

## Capítulo 5

# Función Característica

### 5.1. Definición

**Definición 5.1** Sea  $X$  una v.a.,  $\forall t \in \mathbb{R}$  se define la **función característica**  $\varphi_X$  de  $X$  como

$$\varphi_X(t) := E(e^{itX}).$$

Según la distribución de la v.a.  $X$  tenemos :

- Distribuciones de tipo discreto

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_x e^{itx} f_X(x).$$

- Distribuciones de tipo continuo

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx$$

donde:

$t$  es una variable real, no aleatoria

$i$  es la unidad imaginaria ( $i = \sqrt{-1}$ ).

## 5.2. Propiedades de la función característica

**Propiedad 5.1** *La función característica de una v.a.  $X$  existe siempre.*

El número complejo  $e^{itX}$  puede expresarse en forma binómica como:

$$e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$$

y, por tanto,

$$\varphi_X(t) := E(e^{itX}) = E(\cos tX) + iE(\sin tX).$$

Como las v.a.  $\cos tX$  y  $\sin tX$  están acotadas entre  $-1$  y  $1$ , siempre existirá su esperanza matemática y, como consecuencia,  $\varphi_X(t)$  siempre será calculable.

**Propiedad 5.2** *La función característica  $\varphi_X(t)$  particularizada en  $t = 0$  es igual a la unidad:*

$$\varphi_X(0) = E(e^{i \cdot 0 \cdot X}) = E(e^0) = E(1) = 1.$$

**Propiedad 5.3** *El módulo de  $\varphi_X(t)$  es siempre menor o igual que la unidad.*

Dado un número complejo  $a + bi$ , su módulo es

$$|a + bi| = +\sqrt{a^2 + b^2},$$

por tanto,

$$\begin{aligned} |\varphi_X(t)| &= |E(e^{itX})| \leq E(|e^{itX}|) \\ &= E(|\cos tX + i \sin tX|) \\ &= E\left(+\sqrt{\cos^2 tX + \sin^2 tX}\right) \\ &= E(1) = 1 \end{aligned}$$

y, de ahí,

$$|\varphi_X(t)| \leq 1.$$

**Propiedad 5.4** *La función característica en  $-t$  es el conjugado de  $\varphi_X(t)$ .*

En efecto

$$\begin{aligned} \varphi_X(-t) &= E(e^{i(-t)X}) = E(e^{-itX}) \\ &= E(\cos tX - i \sin tX) \\ &= E(\cos tX) - iE(\sin tX) \\ &= \overline{\varphi_X(t)}. \end{aligned}$$

**Propiedad 5.5** *La función característica es uniformemente continua en todo intervalo real de  $t$ .*

**Demostración.** Para cualquier  $h > 0$  y  $t \in \mathbb{R}$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
 |\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t+h)x} f_X(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx \right| \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} e^{ihx} - e^{itx}) f_X(x) dx \right| \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} (e^{ihx} - 1) f_X(x) dx \right| \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| |e^{ihx} - 1| f_X(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ihx} - 1| f_X(x) dx
 \end{aligned}$$

Por ser  $|e^{ihx} - 1| \leq |e^{ihx}| + 1 = 2$  y  $g(x) = 2$  integrable, se tiene por el teorema de convergencia dominada que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ihx} - 1| f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{h \rightarrow 0} |e^{ihx} - 1| f_X(x) dx = 0$$

de donde se deduce la continuidad uniforme de  $\varphi_X$  al ser  $|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)|$  menor que una cantidad que tiende a cero cuando  $h \rightarrow 0$ , independientemente de  $t$ .  $\triangleleft$

**Propiedad 5.6** *Si  $Y$  es una transformación lineal de la variable aleatoria  $X$ , es decir,  $Y = aX + b$ , entonces su función característica es:*

$$\begin{aligned}
 \varphi_Y(t) &= E(e^{itY}) = E(e^{it(aX+b)}) \\
 &= E(e^{itb} \cdot e^{itaX}) = e^{itb} \varphi_X(at).
 \end{aligned}$$

**Propiedad 5.7** *La función característica de la suma de v.a. independientes es igual al producto de las funciones características de cada una de esas variables aleatorias.*

**Demostración.**

$$\begin{aligned}
 \varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) &= E(e^{it(X_1+\dots+X_n)}) \\
 &= E(e^{itX_1} e^{itX_2} \dots e^{itX_n}) \\
 &= E(e^{itX_1}) \cdot E(e^{itX_2}) \dots E(e^{itX_n}) \\
 &= \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) \dots \varphi_{X_n}(t),
 \end{aligned}$$

recuérdese que la esperanza de un producto de v.a. independientes es igual al producto de las esperanzas individuales.  $\triangleleft$

