

Apuntes de Cálculo de Probabilidades II

Antonio Luis Martínez Rico

9-09-1997

Índice General

1	Estructuras sobre las que se definen medidas	7
1.1	Sucesiones de conjuntos	7
1.2	Límites	14
1.3	Las estructuras	39
1.4	Clases engendradas	54
1.5	El caso $\Omega = \mathbb{R}$	66
1.6	El conjunto de Cantor	67
1.7	Conjuntos producto	70
1.8	El caso $\Omega = \mathbb{R}^n$	78
1.9	Ejercicios	81

Índice de Figuras

1.1	El seno de un ángulo positivo x , medido en radianes, sobre la circunferencia unidad.	8
1.2	Parte de la gráfica de la función del ejemplo 1.1.2.	9
1.3	Clases, familias y colecciones.	11
1.4	Sucesión de conjuntos monótona creciente. Cada término contiene al anterior.	12
1.5	Cada conjunto de la sucesión del ejemplo 1.1.8 contiene al anterior.	13
1.6	Sucesión monótona decreciente de conjuntos. Cada término está contenido en el anterior.	13
1.7	Cada conjunto de la sucesión del ejemplo 1.1.9 está contenido en el precedente.	14
1.8	El cero pertenece a todos los términos de la sucesión de conjuntos del ejemplo 1.1.10.	15
1.9	Los complejos $ z < n$ son aquellos cuya representación en el plano se halla en el interior de una circunferencia de radio n con centro en el origen de coordenadas.	19
1.10	En una sucesión creciente, las intersecciones D_n coinciden con los respectivos A_n , mientras que las uniones S_n son todas iguales a S_1	22
1.11	En una sucesión decreciente, las uniones S_n coinciden con los respectivos A_n , mientras que las intersecciones D_n son todas iguales a D_1	23
1.12	La sucesión (B_n) es disjunta por su propia construcción.	25
1.13	Parte de la gráfica de la sucesión $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$	26
1.14	Parte de la gráfica de la sucesión $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$	30
1.15	Relaciones entre una sucesión y las sucesiones asociadas de supremos e ínfimos.	31
1.16	El conjunto A_1 está incluido en A	42
1.17	Expresión de A como unión disjunta.	43

1.18	La diferencia simétrica de dos conjuntos es el conjunto formado por los puntos que pertenecen sólo a uno de ellos.	44
1.19	La unión de A y B es diferencia simétrica de $A \triangle B$ y de $A \cap B$. La diferencia $A - B$ está formada por los puntos que pertenecen a A y no pertenecen a la intersección $A \cap B$	46
1.20	Intersección de A_1 y A_2 mediante unión y diferencia.	50
1.21	Relaciones entre las diferentes estructuras de conjuntos.	55
1.22	Imagen inversa o contraimagen de un elemento.	61
1.23	División del intervalo unidad en nueve partes iguales.	68
1.24	El abierto A contiene algún intervalo $I_{k,n}$	70
1.25	Ilustración de las propiedades 8 y 9 del teorema 1.7.1 para el caso de productos de intervalos.	72
1.26	Una aplicación de elección definida sobre la clase $\{A_i / i = 1, 2, 3\}$	74
1.27	El paralelepípedo unidad en \mathbb{R}^2	79

Capítulo 1

Estructuras sobre las que se definen medidas

1.1 Sucesiones de conjuntos

Comenzamos esta sección definiendo el concepto de familia, ampliamente utilizado a lo largo de este y otros capítulos.

Definición 1.1.1 (Familia) Sea I un conjunto. Se llama familia de elementos del conjunto X con índices en el conjunto I a todo par (I, f) , donde f es una aplicación que asocia a cada elemento $i \in I$ un elemento $x_i \in X$. Para simbolizar tal familia utilizamos alguna de las notaciones $\{x_i / i \in I\}$ o $(x_i / i \in I)$ o, más concisamente, $\{x_i\}_{i \in I}$ o $(x_i)_{i \in I}$.

La noción de familia es una ampliación del concepto de conjunto. En este sentido, todo conjunto X puede considerarse como una familia; basta tomar el mismo conjunto como conjunto de índices: $I = X$, y como aplicación la identidad: $id : X \rightarrow X$. Es más, cuando la aplicación f es inyectiva, es posible identificar una familia $(x_i)_{i \in I}$ con el conjunto imagen de la aplicación $f(I)$.

Ejemplo 1.1.1 Sea \mathbb{R} el conjunto de los números reales. Sea también $I = \mathbb{R}$ el conjunto de índices. La aplicación identidad en \mathbb{R}

$$id : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow id(x) = x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

hace del conjunto de los números reales una familia $(x_i)_{i \in \mathbb{R}}$ con índices en \mathbb{R} . Como dicha aplicación es inyectiva, podemos hacer el abuso de notación: $\mathbb{R} = (x_i)_{i \in \mathbb{R}}$.

8CAPÍTULO 1. ESTRUCTURAS SOBRE LAS QUE SE DEFINEN MEDIDAS

En la práctica, para definir completamente a una familia de elementos de X con índices en I , es suficiente dar la aplicación f entre el conjunto de índices I y el conjunto X . Por otro lado, la notación $\{x_i/i \in I\}$ resulta confusa ya que puede interpretarse como un conjunto¹. Por esta razón, a la hora de denotar una familia de elementos de X con índices en I , preferimos la forma $(x_i/i \in I)$ y su variante concisa $(x_i)_{i \in I}$.

Ejemplo 1.1.2 Sea I el conjunto de los números reales x de la forma

$$x = k\frac{\pi}{2}, \text{ donde } k \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

La aplicación

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

definida por $f(x) = \sin x$, determina una familia de elementos de \mathbb{R} con índices en I . De acuerdo con las consideraciones del párrafo anterior, escribimos $(\sin x)_{x \in I}$ o bien $(\dots, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots)^2$ para denotar a esta familia. En efecto, la notación $\{\sin x/x \in I\}$ es ambigua pues puede representar el conjunto $\{-1, 0, 1\}$ (el cual es el recorrido o imagen de la aplicación f y como ésta no es inyectiva, tal recorrido no puede identificarse con la familia).

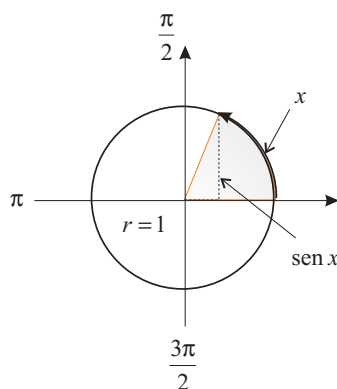


Figura 1.1: El seno de un ángulo positivo x , medido en radianes, sobre la circunferencia unidad.

Ejemplo 1.1.3 Sean I y X dos conjuntos. Una gráfica G es un subconjunto del producto cartesiano $I \times X$, tal que para todo elemento $i \in I$ existe un

¹Y ya hemos señalado que una familia no es un conjunto sino un concepto más general.

²Estos son los valores que puede adoptar el seno de un múltiplo de $\frac{\pi}{2}$.

único $x \in X$ de forma que $(i, x) \in G$. Toda aplicación $f : I \rightarrow X$ nos define una gráfica única:

$$G_f = \{(i, x) \mid f(i) = x\} \quad (1.4)$$

y, recíprocamente, toda gráfica $G = \{(i, x), \dots\} \subset I \times X$ define una aplicación única mediante

$$f(i) = x. \quad (1.5)$$

Así pues, como toda familia queda establecida mediante una aplicación, podemos considerar una familia de elementos de un conjunto X con índices en otro conjunto I , como una gráfica $G \subset I \times X$.

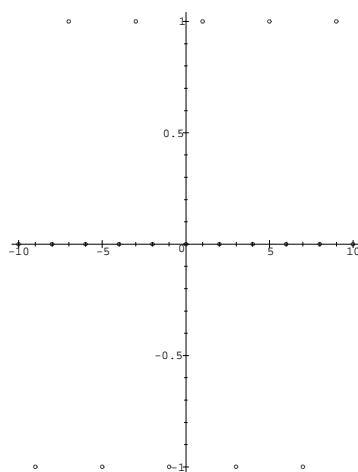


Figura 1.2: Parte de la gráfica de la función del ejemplo 1.1.2.

Las familias con las que trabajamos son familias de conjuntos. Para definir las adecuadamente se necesita partir de un conjunto previamente definido. Sea Ω tal conjunto, no vacío, al que denominamos espacio³ y sea $\wp(\Omega)$ el conjunto de todas sus partes (subconjuntos). A los elementos de Ω los llamamos puntos y los notamos con letras griegas minúsculas, preferentemente ω , con o sin acentos⁴. A los subconjuntos de Ω (esto es, a los elementos de $\wp(\Omega)$) los notamos, como es usual, con letras latinas mayúsculas como A, B , etc., con

³Aunque su naturaleza no sea geométrica

⁴subíndices, superíndices, acentos, etc.

o sin afijos. Este espacio y el conjunto de sus partes son marco de referencia en todo este capítulo.

Definición 1.1.2 (Familia de conjuntos) Sean Ω e I dos conjuntos. El par (I, f) , donde f es una aplicación de I en $\wp(\Omega)$, es una familia de conjuntos con índices en I .

Ejemplo 1.1.4 Sea $\Omega = \mathbb{R}^2$ y sea $I = \mathbb{Q}$ (conjunto de los racionales). La aplicación

$$f(q) = [q - 1, q] \times]q - 1, q[, \text{ donde } q \in \mathbb{Q} \quad (1.6)$$

define una familia de subconjuntos de \mathbb{R}^2 con índices en \mathbb{Q} .

Ejemplo 1.1.5 Sea $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, 1, 2\}$. Afirmamos que

$$(\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}, \emptyset) \quad (1.7)$$

es una familia de partes de Ω . En efecto, basta tomar como conjunto de índices: $I = \{1, 2, 3\}$ y como aplicación $f : I \longrightarrow \wp(\Omega)$, dada por $f(1) = \{\alpha\}$, $f(2) = \{\alpha, \beta\}$, $f(3) = \emptyset$.

Comentario 1.1.1 (Clase, familia y colección) Los términos *clase*, *familia* y *colección* aparecen como sinónimos en cierta literatura matemática. Sin embargo, en estos apuntes los tratamos como esencialmente diferentes. Una *clase* puede entenderse como un conjunto cuyos elementos son a su vez conjuntos o bien (en el sentido de Von Neumann y Bernays) como un objeto matemático no definido, con la propiedad de que si $P(x)$ es un predicado universal⁵, existe una clase para la que dicho predicado es válido. Una *familia* se determina, como ya hemos mencionado, con una aplicación y, finalmente, una *colección* es un tipo de familia donde todos los elementos son diferentes. En muchas ocasiones, empleamos los términos *clase* y *colección* de conjuntos indistintamente. Esto es posible debido a que una familia de conjuntos con elementos diferentes tiene, necesariamente, que definirse a través de una aplicación inyectiva y, por tanto, identificamos⁶ la familia con el conjunto $f(I)$, el cual está formado por conjuntos y es por ello una *clase*.

Cuando el conjunto de índices I de una familia es el conjunto de los enteros positivos⁷, se dice que tal familia es una *sucesión*.

⁵Un predicado $P(x)$ es universal si la variable x puede adoptar como valor cualquier objeto matemático.

⁶Ver al respecto el tercer párrafo de esta sección.

⁷También se puede considerar el conjunto de los naturales con o sin el cero.

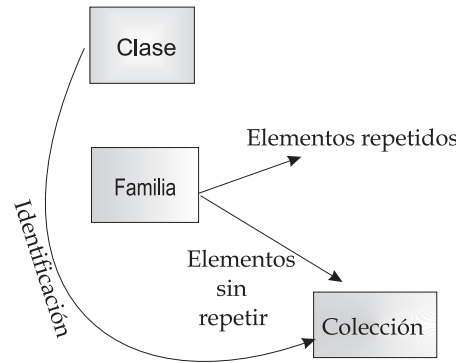


Figura 1.3: Clases, familias y colecciones.

Definición 1.1.3 (Sucesión) Sea \mathbb{Z}^+ el conjunto de los enteros positivos. Una sucesión o secuencia infinita de elementos de un conjunto X es toda familia (\mathbb{Z}^+, f) . Para denotar una sucesión escribimos $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ o, más simplícadamente, (x_n) . Cada elemento x_n de la sucesión recibe el nombre de término.

Ejemplo 1.1.6 Sea $X = \mathbb{R}$. La aplicación

$$f(n) = \frac{1}{n}, \text{ donde } n \in \mathbb{Z}^+, \quad (1.8)$$

define una sucesión de números reales que notamos por $(\frac{1}{n})$.

