

## Capítulo 7

# Convergencia

### 7.1. Desigualdad de Chebychev

Ahora mostramos dos desigualdades de gran importancia en estadística y probabilidad. Éstas son la desigualdad de Markov y la de Chebyshev.

**Teorema 7.1 (Desigualdad de Markov)** *Supóngase que  $X$  es una variable aleatoria tal que  $\Pr(X \geq 0) = 1$ . Entonces para cualquier número  $\epsilon > 0$ ,*

$$\Pr\{X \geq \epsilon\} \leq \frac{E(X)}{\epsilon}.$$

***Demostración.*** Damos la demostración para una distribución discreta, y para la continua la demostración es similar. Supongamos  $f_X(x)$  la f.p. de  $X$ . Así:

$$E(X) = \sum_x x f_X(x) = \sum_{x < \epsilon} x f_X(x) + \sum_{x \geq \epsilon} x f_X(x).$$

Por hipótesis  $X$  toma únicamente valores no negativos, así todos los términos de la suma son no negativos. Por tanto,

$$E(X) \geq \sum_{x \geq \epsilon} x f_X(x) \geq \sum_{x \geq \epsilon} \epsilon f_X(x) = \epsilon \Pr\{X \geq \epsilon\}.$$

◁

**Teorema 7.2 (Desigualdad de Chebyshev)** *Sea  $X$  una variable aleatoria para la cual  $\text{Var}(X)$  existe. Entonces para cualquier número concreto  $\epsilon > 0$ ,*

$$\Pr\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} \leq \frac{\text{Var}(X)}{\epsilon^2}$$

**Demostración.** Sea  $Y = [X - E(X)]^2$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \Pr\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} &= \Pr\{Y^{1/2} \geq \epsilon\} \\ &= \Pr\{Y \geq \epsilon^2\} \\ &\leq \frac{\text{Var}(X)}{\epsilon^2}. \end{aligned}$$

Obsérvese que hemos aplicado la desigualdad de Markov.  $\triangleleft$

Así, por ejemplo, si tenemos una v.a.  $X$  cuya  $\text{Var}(X) = \sigma^2$  y definimos  $\epsilon = 3\sigma$ , entonces por la desigualdad de Chebychev tenemos:

$$\Pr\{|X - E(X)| \geq 3\sigma\} \leq \frac{1}{9}.$$

Es decir, la probabilidad de que una v.a., cualquiera que sea, tiene una probabilidad máxima de  $1/9$  de diferir de su media en más de 3 desviaciones estándar. Claro, si conocemos la distribución de esta v.a. seguramente obtendremos una probabilidad menor.

## 7.2. Convergencia de variables aleatorias

Ahora daremos definiciones para cuatro tipos de convergencia: Siendo estas:

- Convergencia casi segura,
- Convergencia en probabilidad,
- Convergencia en distribución,
- Convergencia en media de orden  $r$ .

A partir de aquí supondremos que  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  están definidas todas en el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ .

### 7.2.1. Convergencia casi segura

**Definición 7.1** Una sucesión de variables aleatorias  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  *converge casi seguro*<sup>1</sup> a la v.a.  $X$  cuando se verifica:

$$\Pr \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \right\} = 1$$

denotaremos este tipo de convergencia como

$$X_n \xrightarrow{cs} X.$$

---

<sup>1</sup>Se denomina también convergencia con probabilidad 1.

Es decir, el que  $X_n \xrightarrow{cs} X$  implica que  $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \forall \omega \in \Omega$  excepto, a lo más, para un conjunto de valores con probabilidad cero.

