

## Capítulo 6

# Algunas Distribuciones

### Introducción

La importancia de las distribuciones de probabilidad es que estas sirven para modelar el comportamiento de variables que se presentan en la vida cotidiana como también de los fenómenos que se presentan en la naturaleza.

En este capítulo daremos una lista de algunas de las distribuciones más utilizadas en los cursos de probabilidad. Describiremos una por una su f.p. o f.d.p., sus momentos, sus propiedades, casos particulares, gráficos, etc.

En la última parte de este capítulo se presenta un resumen de todas y un diagrama que muestra la relación que hay entre ellas.

La siguiente tabla muestra las distribuciones que manejamos en este capítulo.

Cuadro 6.1: Tabla de distribuciones

| Distribuciones |                                 |                               |
|----------------|---------------------------------|-------------------------------|
|                | Notación                        | Nombre                        |
| 1              | $\text{Deg}(c)$                 | Degenerada                    |
| 2              | $\text{Dospuntos}(x_1, x_2, p)$ | Dospuntos                     |
| 3              | $U_{[x_1, x_2, \dots, x_n]}$    | Uniforme discreta             |
| 4              | UE                              | Uniforme sobre los enteros    |
| 5              | $B(p)$                          | Bernoulli                     |
| 6              | $\text{Bi}(n, p)$               | Binomial                      |
| 7              | $H(A, B, n)$                    | Hepergeométrica               |
| 8              | $\text{HM}(\mathbf{N}, n)$      | Hipergeométrica multivariante |
| 9              | $P(\lambda)$                    | Poisson                       |
| 10             | $\text{BiNe}(r, p)$             | Binomial negativa             |
| 11             | $\text{Geo}(p)$                 | Geométrica                    |
| 12             | $\text{Mult}(n, \mathbf{p})$    | Multinomial                   |
| 13             | Polya                           | Pólya o de contagio           |
| 14             | $U(a, b)$                       | Uniforme                      |
| 15             | $\text{Logaritmica}(a, b)$      | Logarítmica                   |
| 16             | $N(\mu, \sigma^2)$              | Normal                        |
| 17             | $N(0, 1)$                       | Normal tipificada             |
| 18             | $\text{NorPos}(\mu, \sigma^2)$  | Normal positiva               |
| 19             | $\text{LogN}(\mu, \sigma^2)$    | Lognormal                     |
| 20             | Gilbrat                         | Gilbrat                       |
| 21             | $\text{Cau}(\alpha, \lambda)$   | Cauchy                        |
| 22             | $\text{Lap}(\alpha, \lambda)$   | Laplace                       |
| 23             | $\text{Log}(\alpha, \beta)$     | Logística                     |
| 24             | $\text{Pareto}(x_0, b)$         | Pareto                        |
| 25             | $\text{Gum}(\alpha, \beta)$     | Gumbel                        |
| 26             | $\text{Tri}(a, b, c)$           | Triangular                    |
| 27             | $\text{Ga}(\alpha, \beta)$      | Gamma                         |
| 28             | $\text{GaEst}(\alpha, \beta)$   | Gamma Estandarizada           |
| 29             | $\text{Exp}(\beta)$             | Exponencial                   |
| 30             | ExpEst                          | Exponencial estandarizada     |
| 31             | $\text{ExpNeg}(\alpha, \beta)$  | Exponencial negativa          |
| Sigue ...      |                                 |                               |

Cuadro 6.1: Tabla de distribuciones(continuacin)

| Distribuciones(cont.) |                     |              |
|-----------------------|---------------------|--------------|
| Notación              |                     | Nombre       |
| 32                    | $\chi_n$            | Ji           |
| 33                    | Max                 | Maxwell      |
| 34                    | Ray                 | Rayleigh     |
| 35                    | $W(\beta, r)$       | Weibull      |
| 36                    | $Be(\alpha, \beta)$ | Beta         |
| 37                    | $\chi_n^2$          | Ji-cuadrado  |
| 38                    | $T_n$               | Student $t$  |
| 39                    | $F(n_1, n_2)$       | Snedecor $F$ |
| 40                    | $Z(n_1, n_2)$       | Fisher $Z$   |
| ♠                     |                     |              |

## 6.1. Distribución degenerada o casual

### Definición

**Definición 6.1** Se dice que una v.a.  $X$  tiene una **distribución degenerada o casual** en el punto  $c$  si tiene como f.p. a:

$$f_X(x|c) = I_{\{c\}}(x) \quad (6.1)$$

Y este hecho lo denotamos por:  $X \sim \text{Degenerada}(c)$

La función de distribución es por tanto,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

### Momentos

y sus momentos:

$$E(X) = E(c) = c$$

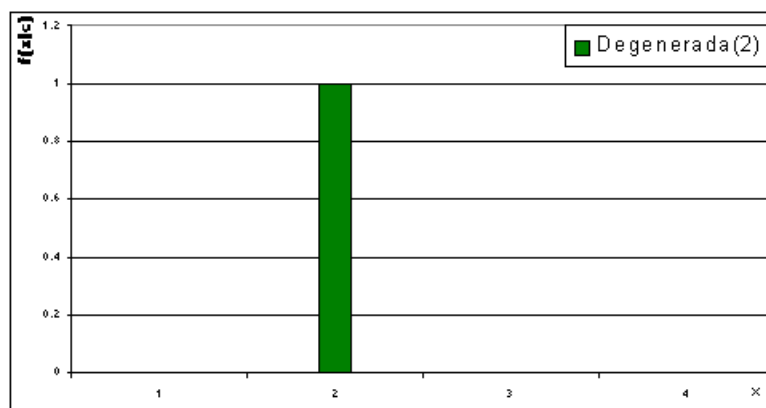
$$E(X^n) = E(c^n) = c^n$$

$$\text{Var}(X) = E[(X - c)^2] = E[0] = 0$$

La función característica tiene por expresión

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E(e^{itc}) = e^{itc}.$$

## Gráfica

Figura 6.1: La f.d.p. de una distribución degenerada cuando  $c = 2$ .

## 6.2. Distribución en dos puntos

### Definición

**Definición 6.2** Se dice que una v.a.  $X$  tiene una **distribución en dos puntos** con parámetro  $p$  ( $p \in \langle 0, 1 \rangle$ ) si toma sólo los valores  $x_1$  y  $x_2$ , tales que  $x_1 < x_2$ , con probabilidades:

$$f_X(x|x_1, x_2, p) = (1 - p) I_{\{x_1\}}(x) + p I_{\{x_2\}}(x) \quad (6.2)$$

Si  $p = 1$  ó  $p = 0$ , estaríamos en presencia de la distribución degenerada que acabamos de estudiar.

Y este hecho lo denotamos por:  $X \sim \text{Dospuntos}(x_1, x_2, p)$

La función de distribución tendrá dos puntos de discontinuidad(y, por tanto, dos escalones), viniendo definida por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle -\infty, x_1 \rangle \\ 1 - p & x \in [x_1, x_2) \\ 1 & x \in [x_2, \infty) \end{cases}$$

### Momentos

Su esperanza matemática es:

$$E(X) = x_1(1 - p) + x_2p$$

y la varianza podemos calcularla como:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

donde

$$E(X^2) = x_1^2(1 - p) + x_2^2p$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= x_1^2(1 - p) + x_2^2p - [x_1(1 - p) + x_2p]^2 \\ &= x_1^2 - x_1^2p + x_2^2p - x_1^2(1 - p)^2 - x_2^2p^2 - 2x_1x_2(1 - p)p \\ &= x_1^2[1 - p - (1 - p)^2] + x_2^2(p - p^2) - 2x_1x_2(1 - p)p \\ &= p(1 - p)[x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2] \\ &= p(1 - p)(x_2 - x_1)^2. \end{aligned}$$

Su función característica es

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = (1 - p)e^{itx_1} + pe^{itx_2}.$$

## Gráfica

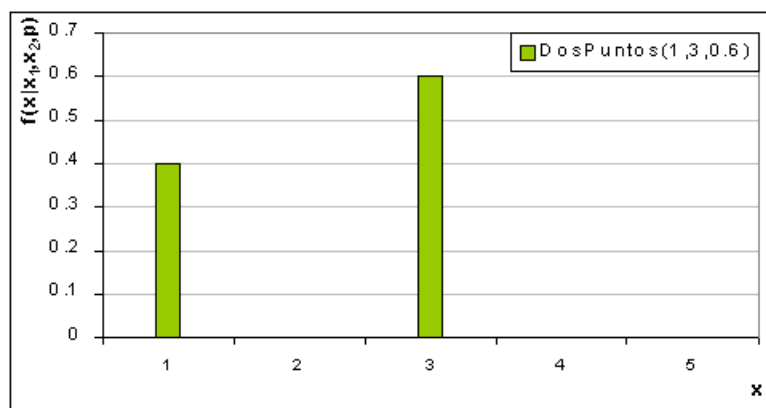


Figura 6.2: La f.d.p. de una distribución DosPuntos cuando  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$  y  $p = 0.6$ .

### 6.3. Distribución uniforme discreta

#### Definición

**Definición 6.3** Se dice que una v.a.  $X$  tiene una **distribución uniforme** si tiene como f.p. a:

$$f_X(x|n) = \frac{1}{n} I_{\{x_1, x_2, \dots, x_n\}}(x) \quad (6.3)$$

Esto se denota por:  $X \sim U_{[x_1, x_2, \dots, x_n]}$ .

La función de distribución es igual a:

$$F_X(x_k) = \Pr(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

#### Momentos

Su media resulta:

$$E(X) = \sum_i x_i \Pr(X = x_i) = \sum_i x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_1^n x_i$$

y la varianza, dado que:

$$E(X^2) = \sum_i x_i^2 \Pr(X = x_i) = \frac{1}{n} \sum_1^n x_i^2$$

será:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_i x_i \right)^2 \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \end{aligned}$$

si llamamos

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i.$$

La función característica es:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_j e^{itx_j} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_j e^{itx_j}$$



## Casos particulares

En el caso particular de que  $x_j = j$ , es decir, que la v.a. tome como valores los  $n$  primeros números naturales, entonces

- $F_X(x_j) = \Pr(X \leq j) = \frac{j}{n}, \text{ para } j = 1, 2, 3, \dots, n.$
- $E(X) = \frac{1}{n} \sum_j x_j = \frac{1}{n} [1 + 2 + 3 \dots + n] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1+n}{2} n = \frac{n+1}{2}.$
- $\text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_j x_j^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$

ya que

$$\sum_j x_j^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- $\varphi_X(t) = \frac{1}{n} \sum_j e^{itj} = \frac{1}{n} \frac{e^{itn}e^{it} - e^{it1}}{e^{it} - 1} = \frac{e^{it}(e^{itn}-1)}{n(e^{it}-1)}$

## Gráfica

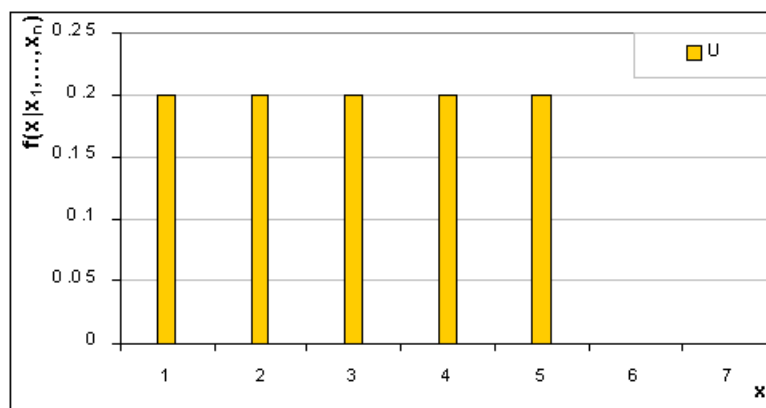


Figura 6.3: La f.d.p. de una distribución uniforme  $U$  para varios valores en su parametro, es decir su campo de variación para esta distribución.

## 6.4. Distribución uniforme sobre los enteros

### Definición

**Definición 6.4** *Se dice que una v.a.  $X$  tiene una **distribución uniforme sobre los enteros** con parámetro  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) si tiene como f.p. a:*

$$f_X(x|k) = \frac{1}{k} \mathbf{I}_{\{1, \dots, k\}}(x) \quad (6.4)$$

## 6.5. Distribución de Bernoulli

### Definición

**Definición 6.5** Se dice que una v.a.  $X$  tiene una **distribución de Bernoulli** con parámetro  $p$  ( $0 < p < 1$ ) si tiene como f.p. a:

$$f_X(x|p) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x) \quad \text{donde } q := 1 - p \quad (6.5)$$

Y este hecho se denota por:  $X \sim B(p)$

Y la f.d. es:

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ q & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

### Descripción

En un experimento en el que sólo podemos tener dos resultados tales como éxito o fracaso, defectuoso o no defectuoso, cara o cruz, etc.; conviene designar estos resultados con valores como 0 y 1. Así, por ejemplo:

$$\Pr(\text{éxito}) = \Pr(X = 1) = p \quad \Pr(\text{fracaso}) = \Pr(X = 0) = 1 - p$$

### Momentos

Si  $X$  tiene una distribución de Bernoulli con parámetro  $p$ , entonces

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p,$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = pq.$$

Y el  $r$ -ésimo momento entorno al origen es:

$$\alpha_r = E(X^r) = p$$

y los momentos centrados es:

$$\mu_r = E[(X - \mu)^r] = (-p)^r \cdot (1 - p) + (1 - p)^r p = (-p)^r q + q^r p$$

Además, la f.g.m. de  $X$  es

$$\psi_X(t) = E(e^{tX}) = q + pe^t \quad \text{para } t \in \mathbb{R}$$

Y la f.c. es:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = q + pe^{it} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}$$

De la f.g.m., tenemos:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= (1-p) + pe^t = q + pe^t \\ \psi'(t) &= pe^t \\ \psi''(t) &= pe^t \\ \psi^{(n)}(t) &= pe^t \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= pq \\ \mu_3 &= (-p)^3(1-p) + (1-p)^3p \\ &= p[-p^2(1-p) + (1-p)^3] \\ &= p(1-p)[-p^2 + (1-p)^2] \\ &= p(1-p)(1-2p) \\ \mu_4 &= (-p)^4(1-p) + (1-p)^4p \\ &= p(1-p)[p^3 + (1-p)^3] \\ &= p(1-p)(3p^2 - 3p + 1) \end{aligned}$$

de aquí, el sesgo y la curtosis son:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= \frac{\mu_3}{\sigma_3} \\ &= \frac{p(1-p)(1-2p)}{[p(1-p)]^{3/2}} \\ &= \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}} \\ \gamma_2 &:= \frac{\mu_4}{\sigma_4} - 3 \\ &= \frac{p(1-p)(3p^2 - 3p + 1)}{p^2(1-p)^2} - 3 \\ &= \frac{3p^2 - 3p + 1}{p(1-p)} - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3p^2 - 3p + 1 - 3p(1 - p)}{p(1 - p)} \\ &= \frac{6p^2 - 6p + 1}{p(1 - p)} \end{aligned}$$

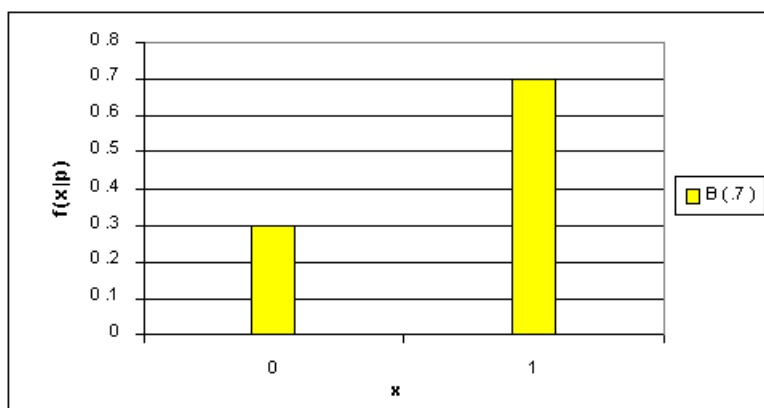
### Generación de números aleatorios

Y en la generación de numeros aleatorios utilizamos la función de distribución inversa, de este modo tenemos:

$$x = 1 \cdot I_{[0,p]}(F_X)$$

donde  $F_X$  es un valor que sigue una  $U(0, 1)$ .

## Gráfica

Figura 6.4: Gráfica de una *Bernoulli*

## 6.6. Distribución binomial

### Definición

**Definición 6.6** Una v.a.  $X$  tiene una **distribución binomial** con parámetros  $n$  y  $p$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \langle 0,1 \rangle$ ) si tiene como f.p. a:

$$f_X(x|n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \mathbf{I}_{\{0,1,2,\dots,n\}}(x) \quad (6.6)$$

La notación es:  $X \sim \text{Bi}(n, p)$

### Descripción

Veamos que  $f_X(x|n, p)$  es una f.p.; se observa que  $f_X(x|n, p) \geq 0$ , para todo  $x = 0, 1, 2, \dots, n$ . Además

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^n f_X(x|n, p) &= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{n}{0} p^0 q^n + \binom{n}{1} p q^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} p^n q^0 \\ &= (p + q)^n = 1 \end{aligned}$$

Vemos que lo anterior no es más que el desarrollo del binomio de Newton, de ahí su nombre de distribución binomial.

Si  $X$  tiene una distribución binomial con parámetros  $n$  y  $p$ , entonces  $X$  se puede expresar como  $X = X_1 + \dots + X_n$  donde  $X_i \sim B(p)$  para  $i = \overline{1, n}$ .