Ejemplo 1.1.7 La sucesión dada por

$$A_n = \{0, 1, \dots, n^2\}, \text{ siendo } n \geq 1 \quad (1.9)$$

es una sucesión de subconjuntos de \mathbb{Z} . En efecto, todos sus términos son partes del conjunto de los enteros. A saber,

$$A_1 = \{0, 1\}, A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}, A_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \dots \quad (1.10)$$

Además, como todos los elementos de la sucesión son diferentes, se trata de una colección de conjuntos.

En esta sección nos centramos en las sucesiones de conjuntos y sus propiedades. Nuestra primera observación es que el conjunto de las partes de Ω puede ordenarse por medio de la inclusión. Este orden es sólo parcial pero permite definir la *monotonía*.

Definición 1.1.4 (Sucesión monótona creciente) Sea Ω un conjunto no vacío y sea (A_n) una sucesión de partes de Ω . Decimos que la sucesión es monótona creciente (creciente o monótona no decreciente) si es $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

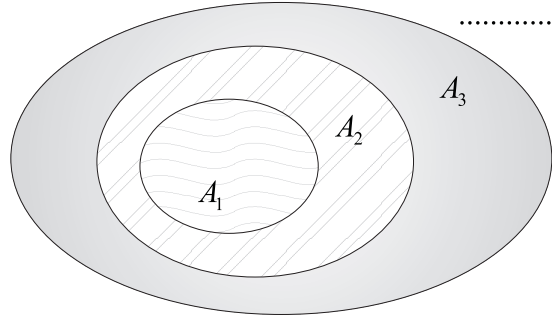


Figura 1.4: Sucesión de conjuntos monótona creciente. Cada término contiene al anterior.

El simbolismo inclusivo $A \subset B$ se entiende en sentido no estricto. Es decir, puede darse tanto la inclusión estricta como la igualdad.

Definición 1.1.5 (Sucesión estrictamente creciente) Se dice que una sucesión (A_n) de partes de Ω es monótona estrictamente creciente (estrictamente creciente), si para todo $n \geq 1$ es $A_n \subset A_{n+1}$ y $A_n \neq A_{n+1}$.

Ejemplo 1.1.8 Sea $\Omega = \mathbb{R}$. Mediante la función

$$f(n) = \left] 0, 1 - \frac{1}{n} \right[, \text{ con } n \geq 1 \quad (1.11)$$

obtenemos una sucesión monótona estrictamente creciente de subconjuntos de la recta real. Así es, ya que

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ para todo } n \geq 1. \quad (1.12)$$

Esta desigualdad permite asegurar para todo $n \geq 1$, la inclusión

$$\left] 0, 1 - \frac{1}{n} \right[\subset \left] 0, 1 - \frac{1}{n+1} \right[, \quad (1.13)$$

con $\left] 0, 1 - \frac{1}{n} \right[\neq \left] 0, 1 - \frac{1}{n+1} \right[$. Obsérvese que $A_1 = \emptyset$.

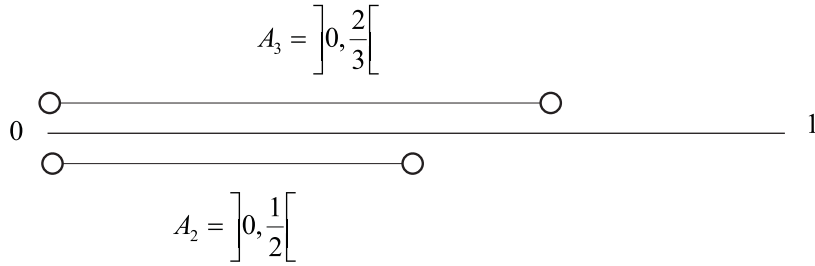


Figura 1.5: Cada conjunto de la sucesión del ejemplo 1.1.8 contiene al anterior.

Definición 1.1.6 (Sucesión monótona decreciente) Sea Ω un conjunto no vacío y sea (A_n) una sucesión de partes de Ω . Decimos que la sucesión es monótona decreciente (decreciente o monótona no creciente) si para todo $n \geq 1$ es $A_{n+1} \subset A_n$.

Como en la definición 1.1.4, la inclusión se entiende en sentido no estricto.

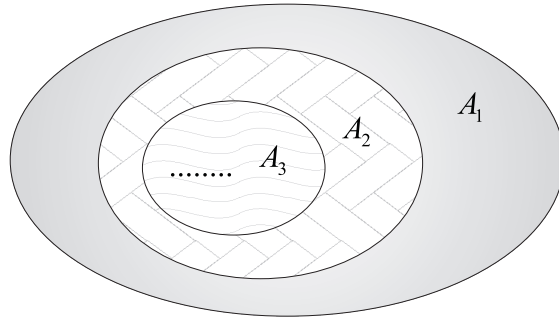


Figura 1.6: Sucesión monótona decreciente de conjuntos. Cada término está contenido en el anterior.

Definición 1.1.7 (Sucesión estrictamente decreciente) Se dice que una sucesión (A_n) de partes de Ω es monótona estrictamente decreciente (estrictamente decreciente) si para todo $n \geq 1$ es $A_{n+1} \subset A_n$ y $A_n \neq A_{n+1}$.

Ejemplo 1.1.9 La sucesión de subconjuntos de la recta real definida por

$$A_n = \left] 1 - \frac{1}{n}, 1 \right[, \text{ donde } n \geq 1, \quad (1.14)$$

es estrictamente decreciente. Todos los conjuntos de la sucesión son distintos⁸ y aplicando 1.12 resulta que

$$\left] 1 - \frac{1}{n+1}, 1 \right[\subset \left] 1 - \frac{1}{n}, 1 \right[, \text{ para todo } n \geq 1, \quad (1.15)$$

siendo la inclusión estricta.

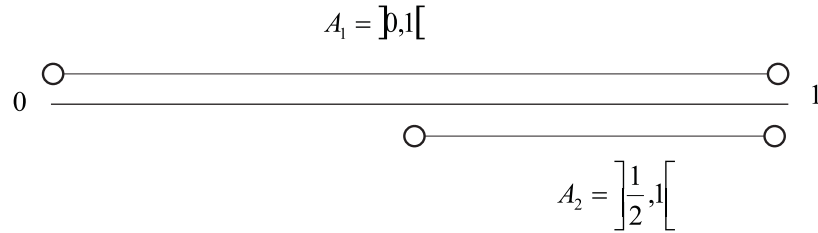


Figura 1.7: Cada conjunto de la sucesión del ejemplo 1.1.9 está contenido en el precedente.

Las sucesiones crecientes y decrecientes (estrictamente o no) se agrupan bajo la denominación común de *monótonas*.

1.2 Límites

Al igual que ocurre en las sucesiones de números reales, es interesante determinar de alguna forma el comportamiento de una sucesión de conjuntos a medida que n crece. Para ello empleamos el concepto de *límite principal*, en sus variantes de *límite superior* e *inferior*. Como no suponemos la existencia de una estructura topológica previa sobre el conjunto $\wp(\Omega)$, la definición de los estos límites ha de basarse en ideas exclusivamente conjuntistas.

Definición 1.2.1 (Caracterización de Chung del límite inferior) Sea Ω un conjunto no vacío y sea (A_n) una sucesión de partes de Ω . El límite inferior de (A_n) es el conjunto de puntos de Ω que pertenecen a casi todos⁹ los conjuntos de la sucesión. Para denotar el límite inferior de (A_n) escribimos

$$\liminf A_n \quad (1.16)$$

⁸Es decir, se trata de una colección.

⁹Es decir, a todos salvo, quizás, un número finito.

o bien

$$\liminf A_n. \quad (1.17)$$

En símbolos, resulta:

$$\liminf A_n = \{ \omega \in \Omega / \exists m \in \mathbb{Z}^+ : \omega \in A_n \forall n \geq m \}. \quad (1.18)$$

Ejemplo 1.2.1 Para la sucesión de intervalos de la recta real dada por

$$A_n = \begin{cases} \left] -1, \frac{1}{n} \right] & \text{si } n \text{ es impar} \\ \left] -\frac{1}{n}, 1 \right] & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (1.19)$$

comprobamos que el cero pertenece a todos los conjuntos de la sucesión (ver figura 1.8) y, en consecuencia, pertenece al límite inferior de esta sucesión. Es más, afirmamos que $\liminf A_n = \{0\}$. En efecto, si tomamos un número positivo x_0 , podemos hallar siempre un entero positivo impar m de forma que $\frac{1}{m} < x_0$. Así, dicho positivo x_0 no pertenece a ningún conjunto $\left] -1, \frac{1}{n} \right]$ con n impar y mayor que m . Esto implica que x_0 no pertenece al límite inferior de (A_n) puesto que no pertenece a una infinidad de términos de la sucesión. Análogamente, si y_0 es un número negativo, podemos hallar un entero positivo par s tal que $y_0 < -\frac{1}{s}$. Así, dicho número negativo y_0 no pertenece a ningún conjunto de la forma $\left] -\frac{1}{n}, 1 \right]$ con n par y mayor que s . Esto implica que y_0 no pertenece al límite inferior de (A_n) y queda probado que sólo el cero puede pertenecer a dicho límite inferior.

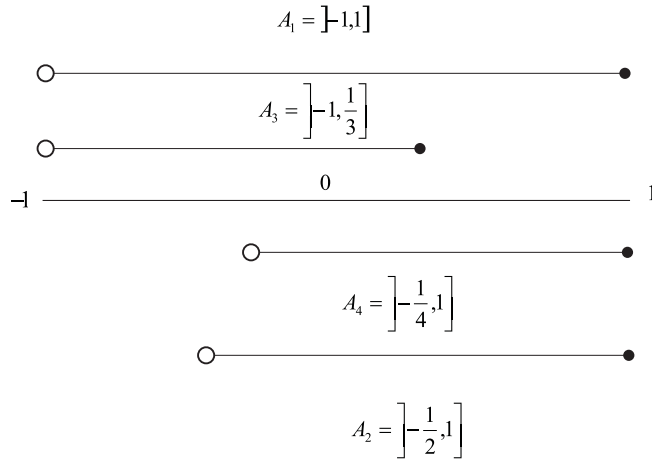


Figura 1.8: El cero pertenece a todos los términos de la sucesión de conjuntos del ejemplo 1.1.10.

Definición 1.2.2 (Caracterización de Chung del límite superior) Sea Ω un conjunto no vacío y sea (A_n) una sucesión de partes de Ω . El límite superior de (A_n) es el conjunto de puntos de Ω que pertenecen a infinitos conjuntos de la sucesión. Para denotar el límite superior de (A_n) escribimos

$$\limsup A_n \quad (1.20)$$

o bien

$$\overline{\lim} A_n. \quad (1.21)$$

En símbolos, resulta:

$$\limsup A_n = \{\omega \in \Omega / \omega \in A_n \text{ para infinitos } n\}.$$

El límite inferior está contenido en el límite superior ya que todo punto del espacio Ω que se encuentra en casi todos los conjuntos A_n se halla en una infinidad de ellos.

Ejemplo 1.2.2 La sucesión del ejemplo 1.2.1 verifica $\limsup A_n =]-1, 1]$. Probamos esta afirmación. Es evidente que el cero pertenece al límite superior ya que pertenece al límite inferior. Si $0 < x_0 \leq 1$, entonces x_0 pertenece a todos los A_n con n par. Si es $-1 < x < 0$, entonces x_0 pertenece a todos los A_n con n impar. En definitiva, todo $x_0 \in]-1, 1]$ pertenece a una infinidad de conjuntos de la sucesión (A_n) .

Los límites superior e inferior de una sucesión de conjuntos siempre existen (pueden ser vacíos) y, en ocasiones, pueden coincidir.

Definición 1.2.3 (Sucesión convergente) Sea Ω un conjunto no vacío y sea (A_n) una sucesión de partes de Ω . Decimos que (A_n) es convergente si y sólo si

$$\liminf A_n = \limsup A_n.$$

En tal caso, escribimos $\lim A_n$ para denotar al conjunto común.

Ejemplo 1.2.3 La sucesión del ejemplo 1.2.1 no es convergente ya que su límite inferior y su límite superior no coinciden.

Las caracterizaciones de Chung que hemos dado del límite superior e inferior no son muy manejables. A continuación, damos otras definiciones equivalentes basadas en operaciones con conjuntos de la sucesión. Pero antes, es necesario “extender” algunas operaciones básicas entre conjuntos (unión e intersección) con el fin de aplicarlas a cualquier familia.