Propiedades de la convergencia casi segura son:

- Si  $X_n \xrightarrow{cs} X$ ,
  - $X_n - X \xrightarrow{cs} 0$ .
  - Si  $c \in \mathbb{R}$ , con  $c \neq 0$ ,
 
$$cX_n \xrightarrow{cs} cX.$$
  - Si  $g(x)$  es una función real y continua
 
$$g(X_n) \xrightarrow{cs} g(X).$$
  - Si  $k \in \mathbb{R}^+$ 

$$X_n^k \xrightarrow{cs} X^k.$$
- Si  $X_n \xrightarrow{cs} X$  y  $Y_n \xrightarrow{cs} Y$ 
  - $X_n \pm Y_n \xrightarrow{cs} X \pm Y$ .
  - $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{cs} X \cdot Y$ .
  - $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{cs} \frac{X}{Y}$ , siempre que los cocientes estén definidos.
  - Si  $g(x, y)$  es una función real y continua
 
$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{cs} g(X, Y).$$
  - Si  $k, h \in \mathbb{R}^+$ 

$$X_n^k \cdot Y_n^h \xrightarrow{cs} X^k \cdot Y^h.$$

### 7.2.2. Convergencia en probabilidad

**Definición 7.2** Una sucesión de variables aleatorias  $\{X_n\}_{n \geq 1}$ , independientes o no, **converge en probabilidad** a la v.a.  $X$  cuando, para todo  $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{|X_n - X| \geq \epsilon\} = 0. \quad (7.1)$$

Denotaremos la convergencia en probabilidad <sup>2</sup> como

$$X_n \xrightarrow{p} X.$$

---

<sup>2</sup>También se utiliza la notación  $\text{plim } X_n = X$

Nótese que la ecuación (7.1) también puede sustituirse, considerando el suceso complementario,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{|X_n - X| \leq \epsilon\} = 1.$$

La convergencia en probabilidad implica la convergencia de la sucesión de las probabilidades de los sucesos  $\{|X_n - X| \geq \epsilon\}$ , mas no la convergencia de las variables  $X_n$  en el sentido matemático.

Propiedades de la convergencia en probabilidad son:

- Si  $X_n \xrightarrow{p} X$ ,
  - $X_n - X \xrightarrow{p} 0$ .
  - Si  $c \in \mathbb{R}^+$  con  $c \neq 0$ 

$$cX_n \xrightarrow{p} cX.$$
  - Si  $Y$  es variable aleatoria
 
$$X_n \cdot Y \xrightarrow{p} X \cdot Y.$$
  - Si  $g(x)$  es una función real y continua
 
$$g(X_n) \xrightarrow{p} g(X).$$
  - Si  $k \in \mathbb{R}^+$ 

$$X_n^k \xrightarrow{p} X^k.$$
- Si  $X_n \xrightarrow{p} X$  y  $Y_n \xrightarrow{p} Y$ 
  - $X_n \pm Y_n \xrightarrow{p} X \pm Y$ .
  - $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{p} X \cdot Y$ .
  - Si  $g(x, y)$  es una función real y continua
 
$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{p} g(X, Y).$$
  - Si  $k, h \in \mathbb{R}^+$ 

$$X_n^k \cdot Y_n^h \xrightarrow{p} X^k \cdot Y^h.$$
- Si  $X_n \xrightarrow{p} X$  y  $X_n \xrightarrow{p} Y$  se verifica que  $\Pr(X = Y) = 1$ .
- Si  $X_n \xrightarrow{p} a$  y  $Y_n \xrightarrow{p} b$ , siendo  $a, b \in \mathbb{R}$ 
  - $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{p} a \cdot b$ .
  - $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{p} \frac{a}{b}$ , si  $b \neq 0$ .

- La convergencia casi segura implica la convergencia en probabilidad

$$X_n \xrightarrow{cs} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{p} X$$

no siendo cierta, en general, la relación inversa.