### Momentos

Cuando  $X$  se representa como la suma de  $n$  v.a. de Bernoulli, se pueden deducir fácilmente los valores de la media, la varianza y la f.g.m. de  $X$ . Estos valores son:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = npq$$

La f.d. es:

$$F_X(x) = \sum_{i=0}^x \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$



y su f.c. es:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \prod_{i=1}^n E(e^{itX_i}) = (q + pe^{it})^n$$

y la f.g.m. es:

$$\psi_X(t) = E(e^{tX}) = \prod_{i=1}^n E(e^{tX_i}) = (q + pe^t)^n$$

### Enunciados

De esta f.g.m. podemos deducir:

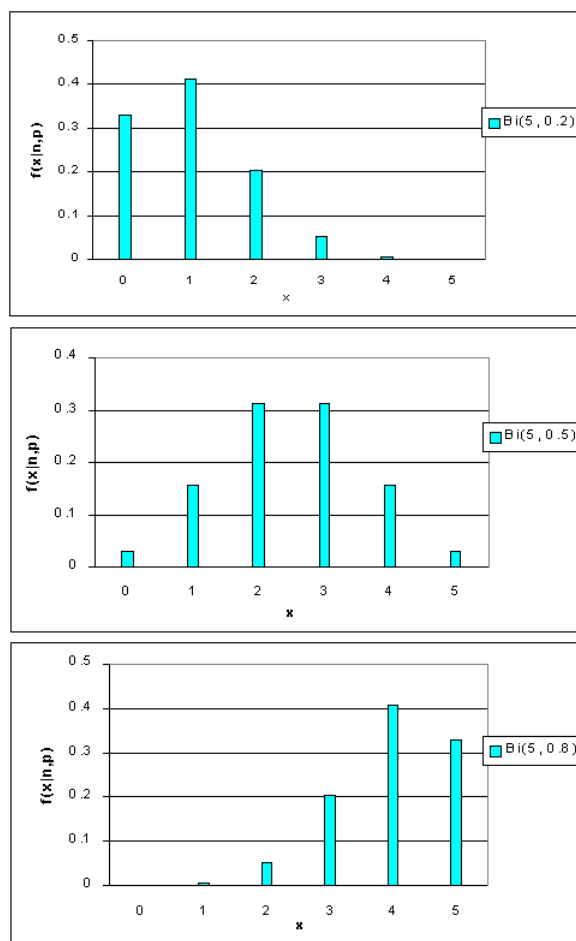
**Proposición 6.1** *Si  $X_1, \dots, X_k$  son v.a. independientes y si  $X_i$  tiene una distribución binomial con parámetros  $n_i$  y  $p$  ( $i = 1, \dots, k$ ), entonces la suma  $X_1 + \dots + X_k$  tiene una distribución binomial con parámetros  $n = n_1 + \dots + n_k$  y  $p$ .*

### Relación con otras distribuciones

$$X \sim \text{Bi}(1, p) = \text{B}(p).$$

## Gráfica

Y enseguida muestro tres gráficas con valores distintos para  $n$  y  $p$ :



## 6.7. Distribución hipergeométrica

### Definición

**Definición 6.7** Se dice que una v.a.  $X$  tienen una **distribución hipergeométrica** con parámetros  $A$ ,  $B$  y  $n$  ( $A, B, n \in \mathbb{N}$ ) si tiene como f.p. a:

$$f_X(x|A, B, n) = \frac{\binom{A}{x} \binom{B}{n-x}}{\binom{A+B}{n}} I_{\{\max\{0, n-B\}, \dots, \min\{n, A\}\}}(x). \quad (6.7)$$

Este hecho se denota por:  $X \sim H(A, B, n)$

### Descripción

Supongamos que una población contiene  $A$  elementos que cumplen cierta propiedad P1 y  $B$  elementos que cumplen otra cierta propiedad P2. Tomemos una muestra aleatoria sin reemplazamiento de  $n$  elementos de esta población y sea  $X$  el número de elementos que cumplen la propiedad P1 de la muestra que se obtuvo. Entonces, el valor de  $X$  no puede exceder de  $n$  ni de  $A$ . Y se observa que  $X \leq \min\{n, A\}$ . Del mismo modo, puesto que el número de elementos que cumplen P2,  $n - X$ , que se obtienen no puede exceder de  $B$ , el valor de  $X$  debe ser al menos de  $n - B$ . Puesto que el valor de  $X$  no puede ser menor que 0, se debe verificar que  $X \geq \max\{0, n - B\}$ . Así, el valor de  $X$  debe ser un entero que pertenece al intervalo

$$\max\{0, n - B\} \leq x \leq \min\{n, A\}.$$

y este será el campo de variación de una v.a. que tiene una distribución hipergeométrica.

### Momentos

Bajo la suposición de que se seleccionan al azar sin reemplazamiento  $n$  elementos de la población que contiene  $A$  elementos que cumplen la propiedad P1 y  $B$  elementos que cumplen la propiedad P2. Sea  $X_i = 1$  si el  $i$ -ésimo elemento cumple P1 y sea  $X_i = 0$  si el  $i$ -ésimo elemento cumple P2. Supongamos que los  $n$  elementos se seleccionan de la población, ordenando primero todos los elementos de la población aleatoriamente y seleccionando después los  $n$  primeros elementos de esta ordenación. De este modo tenemos:

$$\Pr(X_i = 1) = \frac{A}{A+B} \quad \text{y} \quad \Pr(X_i = 0) = \frac{B}{A+B} \quad i = \overline{1, n}.$$

Por tanto, para  $i = \overline{1, n}$ ,

$$E(X_i) = \frac{A}{A+B} \quad \text{y} \quad \text{Var}(X_i) = \frac{AB}{(A+B)^2}. \quad (6.8)$$

Puesto que  $X = X_1 + \cdots + X_n$ , entonces,

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{nA}{A+B}. \quad (6.9)$$

En otras palabras, la media de una distribución hipergeométrica con parámetros  $A$ ,  $B$  y  $n$  es  $nA/(A+B)$ . Además

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j). \quad (6.10)$$

Debido a la simetría entre las variables  $X_1, \dots, X_n$ , cada término  $\text{Cov}(X_i, X_j)$  de la última suma de la ecuación (6.10) tendrá el mismo valor que  $\text{Cov}(X_1, X_2)$ . Puesto que hay  $\binom{n}{2}$  términos en esta suma, de las ecuaciones (6.8) y (6.10), resulta que

$$\text{Var}(X) = \frac{nAB}{(A+B)^2} + n(n-1)\text{Cov}(X_1, X_2). \quad (6.11)$$

Si  $n = A+B$ , entonces se debe verificar que  $X = A$ , porque todos los elementos de la población serán seleccionadas sin reemplazamiento. Entonces, para  $n = A+B$ ,  $\text{Var}(X) = 0$  y de la ecuación (6.11) resulta que

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = -\frac{AB}{(A+B)^2(A+B-1)}.$$

De la ecuación (6.11), por tanto

$$\text{Var}(X) = \frac{nAB}{(A+B)^2} \cdot \frac{A+B-n}{A+B-1}. \quad (6.12)$$

Se utilizará la siguiente notación:  $T = A+B$  como el número total de elementos de la población,  $p = A/T$  como la proporción de elementos P1 y  $q = 1 - p$  como la proporción de elementos que cumplen P2. Entonces  $\text{Var}(X)$  se puede reescribir como sigue:

$$\text{Var}(X) = npq \frac{T-n}{T-1} \quad (6.13)$$

y haciendo

$$\alpha = \frac{T-n}{T-1}$$

tenemos:

$$\text{Var}(X) = npq\alpha$$

Hemos dicho que en la distribución Hipergeométrica los  $n$  elementos se seleccionan sin reemplazamiento; ya que si lo hicieramos con reemplazamiento, entonces  $X$  seguiría una distribución binomial con varianza  $npq$ . De este modo  $\alpha$  representa la reducción en  $\text{Var}(X)$  causado por el muestreo sin reemplazamiento de una población finita.

Si  $n = 1$ , entonces  $\alpha = 1$ , ya que no hay diferencia entre tomar un muestreo con reemplazamiento y otro sin reemplazamiento, cuando el número de elementos que se selecciona se reduce a uno. Por otra parte, si  $n = T$ , tenemos  $\alpha = 0$  y  $\text{Var}(X) = 0$ . Para  $n = \overline{1, T}$  el valor de  $\alpha$  cumple  $\alpha \in [0, 1]$ .

Observamos también:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \alpha = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T-n}{T-1} = 1$$

esto significa que cuando el tamaño de la población,  $T$ , es muy grande con respecto a  $n$ , el tamaño de la muestra, la diferencia entre los dos tipos de muestreo es pequeña. Es aquí cuando una distribución hipergeométrica tiende a una binomial. En términos:

$$H(A, B, n) \rightarrow \text{Bi}(n, p = \frac{A}{A+B}) \quad .$$

## 6.8. Distribución hipergeométrica multivariante

### Definición

**Definición 6.8** Se dice que un vector aleatorio  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  tiene una **distribución hipergeométrica multivariante** con parámetros  $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_k)$  y  $n$  si tiene como f.p. a:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\mathbf{N}, n) = \frac{\binom{N_1}{x_1} \binom{N_2}{x_2} \cdots \binom{N_k}{x_k}}{\binom{N}{n}} \quad (6.14)$$

Este hecho lo denotamos por:  $\boxed{\mathbf{X} \sim \text{HM}(\mathbf{N}, n)}$

### Descripción

Consideremos  $N$  elementos, cada uno de los cuales cumple con cierta propiedad  $P_i$  para  $i = \overline{1, k}$ , propiedades disjuntas. Y denotemos como  $N_i$  el número de elementos que cumple  $P_i$ , vemos que:

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_k = N.$$

De este conjunto de  $N$  elementos extraemos  $n$ , sin reemplazamiento, entonces tendremos que  $x_i$  elementos cumplen con la propiedad  $P_i$ , para  $i = \overline{1, k}$  y además:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n.$$

Así tenemos:

$$\Pr(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{\binom{N_1}{x_1} \binom{N_2}{x_2} \cdots \binom{N_k}{x_k}}{\binom{N}{n}} \quad (6.15)$$

que es la f.p. conjunta para  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Podemos ver que esta distribución es una generalización de la distribución hipergeométrica, pues para  $k = 2$ :

$$\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{\binom{N_1}{x_1} \binom{N_2}{x_2}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N_1}{x_1} \binom{N_2}{n - x_1}}{\binom{N}{n}} = \Pr(X_1 = x_1).$$

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  sólo tiene  $k - 1$  v.a., ya que la variable restante siempre queda determinada por diferencia:

$$N_k = N - N_1 - N_2 - \dots - N_{k-1}$$

$$x_k = n - x_1 - x_2 - \dots - x_{k-1}$$

Además, las distribuciones marginales unidimensionales de cada variable,  $X_i$ , son hipergeométricas,  $X_i \sim H((N_i, N - N_i), n)$  y, además, la variable aleatoria suma,  $X_h + X_j \sim H((N_h + N_j, N - N_h - N_j), n)$  representando el número de elementos que se hayan extraído sin reposición que cumplan la propiedad  $P_h$  o  $P_j$ .

### Momentos

Definamos  $p_i := \frac{N_i}{N}$  como la probabilidad de que el elemento al ser extraído cumpla con la propiedad  $P_i$  para  $i = \overline{1, k}$ .

De lo anterior:

$$E(X_i) = np_i = n \frac{N_i}{N}$$

$$\text{Var}(X_i) = np_i q_i \frac{N - n}{N - 1} = n \frac{N_i}{N} \left(1 - \frac{N_i}{N}\right) \frac{N - n}{N - 1}$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_h + X_j) &= n(p_h + p_j)[1 - (p_h + p_j)] \frac{N - n}{N - 1} \\ &= n \frac{N_h + N_j}{N} \left(1 - \frac{N_h + N_j}{N}\right) \frac{N - n}{N - 1}. \end{aligned}$$

Pero como las dos v.a. no son independientes:

$$\text{Var}(X_h + X_j) = \text{Var}(X_h) + \text{Var}(X_j) + 2\text{Cov}(X_h, X_j)$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_h, X_j) &= \frac{1}{2}[\text{Var}(X_h + X_j) - \text{Var}(X_h) - \text{Var}(X_j)] \\ &= \frac{1}{2}\left[n \frac{N_h + N_j}{N} \left(1 - \frac{N_h + N_j}{N}\right) \frac{N - n}{N - 1} - \right. \\ &\quad \left. - n \frac{N_h}{N} \left(1 - \frac{N_h}{N}\right) \frac{N - n}{N - 1} - n \frac{N_j}{N} \left(1 - \frac{N_j}{N}\right) \frac{N - n}{N - 1}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{2} \frac{N-n-1}{N-1} \frac{1}{N^2} \cdot \\
&\quad \cdot [(N_h + N_j)(N - N_h - N_j) - N_h(N - N_h) - N_j(N - N_j)] \\
&= \frac{n}{2} \frac{N-n-1}{N-1} \frac{1}{N^2} (-2N_h N_j) \\
&= -\frac{n N_h N_j}{N^2} \frac{N-n}{N-1},
\end{aligned}$$

la covarianza entre cada dos variables,  $X_h, X_j$ , del vector aleatorio multivariante. Vemos que la expresión mantiene un signo negativo; esto porque cuando una de las variables aumenta la otra tiene necesariamente que disminuir, esto bajo el supuesto de que las otras variables del vector se mantienen constantes.

El coeficiente de correlación lineal entre estas dos variables aleatorias ( $X_h, X_j$ ) es:

$$\rho_{hj} = \text{Corr}(X_h, X_j) = \frac{\text{Cov}(X_h, X_j)}{\sqrt{\text{Var}(X_h)\text{Var}(X_j)}} = -\sqrt{\frac{N_h}{N - N_h} \cdot \frac{N_j}{N - N_j}}.$$



## 6.9. Distribución De Poisson

### Definición

**Definición 6.9** Se dice que una v.a.  $X$  tiene una **distribución de Poisson**<sup>1</sup> con **media**  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) si su f.p. es la siguiente:

$$f_X(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \mathbf{I}_{\{0,1,2,\dots\}}(x) \quad (6.16)$$

Este hecho se denota por:  $\boxed{X \sim P(\lambda)}$

Tenemos que  $f_X(x|\lambda) \geq 0 \forall x$ . Para comprobar que  $f_X(x|\lambda)$  es realmente una f.p. debemos demostrar que  $\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x|\lambda) = 1$ . Así:

$$\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x|\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

### Momentos

Hemos dicho que la distribución Poisson tienen media  $\lambda$ , ahora lo demostraremos:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x f_X(x|\lambda) = \sum_{x=1}^{\infty} x f_X(x|\lambda) \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} = \lambda. \end{aligned}$$

Nótese el cambio de variable:  $y = x - 1$

Así:

$$E(X) = \lambda$$

Para el cálculo de la varianza tenemos:

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) f_X(x|\lambda) = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) f_X(x|\lambda) \\ &= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x-2}}{(x-2)!} = \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} = \lambda^2. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>ó de los sucesos raros.

Dado que  $E[X(X-1)] = E(X^2) - E(X) = E(X^2) - \lambda$ , de la ecuación anterior tenemos: que  $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$ . Así,

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda.$$

De estos dos resultados concluimos que para la distribución Poisson, la media y la varianza son iguales.

La f.g.m.  $\psi_X(t)$  para  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\psi_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx} e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}.$$

Por tanto:

$$\psi_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}.$$

El coeficiente de asimetría es:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Como  $\alpha_3 = \left. \frac{\partial^3 \psi(t)}{\partial t^3} \right|_{t=0}$ , se comprueba que  $\alpha_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$ . Por otra parte

$$\begin{aligned} \mu_3 &= E[(X - \lambda)^3] = E(X^3) - 3\lambda E(X^2) + 3\lambda^2 E(X) - \lambda^3 \\ &= \alpha_3 - 3\lambda\alpha_2 + 3\lambda^2\alpha_1 - \lambda^3 \\ &= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3\lambda(\lambda + \lambda^2) + 3\lambda^2\lambda - \lambda^3 = \lambda \end{aligned}$$

luego

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^3}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Analogamente deducimos que el coeficiente de curtosis es:

$$\gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$$

Nótese que si  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\gamma_1 \rightarrow 0$  y  $\gamma_2 \rightarrow 0$ , es decir que la distribución de Poisson tiende a hacerse simétrica y que el coeficiente de curtosis tiende a cero. Esto significa que la ley de Poisson converge a la normal cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

### Enunciados

**Teorema 6.1** *Si las v.a.  $X_1, \dots, X_k$  son independientes y si  $X_i$  tiene una distribución de Poisson con media  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), entonces la suma  $X_1 + \dots + X_k$  tiene una distribución de Poisson con media  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$ .*

**Demostración.** Sea  $\psi_i(t)$  la f.g.m. de  $X_i$  para  $i = 1, \dots, k$  y sea  $\psi_X(t)$  la f.g.m. de la suma  $X_1 + \dots + X_k$ . Puesto que  $X_1, \dots, X_k$  son independientes, para  $t \in \mathbb{R}$  resulta que,

$$\psi_X(t) = \prod_{i=1}^k \psi_i(t) = \prod_{i=1}^k e^{\lambda_i(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\dots+\lambda_k)(e^t-1)}.$$

De la ecuación de la f.g.m. de la Poisson se puede observar que esta f.g.m.  $\psi_X(t)$  es la f.g.m. de una distribución de Poisson con media  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$ . Por tanto, la distribución de  $X_1 + \dots + X_k$  debe ser esa distribución de Poisson.  $\triangleleft$

**Distribución de Poisson como límite de la Binomial( $n, p$ )**

Veamos como Poisson llegó a la distribución de probabilidad que lleva su nombre.

Sea una variable aleatoria  $X \sim \text{Bi}(n, p)$  cuya función de cuantía es

$$\Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

y su esperanza, que representamos por  $\lambda$ , es

$$E(X) = np = \lambda.$$

Si hacemos que  $n \rightarrow \infty$ , bajo la condición de que el valor media  $\lambda$  se mantenga constante, será necesario que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np = \lambda$$

y, por tanto, también

$$p = \frac{\lambda}{n} \rightarrow 0$$

el límite de la función de probabilidad binomial será

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} \Pr(X = x) &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\ &= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots [n-(x-1)]}{n^x} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x} \\ &= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\ &= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{-\lambda}}\right)^{\frac{n}{-\lambda}} \right]^{-\lambda} \\ &= \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

El límite de la función de probabilidad es, por tanto,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} \Pr(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

que coincide con la función de cuantía de la distribución de Poisson.

En la práctica se puede utilizar este resultado para aproximar las probabilidades binomiales, pudiéndose realizar dicha aproximación con un error no relevante siempre que  $p \leq 0.1$  y  $\lambda = np < 5$ .

O bien también pudimos haber demostrado este resultado del siguiente modo:

Sea  $\varphi_X(t)$  la f.g.m. de  $X \sim \text{Bi}(n, p)$  y sea  $\varphi_Y(t)$  la f.g.m. de  $Y \sim \text{P}(\lambda)$ , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1) \right]^n = e^{\lambda(e^{it} - 1)} = \varphi_Y(t).$$

### Deducción y descripción

Sea  $f_X(x|t)$  la probabilidad de tener, de manera exacta,  $X$  ocurrencias en un intervalo  $t$ , y supóngase lo siguiente:

1. En este intervalo, los eventos ocurren de manera independiente.
2. La probabilidad de una sola ocurrencia, en un intervalo muy pequeño  $dt$  es  $vdt$ , en donde  $v$  es la frecuencia constante de ocurrencia y ( $v > 0$ ).
3. El intervalo  $dt$  es tan pequeño, que la probabilidad de tener más de una ocurrencia en  $dt$  es despreciable

El evento que en el tiempo  $t + dt$  ha ocurrido exactamente  $x$  veces, puede llevarse a cabo de dos maneras diferentes y excluyentes:

1. Existen  $x$  ocurrencias por tiempo  $t$ , con probabilidad  $f_X(x|t)$  y ninguna en  $dt$ , con probabilidad  $(1 - vdt)$ . Dada la suposición de independencia, la probabilidad conjunta es  $f_X(x|t)(1 - vdt)$ .
2. Existen  $x - 1$  ocurrencias por tiempo  $t$ , con probabilidad  $f_X(x - 1|t)$  y una durante  $dt$ , con probabilidad  $vdt$ . Otra vez, dada la suposición de independencia, la probabilidad conjunta es:  $f_X(x - 1|t)vdt$ .