Definición 1.2.4 (Unión de los elementos de una familia) Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de partes de Ω . Definimos la unión de todos los conjuntos de dicha familia como el conjunto formado por aquellos puntos ω que pertenecen al menos a un conjunto de la familia. En símbolos:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega / \exists j \in I : \omega \in A_j\}. \quad (1.22)$$

Esta definición es consistente en virtud del axioma de la unión¹⁰.

Definición 1.2.5 (Intersección de los elementos de una familia) Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de partes de Ω . Definimos la intersección de todos los conjuntos de dicha familia como el conjunto formado por aquellos puntos ω que pertenecen a todos los conjuntos de la familia. En símbolos:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega / \omega \in A_i \ \forall i \in I\}. \quad (1.23)$$

La existencia de este conjunto está garantizada sin necesidad de ningún axioma ya que se trata de un subconjunto de cualquiera de los conjuntos de la familia.

Comentario 1.2.1 (Complementario de la unión e intersección de una familia) Si un punto $\omega \in \Omega$ no pertenece a ningún A_i , entonces ha de pertenecer a todos los complementarios A_i^c . Esto significa que

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c. \quad (1.24)$$

Análogamente, se tiene que

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c. \quad (1.25)$$

Por otro lado, si el conjunto de índices es vacío $I = \emptyset$, parece natural hacer el convenio

$$\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset. \quad (1.26)$$

Por ello, para mantener las relaciones 1.24 y 1.25 ha de ser

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \Omega. \quad (1.27)$$

¹⁰Si \mathfrak{S} es un conjunto cuyos elementos son conjuntos X, Y, \dots , entonces existe un conjunto cuyos elementos son los que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos X, Y, \dots de \mathfrak{S} .

Cuando la familia es una sucesión (A_n) , suele emplearse la notación $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ o la notación $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} A_n$ para designar a la unión de todos sus términos y la notación $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ o $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} A_n$ para la intersección.

Comentario 1.2.2 (Unión e intersección de una clase) Sea \mathfrak{A} una clase de subconjuntos de Ω (es decir un conjunto cuyos elementos son partes de Ω). Se puede definir la unión y la intersección de los conjuntos de la clase de manera análoga a la unión e intersección de elementos de una familia. Así, resulta que

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A = \{\omega \in \Omega / \exists A \in \mathfrak{A} : \omega \in A\}, \quad (1.28)$$

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A = \{\omega \in \Omega / \omega \in A \ \forall A \in \mathfrak{A}\}. \quad (1.29)$$

Obsérvese que empleamos símbolos del tipo Fraktur: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, etc, para denotar a clases de conjuntos.

Para las clases vacías tenemos los mismos convenios que para las familias con conjuntos de índices vacíos (ver el comentario 1.2.1). Así, tenemos que

$$\bigcup_{A \in \emptyset} A = \emptyset, \quad (1.30)$$

$$\bigcap_{A \in \emptyset} A = \Omega. \quad (1.31)$$

Ejemplo 1.2.4 La unión de los conjuntos de la sucesión de partes de \mathbb{C} dada por

$$A_n = \{z \in \mathbb{C} / |z| < n\} \quad (1.32)$$

es el plano complejo. Es decir,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{C}. \quad (1.33)$$

Ejemplo 1.2.5 La intersección de todos los conjuntos de la sucesión del ejemplo 1.2.4 es el disco abierto unidad:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}, \quad (1.34)$$

ya que sólo los puntos de este disco pertenecen a todos los términos de esta sucesión.

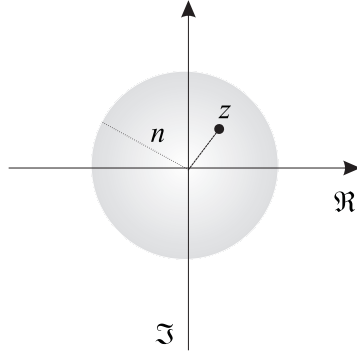


Figura 1.9: Los complejos $|z| < n$ son aquellos cuya representación en el plano se halla en el interior de una circunferencia de radio n con centro en el origen de coordenadas.

Teorema 1.2.1 (Límite inferior con operaciones de conjuntos) Sea (A_n) una sucesión de partes del espacio Ω . Entonces

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \quad (1.35)$$

Prueba. En primer lugar, definimos una sucesión auxiliar mediante

$$D_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \quad (1.36)$$

Es decir, el término n -ésimo D_n es la intersección de todos los conjuntos de la sucesión desde n en adelante. Por ejemplo, $D_2 = A_2 \cap A_3 \cap \dots$.

Supongamos que $\omega \in \liminf A_n$. En tal caso, hallamos al menos un $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\omega \in A_n$ para todo $n \geq m$. Evidentemente, esto significa que

$$\omega \in A_m \cap A_{m+1} \cap \dots = D_m. \quad (1.37)$$

Por tanto,

$$\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \quad (1.38)$$

Hemos probado la inclusión $\liminf A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Recíprocamente, sea

$$\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \quad (1.39)$$

Por la definición de unión, existe al menos un conjunto $D_r = \bigcap_{k=r}^{\infty} A_k$ tal que $\omega \in D_r$. Esto implica que

$$\omega \in A_r \cap A_{r+1} \cap \dots \quad (1.40)$$

y ω se halla en casi todos los términos de la sucesión y pertenece al límite inferior de ésta. Esto prueba la inclusión $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset \liminf A_n$. De la doble inclusión se sigue la igualdad, terminando aquí nuestra demostración. ■

Teorema 1.2.2 (Límite superior con operaciones de conjuntos) Sea (A_n) una sucesión de partes del espacio Ω . Entonces

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k. \quad (1.41)$$

Prueba. Como en la demostración del teorema 1.2.1, utilizamos una sucesión auxiliar definida mediante

$$S_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k. \quad (1.42)$$

Cada término n -ésimo de esta sucesión auxiliar es la unión de todos los conjuntos de la sucesión desde n en adelante. Por ejemplo, para $n = 3$ es $S_3 = A_3 \cup A_4 \cup \dots$.

Sea $\omega \in \limsup A_n$. Entonces ω pertenece a una infinidad de términos de la sucesión. Esto significa que si consideramos un entero positivo cualquiera l , siempre hallamos al menos otro entero $q > l$ tal que $\omega \in A_q$. Es decir,

$$\omega \in S_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \text{ para todo } n \geq 1 \quad (1.43)$$

y de aquí

$$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k. \quad (1.44)$$

Hemos probado la inclusión $\limsup A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Recíprocamente, si $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, entonces pertenece a todo $S_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ y, en consecuencia, pertenece a una infinidad de conjuntos de la sucesión. Esto prueba que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \limsup A_n$. La doble inclusión nos lleva a la igualdad buscada y aquí termina nuestra demostración. ■

Estas definiciones de límites superior e inferior se pueden utilizar para comprobar que *toda sucesión de conjuntos monótona es convergente*.

Teorema 1.2.3 (Convergencia de las sucesiones crecientes) Sea (A_n) una sucesión monótona creciente de partes de Ω . Afirmamos que es convergente con

$$\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \quad (1.45)$$

Prueba. Utilizando el teorema 1.2.1, resulta que

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \quad (1.46)$$

Ahora bien, como (A_n) es monótona creciente, se cumple que $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \geq 1$. En consecuencia,

$$D_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n, \text{ para todo } n \geq 1. \quad (1.47)$$

Es decir que

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \quad (1.48)$$

Por otro lado, de acuerdo con el teorema 1.2.2, sabemos que

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k. \quad (1.49)$$

Como $S_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = S_1$ para todo $n \geq 1$ se sigue que

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \quad (1.50)$$

La igualdad de los límites superior e inferior nos lleva a concluir que la sucesión es convergente con $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Aquí termina la demostración. ■

A partir de ahora para denotar a una sucesión monótona creciente (A_n) que converge a A , escribimos $A_n \uparrow A$.

Ejemplo 1.2.6 Sea la sucesión (A_n) de partes del plano complejo, dada por

$$A_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 - \frac{1}{n} \right\}. \quad (1.51)$$

Esta sucesión es creciente ya que $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$, para todo $n \geq 1$. El límite de esta sucesión es

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 - \frac{1}{n} \right\} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}. \quad (1.52)$$

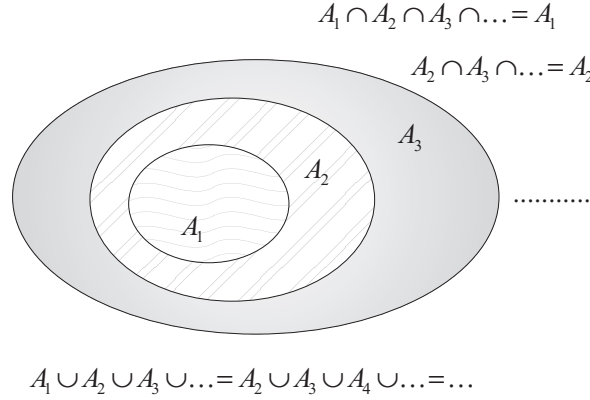


Figura 1.10: En una sucesión creciente, las intersecciones D_n coinciden con los respectivos A_n , mientras que las uniones S_n son todas iguales a S_1 .

Teorema 1.2.4 (Convergencia de las sucesiones decrecientes) Sea (A_n) una sucesión monótona decreciente de partes de Ω . Afirmamos que es convergente con

$$\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n. \quad (1.53)$$

Prueba. El carácter decreciente de (A_n) nos permite afirmar que

$$D_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = D_1 \text{ para todo } n \geq 1. \quad (1.54)$$

Aplicando el teorema 1.2.1 resulta que

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_1 = D_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

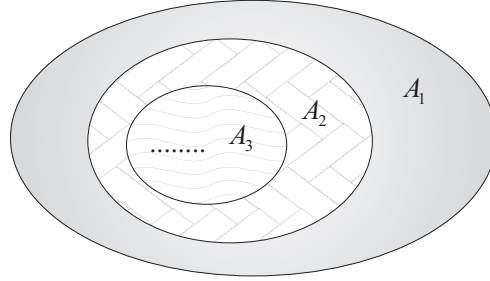
Análogamente, es

$$S_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \text{ para todo } n \geq 1. \quad (1.55)$$

Y aplicando el teorema 1.2.2, obtenemos

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n. \quad (1.56)$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots = A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots = A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \dots = \dots$$



$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots = A_1$$

$$A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots = A_2$$

Figura 1.11: En una sucesión decreciente, las uniones S_n coinciden con los respectivos A_n , mientras que las intersecciones D_n son todas iguales a D_1 .

La igualdad de los límites inferior y superior implica que la sucesión es convergente con $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Hemos terminado la demostración. ■

Para designar una sucesión decreciente (A_n) con límite A se usa la notación $A_n \downarrow A$.

Ejemplo 1.2.7 *La sucesión definida mediante*

$$A_n = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z| < 1 + \frac{1}{n} \right\} \quad (1.57)$$

es una sucesión monótona decreciente de partes del plano de Gauss¹¹. En efecto, es $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$, para todo $n \geq 1$. Su límite es el conjunto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ z \in \mathbb{C} / |z| < 1 + \frac{1}{n} \right\} = \{ z \in \mathbb{C} / |z| < 1 \}. \quad (1.58)$$

Observamos que el límite obtenido coincide con el límite de la sucesión creciente del ejemplo 1.2.6.

En ocasiones, es útil disponer de sucesiones formadas por conjuntos disjuntos¹². Es decir, sucesiones (A_n) tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Aunque esto no siempre es posible, sí que podemos construir otra sucesión (B_n) a partir de la sucesión dada, de forma que (B_n) sea disjunta y la unión de todos los conjuntos de ambas sucesiones sea la misma.

¹¹Esta es otra denominación del plano complejo.

¹²O familias formadas por conjuntos disjuntos.