**Corolario 5.1** Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son v.a. i.i.d., entonces,

$$\varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) = [\varphi_{X_i}(t)]^n.$$

**Propiedad 5.8** Si en una v.a.  $X$  existe el momento respecto al origen de orden  $n$ , entonces la  $\varphi_X(t)$  es derivable  $k$  veces, y estos momentos se pueden calcular a través de:

$$\alpha_k = E(X^k) = \frac{\left. \frac{\partial^k \varphi_X(t)}{\partial t^k} \right|_{t=0}}{i^k}. \quad (5.1)$$

**Demostración.** Si derivamos sucesivamente respecto a  $t$  la función característica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_X(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} E(e^{itX}) = E\left(\frac{\partial e^{itX}}{\partial t}\right) = E(iX e^{itX}) \\ \frac{\partial^2 \varphi_X(t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(e^{itX}) = E(i^2 X^2 e^{itX}) \\ &\vdots \\ \frac{\partial^k \varphi_X(t)}{\partial t^k} &= \frac{\partial^k}{\partial t^k} E(e^{itX}) = E(i^k X^k e^{itX}) \end{aligned}$$

que para  $t = 0$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_X(t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= iE(X) = i\alpha_1 \\ \left. \frac{\partial^2 \varphi_X(t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} &= i^2 E(X^2) = i^2 \alpha_2 \\ &\vdots \\ \left. \frac{\partial^k \varphi_X(t)}{\partial t^k} \right|_{t=0} &= i^k E(X^k) = i^k \alpha_k \end{aligned}$$

donde al despejar  $\alpha_k$  se obtiene la expresión (5.1).  $\triangleleft$

A un resultado similar se llegaría desarrollando  $e^{itX}$  por Taylor-Mac Laurin, obteniéndose el *desarrollo en serie de momentos de la función característica*:

$$\varphi_X(t) = 1 + \frac{it}{1!} \alpha_1 + \frac{(it)^2}{2!} \alpha_2 + \frac{(it)^3}{3!} \alpha_3 + \dots$$

y derivando posteriormente esta función polinómica.

**Teorema 5.1 (Teorema de inversión)** Si  $X$  es una v.a. con función de distribución  $F_X(x)$ , donde  $x_1 < x_2$  son dos puntos de continuidad de esta función, se demuestra que:

$$F_X(x_2) - F_X(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi_X(t) dt \quad (5.2)$$

si  $\varphi_X(t)$  es integrable para todo  $t$  real.

Nótese que el anterior teorema dice que es para  $x_1, x_2$  que son puntos de continuidad.

Como consecuencia inmediata del teorema anterior si, además,  $X$  es una variable aleatoria continua, la función de densidad se puede determinar a través de:

**Corolario 5.2 (Teorema de Inversión de Fourier)** Sea  $\varphi_X$  la función característica de la variable aleatoria  $X$ . Si  $\varphi_X$  es absolutamente integrable en  $\mathbb{R}$  entonces  $X$  es absolutamente continua. Además, la función de densidad de probabilidad  $f_X$  de  $X$  está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En resumen, este teorema nos permite encontrar la distribución de la v.a. siempre que conozcamos su función característica.

**Teorema 5.2 (Teorema de unicidad)** A toda función característica  $\varphi_X(t)$  le corresponde una y sólo una función de distribución.

**Demostración.** En efecto, haciendo en (5.2)  $x_2 = x$  y  $x_1 = z$ , y como

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} F(z) = 0$$

tendremos que la función de distribución queda determinada a través de

$$F_X(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow -\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-itz} - e^{-itx}}{it} \varphi_X(t) dt.$$

◁

**Propiedad 5.9 (Teorema de continuidad o teorema de Levy-Cramér)** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  una sucesión de variables aleatorias: la condición necesaria y suficiente para que su correspondiente sucesión de funciones de distribución  $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots$  converja hacia alguna función de distribución  $F(x)$ , es que la sucesión de funciones características, asociada a la sucesión de funciones

de distribución, converja a una función característica  $\varphi(t)$  que, por el teorema de unicidad, será la función característica de la función de distribución límite  $F(x)$ .<sup>1</sup>

La condición necesaria requiere que la función característica límite  $\varphi(t)$  sea la correspondiente a la función de distribución límite  $F(x)$ , lo que puede comprobarse, utilizando la notación de Stieljes, a continuación:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \\ &= \varphi(t)\end{aligned}$$

es decir,  $\varphi(t)$  es la función característica que le corresponde a  $F(x)$ , límite de la sucesión  $F_n(x)$ .