Esto es:

$$f_X(x|t + dt) = f_X(x|t)(1 - vdt) + f_X(x - 1|t)vdt.$$

Después de multiplicar, transportar  $f_X(x|t)$  al primer miembro, y dividir por  $dt$ , se tiene:

$$\frac{f_X(x|t + dt) - f_X(x|t)}{dt} = v[f_X(x - 1|t) - f_X(x|t)].$$

Si se toma el límite conforme  $dt \rightarrow 0$ , por definición se tiene:

$$\frac{df_X(x|t)}{dt} = v[f_X(x - 1|t) - f_X(x|t)], \quad (6.17)$$

que es una ecuación diferencial lineal con respecto a  $t$  y una ecuación de diferencias finitas de primer orden, con respecto a  $x$ . Si  $x = 0$ , la ecuación (6.17) se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{df_X(0|t)}{dt} &= v[f_X(-1|t) - f_X(0|t)] \\ &= -vf_X(0|t), \end{aligned}$$

dado que  $f_X(-1|t)$  tiene que ser cero. La solución general de la ecuación diferencial lineal

$$\frac{df_X(0|t)}{dt} = -vf_X(0|t)$$

se obtiene mediante separación de variables e integración en ambos miembros, lo que da como resultado:

$$\ln[f_X(0|t)] = \ln(c) - vt,$$

ó

$$f_X(0|t) = ce^{-vt}$$

Dado que la probabilidad de tener cero ocurrencias en un intervalo  $t = 0$ , debe ser 1,  $c = 1$ , y

$$f_X(0|t) = e^{-vt}.$$

Si  $x = 1$ , (6.17) se convierte en

$$\frac{df_X(1|t)}{dt} = v[f_X(0|t) - f_X(1|t)],$$

ó

$$\frac{df_X(1|t)}{dt} + vf_X(1|t) = ve^{-vt} \quad (6.18)$$

La ecuación (6.18) es una ecuación diferencial no homogénea con la condición inicial de que  $f_X(1|0) = 0$  dado que la probabilidad de tener exactamente una ocurrencia en  $t = 0$  debe ser cero. La solución de (6.18) es

$$f_X(1|t) = (vt)e^{-vt}$$

De manera similar, para  $x = 2$  y  $f_X(2|0) = 0$ , (6.17) se reduce a

$$\frac{df_X(2|t)}{dt} + vf_X(2|t) = v^2te^{-vt},$$

cuya solución es

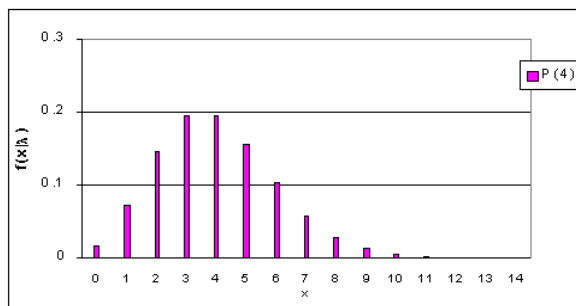
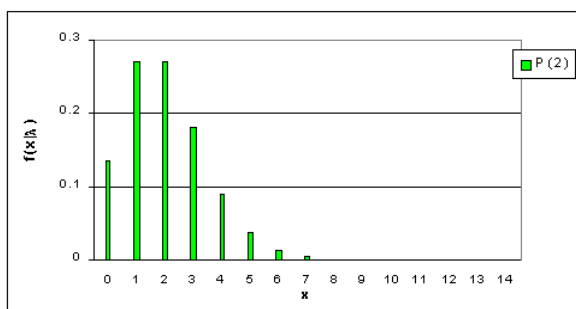
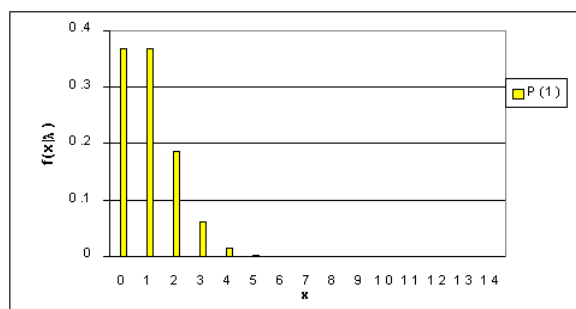
$$f_X(2|t) = \frac{(vt)^2e^{-vt}}{2!}.$$

Al continuar este proceso puede deducirse que la probabilidad de tener exactamente  $x$  ocurrencias en  $t$  es

$$f_X(x|t) = \frac{(vt)^xe^{-vt}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (6.19)$$

siempre que  $f_X(x|0) = 0$ . Si se sustituye  $\lambda = vt$  en (6.19), el resultado es la función de probabilidad de Poisson.

## Gráfica





## 6.10. Distribución binomial negativa

### Definición

**Definición 6.10** Se dice que una v.a. tienen una **distribución binomial negativa** con parámetros  $r$  y  $p$  ( $r \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \langle 0, 1 \rangle$ ) si tienen como f.p. a:

$$f_X(x|r, p) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x \mathbf{I}_{\{0,1,2,\dots\}}(x) \quad (6.20)$$

Esto se denota por  $\boxed{X \sim \text{BiNe}(r, p)}$ .

### Descripción y deducción

Supóngase que hemos de realizar una sucesión infinita de pruebas de Bernoulli, es decir, experimentos donde el resultado puede ser éxito o fracaso. Al ser una prueba de Bernoulli la probabilidad de éxito es  $p \in \langle 0, 1 \rangle$ . Es aquí donde estudiaremos el comportamiento de la v.a. que representa el número total de fracasos que ocurren antes de obtener  $r$  éxitos. Esta además decir que tanto  $r$  como el número de fracasos antes de  $r$  éxitos son números enteros.

Para  $n = r, r+1, \dots$ , se define  $A_n$  como el suceso de que el número total de pruebas requeridas para obtener exactamente  $r$  éxitos sea  $n$ . El suceso  $A_n$  ocurrirá si, y sólo si, ocurren exactamente  $r-1$  éxitos entre las primeras  $n-1$  pruebas y el  $r$ -ésimo éxito se obtiene en la  $n$ -ésima prueba. Puesto que todas las pruebas son independientes, resulta que

$$\Pr(A_n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} q^{(n-1)-(r-1)} \cdot p = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}. \quad (6.21)$$

Para cualquier valor de  $x$  ( $x = 0, 1, 2, \dots$ ), el suceso de obtener exactamente  $x$  fracasos antes de obtener el  $r$ -ésimo éxito es equivalente al suceso de que el número total de pruebas requeridas para obtener  $r$  éxitos es  $r+x$ . En otras palabras, si  $X$  denota el número de fracasos que ocurrirán antes de obtener el  $r$ -ésimo éxito, entonces  $\Pr(X = x) = \Pr(A_{r+x})$ . Si se denota  $\Pr(X = x)$  por  $f_X(x|r, p)$ , de la ecuación (6.21) resulta que

$$f_X(x|r, p) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x \mathbf{I}_{\{0,1,2,\dots\}}(x) \quad (6.22)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\binom{r+x-1}{x} = \binom{r-1+x}{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\overbrace{(r-1+x)(r-1+x-1)\cdots(r-1+x-x+1)}^{x \text{ términos}}}{x!} \\
&= \frac{r(r+1)\cdots(r+x-1)}{x!} \\
&= \frac{(-1)^x(-r)(-r-1)\cdots(-r-x+1)}{x!} \\
&= (-1)^x \binom{-r}{x}
\end{aligned}$$

La f.p. la podemos expresar alternamente como:

$$\Pr(X = x) = \binom{-r}{x} (-1)^x p^r q^x = \binom{-r}{x} p^r (-q)^x$$

es decir:

$$f_X(x|r, p) = \binom{-r}{x} p^r (-q)^x I_{\{0,1,2,\dots\}}(x) \quad (6.23)$$

de ahí su nombre de binomial negativa al comparar su función de probabilidad con la  $\text{Bi}(n, p)$ .

Dado que el binomio

$$(1 - q)^{-r} = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (-q)^x$$

podemos verificar que

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\infty} \Pr(X = x) &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} p^r (-q)^x = p^r \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (-q)^x \\
&= p^r (1 - q)^{-r} = p^r \cdot p^{-r} = 1.
\end{aligned}$$

## 6.11. Distribución geométrica

### Definición

Una distribución binomial negativa con  $r = 1$  es llamada una distribución geométrica.

**Definición 6.11** Una v.a. tiene una **distribución geométrica** con parámetro  $p$  ( $p \in \langle 0,1 \rangle$ ) si tiene como f.p. a:

$$f_X(x|1,p) = pq^x I_{\{0,1,2,\dots\}}(x) \quad (6.24)$$

Esto se denota por:  $X \sim \text{Geo}(p)$

### Descripción y deducción

Considérese de nuevo una sucesión infinita de pruebas de Bernoulli en donde el resultado de cualquier prueba es un éxito o fracaso y la probabilidad de éxito en cualquier prueba es  $p$ . Si se define  $X_1$  como el número de fracasos que ocurren antes de obtener el primer éxito, entonces  $X_1$  tendrá una distribución geométrica con parámetro  $p$ .

En general, para  $j = 2, 3, \dots$ , se define  $X_j$  como el número de fracasos que ocurren después de haber obtenido  $j - 1$  éxitos, pero antes de obtener el  $j$ -ésimo éxito. Puesto que todas las pruebas son independientes y la probabilidad de obtener un éxito en cualquier prueba concreta es  $p$ , resulta que cada variable aleatoria  $X_j$  tendrá una distribución geométrica con parámetro  $p$  y que las v.a.  $X_1, X_2, \dots$  serán independientes. Además, para  $r = 1, 2, \dots$ , la suma  $X_1 + \dots + X_r$  será igual al número total de fracasos que ocurren antes de haber obtenido exactamente  $r$  éxitos. Por tanto, esta suma tendrá una distribución binomial negativa con parámetros  $r$  y  $p$ . Así se ha obtenido el siguiente resultado:

**Proposición 6.2** Si  $X_1, \dots, X_r$  son variables aleatorias i.i.d. y si cada  $X_i$  tiene una distribución geométrica con parámetro  $p$ , entonces la suma  $X = X_1 + \dots + X_r$  tiene una distribución binomial negativa con parámetro  $r$  y  $p$ .

### Momentos

Si  $X_1 \sim \text{Geo}(p)$ , entonces su f.g.m.  $\psi_1(t)$  es:

$$\psi_1(t) = E(e^{tX_1}) = p \sum_{x=0}^{\infty} (qe^t)^x. \quad (6.25)$$

Esta serie infinita converge para cualquier valor de  $t$  siempre que  $0 < qe^t < 1$ , esto es, para  $t < \ln(1/q)$ . Del cálculo tenemos que para  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ).

$$\sum_{x=0}^{\infty} \alpha^x = \frac{1}{1-\alpha}.$$

De ahí que  $t < \ln(1/q)$ ,

$$\psi_1(t) = \frac{p}{1 - qe^t}. \quad (6.26)$$

Sabemos que si las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_r$ , son i.i.d. y si la f.g.m. de cada una de ellas es  $\psi_1(t)$ , entonces la f.g.m. de la suma  $X_1 + \dots + X_r$  es  $[\psi_1(t)]^r$ . Puesto que la distribución de la suma  $X = X_1 + \dots + X_r$  sigue una distribución binomial negativa con parámetros  $r$  y  $p$ , de ahí:

**Proposición 6.3** *Si  $X$  tiene una distribución binomial negativa con parámetros  $r$  y  $p$ , entonces la f.g.m. de  $X$  es la siguiente:*

$$\psi_X(t) = \left( \frac{p}{1 - qe^t} \right)^r \quad \text{para } t < \ln\left(\frac{1}{q}\right). \quad (6.27)$$

Y también podemos calcular la función característica de la distribución binomial negativa como:

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E(e^{itX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \binom{-r}{x} p^r (-q)^x \\ &= p^r \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (-qe^{it})^x \\ &= p^r (1 - qe^{it})^{-r} = \left( \frac{p}{1 - qe^{it}} \right)^r. \end{aligned}$$

Si  $X_1 \sim \text{Geo}(p)$ , entonces:

$$E(X_1) = \psi'_1(0) = \frac{q}{p} \quad (6.28)$$

y

$$\text{Var}(X_1) = \psi_1''(0) - [\psi_1'(0)]^2 = \frac{q}{p^2}. \quad (6.29)$$

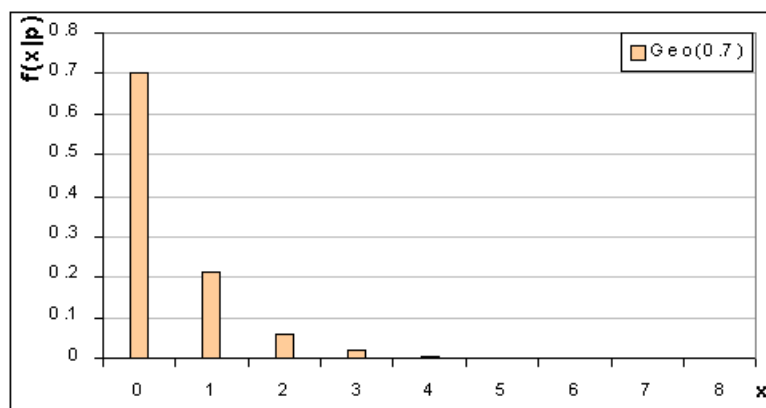
Supóngase que  $X \sim \text{BiNe}(r, p)$ . Representemos  $X = X_1 + \cdots + X_r$ , donde  $X_i \sim \text{Geo}(p)$  son v.a. i.i.d. de ahí:

$$E(X) = \frac{rq}{p} \quad \text{y} \quad \text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}. \quad (6.30)$$

### Relación con otras distribuciones

$$X \sim \text{Geo}(p) = \text{BiNe}(1, p).$$

## Gráfica

Figura 6.5: La f.d.p. de una distribución geométrica para  $p = 0.7$ .

## 6.12. Distribución multinomial

### Definición

**Definición 6.12** Se dice que un vector aleatorio  $\mathbf{X}$  tiene una **distribución multinomial** con parámetros  $n$  y  $\mathbf{p}$  ( $n \in \mathbb{N}, \mathbf{p} \in \langle 0, 1 \rangle^n$ ) si tiene como f.d.p. a:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|n, \mathbf{p}) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}. \quad (6.31)$$

Además,  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|n, \mathbf{p}) = 0$  para cualquier otro vector  $\mathbf{x}$ .

Este hecho se denota por:  $\boxed{\mathbf{X} \sim \text{Mult}(n, \mathbf{p})}$ .

Vemos que esta distribución es una generalización de la distribución binomial. Se llama así, ya que

$$\frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}$$

es el término general en el *desarrollo multinomial*

$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_k)^n.$$

### Relación con otras distribuciones

Como ya dijimos esta distribución es una generalización de la distribución binomial; pues cuando  $k = 2$ , es decir  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ , el vector aleatorio tiene dimensión dos tenemos una distribución binomial.

### Momentos

Supóngase que  $\mathbf{X} \sim \text{Mult}(n, \mathbf{p})$ . Puesto que la distribución marginal de cada componente del vector,  $X_i$ , es una distribución binomial con parámetros  $n$  y  $p_i$ ,  $X_i \sim \text{Bi}(n, p_i)$ , resulta que

$$E(X_i) = np_i \quad \text{y} \quad \text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i) \quad \forall i = \overline{1, k}. \quad (6.32)$$

o bien también:

$$E(\mathbf{X}) = E(X_1, X_2, \dots, X_k) = (np_1, np_2, \dots, np_k).$$

Dado que la suma  $X_i + X_j$  es el número total de artículos del tipo  $i$  o del tipo  $j$  que se seleccionan en  $n$  pruebas de Bernoulli, vemos que

$$X_i + X_j \sim \text{Bi}(n, p_i + p_j)$$

Por tanto,

$$\text{Var}(X_i + X_j) = n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j). \quad (6.33)$$

Además:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_i + X_j) &= \text{Var}(X_i) + \text{Var}(X_j) + 2\text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= np_i(1 - p_i) + np_j(1 - p_j) + 2\text{Cov}(X_i, X_j). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Igualando las partes derechas de (6.33) y (6.34), obtenemos:

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j, \quad (6.35)$$

la covarianza para dos componentes cualquiera,  $X_i$  y  $X_j$ , del vector aleatorio  $\mathbf{X}$ .



### 6.13. Distribución De Pólya o de contagio

#### Definición

**Definición 6.13** Se dice que una v.a. tiene una **distribución Pólya** o de **contagio** con parámetros  $N_1, N_2, n$  y  $c$  ( $N_1, N_2, n, c \in \mathbb{N}$ ) si tiene como f.p. a:

$$f_X(x|N_1, N_2, n, c) = \binom{n}{x} \frac{N_1(N_1 + c) \cdots [N_1 + (x-1)c] N_2(N_2 + c) \cdots [N_2 + (n-x-1)c]}{N(N + c) \cdots [N + (n-1)c]} \quad (6.36)$$

Este hecho se denota por:  $X \sim \text{Polya}(N_1, N_2, n, c)$

#### Descripción y deducción

Tenemos una población con  $N_1$  elementos que cumplen con cierta propiedad  $P_1$  y  $N_2$  que cumplen con otra propiedad  $P_2$ , siendo un total de  $N = N_1 + N_2$  elementos. Es decir, tenemos una población con elementos de dos tipos distintos.

Extraemos un elemento al azar de la población, luego devolvemos este elemento a la población acompañado de  $c$  elementos más del mismo tipo. Repitiendo este proceso  $n$  veces.

La v.a.,  $X$ , que se refiere al número de elementos del mismo tipo que se obtienen de este proceso de contagio en  $n$  repeticiones del mismo se dice que sigue, entonces, una distribución de Pólya o de contagio.

Fijemos nuestra atención a los elementos del primer tipo, entonces la probabilidad de obtener exactamente  $x$  elementos de este tipo en  $x$  repeticiones del proceso es:

$$\frac{N_1}{N} \cdot \frac{N_1 + c}{N + c} \cdots \frac{N_1 + (x-1)c}{N + (x-1)c}$$

trás haber obtenidos  $x$  elementos del primero tipo en las primeros  $x$  repeticiones del proceso, la probabilidad de obtener  $(n-x)$  elementos del segundo tipo en las, precisamente  $(n-x)$ , restantes repeticiones del proceso será:

$$\frac{N_2}{N + xc} \cdot \frac{N_2 + c}{N + (x+1)c} \cdots \frac{N_2 + (n-x-1)c}{N + (n-1)c}.$$

De estos dos resultados se sigue que la probabilidad de obtener  $x$  elementos del primer tipo en las primeras  $x$  repeticiones del proceso y  $n-x$  elementos del segundo tipo en las restantes  $n-x$  repeticiones es:

$$\frac{N_1}{N} \cdot \frac{N_1 + c}{N + c} \cdots \frac{N_1 + (x-1)c}{N + (x-1)c} \cdot \frac{N_2}{N + xc} \cdot \frac{N_2 + c}{N + (x+1)c} \cdots \frac{N_2 + (n-x-1)c}{N + (n-1)c}$$

Además las posibles disposiciones de los dos tipos de elementos,  $x$  del primer tipo y  $n - x$  del segundo tipo, es:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \quad .$$

El producto de los dos resultados anteriores es la f.p. dada en la definición.

### Momentos

Definamos:

$$p = \frac{N_1}{N} \quad \text{y} \quad q = 1 - p = \frac{N_2}{N},$$

como las proporciones iniciales de elementos del primer tipo y del segundo, respectivamente, y definamos  $\nu = \frac{c}{N}$  la proporción inicial de contagio, entonces la esperanza matemática y varianza de esta v.a. son:

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = npq \frac{1 + n\nu}{1 + \nu} \quad .$$

Omitamos por el momento la demostración de estos resultados.

Además, la distribución de Pólya converge a una distribución  $\text{Bi}(n, p)$  cuando:

$$N_1 \rightarrow \infty$$

$$N_2 \rightarrow \infty$$

$$N \rightarrow \infty$$

siempre que:

$$p = \frac{N_1}{N}$$

$$q = \frac{N_2}{N}$$

permanezcan constantes y se verifique:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \nu = 0.$$

## 6.14. Distribución uniforme

### Definición

**Definición 6.14** Una v.a.  $X$  tiene una **distribución uniforme** con parámetros  $a$  y  $b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ) si tiene como f.d.p.  $a$ :

$$f_X(x|a, b) = \frac{1}{b-a} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) \quad (6.37)$$

Hecho que denotamos por:  $X \sim U(a, b)$

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a} \quad a \leq x \leq b.$$

Esta distribución tiene la siguiente característica:

$$\Pr(x \leq X \leq x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} \frac{dx}{b-a} = \frac{\Delta x}{b-a},$$

es decir, que la probabilidad depende de la amplitud del intervalo,  $\Delta x$ , que este-mos considerando. De ahí vemos que la distribución se encuentra uniformemente repartida en su campo de variación, el intervalo  $[a, b]$ .