Teorema 1.2.5 (Sucesión de conjuntos disjuntos asociada a una dada)

Sea Ω un conjunto no vacío y sea (A_n) una sucesión de partes de Ω . La sucesión (B_n) dada por

$$B_n = \begin{cases} A_1 & \text{si } n = 1 \\ A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad (1.59)$$

es una sucesión formada por conjuntos disjuntos cuya unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ coincide con $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Prueba. En primer lugar, la sucesión (B_n) resulta disjunta por su propia construcción. Probaremos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. En efecto, sea $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Hallaremos al menos un entero positivo r , tal que $\omega \in A_r$. Esto significa que el subconjunto de índices

$$I = \{j \in \mathbb{Z}^+ / \omega \in A_j\} \quad (1.60)$$

es no vacío pues $r \in I$. En virtud de la buena ordenación de los enteros positivos, todo subconjunto no vacío tiene un elemento mínimo. Por ello, existe $s = \min I$ y tiene la propiedad de que $\omega \in A_s$ pero $\omega \notin A_n$ para $n < s$. En definitiva,

$$\omega \in A_s - \bigcup_{k=1}^{s-1} A_k = B_s \quad (1.61)$$

y de aquí, $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Hemos probado la inclusión $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Sea ahora $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Hallaremos un entero positivo q tal que $\omega \in B_q$. Por definición de B_q , se tiene que $\omega \in A_q$ y de aquí $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Hemos probado la inclusión $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y tenemos la igualdad. Esto termina nuestra demostración. ■

Existen útiles relaciones entre los límites superior e inferior de las sucesiones de conjuntos y los límites análogos de ciertas *sucesiones funcionales*. Para establecer tal relación, consideráramos, en primer lugar, el conjunto de los números reales \mathbb{R} junto con dos símbolos: $+\infty$ (más infinito) y $-\infty$ (menos infinito)¹³ con la propiedad siguiente: $-\infty < x < +\infty$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A continuación, extendemos el axioma del supremo a este conjunto y definimos el límite superior e inferior de una sucesión de números reales. Para terminar, definimos los límites superior e inferior de las sucesiones de funciones utilizando las sucesiones de números reales.

¹³El símbolo de infinito ∞ se ha usado en esta sección y en la anterior en un sentido diferente al actual. En efecto, sólo nos permitía de manera cómoda expresar el “último” entero positivo.

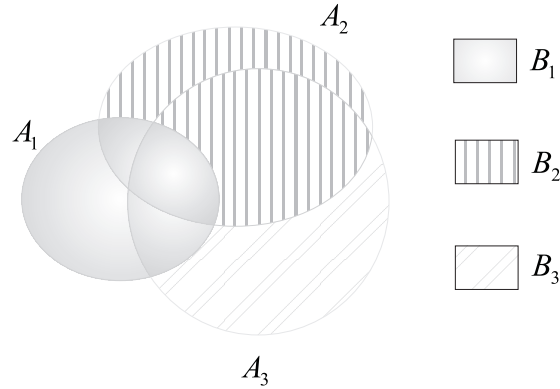


Figura 1.12: La sucesión (B_n) es disjunta por su propia construcción.

El conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ con la propiedad de orden anterior, recibe el nombre de recta real ampliada o sistema ampliado de los números reales y se simboliza con alguna de las notaciones \mathbb{R}^* , $\overline{\mathbb{R}}$ o $\widehat{\mathbb{R}}$.

El axioma del supremo admite una versión más potente en la recta real ampliada. Así, consideramos el supremo y el ínfimo de un conjunto acotado de la forma usual, mientras que el supremo de un conjunto no acotado superiormente es $+\infty$ y el ínfimo de un conjunto no acotado inferiormente es $-\infty$.

Definición 1.2.6 (Sucesión de supremos) Sea (a_n) una sucesión de números reales. Definimos la sucesión asociada de supremos en la recta ampliada mediante

$$b_n = \sup \{a_k / k \geq n\}. \quad (1.62)$$

La sucesión (b_n) puede tener términos iguales a $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 1.2.8 Sea la sucesión $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. La sucesión asociada de supremos es

$$b_n = \sup \left\{ (-1)^k \frac{1}{k} / k \geq n \right\}. \quad (1.63)$$

Veamos alguno de sus términos:

$$b_1 = \sup \left\{ (-1)^k \frac{1}{k} / k \geq 1 \right\} = \sup \left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} = \frac{1}{2}, \quad (1.64)$$

$$b_2 = \sup \left\{ (-1)^k \frac{1}{k} / k \geq 2 \right\} = \sup \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots \right\} = \frac{1}{2}, \quad (1.65)$$

$$b_3 = \sup \left\{ (-1)^k \frac{1}{k} \middle/ k \geq 3 \right\} = \sup \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \right\} = \frac{1}{4}. \quad (1.66)$$

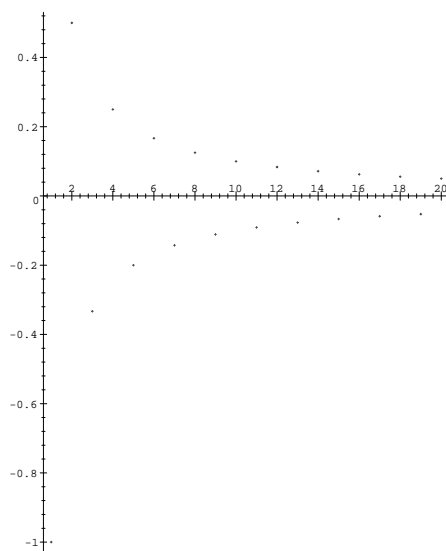


Figura 1.13: Parte de la gráfica de la sucesión $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

Ejemplo 1.2.9 Sea la sucesión $a_n = n^2$. La sucesión asociada de supremos es constantemente igual a $+\infty$. En efecto,

$$b_1 = \sup \{1, 4, 9, 16, \dots\} = +\infty, \quad (1.67)$$

$$b_2 = \sup \{4, 9, 16, 25, \dots\} = +\infty, \quad (1.68)$$

$$b_3 = \sup \{9, 16, 25, 36, \dots\} = +\infty, \quad (1.69)$$

...

Definición 1.2.7 (Sucesión de ínfimos) Sea (a_n) una sucesión de números reales. Definimos la sucesión asociada de ínfimos en la recta ampliada mediante

$$c_n = \inf \{a_k \middle/ k \geq n\}. \quad (1.70)$$

También la sucesión (c_n) puede tener términos infinitos.

Ejemplo 1.2.10 Consideremos la sucesión $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ del ejemplo 1.2.8. La sucesión asociada de ínfimos es

$$c_n = \inf \left\{ (-1)^k \frac{1}{k} / k \geq n \right\}. \quad (1.71)$$

Aquí tenemos algunos de sus términos:

$$c_1 = \inf \left\{ (-1)^k \frac{1}{k} / k \geq 1 \right\} = \inf \left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} = -1, \quad (1.72)$$

$$c_2 = \inf \left\{ (-1)^k \frac{1}{k} / k \geq 2 \right\} = \inf \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots \right\} = -\frac{1}{3}, \quad (1.73)$$

$$c_3 = \inf \left\{ (-1)^k \frac{1}{k} / k \geq 3 \right\} = \inf \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \right\} = -\frac{1}{3}. \quad (1.74)$$

En la recta real ampliada *todas las sucesiones monótonas tienen límite*. Si están acotadas este límite es finito y si no están acotadas el límite es alguno de los símbolos: $+\infty$, $-\infty$. A partir de ahora, decimos que *una sucesión es convergente si su límite es finito o $+\infty$, $-\infty$* . En caso de que no tenga límite se dirá que es divergente.

Teorema 1.2.6 (Convergencia de las sucesiones de supremos e ínfimos)

Sea (a_n) una sucesión de números reales. Las sucesiones de supremos

$$b_n = \sup \{a_k / k \geq n\} \quad (1.75)$$

e ínfimos

$$c_n = \inf \{a_k / k \geq n\} \quad (1.76)$$

son convergentes en la recta real ampliada.

Prueba. Como para todo entero positivo n es

$$\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \subset \{a_n, a_{n+1}, \dots\}, \quad (1.77)$$

se deduce que

$$b_{n+1} = \sup \{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \leq \sup \{a_n, a_{n+1}, \dots\} = b_n. \quad (1.78)$$

Por lo tanto, la sucesión de supremos (b_n) es monótona decreciente y converge en $\overline{\mathbb{R}}$. Su límite es el valor $\inf \{b_n / n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Análogamente, de la inclusión 1.77 se deduce que

$$c_{n+1} = \inf \{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \geq \inf \{a_n, a_{n+1}, \dots\} = c_n \quad (1.79)$$

y la sucesión de ínfimos es creciente y convergente en la recta ampliada. Su límite es $\sup \{c_n / n \in \mathbb{Z}^+\}$. Esto termina nuestra demostración. ■

A continuación, exponemos algunas relaciones entre la sucesión (a_n) y las sucesiones asociadas de supremos e ínfimos.

Teorema 1.2.7 (Acotación y convergencia de la sucesión de supremos)

La sucesión de supremos (b_n) tiene algún término finito si y sólo si la sucesión (a_n) está acotada superiormente. Por otro lado, si (b_n) está acotada inferiormente, entonces $\lim b_n$ es finito y si (b_n) no está acotada inferiormente, entonces y sólo entonces $\lim b_n = \lim a_n = -\infty$.

Prueba. Supongamos que b_m es finito. En tal caso, $s = \sup \{a_k / k \geq m\}$ es un número real y se tiene la acotación $a_k \leq s$ para todo $k \geq m$. Los términos a_1, a_2, \dots, a_{m-1} también son reales, por lo que tomando

$$m = \max \{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, s\} \quad (1.80)$$

se deduce que $a_n \leq m$ para todo n . Esto prueba que (a_n) está acotada superiormente. Recíprocamente, si (a_n) está acotada superiormente y M es una de sus cotas superiores, se tiene que para todo entero positivo n , los conjuntos $\{a_k / k \geq n\}$ son no vacíos y están acotados superiormente por M . Por ello, han de tener supremo en la recta real. Esto prueba que todos los términos de (b_n) son finitos.

Si la sucesión de los supremos (b_n) está acotada inferiormente (recordemos que es decreciente) entonces tiene límite finito. En caso contrario, es $\lim b_n = -\infty$ y, dado $d < 0$, existe al menos un entero positivo n_0 tal que

$$\sup \{a_k / k \geq n_0\} < d. \quad (1.81)$$

Es decir, $a_n < d$ para todo $n \geq n_0$. Esto significa que $\lim a_n = -\infty$. Recíprocamente, si es $\lim a_n = -\infty$, se deduce que la sucesión de los supremos no está acotada inferiormente y $\lim b_n = -\infty$. Aquí termina nuestra demostración. ■

Ejemplo 1.2.11 *Es fácil comprobar que la sucesión $a_n = (-1)^n (1 + \frac{1}{n})$ está acotada. En efecto,*

$$|a_n| = \left| (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right| = \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq 2 \text{ para todo } n \geq 1. \quad (1.82)$$

De acuerdo con el teorema 1.2.7 esto implica que la sucesión de supremos está formada por números reales. Los tres primeros términos de la sucesión (b_n) son:

$$b_1 = \sup \left\{ (-1)^k \left(1 + \frac{1}{k} \right) / k \geq 1 \right\} = \sup \left\{ -2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \dots \right\} = \frac{3}{2}, \quad (1.83)$$

$$b_2 = \sup \left\{ (-1)^k \left(1 + \frac{1}{k} \right) / k \geq 2 \right\} = \sup \left\{ \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots \right\} = \frac{3}{2}, \quad (1.84)$$

$$b_3 = \sup \left\{ (-1)^k \left(1 + \frac{1}{k} \right) / k \geq 31 \right\} = \sup \left\{ -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \dots \right\} = \frac{5}{4}. \quad (1.85)$$

Se prueba que $(b_n) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \dots \right)$ y resulta una sucesión decreciente y acotada inferiormente luego $\lim b_n = \inf \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \dots \right\} = 1$.

Para la sucesión de ínfimos existe un teorema análogo al teorema 1.2.7.

Teorema 1.2.8 (Acotación y convergencia de la sucesión de ínfimos)

La sucesión de ínfimos (c_n) tiene algún término finito si y sólo si la sucesión (a_n) está acotada inferiormente. Por otro lado, si la sucesión de ínfimos está acotada superiormente, entonces su límite es un número real. Si no es así, su límite es $+\infty$ y, entonces y sólo entonces, $\lim a_n = +\infty$.

Prueba. Supongamos que c_r es finito. Esto quiere decir que $l = \inf \{a_k / k \geq r\}$ es un número real y, en consecuencia, $a_k \geq l$ para todo $k \geq r$. Tomando

$$t = \min \{a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, l\}, \quad (1.86)$$

es $a_n \geq t$ para todo n . Es decir, (a_n) está acotada inferiormente. Recíprocamente, si la sucesión (a_n) está acotada inferiormente y L es una de sus cotas inferiores, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ el conjunto $\{a_k / k \geq n\}$ es no vacío y está acotado inferiormente por L . De esta manera, todos los conjuntos tienen ínfimo en la recta real y la sucesión de los ínfimos (c_n) está formada por términos reales.