Por otra parte, la condición es suficiente ya que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ , por los teoremas de inversión y unicidad, a esa función  $\varphi(t)$  le corresponderá una y sólo una  $F(x)$  que será la función de distribución límite.

---

<sup>1</sup>Téngase en cuenta que una sucesión  $F_n(x)$  puede ser convergente y no converger hacia una función de distribución.

### 5.3. Funciones generatrices de momentos

Ya hemos dicho que la f.g.m. de una v.a. se define por

$$\psi_X(t) := E(e^{tX}) .$$

Y esta expresión ha de converger absolutamente, para garantizar la existencia de la f.g.m.

La principal diferencia entre  $\psi(t)$  y  $\varphi(t)$  es que la segunda está definida en el campo de los números complejos y por tanto siempre existe; y  $\phi(t)$  no siempre existe.

**Definición 5.2** *Llamamos **función cumulativa** al logaritmo natural de la función característica de una variable aleatoria  $X$ . Se representa por*

$$\Phi_X(t) := \ln \varphi_X(t).$$

Desarrollando la función característica en serie de Taylor en el origen, se tiene:

$$\varphi_X(t) = 1 + \frac{it}{1!}\alpha_1 + \frac{(it)^2}{2!}\alpha_2 + \frac{(it)^3}{3!}\alpha_3 + \dots$$

y de aquí que

$$\Phi_X(t) = \ln \varphi_X(t) = \ln \left[ 1 + \frac{it}{1!}\alpha_1 + \frac{(it)^2}{2!}\alpha_2 + \frac{(it)^3}{3!}\alpha_3 + \dots \right]$$

y como

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

resulta que:

$$\Phi_X(t) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(it)^h}{h!} \alpha_h - \frac{1}{2} \left[ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(it)^h}{h!} \alpha_h \right]^2 + \frac{1}{3} \left[ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(it)^h}{h!} \alpha_h \right]^3 - \dots$$

y agrupando los términos de igual grado, se tiene un desarrollo de la forma:

$$\Phi_X(t) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(it)^h}{h!} K_h$$

en donde los  $K_h$  que se denominan *semi-invariantes de Thiele* o *cumulantes*, están dados en función de los momentos no centrados por las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} K_1 &= \alpha_1 \\ K_2 &= \alpha_2 - \alpha_1^2 = \mu_2 \\ K_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = \mu_3 \\ K_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2 \\ K_5 &= \mu_5 - 10\mu_2\mu_3 \end{aligned}$$

Si  $K_r$  existe, se determina como:

$$K_r = \left| \frac{\partial^r \Phi_X(t)}{\partial t^r} \right|_{t=0}$$



### 5.4. Función característica bidimensional

**Definición 5.3** Dada la v.a. bidimensional  $(X, Y)$ , se define la función característica de esta variable como:

$$\varphi_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = E(e^{it_1 X + it_2 Y}) .$$

De ahí vemos que según la distribución de  $X$ , se tiene:

- Distribuciones de tipo discreto:

$$\varphi_{X,Y}(t_1, t_2) = \sum_x \sum_y e^{it_1 x + it_2 y} f_{X,Y}(x, y).$$

- Distribuciones de tipo continuo:

$$\varphi_{X,Y}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it_1 x + it_2 y} f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

Ahora mostraremos propiedades de esta función característica.

**Propiedad 5.10** Al igual que en caso unidimensional, como

$$e^{it_1 X + it_2 Y} = \cos(t_1 X + t_2 Y) + i \sin(t_1 X + t_2 Y)$$

$\varphi_{X,Y}(t_1, t_2)$  siempre será convergente, con lo que queda asegurada su existencia.

**Propiedad 5.11** Para  $t_1 = t_2 = 0$ ,

$$\varphi_{X,Y}(0, 0) = 1.$$

Pues,

$$\varphi_{X,Y}(0, 0) = E(e^{i \cdot 0 \cdot X + i \cdot 0 \cdot Y}) = E(e^0) = E(1) = 1.$$

**Propiedad 5.12** La función  $\varphi_{X,Y}(t_1, t_2)$  está acotada, siendo  $|\varphi_{X,Y}(t_1, t_2)| \leq 1$ , ya que el módulo de  $e^{it_1 X + it_2 Y}$  es:

$$|e^{it_1 X + it_2 Y}| = \sqrt{\cos^2(t_1 X + t_2 Y) + \sin^2(t_1 X + t_2 Y)} = 1.$$

**Propiedad 5.13** Si los momentos respecto al origen existen, estos se pueden calcular a partir de  $\varphi_{X,Y}(t_1, t_2)$ .