### 7.2.3. Convergencia en distribución

**Definición 7.3** Una sucesión de variables aleatorias  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  con funciones de distribución  $\{F_n(x)\}_{n \geq 1}$ , **converge en distribución** a la v.a.  $X$ , con función de distribución  $F(x)$ , si y sólo si la sucesión  $\{F_n(x)\}_{n \geq 1}$  converge a  $F(x)$ , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

en todos los puntos de continuidad de  $F(x)$ . Designaremos esta convergencia por

$$X_n \xrightarrow{d} X.$$

Propiedades de la convergencia en distribución son:

- Si  $X_n \xrightarrow{d} X$ 
  - $X_n - X \xrightarrow{d} 0$ .
  - Si  $c \in \mathbb{R}$ ,
$$X_n + c \xrightarrow{d} X + c.$$
  - Si  $c \in \mathbb{R}$ , con  $c \neq 0$ ,
$$cX_n \xrightarrow{d} cX.$$
  - Si  $g(x)$  es una función real y continua
$$g(X_n) \xrightarrow{d} g(X).$$

- Si  $X_n \xrightarrow{d} X$  y  $Y_n \xrightarrow{d} c$ , donde  $c \in \mathbb{R}$ 
  - $X_n \pm Y_n \xrightarrow{d} X \pm c$ .
  - $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{d} cX$ , si  $c \neq 0$ .
  - $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{p} 0$ , si  $c = 0$ .
  - $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}$ , si  $c \neq 0$ .

Además, si  $X_n \xrightarrow{p} X$ , entonces  $X_n \xrightarrow{d} X$ . El recíproco, en general, no es cierto, sin embargo si  $X_n \xrightarrow{d} c$ , donde  $c \in \mathbb{R}$ , es cierto que  $X_n \xrightarrow{p} c$ .

### 7.2.4. Convergencia en media de orden $r$

**Definición 7.4** Una sucesión de variables aleatorias  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  **converge en media de orden<sup>3</sup>  $r$**  a la v.a.  $X$ ,  $X_n \xrightarrow{mr} X$ , si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E|X_n - X|^r = 0,$$

siendo  $E|X_n|^r$  y  $E|X|^r$  finitas.

Si existe el momento de orden  $r$  entonces existen todos los momentos de orden inferior, así, si  $s \leq r$

$$X_n \xrightarrow{mr} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{ms} X.$$

Un caso particular importante lo tenemos cuando  $r = 2$ , es decir, la convergencia en media cuadrática.

Propiedades de la convergencia en media cuadrática son: son las siguientes:

- Si  $X_n \xrightarrow{mc} X$ ,

$$E(X_n) \xrightarrow{mc} E(X) \quad \text{y} \quad E(X_n^2) \xrightarrow{mc} E(X^2),$$

y de ambas tenemos que

$$\text{Var}(X_n) \xrightarrow{mc} \text{Var}(X).$$

- La sucesión  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  converge en media cuadrática a la constante  $c$  si, y sólo si, se verifica las siguientes dos condiciones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = c; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) = 0.$$

- La convergencia en media cuadrática implica la convergencia en probabilidad, no siendo cierto el enunciado recíproco.

$$X_n \xrightarrow{mc} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{p} X.$$

- Si tenemos dos sucesiones  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  y  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  tales que

$$X_n \xrightarrow{mc} X \quad \text{y} \quad Y_n \xrightarrow{mc} Y,$$

entonces

$$E(X_n Y_n) \xrightarrow{mc} E(XY).$$

Así llegamos a

$$\text{Cov}(X_n, Y_n) \xrightarrow{mc} \text{Cov}(X, Y).$$

---

<sup>3</sup>O convergencia de momentos.

### 7.2.5. Relaciones entre los distintos tipos de convergencia

Se ha visto que unos tipos de convergencia implican a otros. Así resumimos estas relaciones mediante

$$\left. \begin{array}{l} \text{casi segura} \\ \text{en media cuadrática} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{en probabilidad} \Rightarrow \text{en distribución}$$

En el diagrama se podemos sustituir la convergencia en media cuadrática por la convergencia en media de orden  $r$ .

## 7.3. Leyes límite

Sea una sucesión de v.a.  $\{X_n\}_{n \geq 1}$ . El comportamiento asintótico de

$$\bar{X}_n := \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

recibe el nombre de Ley de los grandes números. Hablamos de ley débil si la convergencia es en probabilidad; y es ley fuerte si la convergencia es casi segura. Y si el límite tiende a una distribución normal, entonces hablaremos de teoremas de límite central.

