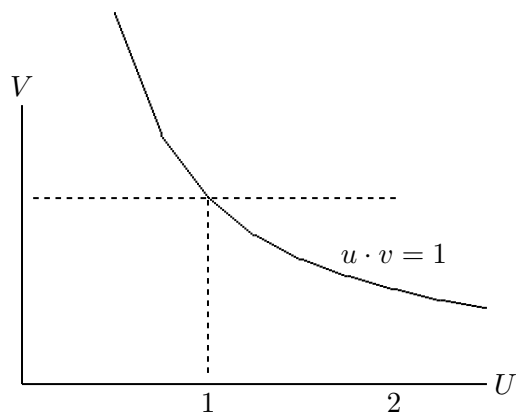
$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}[x(u, v), y(u, v)]|J| = 1 \cdot |v| = v$$

con el campo de variación

$$0 \leq uv \leq 1$$

$$0 \leq v \leq 1$$

Gráficamente es el área que se encuentra en el primer cuadrante y que además es intersección entre $v \leq 1$ y $v \leq \frac{1}{u}$.



siendo

$$f_U(u) = \int_V f_{U,V}(u, v) \, dv$$

que para $0 \leq u \leq 1$

$$f_U(u) = \int_0^1 v \, dv = \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

y para $u \geq 1$

$$f_U(u) = \int_0^{1/u} v \, dv = \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^{1/u} = \frac{1}{2u^2}$$

es decir

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & u \in [0, 1] \\ \frac{1}{2u^2} & u \in [1, \infty) \end{cases}$$



Ejemplo 3.5 Siendo (X, Y) una variable bidimensional con

$$f_{X,Y}(x, y) = 1 \quad x, y \in [0, 1]$$

determinése la distribución conjunta de (U, V) donde

$$U = X + Y$$

$$V = X - Y$$

Solución. La transformación inversa es:

$$x = \frac{u + v}{2}$$

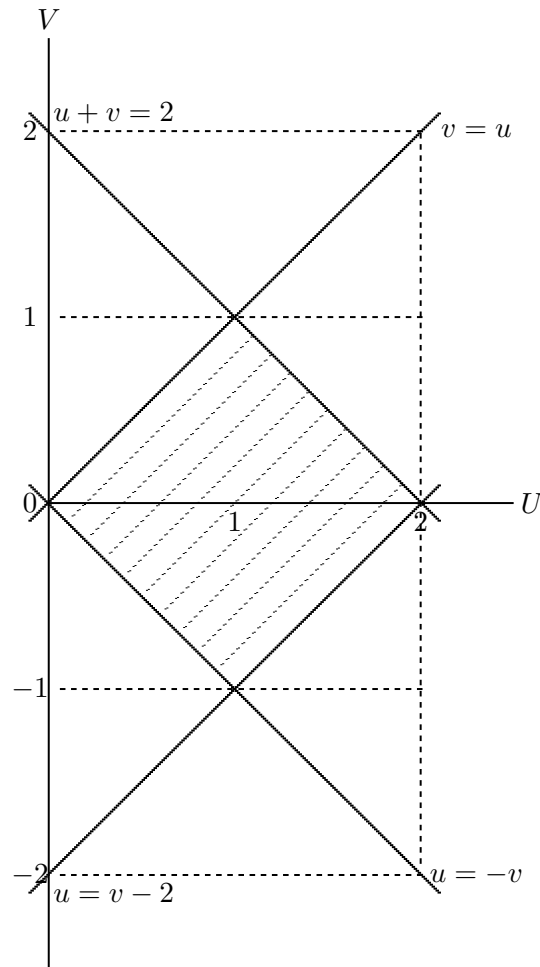
$$y = \frac{u - v}{2}$$

y el Jacobiano

$$|J| = \frac{1}{2}.$$

Por tanto

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}[x(u, v), y(u, v)]|J| = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



con el campo de variación

$$0 \leq \frac{u+v}{2} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{u-v}{2} \leq 1$$

Gráficamente, es el área que se encuentra dentro del rombo, i.e. dentro de todas las líneas.

Siendo sus densidades marginales calculadas anteriormente

$$f_U(u) = \begin{cases} u & u \in [0, 1] \\ 2 - u & u \in [1, 2] \end{cases}$$

$$f_V(v) = \begin{cases} 1+v & v \in [-1, 0] \\ 1-v & v \in [0, 1] \end{cases}$$