### Descripción y deducción

Consideremos un experimento en el que hemos de seleccionar al azar un punto del intervalo  $[a, b]$ . Además, supongamos que cada punto,  $X$ , tiene la misma probabilidad de ser seleccionado, independientemente de su localización, entonces decimos que  $X$  es una v.a. que se distribuye uniformemente.

### Momentos

La esperanza, varianza y función característica de esta variable son:

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2};$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{(b^3 - a^3)}{3(b-a)}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_a^b e^{itx} \frac{1}{b-a} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)} \quad \text{si } t \neq 0 \quad ; \varphi_X(0) = 1$$

$$\psi_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} & \text{para } t \neq 0 \\ 1 & \text{para } t = 0 \end{cases}$$

la f.g.m. es no diferenciable en cero, pero los momentos pueden ser calculados diferenciando y tomando el  $\lim_{t \rightarrow 0}$ .

### Generación de números aleatorios

De

$$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

tenemos que

$$x = a + (b-a) \cdot F_X$$

y  $F_X \sim U(0,1)$ .

### Casos especiales

Como casos particulares tenemos los siguientes:

**1** Si en  $U(a, b)$  hacemos  $a = 0, b = 1$ , tenemos la distribución  $U(0, 1)$ . La función de densidad es  $f_X(x) = 1$ , el campo de variación el intervalo  $[0, 1]$ , y sus características

$$E(X) = \frac{1}{2},$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{12},$$

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{it} - 1}{it}$$

**2** Distribución  $U(-a, a)$ :  $a = -a, b = a$ .  
la función de densidad es  $f_X(x) = 1/2a$ , el campo de variación el intervalo  $[-a, a]$ , y sus características

$$E(X) = 0,$$

$$\text{Var}(X) = \frac{a^2}{3},$$

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{ita} - e^{-ita}}{2ita}$$

Si expresamos  $e^{ita}$  y  $e^{-ita}$  en forma binómica:

$$e^{ita} = \cos ta + i \sin ta, \quad e^{-ita} = \cos ta - i \sin ta$$

y sustituimos en la función característica tenemos

$$\varphi_X(t) = \frac{(\cos ta + i \sin ta) - (\cos ta - i \sin ta)}{2ita} = \frac{2i \sin ta}{2ita} = \frac{\sin ta}{ta}$$

### Propiedades

**Propiedad 6.1** Sea  $X$  una v.a. con distribución continua con función de distribución  $F_X(x)$ , y consideremos  $y = F_X(x)$ , entonces  $Y$  es una v.a. cuya f.d. es:

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr[F_X(X) \leq y] = \Pr[X \leq F_X^{-1}(y)] = F_X[F_X^{-1}(y)] = y$$

y por tanto

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = 1 \quad ,$$

así  $Y \sim U(0, 1)$ .

## Gráfica

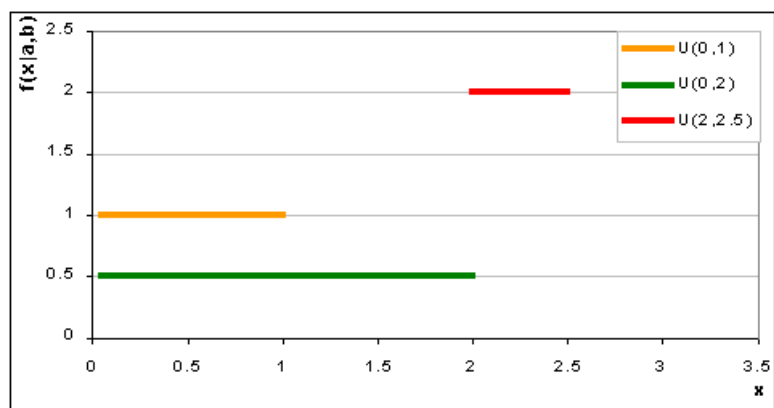


Figura 6.6: La f.d.p. de una distribución uniforme.

## 6.15. Distribución logarítmica

### Definición

**Definición 6.15** Se dice que una v.a.  $X$  tiene una **distribución logarítmica** con parámetros  $a$  y  $b$  ( $a, b \in \mathbb{R}^+$ ,  $a < b$ ) si tiene como f.d.p. a:

$$f_X(x|a, b) = \frac{\ln x}{b(\ln b - 1) - a(\ln a - 1)} I_{\langle a, b \rangle}(x). \quad (6.38)$$

Este hecho lo denotamos por:  $X \sim \text{Logaritmica}(a, b)$

Nótese que  $a < b$  y además  $a \in [1, \infty)$  y  $b \in \langle 1, \infty)$ .

Y su función de distribución está dada por:

$$F_X(x) = \frac{a(1 - \ln a) - x(1 - \ln x)}{a(1 - \ln a) - b(1 - \ln b)}$$

### Momentos

El momento entorno a cero está dado por:

$$E(X^n) = \frac{a^{n+1}[1 - (n+1)\ln a] - b^{n+1}[1 - (n+1)\ln b]}{(n+1)^2[a(1 - \ln a) - b(1 - \ln b)]}$$

De aquí tenemos:

$$\mu = E(X) = \frac{a^2[1 - 2\ln a] - b^2[1 - 2\ln b]}{4[a(1 - \ln a) - b(1 - \ln b)]}$$

La varianza, sesgo y curtosis son expresiones complicadas que involucran a  $\alpha_n = E(X^n)$ .

## Gráfica

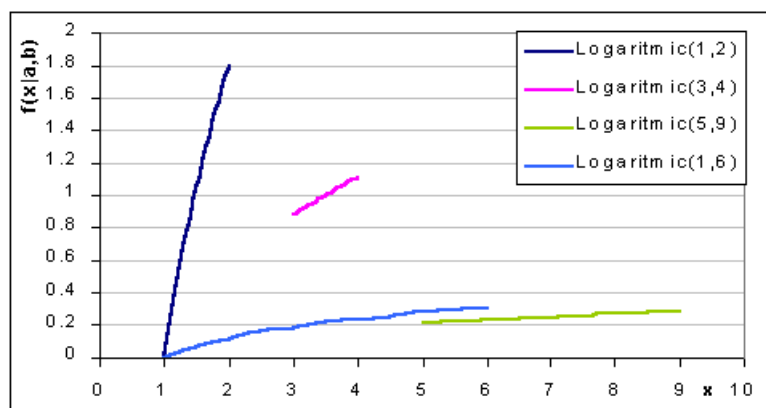


Figura 6.7: La f.d.p. de una distribución logarítmica.



## 6.16. Distribución normal

### Definición

**Definición 6.16** Se dice que una v.a.  $X$  tiene una **distribución normal** con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  ( $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ ) si  $X$  tiene una distribución continua cuya f.d.p.  $f_X(x|\mu, \sigma^2)$  es:

$$f_X(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x). \quad (6.39)$$

Este hecho se denota por:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Ahora demostraremos que la anterior ecuación es realmente una f.d.p. demostrando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x|\mu, \sigma^2) dx = 1. \quad (6.40)$$

Definamos  $y = (x - \mu)/\sigma$ , así

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x|\mu, \sigma^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp \left( -\frac{1}{2}y^2 \right) dy.$$

Definamos también:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{1}{2}y^2 \right) dy. \quad (6.41)$$

Entonces, basta demostrar que  $I = (2\pi)^{1/2}$ .

De la ecuación (6.41), tenemos:

$$\begin{aligned} I^2 &= I \cdot I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{1}{2}y^2 \right) dy \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{1}{2}z^2 \right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2}(y^2 + z^2) \right] dy dz. \end{aligned}$$

Ahora hagamos el cambio de variables en esta integral de  $y$  y  $z$  a coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  definidas como  $y = r \cos \theta$  y  $z = r \sin \theta$ . Y dado que  $y^2 + z^2 = r^2$ , tenemos:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp \left( -\frac{1}{2}r^2 \right) r dr d\theta = 2\pi.$$

Así,  $I = (2\pi)^{1/2}$  y la ecuación (6.40) está demostrada.

## Momentos

Obtengos la f.g.m. de esta v.a.:

$$\psi_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \exp \left[ tx - \frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] dx.$$

Dentro de los corchetes tenemos:

$$tx - \frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} = \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 - \frac{[x - (\mu + \sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2}.$$

Luego:

$$\psi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \exp \left[ \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 - \frac{[x - (\mu + \sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2} \right] dx.$$

Así:

$$\psi_X(t) = \exp \left( \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 \right) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \exp \left\{ -\frac{[x - (\mu + \sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2} \right\} dx}_{=C=1}.$$

Reemplazando  $\mu$  por  $\mu + \sigma^2 t$  en la ecuación (6.39), resulta de la ecuación (6.40) que  $C = 1$ . De ahí que, la f.g.m. de la distribución normal es:

$$\psi_X(t) = \exp \left( \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 \right) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (6.42)$$

De un modo similar llegamos a que la f.c. es:

$$\varphi_X(t) = \exp \left( \mu it - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 \right) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De los resultados a los que hemos llegado, vemos que si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , entonces:

$$E(X) = \psi'_X(0) = \mu$$

$$\text{Var}(X) = \psi''_X(0) - [\psi'_X(0)]^2 = \sigma^2.$$

De este modo vemos que  $\mu$  y  $\sigma^2$  son la media y la varianza de la distribución normal definida por la ecuación (6.39).

Dado que la f.g.m.  $\psi_X(t)$  es finita para todo valor de  $t$ , todos los momentos  $E(X^k)$ , donde  $k \in \mathbb{N}$ , han de ser finitos.

### Enunciados

**Teorema 6.2** Si  $X$  tiene una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  y si  $Y = aX + b$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes y  $a \neq 0$ , entonces  $Y$  tiene una distribución normal con media  $a\mu + b$  y varianza  $a^2\sigma^2$

**Demostración.** La f.g.m.  $\psi_X$  de  $X$  está dada por la ecuación (6.42). Si  $\psi_Y$  es la f.g.m. de  $Y$ , entonces

$$\psi_Y(t) = e^{bt}\psi(at) = \exp \left[ (a\mu + b)t + \frac{1}{2}a^2\sigma^2t^2 \right] \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Comparando esta expresión para  $\psi_Y$  con la f.g.m. de una distribución normal de la ecuación (6.42), se observa que  $\psi_Y$  es la f.g.m. de una distribución normal con media  $a\mu + b$  y varianza  $a^2\sigma^2$ . Por tanto,  $Y$  debe tener esta distribución normal.  $\triangleleft$

**Teorema 6.3** Si las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_k$  son independientes y si  $X_i$  tiene una distribución normal con media  $\mu_i$  y varianza  $\sigma_i^2$  ( $i = 1, \dots, k$ ), entonces la suma  $X_1 + \dots + X_k$  tiene una distribución normal con media  $\mu_1 + \dots + \mu_k$  y varianza  $\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2$ .

**Demostración.** Sea  $\psi_i(t)$  la f.g.m. de  $X_i$  para  $i = 1, \dots, k$  y sea  $\psi_X(t)$  la f.g.m. de  $X_1 + \dots + X_k$ . Puesto que las variables  $X_1, \dots, X_k$  son independientes, entonces

$$\begin{aligned} \psi_X(t) &= \prod_{i=1}^k \psi_i(t) = \prod_{i=1}^k \exp \left( \mu_i t + \frac{1}{2} \sigma_i^2 t^2 \right) \\ &= \exp \left[ \left( \sum_{i=1}^k \mu_i \right) t + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \right) t^2 \right] \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La f.g.m. de la ecuación (6.42) se puede identificar como la f.g.m. de una distribución normal cuya media es  $\sum_{i=1}^k \mu_i$  y cuya varianza es  $\sum_{i=1}^k \sigma_i^2$ . Por tanto, la distribución de  $X_1 + \dots + X_k$  debe ser esa distribución normal.  $\triangleleft$

**Corolario 6.1** Si las v.a.  $X_1, \dots, X_k$  son independientes, si  $X_i$  tiene una distribución normal con media  $\mu_i$  y varianza  $\sigma_i^2$  ( $i = 1, \dots, k$ ) y si  $a_1, \dots, a_k$  y  $b$  son constantes para las que al menos uno de los valores  $a_1, \dots, a_k$  es distinto de cero, entonces la variable  $a_1X_1 + \dots + a_kX_k + b$  tiene una distribución normal con media  $a_1\mu_1 + \dots + a_k\mu_k + b$  y varianza  $a_1^2\sigma_1^2 + \dots + a_k^2\sigma_k^2$ .

**Corolario 6.2** Supóngase que las v.a.  $X_1, \dots, X_n$  constituyen una muestra aleatoria de una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  y sea  $\bar{X}_n$  la media muestral. Entonces  $\bar{X}_n$  tiene una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2/n$ .

---

***Demostración.*** Puesto que  $\bar{X}_n = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$ , resulta del corolario anterior que la distribución de  $\bar{X}_n$  es normal. Consecuentemente, basta recordar que  $E(\bar{X}_n) = \mu$  y que  $\text{Var}(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$ .  $\triangleleft$

## Gráfica

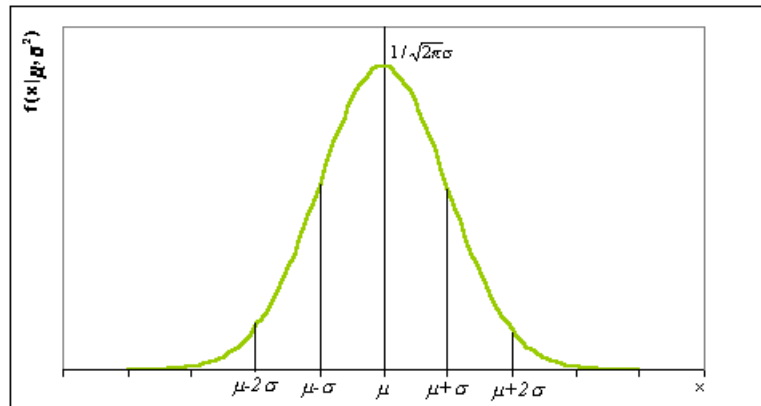


Figura 6.8: La f.d.p. de una distribución normal.

Vemos que la gráfica de esta distribución es simétrica respecto a su media  $\mu$ , pero además este  $\mu$  también es la mediana y moda de la distribución. Y como puntos de inflexión, obtenidos mediante la doble derivada de la f.d.p, tenemos a  $x = \mu - \sigma$  y  $x = \mu + \sigma$ .

Algo visible de la gráfica es su “forma de campana”, parecida forma que también tiene la distribución Cauchy. Sin embargo, hay que recordar que la distribución Cauchy carece de cualquier momento mientras que en la distribución normal no es así.

## 6.17. Distribución normal tipificada

### Definición

Una distribución  $N(\mu = 0, \sigma = 1)$  se llama *distribución normal tipificada* o también *distribución normal estándar*.

**Definición 6.17** Se dice que una v.a.  $X$  tiene una distribución **normal tipificada** si tiene una distribución normal con  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$ , es decir, con f.d.p. igual a:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (6.43)$$

Denotamos este hecho por:  $\boxed{X \sim N(0, 1)}$ .

Algunos autores generalmente usan la siguiente notación para la f.d.p. y f.d.:

$$\phi(x) := f_X(x|0, 1) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (6.44)$$

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \phi(u) du = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (6.45)$$

El cálculo de probabilidades de esta variable lo podemos encontrar en tablas o inclusive hay calculadoras que los obtienen. Una relación muy útil al hacer uso de tablas es:

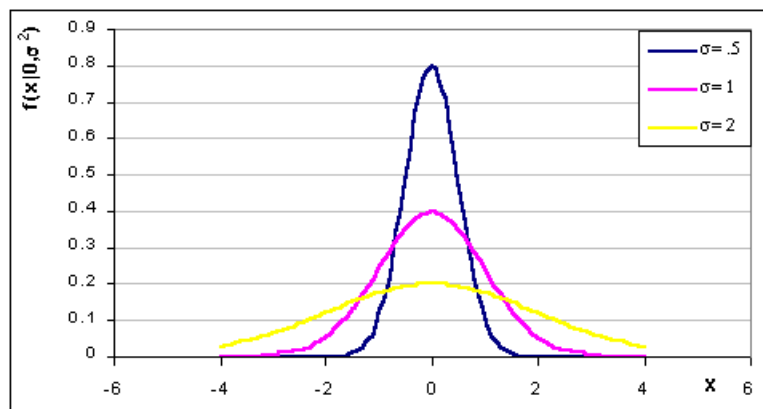
$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1 \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.46)$$

Las probabilidades para una distribución  $N(\mu, \sigma^2)$  cualquiera pueden ser calculadas mediante la transformación  $Z = (X - \mu)/\sigma$ , la cual nos lleva a  $Z \sim N(0, 1)$ .

La f.g.m. y f.c. de esta distribución, por ende, es:

$$\psi_X(t) = e^{t^2/2} \quad \text{y} \quad \varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$$

## Comparaciones de distribuciones normales

Figura 6.9: La f.d.p. normal para  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1/2, 1, 2$ 

De esta gráfica vemos que para un  $\sigma$  pequeño tenemos una gráfica muy apun-  
tada y una muy dispersa para un  $\sigma$  grande.

Sea  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , una distribución normal cualquiera, y  $k > 0$ , entonces:

$$p_k = \Pr(|X - \mu| \leq k\sigma) = \Pr(|Z| \leq k).$$

La tabla muestra las probabilidades dentro de  $k$  desviaciones típicas para cualquier normal:

| $k$ | $p_k$                   |
|-----|-------------------------|
| 1   | 0.6826                  |
| 2   | 0.9544                  |
| 3   | 0.9974                  |
| 4   | 0.99994                 |
| 5   | $1 - 6 \times 10^{-7}$  |
| 10  | $1 - 2 \times 10^{-23}$ |

## 6.18. Distribución normal positiva

### Definición

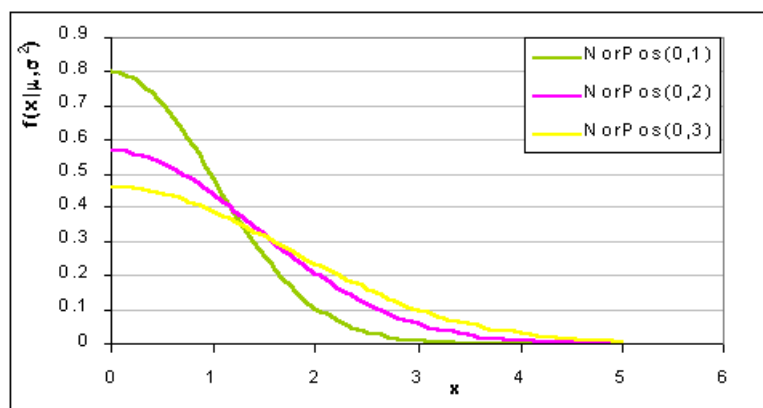
**Definición 6.18** Una v.a. tiene una **distribución Normal Positiva** con parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  ( $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ ) si tiene como f.d.p. a:

$$f_X(x|\mu, \sigma) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \mathbf{I}_{\langle \mu, \infty \rangle}(x). \quad (6.47)$$

Este hecho lo denotamos por:  $\boxed{X \sim \text{NorPos}(\mu, \sigma)}$



## Gráfica

Figura 6.10: La f.d.p. normal positiva para varios valores  $(\mu, \sigma^2)$ .

## 6.19. Distribución lognormal

### Definición

**Definición 6.19** Una v.a.  $X$  tiene una **distribución lognormal**<sup>2</sup> con parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$  ( $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$ ), si tiene la siguiente f.d.p.:

$$f_X(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x). \quad (6.48)$$

Este hecho lo denotamos por:  $\boxed{X \sim \text{LogN}(\mu, \sigma^2)}$

### Descripción y deducción

Sea una v.a.  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ , efectuamos la transformación  $X = e^Y$ . La distribución de esta variable recibe el nombre de lognormal. Su campo de variación es  $\mathbb{R}^+$ .