**Definición 7.5** Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de v.a. tales que  $E(X_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ . Decimos que  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  obedece la **ley de los grandes números** si

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \frac{E(S_n)}{n}$$

donde  $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ .

**Definición 7.6** Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de v.a., tales que  $E(X_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$  y sea  $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ . Decimos que  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  obedece la **ley débil de los grandes números** si

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{p} 0 .$$

Si se tiene que

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{c.s.} 0 ,$$

entonces decimos que  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  obedece la **ley fuerte de los grandes números**.

### 7.3.1. Ley débil de los grandes números

**Teorema 7.3** Sea  $X_1, X_2, \dots$  una sucesión de v.a. i.i.d. Además  $E(X_i) = \mu < \infty$  y  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 > 0$ . Entonces para cada  $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right\} = 0.$$

Con lo que la sucesión obedece la ley débil de los grandes números.

**Demostración.** Tenemos

$$E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \mu \quad \text{y} \quad \text{Var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Aplicando la desigualdad de Chebyshev a la v.a.  $(X_1 + \dots + X_n)/n$  obtenemos

$$\Pr \left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right\} \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

que tiende a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ .  $\triangleleft$

### 7.3.2. Teorema del Límite Central

Este resultado fue establecido para una muestra aleatoria de una distribución de Bernoulli por A. de Moivre a principios del siglo XVIII. A principios de la década de 1920-1930, J.W.Lindeberg y P. Lévy dieron independientemente la demostración para una muestra aleatoria de una distribución arbitraria.

**Teorema 7.4 (Teorema del Límite Central, Lindeberg y Lévy)** Si las v.a.  $X_1, \dots, X_n$  (no degeneradas) constituyen una muestra aleatoria de tamaño  $n$  de una distribución con  $E(X_i) = \mu$  y  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ , entonces para cualquier número fijo  $x$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left[ \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{\text{Var} \bar{X}_n}} \leq x \right] = \Phi(x). \quad (7.2)$$

donde

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$



Nótese que el teorema anterior aplica para cualquier distribución, independientemente de si esta distribución es discreta o continua. Dicho de otro modo, el teorema anterior dice:

$$\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{\text{Var} \bar{X}_n}} \sim N(0, 1) \quad \text{aproximadamente.}$$

Por tanto

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{aproximadamente.}$$

O bien

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \sim N(0, 1) .$$

Por tanto

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \quad \text{aproximadamente.}$$

Dando otro enfoque, una sucesión de variables aleatorias  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  verifica el Teorema del Límite Central si la variable

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n$$

cumple la convergencia en distribución

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

siendo  $\text{Var}(S_n) < \infty$ .

Ahora demos la demostración de este teorema.

**Demostración.** Consideremos una sucesión de v.a. i.i.d.  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , con  $E(X_i) = \mu$  y  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ .

Definamos la variable  $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ , siendo  $E(S_n) = n\mu$  y  $\text{Var}(S_n) = n\sigma^2$ . Tipificando  $S_n$

$$Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

la variable  $Y_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$ .

Así:

$$\begin{aligned}
 Y_n &= \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i
 \end{aligned}$$

donde  $Y_i := X_i - \mu$  son i.i.d. y tiene la misma f.c.,  $\varphi_Y(t)$ , siendo  $E(Y) = 0$  y  $\text{Var}(Y) = \sigma^2$ .