Si la sucesión de ínfimos está acotada superiormente (recordemos que es creciente) entonces tiene límite finito. Si no es así, se tiene $\lim c_n = +\infty$ y, dado $z > 0$, podemos hallar al menos un $\nu \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\inf \{a_k / k \geq \nu\} > z. \quad (1.87)$$

Esta relación implica que $a_n > z$ para todo $n \geq \nu$ y la sucesión a_n converge a $+\infty$. Si fuera $\lim a_n = +\infty$, entonces la sucesión de ínfimos no estaría acotada superiormente y $\lim c_n = +\infty$. La demostración ha terminado. ■

Ejemplo 1.2.12 *Aplicando el teorema 1.2.8 a la sucesión del ejemplo 1.2.11, resulta que la sucesión asociada de ínfimos está formada por números reales:*

$$c_n = \left(-2, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{6}{5}, \dots\right). \quad (1.88)$$

Se trata de una sucesión creciente y acotada superiormente, por lo que su límite es $\lim c_n = \sup \{-2, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{6}{5}, \dots\} = -1$.

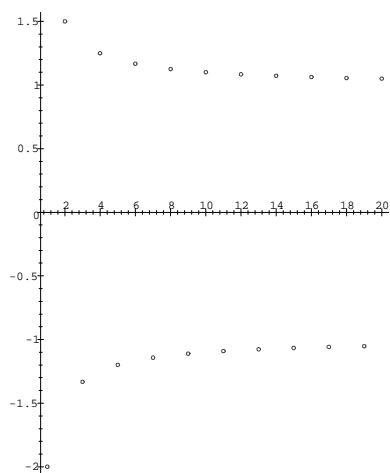


Figura 1.14: Parte de la gráfica de la sucesión $a_n = (-1)^n (1 + \frac{1}{n})$.

Establecidas estas propiedades, pasamos a definir los conceptos de límite superior e inferior para una sucesión de números reales.

Definición 1.2.8 (Límite superior de una sucesión de números reales)

Sea (a_n) una sucesión de números reales. Decimos que el límite superior de esta sucesión es el límite en la recta ampliada de la sucesión de supremos (b_n) . En símbolos:

$$\lim b_n = \limsup a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n. \quad (1.89)$$

Definición 1.2.9 (Límite inferior de una sucesión de números reales)

Sea (a_n) una sucesión de números reales. Decimos que el límite inferior de esta sucesión es el límite en la recta ampliada de la sucesión de ínfimos (c_n) .

En símbolos:

$$\lim c_n = \liminf a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k. \quad (1.90)$$

Ejemplo 1.2.13 El límite superior de la sucesión del ejemplo 1.2.11 es $\lim b_n = \limsup a_n = 1$, mientras que su límite inferior es $\lim c_n = \liminf a_n = -1$. Obsérvese que son distintos.

Supongamos que (a_n) no está acotada superiormente. En ese caso, de acuerdo con el teorema 1.2.7 tenemos que la sucesión de supremos (b_n) no tiene ningún término finito. Concretamente, $b_n = \sup \{a_k / k \geq n\} = +\infty$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. El límite superior será también $+\infty$. Análogamente, si la sucesión (a_n) no está acotada inferiormente, será $c_n = \inf \{a_k / k \geq n\} = -\infty$ para todo entero positivo n . Por ello, $\liminf a_n = -\infty$.

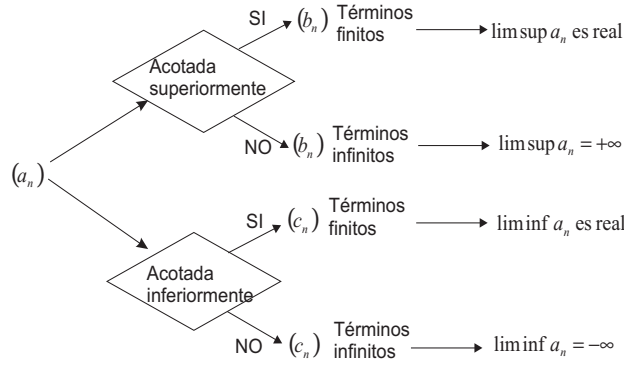


Figura 1.15: Relaciones entre una sucesión y las sucesiones asociadas de supremos e ínfimos.

Ejemplo 1.2.14 Sea la sucesión $a_n = n \sin \frac{n\pi}{3}$. Esta sucesión no está acotada ni superior ni inferiormente. Por ello, es

$$b_n = \sup \left\{ k \sin \frac{k\pi}{3} / k \geq n \right\} = +\infty, \text{ para todo } n \geq 1 \quad (1.91)$$

y el límite superior es también $+\infty$. Análogamente,

$$c_n = \inf \left\{ k \sin \frac{k\pi}{3} / k \geq n \right\} = -\infty, \text{ para todo } n \geq 1 \quad (1.92)$$

y por tanto $\liminf a_n = -\infty$.

Entre el límite superior y el límite inferior de una sucesión de números reales existe una interesante relación.

Teorema 1.2.9 (Relación entre límite superior e inferior) *Sea (a_n) una sucesión de números reales. Se tiene que*

$$\liminf a_n = -\limsup (-a_n). \quad (1.93)$$

Prueba. Sabemos que para un conjunto de números reales S es cierta la relación $\inf S = -\sup(-S)^{14}$. De esta manera, como la definición de límite inferior es

$$\liminf a_n = \sup \left\{ \inf \{a_k / k \geq n\} / n \in \mathbb{Z}^+ \right\}, \quad (1.94)$$

se puede aplicar la relación al conjunto de “dentro” para conseguir la igualdad

$$\sup \left\{ \inf \{a_k / k \geq n\} / n \in \mathbb{Z}^+ \right\} = \sup \left\{ -\sup \{(-a_k) / k \geq n\} / n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \quad (1.95)$$

Al conjunto de “fuera” del segundo miembro de 1.95 le aplicamos la relación $-\inf S = \sup(-S)$ (deducida trivialmente de nuestra primera relación) para llegar a

$$\sup \left\{ -\sup \{(-a_k) / k \geq n\} / n \in \mathbb{Z}^+ \right\} = -\inf \left\{ \sup \{(-a_k) / k \geq n\} / n \in \mathbb{Z}^+ \right\}. \quad (1.96)$$

Como $\limsup(-a_n) = \inf \left\{ \sup \{(-a_k) / k \geq n\} / n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$, queda probado el teorema. ■

Existen algunas propiedades más de las sucesiones de supremos e ínfimos que nos parece importante reseñar.

Teorema 1.2.10 (Condiciones de límite superior finito) *Sea (a_n) una sucesión de números reales. Son equivalentes:*

1. $\limsup a_n = a \in \mathbb{R}$.
2. *Se cumplen las dos condiciones siguientes:*

- (a) *Para cada $x > a$, existe al menos un $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, tal que $a_n < x$ para todo $n \geq n_0$.*
- (b) *Para cada $y < a$ y cada entero positivo m , existe otro entero positivo $p \geq m$, tal que $a_p > y$.*

¹⁴— S se entiende como el conjunto de los opuestos de los elementos de S .

Prueba. Supongamos que es $\limsup a_n = a \in \mathbb{R}$. En ese caso,

$$a = \inf \left\{ \sup \{a_k / k \geq n\}, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}. \quad (1.97)$$

Por la definición de ínfimo, dado $x > a$ podemos hallar cierto entero positivo n_0 tal que

$$\sup \{a_k / k \geq n_0\} < x. \quad (1.98)$$

Esto implica que $a_n < x$ para todo $n \geq n_0$. Del mismo modo, si tomamos $y < a$, entonces

$$\sup \{a_k / k \geq n\} > y, \text{ para todo } n \geq 1, \quad (1.99)$$

y de aquí, por definición de supremo, tomando un entero positivo cualquiera m , siempre existe otro entero positivo $p \geq m$, tal que $a_p > y$. Esto prueba que 1 implica 2.

Recíprocamente, supongamos que se dan (a) y (b) de 2. Un razonamiento inverso del anterior nos lleva a concluir que entonces $\limsup a_n = a \in \mathbb{R}$. Así 2 implica 1 y esto termina nuestra demostración. ■

Teorema 1.2.11 (Condiciones de límite inferior finito) Sea (a_n) una sucesión de números reales. Son equivalentes:

1. $\liminf a_n = b \in \mathbb{R}$.
2. Se cumplen las dos condiciones siguientes:
 - (a) Para cada $x < b$, existe al menos un $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, tal que $a_n > x$ para todo $n \geq n_0$.
 - (b) Para cada $h > b$ y cada entero positivo m , existe otro entero positivo $p \geq m$, tal que $a_p < h$.

Prueba. Es análoga a la anterior y se deja a cargo del lector. ■

Ejemplo 1.2.15 Sea la sucesión $a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n}$. Vamos a comprobar, utilizando los teoremas 1.2.10 y 1.2.11, que su límite superior es 2 y su límite inferior -2 . Empezamos con la prueba para el límite superior. Dado $\varepsilon > 0$, podemos hallar un entero positivo n_0 , tal que

$$(-1)^n \frac{2n+1}{n} < 2 + \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0. \quad (1.100)$$

Para ello, partimos de las desigualdades

$$(-1)^n \frac{2n+1}{n} < \frac{2n+1}{n} < 2 + \varepsilon. \quad (1.101)$$

Sólo utilizamos las dos últimas

$$\frac{2n+1}{n} < 2 + \varepsilon, \quad \frac{2n+1}{n} - 2 < \varepsilon, \quad \frac{2n+1-2n}{n} < \varepsilon. \quad (1.102)$$

Simplificando, resulta

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad n > \frac{1}{\varepsilon}. \quad (1.103)$$

De esta manera, basta tomar $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$. Así, si es $\varepsilon = 0,001$, debemos utilizar $n_0 = \left\lceil \frac{1}{0,001} \right\rceil + 1 = 1001$ para que se dé la desigualdad: $(-1)^n \frac{2n+1}{n} < 2,001$ para $n \geq 1001$ (el lector puede comprobar que esta desigualdad es cierta). Sea ahora $2 - \varepsilon$. Para este valor, y para cada entero positivo m , encontramos otro entero positivo $p \geq m$, tal que

$$(-1)^p \frac{2n+1}{p} > 2 - \varepsilon. \quad (1.104)$$

Así es, ya que todos los términos que ocupan un lugar par son mayores que 2. Por ello, es suficiente tomar p como un par mayor que m para que la desigualdad 1.104 sea cierta. Esto prueba que $\limsup a_n = 2$. Demostramos ahora que el límite inferior es -2 . Sea $\varepsilon > 0$, hallamos $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ de forma que

$$(-1)^n \frac{2n+1}{n} > -2 - \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0. \quad (1.105)$$

En efecto, multiplicando por -1 ambos miembros de la desigualdad anterior obtenemos

$$(-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n} < 2 + \varepsilon. \quad (1.106)$$

A esta desigualdad se le puede aplicar el mismo proceso que en 1.101 para obtener, como antes: $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$. Sea ahora $-2 + \varepsilon$. Como todos los términos que ocupan un lugar impar son menores que -2 , es suficiente tomar para cada entero positivo m , el primer entero impar $p \geq m$, para que se cumpla

$$(-1)^p \frac{2n+1}{p} < -2 + \varepsilon. \quad (1.107)$$

Hemos probado que $\liminf a_n = -2$.

Teorema 1.2.12 (Límite superior e inferior y puntos de aglomeración)

El límite superior de una sucesión de números reales (a_n) es el mayor de sus puntos de aglomeración, mientras que el límite inferior es el menor de sus puntos de aglomeración.

Prueba. Recordemos que un punto $p \in \mathbb{R}$ es de aglomeración de una sucesión de números reales (a_n) , si y sólo si es adherente a cada conjunto de la base de filtro de Fréchet¹⁵ de dicha sucesión. Sea $\{a_k/k \geq n\}$ un conjunto de dicha base de filtro y sea

$$b_n = \sup \{a_k/k \geq n\}. \quad (1.108)$$

Entonces, b_n es adherente a este conjunto (por la definición de supremo) y el valor

$$\limsup a_n = \inf \{b_n/n = 1, 2, \dots\} \quad (1.109)$$

es adherente a todos los conjuntos $\{b_n\}$ y, por tanto, adherente a todos los conjuntos de la base de filtro. Además es el mayor con esta propiedad, ya que todo valor más grande no es ínfimo de la sucesión (b_n) . De forma análoga se prueba que el límite inferior es el menor de los puntos de aglomeración. Nuestra demostración termina aquí. ■

Teorema 1.2.13 (Condiciones de convergencia) *Una sucesión (a_n) es convergente si y sólo si $\limsup a_n = \liminf a_n$.*

Prueba. Sabemos que una sucesión es convergente si y sólo si tiene un único punto de aglomeración. Por ello, tal punto será el mayor ($\limsup a_n$) y el menor ($\liminf a_n$) a un tiempo y, en consecuencia: $\limsup a_n = \liminf a_n$. El enunciado del teorema queda así demostrado. ■

Una vez establecidas las propiedades de los límites superior e inferior de las sucesiones de números reales, pasamos a caracterizar las sucesiones de funciones reales.