El cálculo de la f.d.p. lo efectuamos como sigue:

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \Pr(e^Y \leq x) = \Pr(Y \leq \ln x) = F_Y(\ln x)$$

donde

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{1}{x} f_Y(\ln x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

### Momentos

Sus momentos:

$$E(X^n) = \exp \left[ \frac{2n\mu + n^2\sigma^2}{2} \right] \quad n = 0, 1, \dots$$

En particular:

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

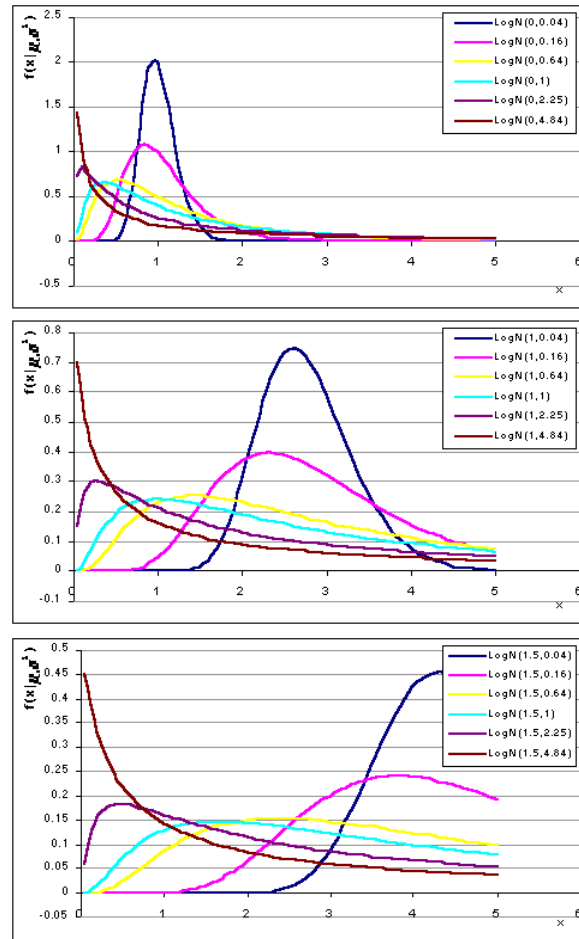
y

$$\text{Var}(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

---

<sup>2</sup>ó de Mac Alister ó logarítmico normal.

## Gráfica

Figura 6.11: La f.d.p. lognormal para varios valores  $(\mu, \sigma^2)$ .

## 6.20. Distribución de Gilbrat

### Definición

**Definición 6.20** *Se dice que una v.a.  $X$  tiene una **distribución de Gilbrat** si tiene como f.d.p. a:*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp \left[ -\frac{(\ln x)^2}{2} \right] \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad (6.49)$$

Esto lo denotamos por:  $X \sim \text{Gilbrat}$

### Relación con otras distribuciones

$$X \sim \text{Gilbrat} = \text{LogN}(0, 1).$$

### Momentos

Además sus momentos:

$$\mu = E(X) = e^{1/2}$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = e(e - 1)$$

## Gráfica

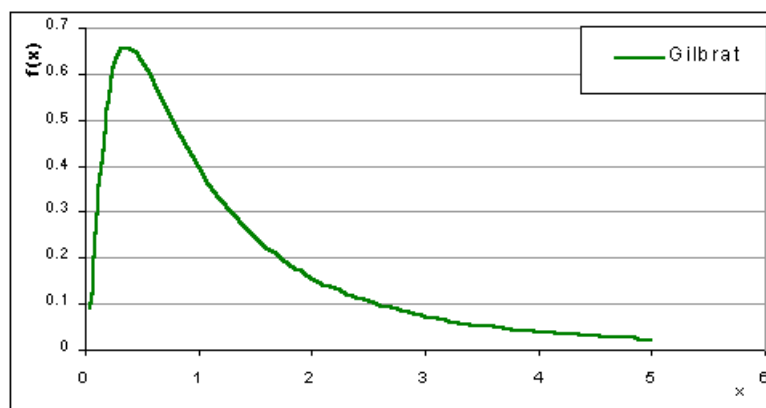


Figura 6.12: La f.d.p. Gilbrat.

## 6.21. Distribución de Cauchy

### Definición

**Definición 6.21** Se dice que una v.a. tiene una **distribución de Cauchy** con parámetros  $\alpha$  y  $\lambda$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ) si tiene como f.d.p. a:

$$f_X(x|\alpha, \lambda) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + (x - \alpha)^2} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x) \quad (6.50)$$

Esto lo denotamos por:  $X \sim \text{Cau}(\alpha, \lambda)$

Su función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \arctan \left( \frac{x - \alpha}{\lambda} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

Y su función de distribución inversa (de probabilidad  $F_X$ ) es:

$$x = \alpha + \lambda \tan \left[ \pi \left( F_X - \frac{1}{2} \right) \right]$$

La f.d.p. de una v.a. Cauchy es simétrica con respecto a  $\alpha$  que es la mediana de la variable; en efecto,  $F_X(\alpha) = 1/2$ .

### Momentos

Su f.c. es:

$$\varphi_X(t) = e^{i\alpha t - \lambda|t|}$$

que no es diferenciable en  $t = 0$ , por tanto, la v.a. carece de momentos respecto al origen. Lo que implica que no tiene media y varianza.

### Casos especiales

Definamos una variable  $Y = a + bX$  siendo  $X \sim \text{Cau}(\alpha, \lambda)$ , entonces  $Y \sim \text{Cau}(a + b\alpha, |b|\lambda)$ .

Como caso particular de la distribución de Cauchy haciendo  $\lambda = 1$  y  $\alpha = 0$  tenemos la distribución  $\text{Cau}(0, 1)$ <sup>3</sup> con función de densidad igual a:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x).$$

---

<sup>3</sup>También se verifica su recíproco si  $X$  es  $\text{Cau}(0, 1)$ , entonces la variable  $Y = \lambda X + \alpha$  sigue una distribución  $\text{Cau}(\alpha, \lambda)$ .

A esta distribución se llega, también, como cociente de dos distribuciones  $N(0, \sigma^2)$  independientes, no siendo cierta la situación inversa, es decir, si una distribución  $\text{Cau}(0, 1)$  es el cociente de dos variables aleatorias independientes éstas no tienen por qué ser  $N(0, \sigma^2)$ .<sup>4</sup>

A esta distribución  $\text{Cau}(0, 1)$  también se le conoce como Cauchy estandarizada y la denotamos por  $\text{CauEst}$ .

Otros casos son:

- Sea  $Y \sim \text{Cau}(0, \lambda)$  y la variable  $W = \theta/Y$ ,  $W \sim \text{Cau}(0, |\theta|/\lambda)$ .
- Sea  $Y \sim \text{Cau}(0, 1)$  y  $W = 1/Y$ ,  $W \sim \text{Cau}(0, 1)$ .
- Sea  $Y \sim U(-\pi/2, \pi/2)$  y  $W = \tan Y$ ,  $W \sim \text{Cau}(0, 1)$ .

### Enunciados

Ahora demostramos que la distribución de Cauchy tiene la propiedad aditiva o reproductiva. Si tenemos  $k$  variables aleatorias independientes

$$X_j \sim \frac{\lambda_j}{\pi} \frac{1}{\lambda_j^2 + (x - \mu_j)^2}$$

y definimos  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ , esta v.a. sigue una distribución de Cauchy. Para demostrarlo calcularemos su f.c.:

$$\varphi_X(t) = \prod_{j=1}^k \varphi_j(t) = \prod_{j=1}^k e^{i\mu_j t - \lambda_j |t|} = e^{it \sum_{j=1}^k \mu_j - |t| \sum_{j=1}^k \lambda_j}$$

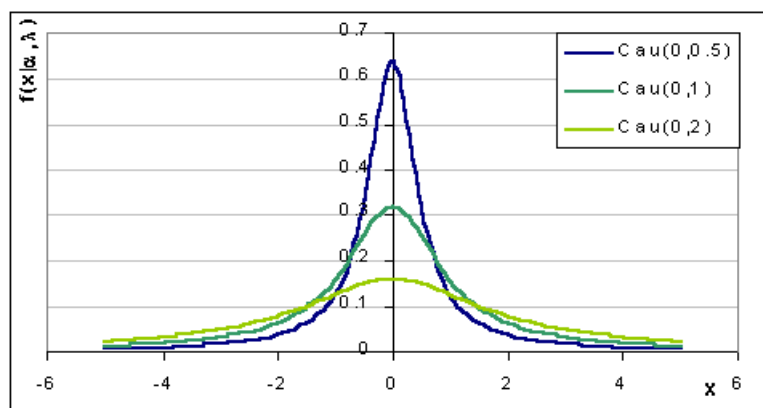
que es la f.c. de una v.a. que sigue una distribución de Cauchy con f.d.p. igual a:

$$f_X \left( x \mid \sum_{j=1}^k \mu_j, \sum_{j=1}^k \lambda_j \right) = \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j}{\pi} \frac{1}{\left( \sum_{j=1}^k \lambda_j \right)^2 + \left( x - \sum_{j=1}^k \mu_j \right)^2}.$$

---

<sup>4</sup>La distribución  $\text{Cau}(0, 1)$  puede contemplarse, asimismo, como una  $t$  de Student con 1 grado de libertad.

## Gráfica

Figura 6.13: La f.d.p. Cauchy para varios valores  $(\alpha, \lambda)$ .



## 6.22. Distribución de Laplace

### Definición

**Definición 6.22** Una variable aleatoria  $X$  sigue la **distribución de Laplace**<sup>5</sup> con parámetros  $\alpha$  y  $\lambda$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ), si tiene función de densidad de probabilidad igual a

$$f_X(x|\alpha, \lambda) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\alpha|} \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x) \quad (6.51)$$

El hecho se denota por:  $X \sim \text{Lap}(\alpha, \lambda)$

La anterior f.d.p. también se puede expresar:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda(\alpha-x)} & \text{si } x \in \langle -\infty, \alpha \rangle \\ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda(x-\alpha)} & \text{si } x \in \langle \alpha, +\infty \rangle \end{cases}$$

Su función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \text{sgn}(x - \alpha)(1 - e^{-\lambda|x-\alpha|}) \right]$$

### Momentos

Su función característica es:

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} e^{it\alpha}.$$

y de aquí deducimos que su esperanza y varianza son iguales a:

$$E(X) = \alpha$$

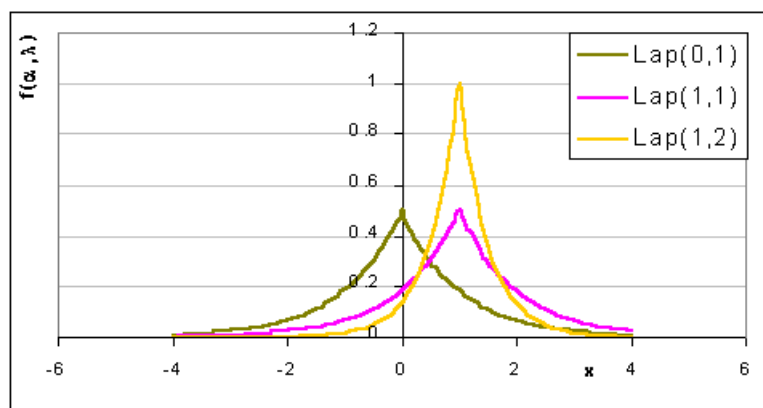
$$\text{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

La función es simétrica con respecto a  $\alpha$ .

---

<sup>5</sup>Ó *exponencial doble*.

## Gráfica

Figura 6.14: La f.d.p. Laplace para varios valores  $(\alpha, \lambda)$ .

### 6.23. Distribución logística

#### Definición

**Definición 6.23** Se dice que una variable aleatoria  $X$  sigue una **distribución logística** con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  ( $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^+$ ), si tiene una función de densidad igual a:

$$\begin{aligned}
 f_X(x|\alpha, \beta) &= \frac{\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}{b \left[1 + \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]^2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x) \\
 &= \frac{\exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}{b \left[1 + \exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]^2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x) \\
 &= \frac{1}{2\beta \left[1 + \cosh\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]} \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x) \\
 &= \frac{\operatorname{sech}^2\left(\frac{x-\alpha}{2\beta}\right)}{4\beta} \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x)
 \end{aligned} \tag{6.52}$$

Esto se denota por:  $\boxed{X \sim \operatorname{Log}(\alpha, \beta)}$

La f.d.p. es simétrica con respecto a  $\alpha$ .

Su función de distribución es

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= \left[1 + \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]^{-1} \\
 &= 1 - \left[1 + \exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]^{-1}
 \end{aligned}$$

Y su función de distribución inversa (de probabilidad  $F_X$ ) es

$$x = \alpha + \beta \ln\left(\frac{F_X}{1 - F_X}\right)$$

#### Momentos

Su función generatriz de momentos es

$$\begin{aligned}
 \psi_X(t) &= \exp(\alpha t) \Gamma(1 - \beta t) \Gamma(1 + \beta t) \\
 &= \frac{\pi \beta t \exp(\alpha t)}{\sin(\pi \beta t)}
 \end{aligned}$$

Y su función característica es

$$\varphi_X(t) = \frac{\exp(i\alpha t)\pi\beta it}{\sin(\pi\beta it)}$$

Además:

$$\text{Media} = \text{Mediana} = \text{Moda} = \alpha$$

Y su varianza:

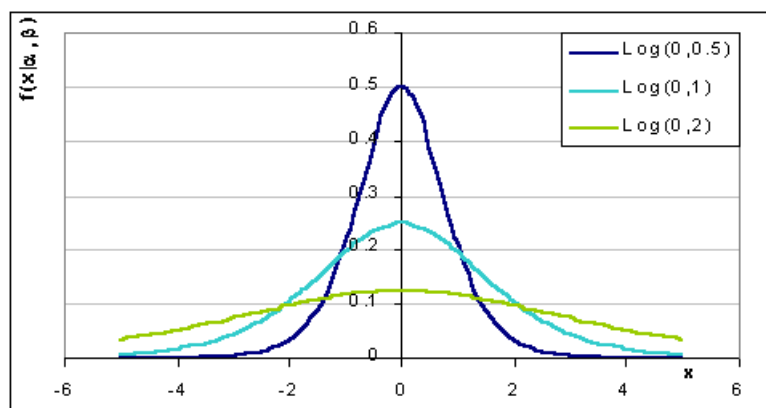
$$\text{Var}(X) = \frac{(\pi\beta)^2}{3}$$

Un caso particular de la distribución logística es la logística estandarizada, es decir,  $\text{Log}(1, 0)$  que tiene una función de distribución  $F_X$  y función densidad de probabilidad igual a  $f_X$  con las propiedades

$$f_X = F_X(1 - F_X)$$

$$x = \ln[F_X/(1 - F_X)]$$

## Gráfica

Figura 6.15: La f.d.p. logística para varios valores  $(\alpha, \beta)$ .

## 6.24. Distribución Pareto

### Definición

**Definición 6.24** Se dice que una v.a. tiene una **distribución Pareto** con parámetros  $x_0$  y  $b$  ( $x_0, b \in \mathbb{R}^+$ ) si tiene como f.d.p. a:

$$f_X(x|x_0, b) = \frac{bx_0^b}{x^{b+1}} I_{\{x \geq x_0\}}(x) \quad (6.53)$$

Lo que denotamos por:  $X \sim \text{Pareto}(x_0, b)$ .

Y su función de distribución es:

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^b I_{\{x \geq x_0\}},$$

### Momentos

Calculamos su esperanza y varianza. La esperanza siempre que  $b > 1$  es igual a:

$$E(X) = \int_{x_0}^{\infty} bx_0^b x^{-b-1} dx = \frac{x_0 b}{b-1}$$

el momento de orden dos con respecto al origen es igual a:

$$E(X^2) = \int_{x_0}^{\infty} bx_0^b x^2 x^{-b-1} dx = \frac{x_0^2 b^2}{b-2}$$

si  $b \leq 2$  no existe el momento de orden dos puesto que la integral no es convergente, sucediendo lo mismo en la esperanza si  $b \leq 1$ . La expresión de la varianza es:

$$\text{Var}(X) = \frac{x_0^2 b^2}{b-2} - \frac{x_0^2 b^2}{(b-1)^2} = \frac{x_0^2 b}{(b-2)(b-1)^2}$$

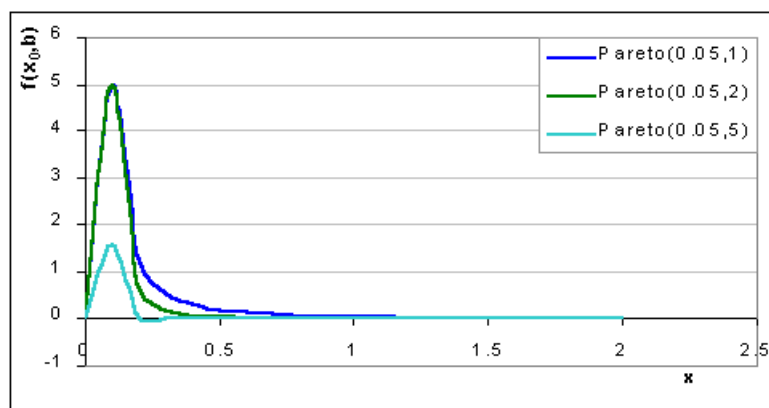
Esta distribución es truncada, pues siempre  $x \geq x_0$ .

**Nota:** El  $k$  momento existe si  $b > k$ .

### Aplicaciones

La distribución de Pareto encuentra su principal aplicación en el análisis socio-económico, en especial en el estudio de la distribución de las rentas personales.

## Gráfica

Figura 6.16: La f.d.p. Pareto para varios valores  $(x_0, b)$ .

## 6.25. Distribución *Extreme Value*(Gumbel)

### Definición

**Definición 6.25** Se dice que una v.a.  $X$  tiene una **distribución Gumbel**<sup>6</sup> con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^+$ ), si tiene como f.d.p. a:

$$f_X(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right] \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x) \quad (6.54)$$

Y lo denotamos por:  $X \sim \text{Gum}(\alpha, \beta)$

Su función de distribución es

$$F_X(x) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]$$

Y su función de distribución inversa (de probabilidad  $F_X$ ) es

$$x = \alpha - \beta \ln \ln(1/F_X)$$

### Momentos

Además su función generatriz de momentos

$$\psi_X(t) = \exp(\alpha t) \Gamma(1 - \beta t), \quad t < 1/\beta$$

y su función característica es

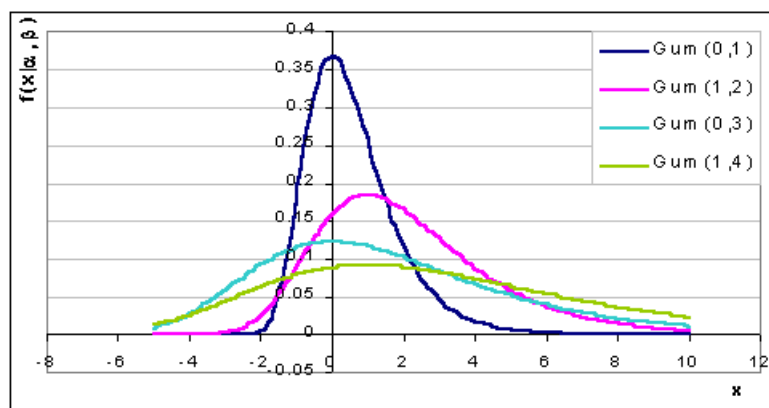
$$\varphi_X(t) = \exp(i\alpha t) \Gamma(1 - i\beta t)$$

---

<sup>6</sup>También se suele decir que tiene una distribución *Extreme Value*.