La f.c. de una suma de v.a. independientes es igual al producto de las f.c., por tanto,

$$\varphi_{Y_n}(t) = \left[ \varphi_Y \left( \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

Si expresamos la f.c. común de las  $Y_i$ ,  $\varphi_Y(t)$ , desarrollando en series de momentos

$$\varphi_Y(t) = 1 - \sigma^2 \frac{t^2}{2} (1 + o(1)) \quad t \rightarrow \infty$$

particularizando  $t = \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$  tenemos

$$\varphi_{Y_n}(t) = \left[ 1 - \frac{t^2}{2n} \left( 1 + o \left( \frac{1}{n} \right) \right) \right]^n.$$

y de aquí, tomando logaritmos,

$$\ln \varphi_{Y_n}(t) = n \ln \left[ 1 - \frac{t^2}{2n} \left( 1 + o \left( \frac{1}{n} \right) \right) \right],$$

tomando el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} o \left( \frac{1}{n} \right) = 0$$

así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \varphi_{Y_n}(t) = -\frac{t^2}{2}$$

o, lo que es equivalente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Así la sucesión de f.c.  $\varphi_{Y_n}(t)$  converge a la f.c. de la distribución  $N(0, 1)$  y, la sucesión de v.a.  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  converge a la f.d. de la  $N(0, 1)$  y, por tanto,  $\{S_n\}_{n \geq 1}$  converge a una distribución  $N(n\mu, n\sigma^2)$ .  $\triangleleft$

Destaquemos que en este teorema quien converge no es la secuencia  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  sino  $\{S_n\}_{n \geq 1} = \{X_1 + \cdots + X_n\}_{n \geq 1}$ .

Cuando tenemos el problema de calcular la probabilidad del suceso  $\{a < S_n \leq b\}$ , donde  $S_n$  está definida como la suma de v.a. i.i.d., entonces, lo único que tenemos que hacer es estandarizar y listo, aplicamos la distribución normal estándar.

**Teorema 7.5 (De Moivre-Laplace)** *Si  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión de v.a. independientes con distribución Bernoulli con parámetro  $p$ ,  $B(p)$ , entonces*

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} Z,$$

donde  $Z \sim N(0, 1)$ .

**Teorema 7.6 (Teorema del Límite Central(Liapounov))** *para la suma de variables independientes.* Sea una sucesión de v.a. independientes,  $\{X_n\}_{n \geq 1}$ , pero que no necesariamente son idénticamente distribuidas. Además  $E(X_i) = \mu_i$  y  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$  para  $i = \overline{1, n}$  y también

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mu_i}{(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2)^{1/2}}$$

Entonces  $E(Y_n) = 0$  y  $\text{Var}(Y_n) = 1$ .

## 7.4. Ejemplos

Algunos de los siguientes ejemplos han sido tomados de [MORRIS].

**Ejemplo 7.1 *Determinación del número de observaciones necesarias.***

Supóngase que se va a seleccionar una variable aleatoria de una distribución para la cual no se conoce el valor de la media  $\mu$ , pero se sabe que la desviación estándar  $\sigma$  es 2 unidades. Se determinará lo grande que debe ser el tamaño muestral para que la probabilidad de que  $|\bar{X}_n - \mu|$  sea menor que una unidad, sea al menos 0,99.

Puesto que  $\sigma^2 = 4$ , de la relación  $\Pr(|\bar{X}_n - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{nt^2}$  resulta que para cualquier tamaño muestral  $n$ ,

$$\Pr(|\bar{X}_n - \mu| \geq 1) \leq \frac{4}{n}.$$

Puesto que  $n$  se debe elegir para que  $\Pr(|\bar{X}_n - \mu| < 1) \geq 0,99$ , resulta que se debe elegir  $n$  de forma que  $4/n \leq 0,01$ . Por tanto, se necesita que  $n \geq 400$ . ◀