Definición 1.2.10 (Sucesión funcional y sucesión de números reales) *Sea (f_n) una sucesión de funciones reales definidas sobre el mismo conjunto no vacío Ω . Para cada $\omega \in \Omega$ se puede considerar una sucesión de números reales mediante $(f_n(\omega))$.*

Es decir, construimos con cada ω del dominio común una sucesión de números reales.

Ejemplo 1.2.16 *La expresión*

$$f_n(\omega) = \frac{1}{n!} (\omega - 1)^n, \text{ donde } \omega \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+, \quad (1.110)$$

¹⁵Esta base de filtro está formada por los conjuntos $S_n = \{a_k/k \geq n\}$. Obsérvese que son los mismos conjuntos que empleamos para definir el límite superior e inferior.

define una sucesión de funciones con dominio toda la recta real. Si hacemos $\omega = 0$, resulta una sucesión de números reales:

$$f_n(0) = \frac{(-1)^n}{n!}, \text{ siendo } n = 1, 2, \dots \quad (1.111)$$

Definición 1.2.11 (Límite superior de una sucesión funcional) Sea (f_n) una sucesión de funciones reales con el mismo dominio Ω . El límite superior de la sucesión funcional es la función con valores en la recta ampliada dada por

$$(\limsup f_n)(\omega) = \limsup (f_n(\omega)), \text{ para cada } \omega \in \Omega. \quad (1.112)$$

Definición 1.2.12 (Límite inferior de una sucesión funcional) Sea (f_n) una sucesión de funciones reales con el mismo dominio Ω . Decimos que el límite inferior de esta sucesión es la función con valores en la recta ampliada definida por

$$(\liminf f_n)(\omega) = \liminf (f_n(\omega)), \text{ para cada } \omega \in \Omega. \quad (1.113)$$

Es claro que las sucesiones funcionales son un tipo particular de familias de funciones. Para éstas hay ciertas definiciones que es importante conocer.

Definición 1.2.13 (Supremo de una familia funcional) Sea $(f_i)_{i \in I}$ una familia de funciones reales con el mismo dominio Ω . Se dice que la función

$$s(\omega) = \sup \{f_i(\omega) / i \in I\}, \text{ para cada } \omega \in \Omega, \quad (1.114)$$

es el supremo de la familia de funciones.

Definición 1.2.14 (Ínfimo de una familia funcional) Sea $(f_i)_{i \in I}$ una familia de funciones reales con el mismo dominio Ω . Se dice que la función

$$m(\omega) = \inf \{f_i(\omega) / i \in I\}, \text{ para cada } \omega \in \Omega, \quad (1.115)$$

es el ínfimo de la familia de funciones.

En la práctica, las funciones supremo e ínfimo de una familia $(f_i)_{i \in I}$ se notan si no hay confusión, respectivamente, por $\sup \{f_i / i \in I\}$ e $\inf \{f_i / i \in I\}$, obviando la variable.

Cuando una función real $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es constante e igual a k , se escribe $f = k$. Por ejemplo, si es $f(\omega) = 1$ para todo ω , escribimos $f = 1$.

Asociado a cada subconjunto del espacio Ω hay una función real que llamamos *característica* del subconjunto en cuestión. Esta función va a ser el medio por el cual vamos a relacionar los límites superior e inferior de las sucesiones de conjuntos con los límites superior e inferior de sucesiones funcionales.

Definición 1.2.15 (Función característica) Sea Ω un conjunto no vacío y sea A una parte de dicho conjunto. Se define la función característica o indicadora de A , como la función con valores reales:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} . \quad (1.116)$$

Ejemplo 1.2.17 Sea el intervalo unidad de la recta real $\Omega = [0, 1]$. El subconjunto $A = \{\omega \in [0, 1] \mid \omega \in \mathbb{Q}\}$ tiene la siguiente función indicadora

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } \omega \notin \mathbb{Q} \end{cases} . \quad (1.117)$$

Tal función está definida sobre el intervalo unidad.

A continuación, exponemos algunas propiedades de las funciones características.

Teorema 1.2.14 (Propiedades de la función característica) Sean A y B dos subconjuntos del espacio Ω . Se tiene que

1. $A = B$ si y sólo si $I_A = I_B$.
2. $I_\Omega = 1$.
3. $I_\emptyset = 0$.
4. $I_{\Omega-A} = 1 - I_A$.
5. $I_{A \cap B} = I_A I_B$.
6. $I_{A \cup B} + I_{A \cap B} = I_A + I_B$.
7. $I_{A-B} = I_A (1 - I_B)$.
8. $I_A \leq I_B \Leftrightarrow A \subset B$.
9. Si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de partes de Ω . Entonces $I_{\cap_{i \in I} A_i} = \inf \{I_{A_i} \mid i \in I\}$.
10. Si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de partes de Ω . Entonces $I_{\cup_{i \in I} A_i} = \sup \{I_{A_i} \mid i \in I\}$.

Prueba. Las demostraciones de las cinco primeras propiedades y de las propiedades 7 y 8 son sencillas y se dejan a cargo del lector. Utilizando las propiedades 4 y 5 y las leyes de De Morgan, vemos que

$$I_{A \cup B} = I_{(A^c \cap B^c)^c} = I_{\Omega - (A^c \cap B^c)} = 1 - I_{A^c} I_{B^c} = 1 - I_{\Omega-A} I_{\Omega-B}. \quad (1.118)$$

En este punto, aplicamos de nuevo 4 y resulta:

$$1 - I_{\Omega-A} I_{\Omega-B} = 1 - (1 - I_A)(1 - I_B) = I_A + I_B - I_A I_B. \quad (1.119)$$

Esto prueba la propiedad 6. A continuación, demostramos la propiedad 7. Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de partes de Ω . El conjunto $\bigcap_{i \in I} A_i$ está formado por los puntos del espacio Ω que pertenecen a todos los conjuntos de la familia (ver la definición 1.2.5). Por tanto, para $\omega \in \Omega$ dado, su valor en la función característica es

$$I_{\bigcap_{i \in I} A_i}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_i \text{ para todo } i \in I \\ 0 & \text{si } \exists i \in I, \text{ tal que } \omega \notin A_i \end{cases}. \quad (1.120)$$

Por otro lado, para dicho $\omega \in \Omega$, el conjunto $\{I_{A_i}(\omega) \mid i \in I\}$ tiene como mínimo (y, por tanto, como ínfimo) el valor 0 si y sólo existe al menos un índice $i \in I$ tal que $\omega \notin A_i$ y tiene como máximo el valor 1 si y sólo si $\omega \in A_i$ para todo $i \in I$. Esto significa que

$$I_{\bigcap_{i \in I} A_i}(\omega) = \inf \{I_{A_i}(\omega) \mid i \in I\}. \quad (1.121)$$

Hemos probado la propiedad 9. De forma análoga se prueba la propiedad 10 y nuestra demostración termina aquí. ■

Estamos en condiciones de enunciar un resultado de gran importancia.

Teorema 1.2.15 (Funciones indicadoras y límites principales) *Dada una sucesión (A_n) de partes de Ω . Se verifica que*

1. $I_{\limsup A_n} = \limsup I_{A_n}$.
2. $I_{\liminf A_n} = \liminf I_{A_n}$.

Prueba. Sea $\omega \in \Omega$. Entonces si

$$I_{\limsup A_n}(\omega) = 1, \quad (1.122)$$

es $\omega \in \limsup A_n$. Por ello ω pertenece a una infinidad de conjuntos de la sucesión y esto significa que la sucesión $(I_{A_n}(\omega))$ tiene una infinidad de unos. Es decir, 1 es un punto de aglomeración y necesariamente el mayor por lo que

$$(\limsup I_{A_n})(\omega) = \limsup I_{A_n}(\omega) = 1. \quad (1.123)$$

Supongamos que $I_{\limsup A_n}(\omega) = 0$. En tal caso, ω pertenece a un número finito de conjuntos de la sucesión, de donde la sucesión $(I_{A_n}(\omega))$ tiene una

infinidad de ceros y un número finito de unos. Esto implica que el único punto de aglomeración es el cero y de aquí

$$(\limsup I_{A_n})(\omega) = 0. \quad (1.124)$$

Hemos probado 1, para probar 2 se sigue un desarrollo análogo. La demostración termina aquí. ■

Corolario 1.2.16 *Sea (A_n) una sucesión de conjuntos convergente a A . Entonces*

$$I_{\lim A_n} = \lim I_{A_n}. \quad (1.125)$$

Prueba. Como $\lim A_n = A$, se tiene que $\limsup A_n = \liminf A_n = A$. Aplicando los teoremas 1.2.15 y 1.2.14 se tiene

$$I_A = I_{\limsup A_n} = \limsup I_{A_n}, \quad (1.126)$$

$$I_A = I_{\liminf A_n} = \liminf I_{A_n}. \quad (1.127)$$

Por ello,

$$I_A = I_{\lim A_n} = \limsup I_{A_n} = \liminf I_{A_n} = \lim I_{A_n}. \quad (1.128)$$

El corolario queda así probado. ■

1.3 Las estructuras

Las estructuras con las que trabajamos son estructuras algebraicas donde las operaciones presentes son las operaciones básicas de conjunto. Su elección se fundamenta en la posibilidad de extender una *medida*¹⁶ desde una estructura sencilla a otra más complicada. En toda la sección (como ya mencionamos en las anteriores) trabajamos con un conjunto universal Ω , no vacío, al que llamamos espacio.

Definición 1.3.1 (π -sistema) *Una clase \mathfrak{P} , no vacía, de subconjuntos de Ω es un π -sistema (o π -sistema sobre Ω) si es cerrada para la intersección finita. Es decir, si verifica*

$$\forall A, B \in \mathfrak{P}, \text{ es } A \cap B \in \mathfrak{P}. \quad (1.129)$$

¹⁶En el capítulo siguiente precisamos el concepto de medida. En principio, diremos que una medida es una función definida sobre una clase que cumple ciertas propiedades.

La estructura de π -sistema es llamada también *primera estructura de Dynkin*. Más adelante, vemos la segunda estructura de Dynkin y las relaciones entre éstas y otras estructuras.

Entendemos el término clase como sinónimo de conjunto de conjuntos. Es decir, como cualquier subconjunto de $\wp(\Omega)$ ¹⁷.

Ejemplo 1.3.1 Sea Ω un conjunto no vacío. Se dice que una clase \mathfrak{T} de partes de Ω es una topología si contiene al vacío y al conjunto Ω y además es cerrada para la unión de cualquier tipo¹⁸ y para la intersección finita. Evidentemente, toda topología es un π -sistema.

Definición 1.3.2 (Semianillo) Una clase \mathfrak{S} de subconjuntos de Ω es un semianillo (o semianillo sobre Ω) si cumple las condiciones siguientes:

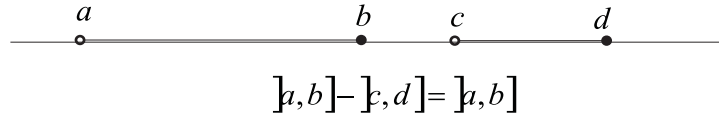
1. El conjunto vacío pertenece a \mathfrak{S} ,
2. La clase \mathfrak{S} es un π -sistema.
3. Para todo A y para todo B , pertenecientes a \mathfrak{S} , su diferencia $A - B$ puede expresarse como unión disjunta de una familia finita de elementos de \mathfrak{S} . Esto es, existe una familia $(S_i)_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ tal que $S_i \in \mathfrak{S}$, para todo $i \in I$, $C_i \cap C_j = \emptyset \forall i \neq j$ y $\cup_{i=1}^n C_i = A - B$.

Los semianillos son, pues, un tipo de π -sistemas que contienen al conjunto vacío y donde la diferencia de dos cualesquiera de sus elementos es unión finita y disjunta de elementos de la misma clase.

Ejemplo 1.3.2 La clase de los intervalos acotados de la recta real descrita por

$$\mathfrak{S} = \{[a, b] \mid -\infty < a \leq b < +\infty\} \quad (1.130)$$

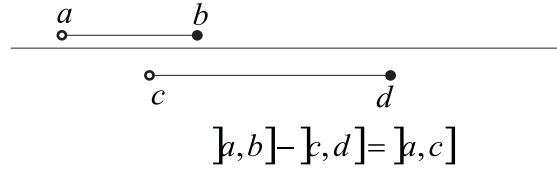
es un semianillo. Así es, ya que el vacío es un elemento de dicha clase (se obtiene haciendo $a = b$). La intersección de dos intervalos de \mathfrak{S} es también un intervalo de la misma clase y la diferencia de dos intervalos de \mathfrak{S} puede ponerse como unión finita de intervalos disjuntos de esta misma clase (ver figuras siguientes).