## Gráfica

Figura 6.17: La f.d.p. Gumbel para varios valores  $(\alpha, \beta)$ .

## 6.26. Distribución triangular

### Definición

**Definición 6.26** Decimos que una v.a.  $X$  sigue una **distribución triangular** con parámetros de  $a$ ,  $b$  y  $c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) si  $X$  tiene una distribución continua cuya f.d.p. es:

$$f_X(x|a, b, c) = \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} I_{[a,c]}(x) + \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} I_{[c,b]}(x) \quad (6.55)$$

y lo denotamos por:  $X \sim \text{Tri}(a, b, c)$ .

Tenemos en los parámetros que  $a$ : localización,  $b$ : escala y  $c$ : forma.

Y su función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} I_{[a,c]}(x) + \left\{ 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} \right\} I_{[c,b]}(x)$$

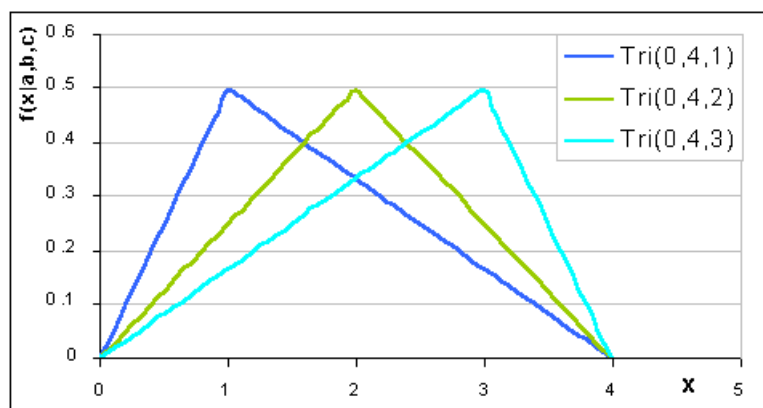
### Momentos

Su media y varianza son:

$$E(X) = \frac{a+b+c}{3} \quad \text{Var}(X) = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}$$

y el parámetro de forma es la moda.

## Gráfica

Figura 6.18: La f.d.p. Triangular para varios valores  $(a, b, c)$ .

## 6.27. Distribución gamma

### Definición

**Definición 6.27** Se dice que una v.a.  $X$  tiene una **distribución gamma** con parametros  $\alpha$  y  $\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ) si  $X$  tiene una distribución continua cuya f.d.p.  $f_X(x|\alpha, \beta)$  se especifica como sigue:

$$f_X(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad (6.56)$$

Este hecho lo denotamos por:  $\boxed{X \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)}$

La integral de esta f.d.p. es 1, puesto que de la definición de la función gamma resulta que

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}. \quad (6.57)$$

### Momentos

Si  $X \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$  entonces:

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_0^\infty x^k f_X(x|\alpha, \beta) dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+k-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\beta^{\alpha+k}} = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\beta^k \Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1)}{\beta^k}. \end{aligned}$$

De aquí:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Y la f.g.m.  $\psi_X$  de  $X$  :

$$\psi_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} f_X(x|\alpha, \beta) dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\beta-t)x} dx.$$

Esta integral será finita para cualquier valor de  $t$  tal que  $t < \beta$ :

$$\psi_X(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{(\beta-t)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha \quad \text{para } t < \beta. \quad (6.58)$$

**Enunciados**

**Teorema 6.4** *Si las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_k$  son independientes y si  $X_i$  tiene una distribución gamma con parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta$  ( $i = 1, \dots, k$ ), entonces la suma  $X_1 + \dots + X_k$  tiene una distribución gamma con parámetros  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$  y  $\beta$ .*

**Demostración.** Si  $\psi_i$  denota la f.g.m. de  $X_i$ , entonces de la ecuación (6.58) resulta que para  $i = 1, \dots, k$ ,

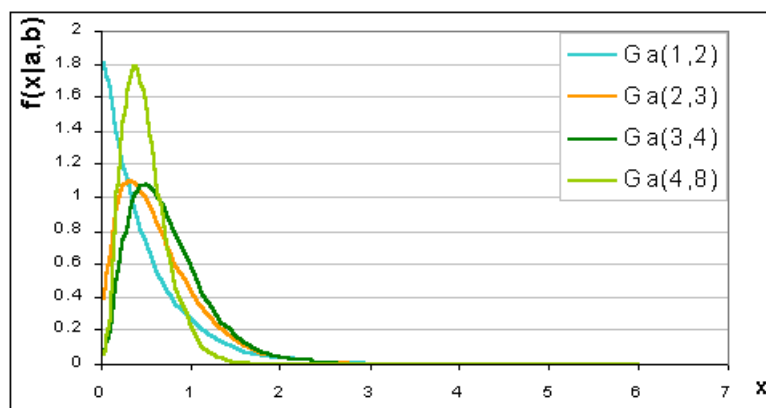
$$\psi_i(t) = \left( \frac{\beta}{\beta - t} \right)^{\alpha_i} \quad \text{para } t < \beta.$$

Si  $\psi_X$  denota la f.g.m. de la suma  $X_1 + \dots + X_k$ , entonces

$$\psi_X(t) = \prod_{i=1}^k \psi_i(t) = \left( \frac{\beta}{\beta - t} \right)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} \quad \text{para } t < \beta.$$

La f.g.m.  $\psi_X$  se puede reconocer ahora como la f.g.m. de una distribución gamma con parámetros  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$  y  $\beta$ . Por tanto, la suma  $X_1 + \dots + X_k$  debe tener esta distribución gamma.  $\triangleleft$

## Gráfica

Figura 6.19: La f.d.p. Gamma para varios valores  $(\alpha, \beta)$ .

## 6.28. Distribución Gamma Estandarizada

### Definición

Esta distribución no es más que un caso particular de la distribución Gamma cuando  $\beta = 1$ . De ahí la siguiente definición.

**Definición 6.28** *Se dice que una v.a. tiene una **distribución gamma estandarizada** con parámetros  $\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ) si tiene como f.d.p. a:*

$$f_X(x|\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Este hecho se denota por:  $\boxed{X \sim \text{GaEst}(\alpha)}$ .

### Momentos

Su media y varianza son:

$$E(X) = \alpha$$

$$\text{Var}(X) = \alpha \quad .$$

Su f.g.m. y f.c. son:

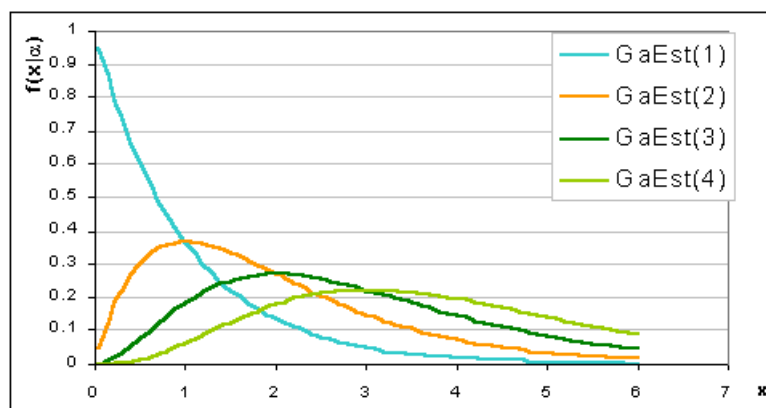
$$\psi_X(t) = (1 - t)^{-\alpha}$$

$$\varphi_X(t) = (1 - it)^{-\alpha}$$

### Relación con otras distribuciones

$$X \sim \text{GaEst}(\alpha) = \text{Ga}(\alpha, \beta = 1)$$

## Gráfica

Figura 6.20: La f.d.p. Gamma Estandarizada para varios valores  $\alpha$ .



## 6.29. Distribución exponencial

### Definición

**Definición 6.29** Se dice que una v.a.  $X$  tiene una **distribución exponencial** con parámetro  $\beta$  ( $\beta > 0$ ) si  $X$  tiene como f.d.p. a:

$$f_X(x|\beta) = \beta e^{-\beta x} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad (6.59)$$

Este hecho se denota por:  $X \sim \text{Exp}(\beta)$

Nótese que:  $X \sim \text{Exp}(\beta) = \text{Ga}(1, \beta)$ .

### Momentos

Observamos que una distribución exponencial con parámetro  $\beta$  no es más que una distribución gamma con parámetros  $\alpha = 1$  y  $\beta$ . De ahí que si  $X \sim \text{Exp}(\beta)$ , de la distribución gamma tenemos:

$$E(X) = \frac{1}{\beta} \quad \text{y} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2}.$$

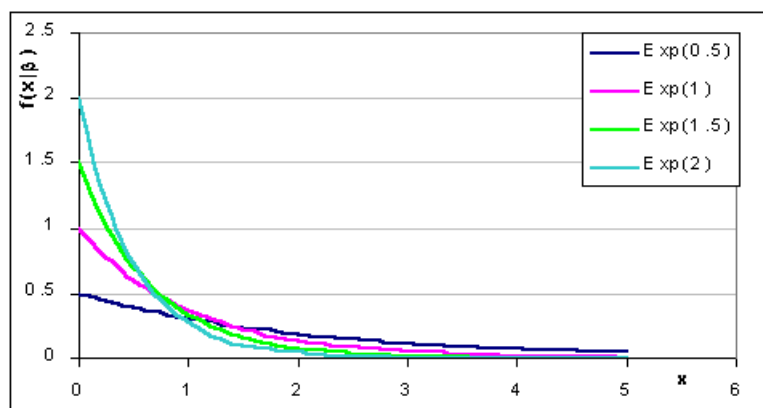
Así mismo de la f.g.m. de la gamma deducimos la f.g.m. de la exponencial:

$$\psi_X(t) = \frac{\beta}{\beta - t} \quad \text{para } t < \beta.$$

### Relación con otras distribuciones

$$X \sim \text{Exp}(1) = \text{ExpEst}.$$

## Gráfica

Figura 6.21: La f.d.p. exponencial para varios valores  $\beta$ .

### 6.30. Distribución Exponencial Estandarizada

#### Definición

**Definición 6.30** Una v.a.  $X$  se distribuye como una *exponencial estandarizada*, si su función de densidad de probabilidad es:

$$f_X(x) = e^{-x} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad (6.60)$$

Lo que se denota por:  $X \sim \text{ExpEst}$

#### Momentos

Su media es:

$$E(X) = 1$$

y su varianza:

$$\text{Var}(X) = 1$$

y su función característica es:

$$\varphi_X(t) = (1 - it)^{-1}$$

#### Relación con otras distribuciones

$$X \sim \text{ExpEst} = \text{Exp}(1) = \text{Gam}(1, 1).$$

## Gráfica

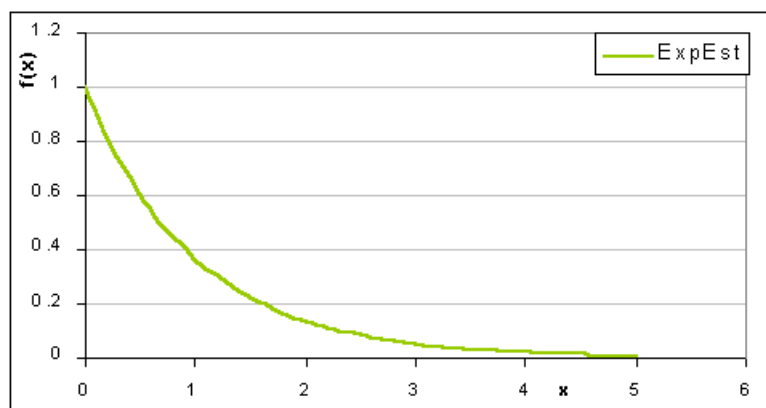


Figura 6.22: La f.d.p. exponencial estandarizada.

### 6.31. Distribución exponencial negativa

#### Definición

**Definición 6.31** Una v.a.  $X$  se distribuye como una **exponencial negativa** con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  ( $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^+$ ) si tiene función de densidad de probabilidad:

$$f_X(x|\alpha, \beta) = \beta e^{-\beta(x-\alpha)} \mathbf{I}_{[\alpha, \infty)}(x). \quad (6.61)$$

Este hecho se denota por:  $X \sim \text{ExpNeg}(\alpha, \beta)$

En particular:  $X \sim \text{ExpNeg}(0, \beta) = \text{Exp}(\beta) = W(\beta, 1)$ .

#### Momentos

Su media:

$$E(X) = \frac{\alpha\beta - 1}{\beta}$$

y su varianza:

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha^2\beta^2 + 1}{\beta^2}$$

y su función característica:

$$\varphi_X(t) = \frac{\beta e^{it\alpha}}{(\beta - it)}.$$

### 6.32. Distribución Ji

#### Definición

**Definición 6.32** Una v.a.  $X$  tiene una **distribución ji** con  $n$  grados de libertad ( $n \in \mathbb{N}$ ) si tiene como función de densidad de probabilidad a:

$$f_X(x|n) = \frac{2}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n-1} e^{-x^2/2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad (6.62)$$

Y esto lo denotamos por  $\boxed{X \sim \chi_n}$

#### Descripción y deducción

Sea la ecuación  $X = Y^{1/2}$  tiene una solución única  $Y = X^2$  para  $X > 0$  y ninguna para  $X < 0$ . Así

$$f_X(x) = 2x f_Y(x^2) \mathbf{I}(x)$$

Supongase que  $Y \sim \chi^2$ .

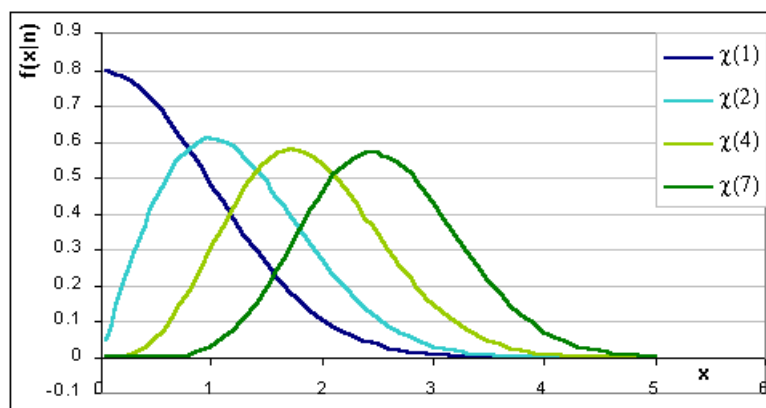
$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2} \mathbf{I}(y)$$

y  $x = \sqrt{y}$ , luego

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{2}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x(x^2)^{n/2-1} e^{-x^2/2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \\ &= \frac{2}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n-1} e^{-x^2/2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \end{aligned}$$

Esta función es llamada la *densidad ji* con  $n$  grados de libertad.

## Gráfica

Figura 6.23: La f.d.p.  $\chi$  para varios valores de  $n$ .

### 6.33. Distribución de Maxwell

#### Definición

Esta distribución es un caso particular de una distribución ji, con  $n = 3$ . Así:

**Definición 6.33** Una v.a. tiene una **distribución Maxwell** si tiene f.d.p. igual a:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{2}{2^{3/2}\Gamma(3/2)} x^2 e^{-x^2/2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \\ &= \sqrt{2/\pi} x^2 e^{-x^2/2} \end{aligned} \quad (6.63)$$

Hecho que denotamos por  $X \sim \text{Max}$ .

#### Relación con otras distribuciones

Y tenemos la relación:  $X \sim \text{Max} = \chi_3$ .

#### Gráfica

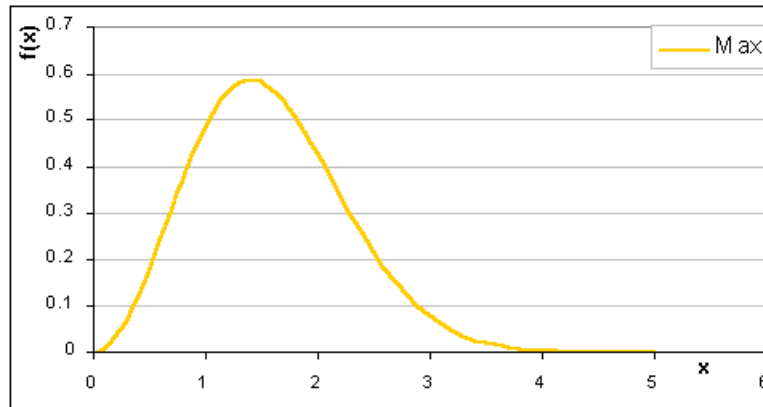


Figura 6.24: La f.d.p. de la distribución Maxwell.



### 6.34. Distribución de Rayleigh

#### Definición

Una v.a. que sigue distribución ji con  $n = 2$  grados de libertad se dice que tiene una *distribución Rayleigh*. Así:

**Definición 6.34** Se dice que una v.a.  $X$  tiene una *distribución Rayleigh* si tiene como f.d.p. a:

$$f_X(x) = xe^{-x^2/2} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad (6.64)$$

Hecho que denotamos por:  $X \sim \text{Ray}$ .

#### Relación con otras distribuciones

Tenemos la relación:  $X \sim \text{Ray} = \chi_2$ .

#### Gráfica

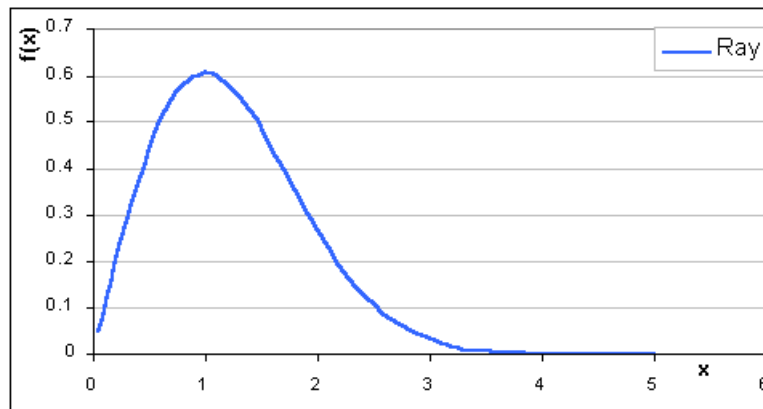


Figura 6.25: La f.d.p. de la distribución Rayleigh.

### 6.35. Distribución de Weibull

#### Definición

**Definición 6.35** Una v.a.  $X$  tiene una **distribución Weibull** con parámetros  $\beta$  y  $r$ , ( $\beta, r \in \mathbb{R}^+$ ), si su f.d.p. es:

$$f_X(x|\beta, r) = r\beta x^{r-1} e^{-\beta x^r} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad (6.65)$$

Lo que denotamos por:  $X \sim W(\beta, r)$

#### Descripción y deducción

En la distribución exponencial  $f_Y(y) = \beta e^{-\beta y}$ , efectuamos el cambio de variable  $X = Y^{1/r}$ , siendo  $r > 0$ . La distribución de la nueva variable aleatoria es

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \Pr(Y^{1/r} \leq x) = \Pr(Y \leq x^r) = F_Y(x^r)$$

y la función de densidad:

$$f_X(x) = F'_X(x) = r x^{r-1} F'_Y(x^r) = r\beta x^{r-1} e^{-\beta x^r}.$$

#### Momentos

La media y la varianza de una  $X \sim W(\beta, r)$  son:

$$\begin{aligned} \mu &= \beta^{-1/r} \Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right) \\ \sigma^2 &= \beta^{-2/r} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{r}\right) - \left[ \Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right) \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

Ahora verificamos que esto es cierto:

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \int_0^\infty r\beta x^r e^{-\beta x^r} dx \\ &= \frac{r\beta}{\beta^{1/r}} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\beta}\right) e^{-u} \frac{1}{r} u^{(1/r)-1} du \\ &= \beta^{-1/r} \int_0^\infty u^{1/r} e^{-u} du \\ &= \beta^{-1/r} \Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la sustitución  $u = \beta x^r$  para evaluar la integral.