Se debe resaltar que el uso de la desigualdad de Chebychev en el ejemplo anterior garantiza que una muestra para la que  $n = 400$  será suficientemente grande para alcanzar los requisitos de probabilidad especificados, independientemente del tipo particular de distribución de la que selecciona la muestra. Si se dispone de información adicional acerca de esta distribución, entonces se puede demostrar que un valor más pequeño de  $n$  es suficiente. Esta propiedad se ilustra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 7.2 *Lanzamiento de una moneda.*** Supóngase que se realizan  $n$  lanzamientos independientes de una moneda equilibrada. Para  $i = 1, \dots, n$ , sea  $X_i = 1$  si se obtiene cara en el  $i$ -ésimo lanzamiento y sea  $X_i = 0$  si se obtiene cruz en el  $i$ -ésimo lanzamiento. Entonces, la media muestral  $\bar{X}_n$  será simplemente igual a la proporción de caras que se obtienen en los  $n$  lanzamientos. Se determinará el número de veces que se debe lanzar la moneda para que  $\Pr(0,4 \leq \bar{X}_n \leq 0,6) \geq 0,7$ . Se determinará este número de dos formas: en primer lugar, utilizando la desigualdad de Chebychev; en segundo lugar, utilizando las probabilidades exactas para la distribución binomial del número total de caras.

Sea  $T = \sum_{i=1}^n X_i$  el número total de caras que se obtienen cuando se hacen  $n$  lanzamientos. Entonces  $T$  tiene una distribución binomial con parámetros  $n$  y  $p = 1/2$ . Por tanto, según la esperanza de una binomial, resulta que  $E(T) = n/2$  y también, de la varianza de un binomial, tenemos que  $\text{Var}(T) = n/4$ . Puesto que  $\bar{X}_n = T/n$ , se puede obtener de la desigualdad de Chebychev la siguiente relación:

$$\Pr(0,4 \leq \bar{X}_n \leq 0,6) = \Pr(0,4n \leq T \leq 0,6n)$$

$$\begin{aligned}
&= \Pr \left( \left| T - \frac{n}{2} \right| \leq 0,1n \right) \geq \\
&\geq 1 - \frac{n}{4(0,1n)^2} = 1 - \frac{25}{n}.
\end{aligned}$$

Por tanto, si  $n \geq 84$ , esta probabilidad será al menos 0,7, como se exigía.

Sin embargo, en las tablas de la distribución binomial se encuentra que  $n = 15$ ,

$$\Pr(0,4 \leq \bar{X}_n \leq 0,6) = \Pr(6 \leq T \leq 9) = 0,70$$

Por tanto, 15 lanzamientos serían suficientes para satisfacer el requisito de probabilidad especificado. ◀

**Ejemplo 7.3 Distribución binomial.** Considere la v.a. binomial y  $S_n$  = número de éxitos en  $n$  pruebas. Así tenemos  $E(S_n) = np$  y  $\text{Var}(S_n) = np(1-p)$  donde  $p$  es la probabilidad de éxito. Consecuentemente,  $E(S_n/n) = p$ ,  $\text{Var}(S_n/n) = pq/n$ , y por la desigualdad de Chebychev tenemos

$$\Pr \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \epsilon \right\} \leq \frac{pq}{n\epsilon^2}.$$

◀

Haciendo  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos el siguiente teorema:

**Ejemplo 7.4 Teorema.** Si  $S_n$  tiene distribución binomial con parámetro  $p$ , entonces para cada  $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \epsilon \right\} = 0$$

Es decir,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p.$$

◀

**Ejemplo 7.5 Lanzamiento de una moneda.** Supóngase que se lanza una moneda 900 veces. Se determinará la probabilidad de obtener más de 495 caras.

Para  $i = 1, \dots, 900$ , sea  $X_i = 1$  si se obtiene una cara en el  $i$ -ésimo lanzamiento, y sea  $X_i = 0$  en caso contrario. Entonces  $E(X_i) = 1/2$  y  $\text{Var}(X_i) = 1/4$ . Por tanto, los valores  $X_1, \dots, X_{900}$  constituyen una muestra aleatoria de tamaño  $n = 900$  de una distribución con media  $1/2$  y varianza  $1/4$ . Del teorema central de límite se deduce que la distribución del número total de caras  $H = \sum_{i=1}^{900} X_i$

será aproximadamente una distribución normal con media  $(900)(1/2) = 450$ , varianza  $(900)(1/4) = 225$  y desviación típica  $(225)^{1/2} = 15$ . Por tanto, la variable  $Z = (H - 450)/15$  tendrá aproximadamente una distribución normal tipificada. Consecuentemente,

$$\begin{aligned}\Pr(H > 495) &= \Pr\left(\frac{H - 450}{15} > \frac{495 - 450}{15}\right) \\ &= \Pr(Z > 3) = 1 - \Phi(3) = 0,0013\end{aligned}$$