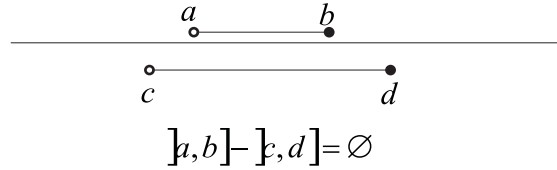
Caso 1: Intervalos disjuntos.

¹⁷Ver al respecto el Comentario 1.1.1

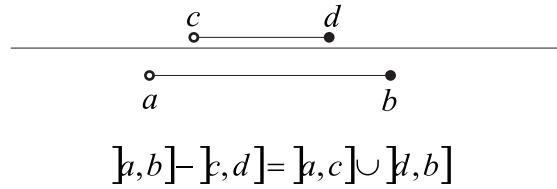
¹⁸Con esto queremos decir que la unión de cualquier familia de sus elementos también pertenece a la clase.



Caso 2: Intersección no vacía sin inclusión total.



Caso 3: Inclusión total del minuendo en el sustraendo.



Caso 4: Inclusión total del sustraendo en el minuendo.

Ejemplo 1.3.3 La clase de todos los intervalos acotados (abiertos, cerrados, semiabiertos, etc.) es también un semianillo. La prueba de esta afirmación es similar a la del ejemplo 1.3.2 y se deja a cargo del lector.

Comentario 1.3.1 El término *semianillo* se emplea también para designar una estructura algebraica bioperacional. En tal estructura se considera un conjunto no vacío y dos operaciones definidas sobre él, de forma que respecto a la primera de ellas dicho conjunto es un monoide abeliano, respecto a la segunda un semigrupo y la segunda operación es distributiva respecto a la primera por ambos lados. Los semianillos de conjuntos no se corresponden con esta estructura.

Existe una definición de semianillo equivalente a la definición 1.3.2.

Teorema 1.3.1 (Definición equivalente de semianillo) Sea \mathfrak{S} una clase de partes de Ω . Son equivalentes:

1. La clase \mathfrak{S} es un semianillo.
2. Se cumplen las propiedades siguientes:
 - (a) El vacío pertenece a \mathfrak{S} .

- (b) La clase \mathfrak{S} es un π -sistema.
- (c) Si para $A, A_1 \in \mathfrak{S}$, se cumple que $A_1 \subset A$, entonces podemos hallar una familia finita disjunta $(A_i)_{i \in \{2,3,\dots,n\}}$ de elementos de \mathfrak{S} , tal que la unión $\cup_{i=1}^n A_i = A$.

Prueba. Supongamos que \mathfrak{S} es un semianillo. En virtud de la definición 1.3.2, esto implica que se cumplen (a) y (b) de 2. Probamos que también se da (c). En efecto, sean A_1 y A dos elementos de \mathfrak{S} tales que $A_1 \subset A$. En ese caso, es

$$A = A_1 \cup (A - A_1), \quad (1.131)$$

donde la unión es disjunta (ver figura 1.16).

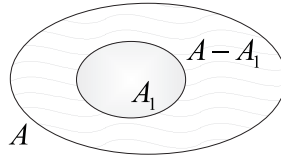


Figura 1.16: El conjunto A_1 está incluido en A .

Aplicando la condición 3 de la definición 1.3.2, hallaremos una familia finita y disjunta $(A_i)_{i \in \{2,3,\dots,n\}}$ de elementos de \mathfrak{S} , que cumple

$$A - A_1 = \cup_{i=2}^n A_i. \quad (1.132)$$

Sólo resta sustituir en 1.131 para obtener $A = \cup_{i=1}^n A_i$. Hemos probado que 1 implica 2. Veamos el recíproco con una argumentación similar. Evidentemente, (a) y (b) de 2 son las mismas condiciones que 1 y 2 de la definición 1.3.2. Sólo queda probar que (c) implica 3. Así es, puesto que si A y B pertenecen a \mathfrak{S} y tomamos su diferencia $A - B$, podemos escribir (ver figura 1.17).

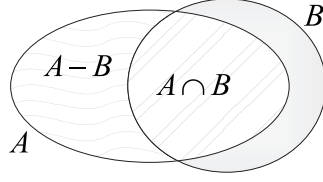
$$A = (A \cap B) \cup (A - B), \quad (1.133)$$

Esta unión es disjunta y está formada por elementos de \mathfrak{S} . Aplicando ahora (c) de la definición 1.3.2, concluimos que existe una familia finita y disjunta $(A_i)_{i \in \{2,3,\dots,n\}}$ de elementos de \mathfrak{S} para la que

$$A - B = \cup_{i=2}^n A_i. \quad (1.134)$$

Sustituyendo la expresión de $A - B$ en 1.133 y llamando $A_1 = (A \cap B)$, se tiene $A = \cup_{i=1}^n A_i$. Hemos probado que 2 implica 1 y aquí termina nuestra demostración. ■.

Otro resultado importante, fundamentado en el teorema 1.3.1 es el siguiente.

Figura 1.17: Expresión de A como unión disjunta.

Teorema 1.3.2 (Descomposición en un semianillo) Sea \mathfrak{S} un semianillo de partes de Ω y sean $(A_i)_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$ una familia finita y disjunta de elementos de este semianillo y $A \in \mathfrak{S}$, de forma que $A_i \subset A$ para todo $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Podemos hallar otra familia finita y disjunta de elementos de \mathfrak{S} , $(A_i)_{i \in \{n+1,\dots,n+k\}}$, tal que $A = \bigcup_{i=1}^{n+k} A_i$.

Prueba. La prueba se hace por inducción sobre n . Para $n = 1$, tenemos una familia finita y disjunta con un sólo elemento, A_1 , y un conjunto $A \in \mathfrak{S}$, que verifican la relación $A_1 \subset A$. Aplicando el apartado (c) del teorema 1.3.1 concluimos que existe una familia finita y disjunta $(A_i)_{i \in \{2,\dots,n\}}$ de elementos de \mathfrak{S} , tal que $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Esto prueba nuestra afirmación para $n = 1$. Supongamos que es cierta para n y consideremos una familia disjunta $(A_i)_{i \in \{1,2,\dots,n+1\}}$ de elementos del semianillo que verifican $A_i \subset A$ para todo $i \in \{1,2,\dots,n+1\}$. Entonces, aplicando la hipótesis de inducción a los primeros n conjuntos de la familia, hallamos que existe otra familia finita y disjunta $(B_j)_{j \in \{1,\dots,p\}}$ de elementos del semianillo \mathfrak{S} , tal que

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup B_1 \cup \dots \cup B_p. \quad (1.135)$$

Consideramos la intersección de los B_j con el conjunto A_{n+1} , es decir, los conjuntos $A_{n+1} \cap B_j$, $j = 1, \dots, p$. Como ambos operandos son elementos del semianillo \mathfrak{S} , su intersección también pertenece a dicho semianillo. Además, $A_{n+1} \cap B_j \subset B_j$ para $j = 1, \dots, p$ por lo que podemos aplicar de nuevo el teorema 1.3.1 y afirmar que para cada $j = 1, \dots, p$, existe una familia disjunta $(B_{j_k})_{k \in \{1,\dots,n_j\}}$ de elementos de \mathfrak{S} , que cumple:

$$B_j = (A_{n+1} \cap B_j) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n_j} B_{j_k} \right). \quad (1.136)$$

Sustituyendo cada B_j en la relación 1.135 se obtiene

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \left(\bigcup_{j=1}^p \left((A_{n+1} \cap B_j) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n_j} B_{j_k} \right) \right) \right). \quad (1.137)$$

Operando en 1.137 conseguimos la expresión

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \left(\bigcup_{j=1}^p (A_{n+1} \cap B_j) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^p \left(\bigcup_{k=1}^{n_j} B_{j_k} \right) \right). \quad (1.138)$$

Pero como es evidente que $\bigcup_{j=1}^p (A_{n+1} \cap B_j) = A_{n+1}$ se tiene la igualdad

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup \left(\bigcup_{j=1}^p \left(\bigcup_{k=1}^{n_j} B_{j_k} \right) \right). \quad (1.139)$$

Queda así probado para $n + 1$ y esto termina nuestra demostración. ■

Veamos ahora una estructura más completa y de gran utilidad.

Definición 1.3.3 (Anillo) Una clase \mathfrak{R} , no vacía, de partes del espacio Ω es un anillo (o bien, un anillo sobre Ω) si cumple:

1. La clase \mathfrak{R} es un π -sistema.
2. Para todo $A, B \in \mathfrak{R}$, la diferencia simétrica $A \triangle B$ pertenece a \mathfrak{R} .

Recordemos que la diferencia simétrica entre dos conjuntos A y B es el conjunto $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

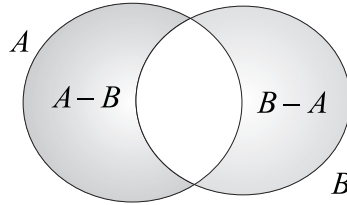


Figura 1.18: La diferencia simétrica de dos conjuntos es el conjunto formado por los puntos que pertenecen sólo a uno de ellos.

Comentario 1.3.2 El término anillo se utiliza también para designar a una estructura algebraica formada por un conjunto no vacío E y dos operaciones: $+$ y \cdot , definidas sobre dicho conjunto, de forma que $(E, +)$ es un grupo abeliano, $(E - \{0\}, \cdot)$ es un semigrupo y el producto es distributivo respecto a la suma por ambos lados. Si el producto es conmutativo se dice entonces que el anillo es conmutativo. El lector puede comprobar que todo anillo \mathfrak{R} de

subconjuntos es también un anillo conmutativo en el sentido expuesto, donde el papel de suma lo hace la diferencia simétrica y el papel de producto la intersección.

Un anillo de Boole es un anillo E donde todo elemento x cumple las propiedades $x + x = 0$ y $x \cdot x = x$. Como para todo conjunto A es $A \triangle A = \emptyset$ y $A \cap A = A$, todo anillo de conjuntos es un anillo de Boole.

Podemos caracterizar un anillo mediante otras propiedades.

Teorema 1.3.3 (Primera definición equivalente de anillo) Sea \mathfrak{R} una clase, no vacía, de partes del espacio Ω . Son equivalentes:

1. La clase \mathfrak{R} es un anillo.
2. La clase \mathfrak{R} es cerrada¹⁹ para la unión finita, la intersección finita y la diferencia.

Prueba. Supongamos que \mathfrak{R} es un anillo. En tal caso, será cerrada para la intersección ya que todo anillo es un π -sistema. Aplicando la inducción, se demuestra fácilmente que también es cerrada para la intersección de un número finito de sus elementos. Por otro lado,

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B) \quad (1.140)$$

y

$$A - B = A \triangle (A \cap B) \quad (1.141)$$

lo que implica que \mathfrak{R} es cerrada para la unión y la diferencia. De nuevo, aplicando la inducción podemos demostrar que esta clase es cerrada para la unión de un número finito de sus elementos. Esto prueba que 1 implica 2. Trivialmente, 2 implica 1 y nuestro teorema queda demostrado. ■

Ejemplo 1.3.4 Sea Ω un conjunto cualquiera. El conjunto de sus partes $\wp(\Omega)$ es un anillo. En efecto, $\wp(\Omega)$ es cerrado para todas las operaciones de conjunto.

Como consecuencia inmediata del teorema 1.3.3 todo anillo es semianillo.

Corolario 1.3.4 Todo anillo \mathfrak{R} es un semianillo.

¹⁹Si X es un subconjunto de U y \diamond es una operación definida en U , se dice que X es cerrado para dicha operación si para todo x, x' perteneciente a X es $x \diamond x' \in X$.

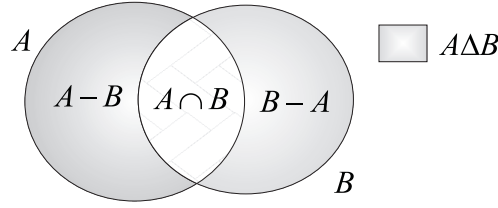


Figura 1.19: La unión de A y B es diferencia simétrica de $A \Delta B$ y de $A \cap B$. La diferencia $A - B$ está formada por los puntos que pertenecen a A y no pertenecen a la intersección $A \cap B$.

