

# Capítulo 1

## Conjuntos

Empezamos este capítulo dando algunas de las definiciones más usadas en la teoría de probabilidad. Las primeras definiciones tienen que ver con la teoría de conjuntos y luego las adaptaremos para la teoría de la probabilidad y estadística.

### 1.1. Algunas definiciones

**Definición 1.1** *Un **conjunto** puede considerarse como una colección de objetos, llamados **miembros** o **elementos** del conjunto.*

En general, denotamos un conjunto por una letra mayúscula  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y un elemento por una letra minúscula  $a$ ,  $b$ . Sinónimos de conjunto son *clase*, *grupo* y *colección*.

**Definición 1.2** *Un conjunto es **bien definido** si estamos capacitados para determinar si un objeto específico pertenece o no al conjunto.*

Los métodos en los que se puede definir un conjunto son los siguientes:

**Definición 1.3** *El **método de extensión**<sup>1</sup> consiste en hacer una lista de sus elementos.*

**Definición 1.4** *El **método de comprensión** consiste en describir alguna propiedad conservada por todos los miembros y por los no miembros.*

---

<sup>1</sup>También llamado *método tabular*.

**Ejemplo 1.1** El conjunto de las vocales en el alfabeto puede definirse por el método de extensión como  $\{a, e, i, o, u\}$  o por el método de comprensión como  $\{x : x \text{ es una vocal}\}$ , léase “el conjunto de los elementos  $x$  tales que  $x$  es una vocal” donde los dos puntos : se lee “tal que” o “dado que”. ◀

**Ejemplo 1.2** El conjunto  $\{x : x \text{ es un triángulo en un plano}\}$  es el conjunto de los triángulos en un plano. Obsérvamos que el método de extensión no puede utilizarse aquí. ◀

**Ejemplo 1.3** Si lanzamos un par de dados comunes los “números” o “puntos” posibles que pueden resultar sobre la cara superior de cada dado son elementos del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . ◀

Si un elemento  $x$  pertenece a un conjunto  $A$ , usamos la notación:

$$x \in A$$

y en caso de que  $x$  no sea elemento de  $A$ , lo denotamos:

$$x \notin A \quad .$$

**Definición 1.5** Un conjunto es **finito** si consta de un cierto número de elementos distintos. En caso contrario será **infinito**.

**Definición 1.6** Un conjunto  $A$  es **igual** al conjunto  $B$  si ambos constan de los mismos elementos. Y se denota por:

$$A = B \quad .$$

**Ejemplo 1.4** Los conjuntos  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 1, 4, 2\}$  y  $C = \{1, 2, 2, 3, 4\}$  son iguales. Es decir,  $A = B = C$ . ◀

**Definición 1.7** El conjunto que carece de elementos se llama **conjunto nulo o vacío**. Y se denota por  $\emptyset$ .

**Definición 1.8** Si todo elemento de un conjunto  $A$  pertenece también a  $B$ , decimos que  $A$  es **subconjunto** de  $B$ , y se denota por  $A \subset B$ .

**Definición 1.9** En general siempre hablamos de conjuntos que son a su vez subconjuntos de un cierto conjunto que contiene todos los elementos de los que podríamos hablar. A este conjunto le llamamos **conjunto universal** y se denota por  $U$ .

## 1.2. Operaciones entre conjuntos

**Definición 1.10** El conjunto **unión** de  $A$  y  $B$  es aquél que contiene todos los elementos que pertenecen a  $A$  o a  $B$ , o bien a  $A$  y  $B$ . Se denota  $A \cup B$ .

La definición anterior también puede ser escrita como:

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ o } x \in B (\text{o ambos})\} \quad .$$

**Definición 1.11** El conjunto **intersección** de  $A$  y  $B$  es aquél que contiene todos los elementos que pertenecen simultáneamente a  $A$  y a  $B$ . Se denota por  $A \cap B$ .

La definición anterior puede expresarse como:

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ y } x \in B\} \quad .$$

De las dos anteriores definiciones se deducen las siguientes dos:

**Definición 1.12** La **unión de  $n$  conjuntos**  $A_1, \dots, A_n$  se define como el conjunto que contiene todos los elementos que pertenecen al menos a uno de estos  $n$  conjuntos. Denotado por  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  o  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  y para una sucesión infinita de conjuntos es  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ; y para la unión de una familia arbitraria de conjuntos  $A_i$ , donde los valores del subíndice  $i$  pertenecen a un conjunto de índices  $I$ , es  $\bigcup_{i \in I} A_i$ .

**Definición 1.13** La **intersección de  $n$  conjuntos**  $A_1, \dots, A_n$  se define como el conjunto que contiene todos los elementos que son comunes a todos estos conjuntos. La notación para esta intersección es  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ ,  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  o bien  $A_1 A_2 \dots A_n$ ; y para la intersección de una familia arbitraria de conjuntos  $A_i$ , donde los valores del subíndice  $i$  pertenecen a un conjunto de índices  $I$ , es  $\bigcap_{i \in I} A_i$ .

**Definición 1.14** Se dice que  $A$  y  $B$  son **conjuntos disjuntos** siempre que  $A \cap B = \emptyset$ . Y una familia arbitraria es de conjuntos disjuntos si no existen dos conjuntos de la familia que tengan elementos en común.

**Definición 1.15** El conjunto **diferencia** de  $A$  y  $B$  consta de todos los elementos de  $A$  que no pertenecen a  $B$ . Se denota por  $A - B$ .

También podemos definir así:

$$A - B := \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\} \quad .$$

También se suele denotar como  $A \setminus B$ .

**Definición 1.16** Siendo  $A \subset B$ , llamamos a  $A_B^c := B - A$  el **complemento de A relativo a B**. Cuando  $B = S$  sólo lo llamamos el **complemento de A** y lo denotamos por  $A^c$

Daremos el siguiente teorema que no es mas que la suma de varios resultados a los que llegamos con las anteriores definiciones.

**Teorema 1.1** *Resultados:*

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = A \cup B \cap C$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C = A \cap B \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A - B = A \cap B^c$
- si  $A \subset B$  entonces  $A^c \supset B^c$  o  $B^c \subset A^c$
- $A \cup \emptyset = A$  ,  $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup U = U$  ,  $A \cap U = A$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  y  $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  y  $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$
- $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

Ahora adaptaremos todas las definiciones anteriores para que puedan ser utilizadas en la teoría de la probabilidad.

**Definición 1.17** Llamamos **espacio muestral**, denotado por  $S$ , al conjunto que consiste de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

**Definición 1.18** Un **suceso** es un conjunto  $A$  de resultados posibles en un experimento. Es decir,  $A \subset S$ .

De las definiciones dadas para conjuntos y las operaciones entre ellos, llegamos a definiciones tales como:

**Suceso cierto o seguro** Aquel conjunto de todos los posibles resultados.

**Suceso imposible** El suceso carente de resultados.

**Sucesos disjuntos** Sucesos que carecen de resultados en común.

**Unión de sucesos** Similar a la unión de conjuntos.

**Intersección de sucesos** Similar a la intersección de conjuntos.

etc.