◀

**Ejemplo 7.6 Muestreo de una distribución uniforme.** Supóngase que se selecciona una muestra aleatoria de tamaño  $n = 12$  de una distribución uniforme sobre el intervalo  $\langle 0, 1 \rangle$ . Se determinará el valor de  $\Pr(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| \leq 0,1)$ .

La media de la distribución uniforme en el intervalo  $\langle 0, 1 \rangle$  es  $1/2$  y la varianza es  $1/12$ . Puesto que en este ejemplo  $n = 12$ , se deduce del teorema central del límite que la distribución de  $\bar{X}_n$  será aproximadamente una distribución normal con media  $1/2$  y varianza  $1/144$ . Por tanto, la distribución de la variable  $Z = 12(\bar{X}_n - 1/2)$  será aproximadamente una distribución normal tipificada. Entonces,

$$\begin{aligned}\Pr\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \leq 0,1\right) &= \Pr\left[12\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \leq 1,2\right] \\ &= \Pr(|Z| \leq 1,2) = 2\Phi(1,2) - 1 = 0,7698\end{aligned}$$

◀

**Ejemplo 7.7 Lanzamiento de una moneda.** Supóngase que se lanza 20 veces una moneda equilibrada y que todos los lanzamientos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 10 caras?

Sea  $X$  el número total de caras que se obtienen en los 20 lanzamientos. De acuerdo con el teorema central del límite, la distribución de  $X$  será aproximadamente una distribución normal con media 10 y desviación típica  $[(20)(1/2)(1/2)]^{1/2} = 2.236$ . Si se utiliza la corrección por continuidad,

$$\begin{aligned}\Pr(X = 10) &= \Pr(9.5 \leq X \leq 10.5) \\ &= \Pr\left(-\frac{0.5}{2.236} \leq Z \leq \frac{0.5}{2.236}\right) \\ &\approx \Phi(0.2236) - \Phi(-0.2236) = 0.177\end{aligned}$$

El valor exacto de  $\Pr(X = 10)$  determinado a partir de tablas de probabilidades binomiales es 0.1762. Por tanto, la aproximación normal con la corrección por continuidad es bastante buena. ◀

**Ejemplo 7.8** Una gran industria ofrece un salario promedio de 4 dólares por hora con una desviación estándar de 0.5 dólares. La industria ocupa 64 trabajadores de cierto grupo étnico, estos trabajadores tienen un salario promedio de \$3.90 por hora.

¿Es razonable suponer que el grupo étnico es una muestra aleatoria de los trabajadores de la industria? (Calcule la probabilidad de obtener una media muestral menor o igual a \$3.90 por hora)

**Solución.** Usando el teorema del límite central

$$\Pr(\bar{X} \leq 3.90) \approx \Pr\left(Z \leq \frac{3.90 - 4}{\frac{0.50}{\sqrt{64}}}\right) = \Pr(Z \leq -1.6) = 0.0548$$

por tanto el grupo no se puede considerar como muestra. ◀

**Ejemplo 7.9** Los tiempos de espera para los clientes que pasan por una caja registradora a la salida de una tienda de menudeo son una v.a. independientes con una media de 1.5 minutos y una varianza de 1. Aproxime la probabilidad de que se pueda obtener a 100 clientes en menos de 2 horas.