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^\infty r\beta x^{r+1} e^{\beta x^r} dx \\
&= \frac{r\beta}{\beta^{1/r}} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\beta}\right)^{1+(1/r)} e^u \frac{1}{r} u^{(1/r)-1} du \\
&= \beta^{-2/r} \int_0^\infty u^{2/r} e^{-u} du \\
&= \beta^{-2/r} \Gamma\left(1 + \frac{2}{r}\right)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] &= E(X^2) - \mu^2 \\
&= \beta^{-2/r} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{r}\right) - \left[ \Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right) \right]^2 \right\}
\end{aligned}$$

### Relación con otras distribuciones

- $X \sim W(\beta, 1) = \text{Exp}(\beta) = \text{Ga}(1, \beta)$ .
- $X \sim W(1, 1) = \text{Ga}(1, 1) = \text{ExpEst}$ .

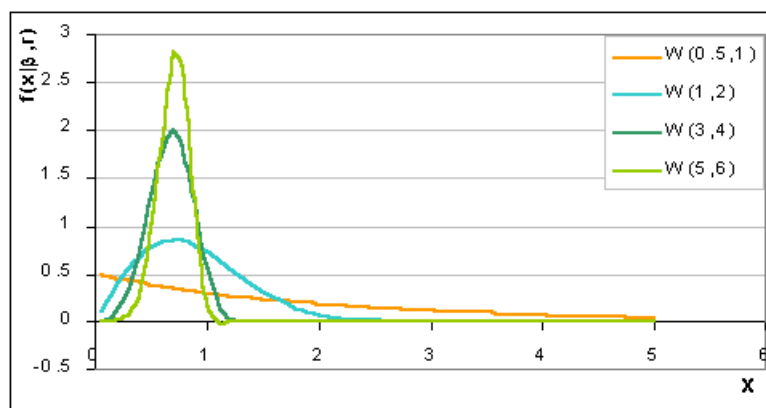
### Aplicaciones

La distribución de Weibull tiene aplicación en el estudio de la fiabilidad de los componentes de sistemas.

Muchos sistemas complicados cuya seguridad de funcionamiento depende de la fiabilidad de sus diversos componentes, por ejemplo un fusible o un dispositivo sensible al calor, sujetos a condiciones ambientales idénticas pueden fallar en momentos diferentes e impredecibles. La distribución introducida por el físico suizo Waloddi Weibull en 1939 ha resultado ser de utilidad en este tipo de problemas.

La distribución de Weibull se utiliza en fiabilidad para estudiar el tiempo transcurrido para que se produzca un fallo de un componente de un sistema. Este tiempo es una variable aleatoria  $T$  con distribución de Weibull.

## Gráfica

Figura 6.26: La f.d.p. Weibull para varios valores  $(\beta, r)$ .

### 6.36. Distribución beta

#### Definición

**Definición 6.36** Una v.a.  $X$  tiene una **distribución beta** con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ) si tiene como f.d.p. a:

$$f_X(x|\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x) \quad (6.66)$$

$$= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x) \quad (6.67)$$

Este hecho se denota por:  $\boxed{X \sim \text{Be}(\alpha, \beta)}$

La integral de esta f.d.p. para  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$  sobre  $\mathbb{R}$  es 1 puesto que:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

#### Momentos

Cuando una v.a.  $X \sim \text{Be}(\alpha, \beta)$ , los momentos de  $X$ , para  $k \in \mathbb{N}$ , están dados por:

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_0^1 x^k f_X(x|\alpha, \beta) dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+k-1} (1-x)^{\beta-1} dx. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + k + \beta)} \\ &= \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + k - 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1) \cdots (\alpha + \beta + k - 1)}. \end{aligned}$$

Resulta que

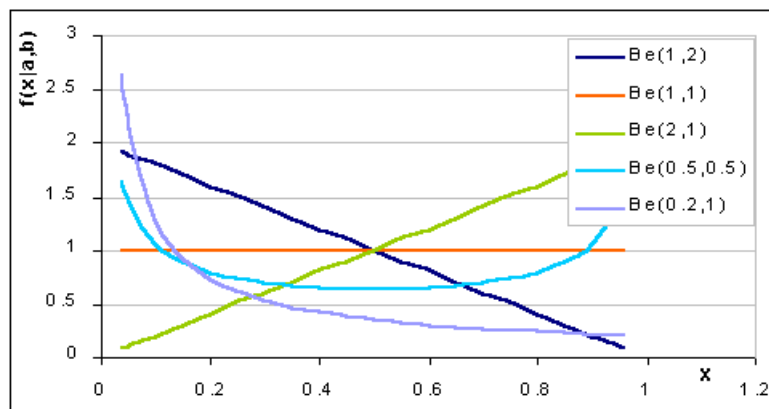
$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)} - \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^2 \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}. \end{aligned}$$

## Relación con otras distribuciones

$$X \sim \text{Be}(\alpha = 1, \beta = 1) = U(1, 1).$$

## Gráfica

Figura 6.27: La f.d.p. Beta para varios valores  $(\alpha, \beta)$ .

### 6.37. Distribución Ji-cuadrado de Pearson

#### Definición

**Definición 6.37** Una v.a.  $X$  tiene una **distribución**  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad ( $n \in \mathbb{N}$ ) si tiene como f.d.p. a:

$$f_X(x|n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{(n/2)-1} e^{-x/2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad (6.68)$$

Este hecho se denota por:  $\boxed{X \sim \chi_n^2}$

Hemos de notar que esta distribución no es más que una distribución gamma con parámetros igual a  $\alpha = n/2$  y  $\beta = 1/2$ , donde a  $n$  lo llamaremos grados de libertad y además es un número entero.

#### Relación con otras distribuciones

$$X \sim \chi_2^2 = \text{Ga}(1, 1/2) = \text{Exp}(1/2)$$

#### Momentos

Si una v.a.  $X \sim \chi_n^2$  de los resultados obtenidos para la distribución Gamma tenemos:

$$E(X) = n \quad \text{y} \quad \text{Var}(X) = 2n.$$

Y de la misma Gamma obtenemos la f.g.m.:

$$\psi_X(t) = \left( \frac{1}{1-2t} \right)^{n/2} \quad \text{para } t < \frac{1}{2}.$$

#### Enunciados

Resultados también derivables de la distribución gamma son:

**Teorema 6.5** Si las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_k$  son independientes y si  $X_i \sim \chi_{n_i}^2$  ( $i = \overline{1, k}$ ), entonces la suma  $X = \sum_{i=1}^k X_i \sim \chi_{n_1 + \dots + n_k}^2$ .

**Teorema 6.6** Si  $X \sim N(0, 1)$ , entonces  $X^2 \sim \chi_1^2$ .

**Demostración.** Definamos  $Y = X^2$ , entonces queda demostrar que  $Y \sim \chi_1^2$ . Para  $y > 0$  tenemos:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) = \Pr(X^2 \leq y) = \Pr(-y^{1/2} \leq X \leq y^{1/2}) \\ &= \Phi(y^{1/2}) - \Phi(-y^{1/2}). \end{aligned}$$

Dado que  $f_Y(y) = F'_Y(y)$  y  $\phi(x) = \Phi'(x)$ , y haciendo uso de la regla de la cadena para la derivación, tenemos:

$$f_Y(y) = \phi(y^{1/2}) \left( \frac{1}{2} y^{-1/2} \right) + \phi(-y^{1/2}) \left( \frac{1}{2} y^{-1/2} \right).$$

Y como  $\phi(y^{1/2}) = \phi(-y^{1/2}) = (2\pi)^{-1/2} e^{-y/2}$ , tenemos:

$$f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} y^{-1/2} e^{-y/2} \quad \text{para } y > 0.$$

De este resultado vemos que  $Y \sim \chi_1^2$ .

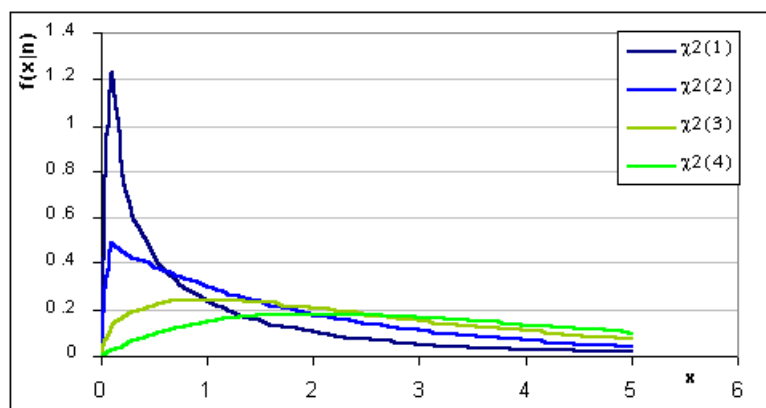
◁

Ahora, también tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 6.7** *Si las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_k$  son i.i.d. y si cada una de estas variables tiene una distribución normal tipificada, entonces la suma de cuadrados  $X_1^2 + \dots + X_k^2$  tiene una distribución  $\chi^2$  con  $k$  grados de libertad.*



## Gráfica

Figura 6.28: La f.d.p.  $\chi^2$  para varios valores de  $n$ .

### 6.38. Distribución $t$ de Student

#### Definición

**Definición 6.38** Una v.a.  $X$  tiene una **distribución Student- $t$**  con  $n$  grados de libertad ( $n \in \mathbb{N}$ ) si tiene como f.d.p. a:

$$f_X(x|n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n\pi)^{1/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x) \quad (6.69)$$

Lo que denotamos por:  $\boxed{X \sim T_n}$

La distribución  $t$  es conocida también como distribución de Student en honor de W.S.Gosset, quién publicó sus estudios de esta distribución en 1908 con el seudónimo “Student”.

#### Dedución

Sean dos v.a. independientes  $Z$  y  $Y$ , donde  $Z \sim N(0, 1)$  y  $Y \sim \chi_n^2$ , y definamos:

$$X = \frac{Z}{\left(\frac{Y}{n}\right)^{1/2}}.$$

entonces  $X \sim T_n$ .

Como  $Z$  y  $Y$  son v.a. independientes, su f.d.p. conjunta es  $f_Y(y)f_Z(z)$ . Como variable auxiliar tomemos  $W = Y$ , así tenemos:

$$Z = \frac{1}{n^{1/2}} X W^{1/2} \quad \text{y} \quad Y = W. \quad (6.70)$$

El jacobiano de la anterior transformación, de  $X$  y  $W$  a  $Y$  y  $Z$ , es  $(W/n)^{1/2}$ . Ahora determinemos la f.d.p. conjunta de  $X$  y  $W$ . Así:

$$\begin{aligned} f_{X,W}(x, w) &= f_{Y,Z}(y, z) \cdot (w/n)^{1/2} \\ &= f_Y(y)f_Z(z) \cdot (w/n)^{1/2} \\ &= c w^{(n-1)/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x^2}{n} \right) w \right], \end{aligned} \quad (6.71)$$

donde

$$c = \left[ 2^{(n+1)/2} (n\pi)^{1/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]^{-1}$$

Y obtenemos  $f_X(x)$  apartir de:

$$f_X(x) = \int_0^\infty f_{X,W}(x, w) dw.$$

De este modo:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n\pi)^{1/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x)$$

Y ahí la f.d.p. de una v.a. que sigue una distribución  $t_n$ .

### Momentos

La media para una distribución  $T_n$  no existe cuando  $n = 1$ , y si existe cuando  $n > 1$ . Cuando  $n > 1$  su media es siempre 0, punto de simetría de esta distribución.

Si  $X \sim t_n$ , entonces:

$$E(|X|^k) \begin{cases} < \infty & \text{cuando } k < n \\ = \infty & \text{cuando } k \geq n \end{cases}$$

De ahí que la f.g.m. no exista.

En resumen:

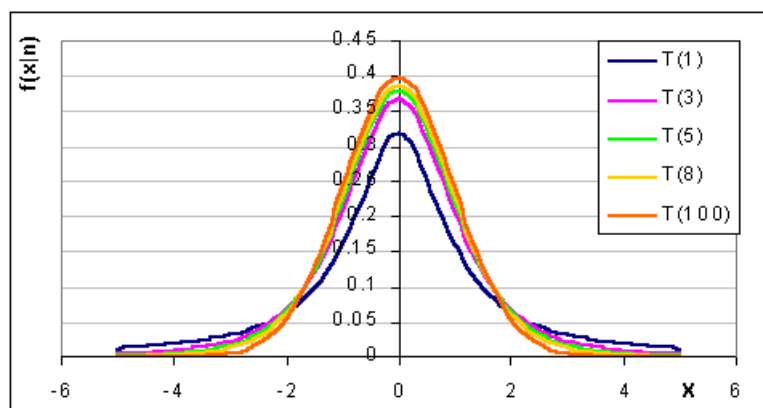
$$E(X) = 0 \quad n > 1,$$

$$\text{Var}(X) = \frac{n}{n-2} \quad n > 2$$

Y el  $k$ -ésimo momento ( $k < n$ ) entorno a la media es:

$$E[(X - \mu)^k] = \begin{cases} \mu_k = 0, & r \text{ impar} \\ \mu_k = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (k-1)n^{k/2}}{(n-2)(n-4) \cdots (n-k)} & r \text{ par} \end{cases}$$

## Gráfica

Figura 6.29: La f.d.p. de la Student  $t$  para varios valores de  $n$ .

### 6.39. Distribución $F$ de Snedecor

#### Definición

**Definición 6.39** Una v.a.  $X$  tiene una **distribución Snedecor- $F$**  con  $n_1$  y  $n_2$  grados de libertad ( $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ) si tiene como f.d.p. a:

$$\begin{aligned} f_X(x|n_1, n_2) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} x^{\frac{n_1-2}{2}} (n_2 + n_1 x)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \\ &= \frac{n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} x^{\frac{n_1-2}{2}} (n_2 + n_1 x)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}}{\mathbf{B}\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \end{aligned} \quad (6.72)$$

Este hecho lo denotamos como:  $\boxed{X \sim F(n_1, n_2)}$

Sean  $Y$  y  $Z$  dos v.a. independientes tales que  $Y \sim \chi_{n_1}^2$   $Z \sim \chi_{n_2}^2$ , donde  $n_1$  y  $n_2$  son enteros positivos. Definamos la v.a.  $X$  como:

$$X = \frac{Y/n_1}{Z/n_2}.$$

Entonces,  $X$  sigue una distribución  $F$  con  $n_1$  y  $n_2$  grados de libertad.

#### Momentos

Y algunos de sus momentos:

$$E(X) = \frac{n_2}{n_2 - 2} \quad n_2 > 2$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)} \quad n_2 > 4$$

### Descripción y deducción

Sean dos v.a. independientes  $Y$  y  $Z$  tales que  $Y \sim \chi_{n_1}^2$  y  $Z \sim \chi_{n_2}^2$ , donde  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ . Definamos:

$$X = \frac{Y/n_1}{Z/n_2} = \frac{n_2 Y}{n_1 Z}$$

Dado que  $X$  y  $Z$  son v.a. independientes, su f.d.p. conjunta,  $f_{Y,Z}(y, z)$ , es igual a  $f_Y(y)f_Z(z)$ . Así:

$$f_{Y,Z}(y, z) = cy^{(n_1/2)-1} z^{(n_2/2)-1} e^{-(y+z)/2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+}(y, z),$$

donde

$$c = \frac{1}{2^{(n_1+n_2)/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}n_1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}n_2\right)}.$$

Realizamos un cambio de variables de  $Y$  y  $Z$  a  $X$  y  $Z$ . La f.d.p. conjunta  $f_{X,Z}(x, z)$  de  $X$  y  $Z$  se obtiene reemplazando en primer lugar  $y$  en  $f_{Y,Z}(y, z)$  por su expresión en función de  $x$  y  $z$  y luego multiplicando el resultado por  $|\partial y / \partial x|$ . De la definición de  $X$  resulta que  $y = (n_1/n_2)xz$  y  $\partial y / \partial x = (n_1/n_2)z$ . De ahí, la f.d.p. conjunta  $f_{X,Z}(x, z)$  para  $x, z > 0$ , es:

$$\begin{aligned} f_{X,Z}(x, z) &= f_{Y,Z}[y(x, z), z(x, z)] \cdot |\partial y / \partial x| \\ &= c \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2} x^{(n_1/2)-1} z^{[(n_1+n_2)/2]-1} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{n_1}{n_2}x + 1 \right) z \right]. \end{aligned}$$

recuérdese el valor de  $c$ , ya definido.

Y  $f_X(x)$ , la f.d.p. marginal de  $X$ , la obtenemos para cualquier valor de  $x \in \mathbb{R}^+$  a partir de:

$$f_X(x) = \int_0^\infty f_{X,Z}(x, z) dz.$$

Además, sabemos de la función Gamma que  $\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}$ , y así

$$\int_0^\infty z^{[(n_1+n_2)/2]-1} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{n_1}{n_2}x + 1 \right) z \right] dz = \frac{\Gamma \left[ \frac{1}{2}(n_1 + n_2) \right]}{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n_1}{n_2}x + 1 \right) \right]^{(n_1+n_2)/2}}.$$

después de esto sólo restan cálculos para eliminar términos, y así se llega a la f.d.p. de esta distribución.

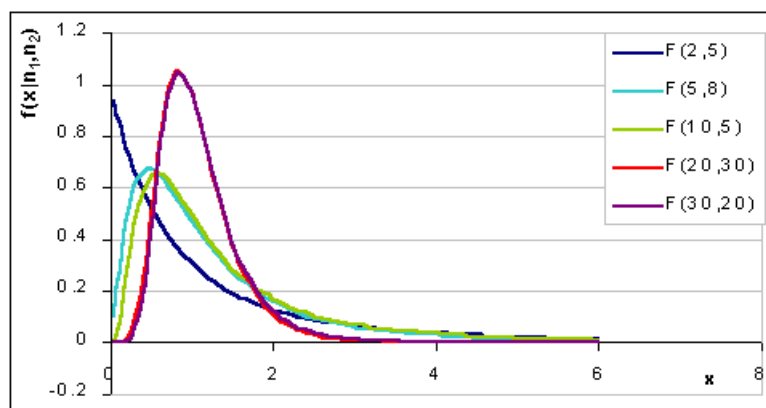
### Propiedades

Del resultado anterior, la deducción de esta distribución, es fácil ver lo siguiente:

Observamos que , en general,  $F(n_1, n_2) \neq F(n_2, n_1)$ , y las distribuciones son iguales cuando los grados de libertad son el mismo. Además, si  $X \sim F(n_1, n_2)$ , entonces  $1/X \sim F(n_2, n_1)$ .

Si una v.a.  $X \sim t_n$  , entonces  $X^2 \sim F(1, n)$  .

## Gráfica

Figura 6.30: La f.d.p. de la  $F$  para varios valores de  $n_1$  y  $n_2$ .