Pues , dado que

$$\frac{\partial^k \varphi_{X,Y}(t_1, t_2)}{\partial t_1^{k-j} \partial t_2^j} = E(i^k X^{k-j} Y^j e^{it_1 X + it_2 Y})$$

por tanto,

$$\left| \frac{\partial^k \varphi_{X,Y}(t_1, t_2)}{\partial t_1^{k-j} \partial t_2^j} \right|_{\substack{t_1=0 \\ t_2=0}} = E(i^k X^{k-j} Y^j) = i^k \alpha_{k-j,j}$$

como casos particulares:

$$\left| \frac{\partial \varphi_{X,Y}(t_1, t_2)}{\partial t_1} \right|_{\substack{t_1=0 \\ t_2=0}} = i \alpha_{10}$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_{X,Y}(t_1, t_2)}{\partial t_2} \right|_{\substack{t_1=0 \\ t_2=0}} = i \alpha_{01}$$

$$\left| \frac{\partial^2 \varphi_{X,Y}(t_1, t_2)}{\partial t_1^2} \right|_{\substack{t_1=0 \\ t_2=0}} = i^2 \alpha_{20}$$

$$\left| \frac{\partial^2 \varphi_{X,Y}(t_1, t_2)}{\partial t_2^2} \right|_{\substack{t_1=0 \\ t_2=0}} = i^2 \alpha_{02}$$

$$\left| \frac{\partial^2 \varphi_{X,Y}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{\substack{t_1=0 \\ t_2=0}} = i^2 \alpha_{11}$$

**Propiedad 5.14** La función característica  $\varphi_{X,Y}(t_1, t_2)$  es única. A cada función de distribución bidimensional le corresponde una y sólo una  $\varphi_{X,Y}(t_1, t_2)$ , y viceversa.

**Propiedad 5.15** Si  $\varphi_{X_1, X_2}(t_1, t_2)$  es la función característica de la variable aleatoria bidimensional  $(X_1, X_2)$ , dada la variable aleatoria  $X = X_1 + X_2$  entonces

$$\varphi_X(t) = \varphi_{X_1, X_2}(t, t).$$

Pues:

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E(e^{itX}) \\ &= E(e^{it(X_1+X_2)}) \\ &= E(e^{itX_1+itX_2}) \\ &= \varphi_{X_1, X_2}(t, t). \end{aligned}$$

Si, además,  $(X_1, X_2)$  son variables independientes:

$$\varphi_X(t) = \varphi_{X_1, X_2}(t, t) = \varphi_{X_1}(t) \varphi_{X_2}(t).$$

**Funciones características marginales**

Las funciones características marginales pueden obtener mediante:

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1, X_2}(t_1, 0) &= E(e^{it_1 X_1 + i \cdot 0 \cdot X_2}) = E(e^{it_1 X_1}) = \varphi_{X_1}(t_1) \\ \varphi_{X_1, X_2}(0, t_2) &= E(e^{i \cdot 0 \cdot X_1 + it_2 X_2}) = E(e^{it_2 X_2}) = \varphi_{X_2}(t_2)\end{aligned}$$

Si las variables aleatorias  $(X_1, X_2)$  son independientes, entonces:

$$\varphi_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = \varphi_{X_1}(t_1) \cdot \varphi_{X_2}(t_2) = \varphi_{X_1, X_2}(t_1, 0) \cdot \varphi_{X_1, X_2}(0, t_2).$$

Pues,

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2) &= E(e^{it_1 X_1 + it_2 X_2}) \\ &= E(e^{it_1 X_1} \cdot e^{it_2 X_2}) \\ &= E(e^{it_1 X_1}) \cdot E(e^{it_2 X_2}) \\ &= \varphi_{X_1}(t_1) \cdot \varphi_{X_2}(t_2) \\ &= \varphi(t_1, 0) \cdot \varphi(0, t_2).\end{aligned}$$

### 5.5. Función característica $n$ -dimensional

Una generalización de lo anterior es:

$$\varphi_{X_1, X_2, \dots, X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = E(e^{it_1 X_1 + it_2 X_2 + \dots + it_n X_n}).$$

Las funciones características marginales son:

$$\begin{aligned} \varphi_j(t_j) &= \varphi_{X_1, X_2, \dots, X_n}(0, 0, \dots, t_j, 0, \dots, 0) \\ \varphi_{jl}(t_j, t_l) &= \varphi_{X_1, X_2, \dots, X_n}(0, 0, \dots, t_j, 0, \dots, t_l, 0, \dots, 0) \\ \varphi_{jlk}(t_j, t_l, t_k) &= \varphi_{X_1, X_2, \dots, X_n}(0, 0, \dots, t_j, 0, \dots, t_l, 0, \dots, t_k, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \end{aligned}$$