**Solución.**

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 120\right) = \Pr\left(\bar{X} \leq \frac{120}{100}\right) \approx \Pr\left(Z \leq \frac{1.2 - 1.5}{\frac{1}{\sqrt{100}}}\right) = \Pr(Z \leq -3) = 0.0013$$

◀

**Ejemplo 7.10** El resultado de las pruebas finales de todos los alumnos del último año de las preparatorias de cierto estado tienen una media de 60 y una varianza de 64. Una generación específica de cierta preparatoria de  $n = 100$  alumnos tuvo una media de 58. ¿Puede afirmarse que esta preparatoria sea inferior? (Calcular que la probabilidad de la media muestral sea a lo más 58)

**Solución.**

$$\Pr(\bar{X} \leq 58) \approx \Pr\left(Z \leq \frac{58 - 60}{\frac{8}{\sqrt{100}}}\right) = \Pr(Z \leq -2.5) = 0.0062$$

◀

**Ejemplo 7.11** Supóngase que el número de barriles de petróleo crudo que produce 1 pozo diariamente es una v.a. con una distribución no especificada. Si se observa la producción en 64 días seleccionados en forma aleatoria, y si se sabe que la desviación estándar del número de barriles por día es  $\sigma = 64$ , determínese la

probabilidad de que la media muestral se encuentre a no más de 4 barriles del verdadero valor de la producción por día.

**Solución.**

$$\begin{aligned}
 \Pr(|\bar{X} - \mu| \leq 4) &= \Pr\left(\frac{-4}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{4}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\
 &= \Pr\left(\frac{-4}{\frac{16}{\sqrt{64}}} \leq Z \leq \frac{4}{\frac{16}{\sqrt{64}}}\right) \\
 &= \Pr(-2 \leq Z \leq 2) \\
 &= 0.9546
 \end{aligned}$$



**Ejemplo 7.12** Un fabricante de cigarrillos asegura que el contenido promedio de nicotina, en una de sus marcas, es de 0.6 miligramos por cigarrillo. Una organización independiente mide el contenido de nicotina de 16 cigarrillos de esta marca y encuentra que el promedio y la desviación estándar es de 0.75 y 0.175 miligramos respectivamente de nicotina. Si se supone que la cantidad de nicotina en estos cigarrillos es una v.a. normal. ¿Que tan probable es el resultado muestral dado el dato proporcionado por el fabricante?

$$\Pr(\bar{X} \leq 0.6) = \Pr\left(Z \leq \frac{0.6 - 0.75}{\frac{0.175}{\sqrt{16}}}\right) = \Pr(Z \leq -3.428571429) = 0.0003$$



**Ejemplo 7.13** Supóngase que el 75 % de las personas de cierta área metropolitana viven en la ciudad y el 25 % en los suburbios, si las 1200 personas que asisten a un concierto representan una muestra aleatoria del área metropolitana. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de personas que viven en los suburbios y que asisten al concierto sea menor que 270?

**Solución.** Por binomial y límite central:

$$\Pr(Y < 270) \approx \Pr\left(\frac{270 - (1200)(0.25)}{\sqrt{(1200)(0.75)(0.25)}} > Z\right) = \Pr(-2 > Z) = 0.0227$$



**Ejemplo 7.14** Suponga que  $Y$  tiene una distribución binomial con  $n = 25$  y  $p = 0.4$  hallar la probabilidad exactas de que  $Y \leq 8$  y comparar este resultado con los valores correspondientes encontrados por aproximación normal.



*Solución.*

$$\Pr(Y \leq 8) \approx \begin{cases} \Pr(Z \leq 8) \\ \Pr(Z \leq 8.5) \end{cases}$$

$$\Pr(Y \leq 8) \approx \Pr\left(Z < \frac{8 - (25)(0.4)}{\sqrt{25(0.4)(0.6)}}\right) = \Pr(Z < -0.8114) = 0.2090$$

$$\Pr(Y \leq 8.5) \approx \Pr\left(Z < \frac{8.5 - (25)(0.4)}{\sqrt{25(0.4)(0.6)}}\right) = \Pr(Z < -0.612372) = 0.2709$$

◀