## 6.40. Distribución $Z$ de Fisher

### Definición

**Definición 6.40** Una v.a.  $X$  tiene una **distribución Fisher- $Z$**  con parámetros  $n_1$  y  $n_2$  ( $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ) si tiene como f.d.p. a:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{2\Gamma[(n_1 + n_2)/2]}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} e^{n_1 z} \left(1 + \frac{n_1 e^{2z}}{n_2}\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} I_{\mathbb{R}}(z) \\ &= \frac{2n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} e^{n_1 z} (n_2 + n_1 e^{2z})^{-\frac{n_1+n_2}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} I_{\mathbb{R}}(z) \end{aligned} \quad (6.73)$$

Lo denotamos como:  $\boxed{X \sim Z(n_1, n_2)}$

### Descripción y deducción

Sea  $F_{n_1, n_2}$  una v.a.  $F$  de Snedecor, se llama  $Z$  de Fisher a la v.a. definida por

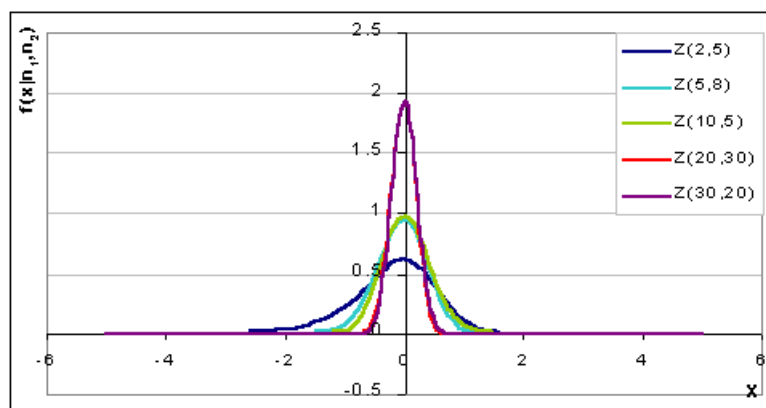
$$Z = \frac{1}{2} \log F \quad \text{o lo que es lo mismo } F = e^{2Z}$$

$$F_Z(z) = \Pr(Z \leq z) = \Pr(\log F \leq 2z) = \Pr(F \leq e^{2z}) = F_F(e^{2z})$$

con lo que la función de densidad de probabilidad será

$$f_Z(z) = 2e^{2z} f_F(e^{2z}) \quad .$$

## Gráfica

Figura 6.31: La f.d.p. de la  $Z$  para varios valores de  $n_1$  y  $n_2$ .

### 6.41. Resumen de distribuciones discretas y continuas

A continuación una lista de las distribuciones vistas en este capítulo:

1. **Degenerada o casual**,  $X \sim \text{Degenerada}(c)$ :

$$f_X(x|c) = I_{\{c\}}(x)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

$$E(X) = E(c) = c$$

$$E(X^n) = E(c^n) = c^n$$

$$\text{Var}(X) = E[(X - c)^2] = E[0] = 0$$

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E(e^{itc}) = e^{itc}.$$

2. **En dos puntos**,  $X \sim \text{Dospuntos}(x_1, x_2, p)$ :

$$f_X(x|x_1, x_2, p) = (1 - p) I_{\{x_1\}}(x) + p I_{\{x_2\}}(x)$$

$$p \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle -\infty, x_1 \rangle \\ 1 - p & x \in [x_1, x_2) \\ 1 & x \in [x_2, \infty) \end{cases}$$

$$E(X) = x_1(1 - p) + x_2p$$

$$\text{Var}(X) = p(1 - p)(x_2 - x_1)^2$$

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = (1 - p)e^{itx_1} + pe^{itx_2}$$

3. **Uniforme discreta**,  $X \sim U_{[x_1, x_2, \dots, x_n]}$ :

$$f_X(x|n) = \frac{1}{n} I_{\{x_1, x_2, \dots, x_n\}}(x)$$

$$F_X(x_k) = \Pr(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{n} \sum_j e^{itx_j}$$

4. **Uniforme sobre los enteros**:

$$f_X(x|k) = \frac{1}{k} I_{\{1, \dots, k\}}(x)$$

5. **Bernoulli**,  $X \sim B(p)$ :

$$(0 < p < 1)$$

$$\Pr(X = 1) = p \quad \text{y} \quad \Pr(X = 0) = 1 - p.$$

$$q = 1 - p$$

$$f_X(x|p) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$$

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ q & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

$$E(X) = p$$

$$\text{Var}(X) = pq$$

$$\alpha_r = p$$

$$\mu_r = (-p)^r + q^r p$$

$$\psi_X(t) = q + pe^t \quad \text{para } t \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_X(t) = q + pe^{it} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}$$

$$x = 1 \cdot \mathbf{I}_{[0,p]}(F_X) \quad F_X \sim \mathbf{U}(0,1)$$

6. **Binomial**,  $X \sim \text{Bi}(n, p)$ :

$$f_X(x|n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \mathbf{I}_{\{0,1,2,\dots,n\}}(x)$$

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad 0 < p < 1$$

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = npq$$

$$F_X(x) = \sum_{i=0}^x \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

$$\varphi_X(t) = (q + pe^{it})^n$$

$$\psi_X(t) = (q + pe^t)^n$$

$$X \sim \text{Bi}(1, p) = \text{B}(p)$$

7. **Hipergeométrica**,  $X \sim \text{H}(A, B, n)$ :

$$\max\{0, n - B\} \leq x \leq \min\{n, A\}.$$

$$f_X(x|A, B, n) = \frac{\binom{A}{x} \binom{B}{n-x}}{\binom{A+B}{n}} I_{\{\max\{0, n-B\}, \dots, \min\{n, A\}\}}(x).$$

$$E(X) = \frac{nA}{A+B}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{nAB}{(A+B)^2} \cdot \frac{A+B-n}{A+B-1}.$$

$$T = A + B, p = A/T \text{ y } q = 1 - p$$

$$\text{Var}(X) = npq \frac{T-n}{T-1}$$

8. **Hipergeométrica multivariante**,  $X \sim \text{HM}(\mathbf{N}, n)$ :

$$N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n.$$

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k), \mathbf{N} = (N_1, \dots, N_k) \text{ y } n.$$

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\mathbf{N}, n) = \frac{\binom{N_1}{x_1} \binom{N_2}{x_2} \dots \binom{N_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$$

$$p_i = \frac{N_i}{N}$$

$$E(X_i) = np_i = n \frac{N_i}{N}$$

9. **Poisson**,  $X \sim P(\lambda)$ :

$$(\lambda > 0)$$

$$f_X(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} I_{\{0,1,2,\dots\}}(x)$$

$$E(X) = \lambda$$

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

$$\psi_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$$

10. **Binomial negativa**,  $X \sim \text{BiNe}(r, p)$ :

$$(0 < p < 1) \quad \text{y} \quad q = 1 - p$$

$$f_X(x|r, p) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x \mathbf{I}_{\{0,1,2,\dots\}}(x)$$

$$f_X(x|r, p) = \binom{-r}{x} p^r (-q)^x \mathbf{I}_{\{0,1,2,\dots\}}(x)$$

$$\psi_X(t) = \left( \frac{p}{1 - qe^t} \right)^r \quad \text{para } t < \ln\left(\frac{1}{q}\right)$$

$$\varphi_X(t) = \left( \frac{p}{1 - qe^{it}} \right)^r$$

$$E(X) = \frac{rq}{p} \quad \text{y} \quad \text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}.$$

11. **Geométrica**,  $X \sim \text{Geo}(p)$ :

$$(0 < p < 1)$$

$$f_X(x|1, p) = pq^x \mathbf{I}_{\{0,1,2,\dots\}}(x)$$

$$X \sim \text{Geo}(p) = \text{BiNe}(1, p)$$

$$\psi_1(t) = \frac{p}{1 - qe^t} \quad \text{para } t < \ln(1/q)$$

$$E(X_1) = \frac{q}{p}$$

$$\text{Var}(X_1) = \frac{q}{p^2}$$

12. **Multinomial**,  $\mathbf{X} \sim \text{Mult}(n, \mathbf{p})$ :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|n, \mathbf{p}) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}$$

$$E(X_i) = np_i \quad \text{y} \quad \text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i) \quad \text{para } i = 1, \dots, k.$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$$

13. **Pólya o de contagio**, :

$$\begin{aligned} f_X(x|N_1, N_2, n, c) \\ = \binom{n}{x} \frac{N_1(N_1 + c) \cdots [N_1 + (x-1)c] N_2(N_2 + c) \cdots [N_2 + (n-x-1)c]}{N(N+c) \cdots [N + (n-1)c]} \end{aligned}$$

14. **Uniforme**,  $X \sim U(a, b)$ :

$$f_X(x|a, b) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

$$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad a \leq x \leq b$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2};$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)} \quad \text{si } t \neq 0 \quad ; \quad \varphi(0) = 1$$



15. **Logarítmica**,  $X \sim \text{Logaritmica}(a, b)$ :

$$(a, b \in \mathbb{R}^+)$$

$$f_X(x|a, b) = \frac{\ln x}{b(\ln b - 1) - a(\ln a - 1)} \mathbf{I}_{\langle a, b \rangle}(x).$$

$a < b$  y además  $a \in [1, \infty)$  y  $b \in \langle 1, \infty)$ .

$$F_X(x) = \frac{a(1 - \ln a) - x(1 - \ln x)}{a(1 - \ln a) - b(1 - \ln b)}$$

$$E(X^n) = \frac{a^{n+1}[1 - (n+1)\ln a] - b^{n+1}[1 - (n+1)\ln b]}{(n+1)^2[a(1 - \ln a) - b(1 - \ln b)]}$$

$$\mu = E(X) = \frac{a^2[1 - 2\ln a] - b^2[1 - 2\ln b]}{4[a(1 - \ln a) - b(1 - \ln b)]}$$

16. **Normal**,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ :

$$(\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$$

$$f_X(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x).$$

$$\psi_X(t) = \exp \left( \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \right) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$E(X) = \mu$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

17. **Normal tipificada**,  $X \sim N(0, 1)$ :

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} x^2 \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \phi(u) du = \frac{1}{2} \text{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\psi_X(t) = e^{t^2/2}$$

18. **Normal positiva**,  $X \sim \text{NorPos}(\mu, \sigma)$ :

$$(\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$$

$$f_X(x|\mu, \sigma) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \mathbf{I}_{\langle \mu, \infty \rangle}(x)$$

19. **Lognormal**,  $X \sim \text{LogN}(\mu, \sigma^2)$ :

$$(\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+)$$

$$f_X(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

$$E(X^n) = \exp \left[ \frac{2n\mu + n^2\sigma^2}{2} \right] \quad n = 0, 1, \dots$$

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\text{Var}(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

20. **Gilbrat**,  $X \sim \text{Gilbrat}$ :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \exp \left[ -\frac{(\ln x)^2}{2} \right] \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

$$X \sim \text{Gilbrat} = \text{LogN}(0, 1)$$

$$\mu = E(X) = e^{1/2}$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = e(e - 1)$$

21. **De Cauchy**,  $X \sim \text{Cau}(\alpha, \lambda)$ :

$$f_X(x|\alpha, \lambda) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + (x - \alpha)^2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x)$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \arctan \left( \frac{x - \alpha}{\lambda} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

$$x = \alpha + \lambda \tan \left[ \pi \left( F_X - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$\varphi_X(t) = e^{i\alpha t - \lambda|t|}$$

22. **Laplace**,  $X \sim \text{Lap}(\alpha, \lambda)$ :

$$(\alpha \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^+)$$

$$f_X(x|\alpha, \lambda) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\alpha|} \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x)$$

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} e^{it\alpha}$$

$$E(X) = \alpha$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \text{sgn}(x - \alpha)(1 - e^{-\lambda|x-\alpha|}) \right]$$

23. **Logística**,  $X \sim \text{Log}(\alpha, \beta)$ :

$$(\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^+)$$

$$\begin{aligned} f_X(x|\alpha, \beta) &= \frac{\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}{b \left[1 + \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]^2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x) \\ &= \frac{\exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}{b \left[1 + \exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]^2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x) \\ &= \frac{1}{2\beta \left[1 + \cosh\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]} \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x) \\ &= \frac{\text{sech}^2\left(\frac{x-\alpha}{2\beta}\right)}{4\beta} \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= \left[ 1 + \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \right]^{-1} \\
 &= 1 - \left[ 1 + \exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \right]^{-1}
 \end{aligned}$$

$$x = \alpha + \beta \ln\left(\frac{F_X}{1-F_X}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \psi_X(t) &= \exp(\alpha t) \Gamma(1-\beta t) \Gamma(1+\beta t) \\
 &= \frac{\pi \beta t \exp(\alpha t)}{\sin(\pi \beta t)}
 \end{aligned}$$

$$\varphi_X(t) = \frac{\exp(i\alpha t) \pi \beta i t}{\sin(\pi \beta i t)}$$

$$\text{Media} = \text{Mediana} = \text{Moda} = \alpha$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(\pi\beta)^2}{3}$$

$$f_X = F_X(1 - F_X)$$

$$x = \ln[F_X/(1 - F_X)]$$

24. **Pareto**,  $X \sim \text{Pareto}(x_0, b)$ :

$$(x_0, b \in \mathbb{R}^+)$$

$$f_X(x|x_0, b) = \frac{bx_0^b}{x^{b+1}} \mathbf{I}_{\{x \geq x_0\}}(x)$$

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^b \mathbf{I}_{\{x \geq x_0\}}$$

$$E(X) = \frac{x_0 b}{b-1} \quad b > 1$$

$$\text{Var}(X) = \frac{x_0^2 b^2}{b-2} - \frac{x_0^2 b^2}{(b-1)^2} = \frac{x_0^2 b}{(b-2)(b-1)^2}$$

25. **Extreme Value (Gumbel)**,  $X \sim \text{Gum}(\alpha, \beta)$ :

$$(\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^+)$$

$$f_X(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right] \mathbf{I}_{\mathbb{R}}(x)$$

$$F_X(x) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]$$

$$x = \alpha - \beta \ln \ln(1/F_X)$$

$$\psi_X(t) = \exp(\alpha t) \Gamma(1 - \beta t), \quad t < 1/\beta$$

$$\varphi_X(t) = \exp(i\alpha t) \Gamma(1 - i\beta t)$$

26. **Triangular**,  $X \sim \text{Tri}(a, b, c)$ :

$$(a, b, c \in \mathbb{R})$$

$$f_X(x|a, b, c) = \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} \mathbf{I}_{(a,c]}(x) + \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} \mathbf{I}_{(c,b]}(x)$$

$$F_X(x) = \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} \mathbf{I}_{(a,c]}(x) + \left\{1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)}\right\} \mathbf{I}_{(c,b]}(x)$$

$$E(X) = \frac{a+b+c}{3} \quad \text{Var}(X) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}$$

27. **Gamma**,  $X \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$ :

$$(\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+)$$

$$f_X(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

$$E(X^k) = \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1)}{\beta^k}$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

$$\psi_X(t) = \left( \frac{\beta}{\beta - t} \right)^\alpha \quad \text{para } t < \beta$$

28. **Exponencial**,  $X \sim \text{Exp}(\beta)$ :

$$(\beta > 0)$$

$$f_X(x|\beta) = \beta e^{-\beta x} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

$$X \sim \text{Exp}(\beta) = \text{Ga}(1, \beta)$$

$$E(X) = \frac{1}{\beta} \quad \text{y} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2}$$

$$\psi_X(t) = \frac{\beta}{\beta - t} \quad \text{para } t < \beta.$$

$$X \sim \text{Exp}(1) = \text{ExpEst}$$

29. **Exponencial Estandarizada**,  $X \sim \text{ExpEst}$ :

$$f_X(x) = e^{-x} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

$$E(X) = 1$$

$$\text{Var}(X) = 1$$

$$\varphi_X(t) = (1 - it)^{-1}$$

$$X \sim \text{ExpEst} = \text{Exp}(1) = \text{Gam}(1, 1)$$

30. **Exponencial negativa**,  $X \sim \text{ExpNeg}(\alpha, \beta)$ :

$$(\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^+)$$

$$f_X(x|\alpha, \beta) = \beta e^{-\beta(x-\alpha)} \mathbf{I}_{\langle \alpha, \infty \rangle}(x)$$

$$X \sim \text{ExpNeg}(0, \beta) = \text{Exp}(\beta) = \text{W}(\beta, 1).$$

$$E(X) = \frac{\alpha\beta - 1}{\beta}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha^2\beta^2 + 1}{\beta^2}$$

$$\varphi_X(t) = \frac{\beta e^{it\alpha}}{(\beta - it)}.$$

31. **Ji**,  $X \sim \chi_n$ :

$$f_X(x|n) = \frac{2}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n-1} e^{-x^2/2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

32. **Maxwell**,  $X \sim \text{Max}$ :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{2}{2^{3/2}\Gamma(3/2)} x^2 e^{-x^2/2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \\ &= \sqrt{2/\pi} x^2 e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

$$X \sim \text{Max} = \chi_3$$

33. **Rayleigh**,  $X \sim \text{Ray}$ :

$$f_X(x) = x e^{-x^2/2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

$$X \sim \text{Ray} = \chi_2$$

34. **Weibull**,  $X \sim \text{W}(\beta, r)$ :

$$(\beta, r \in \mathbb{R}^+)$$

$$f_X(x|\beta, r) = r\beta x^{r-1} e^{-\beta x^r} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

$$\mu = \beta^{-1/r} \Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

$$\sigma^2 = \beta^{-2/r} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{r}\right) - \left[ \Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right) \right]^2 \right\}$$

- $X \sim W(\beta, 1) = \text{Exp}(\beta) = \text{Ga}(1, \beta).$
- $X \sim W(1, 1) = \text{Ga}(1, 1) = \text{ExpEst}.$

35. **Beta**,  $X \sim \text{Be}(\alpha, \beta)$ :

$$(\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+)$$

$$\begin{aligned} f_X(x|\alpha, \beta) &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \mathbf{I}_{(0,1)}(x) \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \mathbf{I}_{(0,1)}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + k + \beta)} \\ &= \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + k - 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1) \cdots (\alpha + \beta + k - 1)}. \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

36. **Ji-cuadrado**,  $X \sim \chi_n^2$ :

$$f_X(x|n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{(n/2)-1} e^{-x/2} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

$$X \sim \chi_n^2 = \text{Ga}(n/2, 1/2)$$

$$E(X) = n \quad \text{y} \quad \text{Var}(X) = 2n$$

$$\psi_X(t) = \left( \frac{1}{1 - 2t} \right)^{n/2} \quad \text{para } t < \frac{1}{2}$$



37. *t* de Student,  $X \sim T_n$ :

$$f_X(x|n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n\pi)^{1/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} I_{\mathbb{R}}(x)$$

$$E(|X|^k) < \infty \quad \text{para } k < n$$

$$E(X) = 0 \quad n > 1,$$

$$\text{Var}(X) = \frac{n}{n-2} \quad n > 2$$

$$E[(X - \mu)^k] = \begin{cases} \mu_k = 0, & r \text{ impar} \\ \mu_k = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (k-1)n^{k/2}}{(n-2)(n-4)\cdots(n-k)} & r \text{ par} \end{cases}$$

38. *F* de Snedecor,  $X \sim F(n_1, n_2)$ :

$$\begin{aligned} f_X(x|n_1, n_2) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} x^{\frac{n_1-2}{2}} (n_2 + n_1 x)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} I_{\mathbb{R}^+}(x) \\ &= \frac{n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} x^{\frac{n_1-2}{2}} (n_2 + n_1 x)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} I_{\mathbb{R}^+}(x) \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{n_2}{n_2 - 2} \quad n_2 > 2$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)} \quad n_2 > 4$$

39. *Z* de Fisher,  $X \sim Z(n_1, n_2)$ :

$$Z = \frac{1}{2} \log F \quad \text{o lo que es lo mismo } F = e^{2Z}$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{2\Gamma[(n_1 + n_2)/2]}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} e^{n_1 z} \left(1 + \frac{n_1 e^{2z}}{n_2}\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} I_{\mathbb{R}}(z) \\ &= \frac{2n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} e^{n_1 z} (n_2 + n_1 e^{2z})^{-\frac{n_1+n_2}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} I_{\mathbb{R}}(z) \end{aligned}$$

Este diagrama muestra la relación que hay entre las v.a., continuas y discretas:

- $\Rightarrow$  Caso particular
- $\rightarrow$  Transformación
- $--\rightarrow$  Distribución límite