Prueba. Como \mathfrak{R} es no vacío y cerrado para la diferencia simétrica, se tiene que si $A \in \mathfrak{R}$ es

$$\emptyset = A \Delta A \in \mathfrak{R}. \quad (1.142)$$

Esto significa que el vacío es un elemento de todo anillo. Para terminar, todo anillo es un π -sistema y dados $A, B \in \mathfrak{R}$ es $A - B \in \mathfrak{R}$, lo que implica que la diferencia de dos de sus elementos puede ponerse como unión finita y disjunta de elementos de la misma clase. A saber, trivialmente $A - B = A - B$. Aquí termina nuestra demostración. ■

Definición 1.3.4 (Unidad en un anillo) *Un anillo \mathfrak{R} tiene unidad si existe $E \in \mathfrak{R}$ tal que $E \cap A = A$ para todo $A \in \mathfrak{R}$.*

Teorema 1.3.5 (Unidad y máximo en un anillo) *Sea \mathfrak{R} un anillo de partes de Ω . Son equivalentes:*

1. *El anillo \mathfrak{R} tiene unidad.*
2. *El anillo \mathfrak{R} posee un máximo para el orden inducido por la inclusión.*

Prueba. Supongamos E es la unidad del anillo \mathfrak{R} . En tal caso, es $E \cap A = A$ para todo elemento A de dicho anillo. Esto significa que $A \subset E$ para todo A . De este manera, el conjunto E es el máximo para el orden inducido por la inclusión. Esto prueba que 1 implica 2. Recíprocamente, si es E un máximo para el orden inducido en el anillo \mathfrak{R} por la inclusión, entonces $A \subset E$ para todo $A \in \mathfrak{R}$ y de aquí, $E \cap A = A$ para todo $A \in \mathfrak{R}$. Esto prueba que 2 implica 1 y aquí termina nuestra demostración. ■

Es posible restringir aún más las condiciones que debe cumplir una clase para ser un anillo.

Teorema 1.3.6 (Segunda definición equivalente de anillo) *Sea \mathfrak{R} una clase, no vacía, de partes del espacio Ω . Son equivalentes:*

1. La clase \mathfrak{R} es un anillo.
2. La clase \mathfrak{R} es cerrada para la unión finita y la diferencia.

Prueba. Ya probamos en el teorema 1.3.3 que todo anillo es cerrado para la unión finita y la diferencia. Veamos el recíproco. Supongamos que una clase \mathfrak{R} es cerrada para la unión finita y la diferencia. Como la diferencia simétrica se define utilizando unión finita y diferencia, la clase \mathfrak{R} también será cerrada para la diferencia simétrica. Finalmente, de la relación

$$A \cap B = A - (A - B) \quad (1.143)$$

se sigue que la clase \mathfrak{R} también es cerrada para la intersección finita. De acuerdo con la definición 1.3.3 esto significa que tal clase es un anillo. Nuestra demostración acaba en este punto. ■

Comentario 1.3.3 Se llama *clan de partes de un conjunto Ω* a toda clase no vacía de partes de este conjunto que sea cerrada para la unión finita y la diferencia. El teorema 1.3.6 nos indica que *clan* y *anillo de conjuntos* son sinónimos.

Definición 1.3.5 (Álgebra) Una clase \mathcal{A} de partes del espacio Ω es un álgebra (o álgebra sobre Ω) si cumple las condiciones:

1. El espacio Ω pertenece a \mathcal{A} .
2. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.
3. La clase \mathcal{A} es un π -sistema.

Recordemos que la notación A^c hace referencia al complementario de A , es decir, $A^c = \Omega - A$. Podemos dar una definición equivalente a la anterior sin más que considerar a la clase cerrada para la unión finita en lugar de para la intersección finita.

Teorema 1.3.7 (Primera definición equivalente de álgebra) Una clase \mathcal{A} de partes del espacio Ω es un álgebra si cumple las condiciones:

1. El espacio Ω pertenece a \mathcal{A} .
2. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.
3. La clase \mathcal{A} es cerrada para la unión finita.

Prueba. Supongamos que la clase \mathcal{A} es un álgebra. Entonces se dan trivialmente las condiciones 1 y 2 del teorema, mientras que 3 se sigue de

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c. \quad (1.144)$$

Recíprocamente, si una clase cumple 1, 2 y 3 del teorema, se tiene que es cerrada para la intersección pues

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c. \quad (1.145)$$

En definitiva, se trata de un álgebra y la demostración concluye aquí. ■

Un álgebra no es más que un anillo con unidad $E = \Omega$.

Teorema 1.3.8 (Segunda definición equivalente de álgebra) *Sea \mathcal{A} una clase de partes del espacio Ω . Son equivalentes:*

1. *La clase \mathcal{A} es un álgebra.*
2. *La clase \mathcal{A} es un anillo con unidad $E = \Omega$.*

Prueba. Supongamos que la clase \mathcal{A} es un álgebra. En ese caso, de acuerdo con la definición 1.3.5 contiene al espacio Ω , es cerrada para la intersección y para el paso al complementario. Por otro lado, de acuerdo con el teorema 1.3.7 es cerrada para la unión. Si probamos que es cerrada para la diferencia, entonces de acuerdo con el teorema 1.3.3, es un anillo. Sean A y B dos conjuntos de la clase \mathcal{A} . Se tiene que

$$A - B = A \cap B^c \quad (1.146)$$

y esto prueba que es cerrada para la diferencia, luego es un anillo donde Ω es unidad. Recíprocamente, si \mathcal{A} es un anillo con unidad $E = \Omega$, entonces es un π -sistema y además

$$A^c = \Omega - A \in \mathcal{A}, \text{ para todo } A \in \mathcal{A}. \quad (1.147)$$

Es decir, se trata de un álgebra. Esto termina nuestra demostración ■

Para acabar, damos otra caracterización de las álgebras de conjuntos.

Teorema 1.3.9 (Tercera definición equivalente de álgebra) *Sea \mathcal{A} una clase de partes del espacio Ω . Son equivalentes:*

1. *La clase \mathcal{A} es un álgebra.*
2. *La clase \mathcal{A} es no vacía y cerrada para la unión finita, la intersección finita, la diferencia y el paso al complementario.*

Prueba. Supongamos que \mathcal{A} es un álgebra. Entonces es no vacía y cerrada para la unión finita, la intersección finita y la diferencia ya que se trata de un anillo (ver el teorema 1.3.8). Como contiene al espacio Ω será también cerrada para el paso al complementario puesto que $A^c = \Omega - A$. Esto significa que 1 implica 2. Recíprocamente, toda clase \mathcal{A} no vacía y cerrada para las operaciones de unión finita, intersección finita, diferencia y paso al complementario es un π -sistema que contiene al espacio Ω . En efecto, si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup A^c = \Omega \in \mathcal{A}$. Hemos probado que 2 implica 1 y aquí acaba nuestra demostración. ■

La estructura de álgebra es la más completa en cuanto a operaciones de conjunto finitas. Pero, ¿qué hay de las operaciones no finitas como las uniones e intersecciones numerables? Para responder a esta pregunta, consideramos las llamadas σ -estructuras.

Definición 1.3.6 (σ -anillo) Una clase \mathfrak{D} de partes de Ω es un σ -anillo (o σ -anillo sobre Ω) si verifica:

1. La clase \mathfrak{D} es un anillo.
2. La clase \mathfrak{D} es cerrada para la unión numerable. Es decir, si (A_n) es una sucesión de elementos de \mathfrak{D} , se cumple que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{D}$.

Comentario 1.3.4 Cuando una clase \mathfrak{C} contiene al vacío y es cerrada para la unión numerable también es cerrada para la unión finita. Probaremos esta afirmación. Sea $(A_j)_{j \in \{1, 2, \dots, m\}}$ una familia finita de elementos de \mathfrak{C} . La familia

$$X_j = \begin{cases} A_j & \text{para } j = 1, 2, \dots, m \\ \emptyset & \text{para } j = m+1, m+2, \dots \end{cases} \quad (1.148)$$

es una familia numerable de elementos de \mathfrak{C} que verifica

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j = \bigcup_{j=1}^m A_j. \quad (1.149)$$

De esa manera, si toda unión numerable pertenece a la clase \mathfrak{C} , es evidente que la unión de los elementos de toda familia finita también pertenece a dicha clase.

Este resultado es aplicable a los σ -anillos puesto que al ser anillos contienen al vacío (ya que también son semianillos) y son cerrados para la unión numerable.

Los σ -anillos son cerrados para la intersección numerable.

Teorema 1.3.10 (Clausura de un σ -anillo para la intersección numerable)

Todo σ -anillo \mathfrak{D} es cerrado para la intersección numerable. Esto es, si (A_n) es una sucesión de elementos de \mathfrak{D} , su intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ pertenece a \mathfrak{D} .

Prueba. Es suficiente expresar la intersección numerable usando las operaciones de unión y diferencia. En efecto,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i - A_j) \quad (1.150)$$

Para justificar esta expresión partimos del caso finito con $n = 2$. Es decir, escribimos la intersección de dos conjuntos A_1 y A_2 , utilizando la unión y la diferencia (ver figura 1.20):

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cup A_2 - ((A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_1)) \quad (1.151)$$

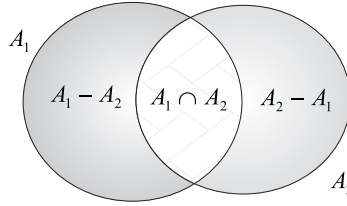


Figura 1.20: Intersección de A_1 y A_2 mediante unión y diferencia.

Para el caso $n = 3$ resulta más complicado, pero sigue la misma pauta:

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 \cap A_3 &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 - ((A_1 - A_2) \cup (A_1 - A_3) \cup (A_2 - A_1) \cup \\ &\quad \cup (A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_1) \cup (A_3 - A_2)). \end{aligned} \quad (1.152)$$

Observamos que la intersección de tres conjuntos es igual a la unión de estos tres conjuntos menos la unión de todas las diferencias que se puedan hacer dos a dos, importando el orden y sin repetir conjunto en el minuendo y sustraendo. Generalizando esta expresión llegamos a 1.150 y el teorema queda demostrado. ■

Una consecuencia inmediata del cierre por uniones e intersecciones numerables es que en todo σ -anillo *el paso al límite de sucesiones monótonas también es un proceso cerrado*. Es decir, si (A_n) es una sucesión monótona creciente de conjuntos del σ -anillo \mathfrak{D} , tal que $A_n \uparrow A$, entonces A pertenece a \mathfrak{D} y si (B_n) es una sucesión monótona decreciente de conjuntos de \mathfrak{D} , tal que

$B_n \downarrow B$, entonces B también pertenece a \mathfrak{D} . Esta propiedad de cierre por paso al límite no es exclusiva de los σ -anillos. Aquellas clases que la poseen se llaman clases monótonas.

Definición 1.3.7 (Clase monótona) *Una clase, no vacía, \mathfrak{M} de partes de Ω es una clase monótona (clase monótona sobre Ω) si para cada sucesión monótona de conjuntos de \mathfrak{M} , su límite también es un conjunto de \mathfrak{M} .*

De acuerdo con esta definición, los σ -anillos son clases monótonas. Es más, podemos probar que hay una mayor relación entre estos conceptos.

Teorema 1.3.11 (Definición equivalente de σ -anillo) *Sea \mathfrak{D} una clase no vacía de partes de Ω . Son equivalentes:*

1. La clase \mathfrak{D} es un σ -anillo.
2. La clase \mathfrak{D} es anillo y clase monótona.

Prueba. Es claro que 1 implica 2, puesto que todo σ -anillo es un anillo y cerrado para las uniones e intersecciones numerables. Veamos el recíproco. Supongamos que \mathfrak{D} es anillo y clase monótona y que (A_n) es una sucesión de elementos de \mathfrak{D} . Formamos la sucesión auxiliar

$$C_n = \bigcup_{i=1}^n A_i. \quad (1.153)$$

Esta sucesión es creciente y su límite coincide con la unión de los conjuntos de la sucesión (A_n)

$$\lim C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \quad (1.154)$$

Como \mathfrak{D} es una clase monótona, este límite pertenece a \mathfrak{D} y, en consecuencia, el anillo \mathfrak{D} es cerrado para las uniones numerables. Esto significa que 2 implica 1 y aquí termina nuestra demostración. ■

Definición 1.3.8 (σ -álgebra) *Una clase \mathcal{A} de partes de Ω es una σ -álgebra (o σ -álgebra sobre Ω) si verifica:*

1. La clase \mathcal{A} es un álgebra.
2. La clase \mathcal{A} es cerrada para la unión numerable.

Utilizando el mismo razonamiento que para los σ -anillos, se demuestra que toda σ -álgebra es cerrada para la intersección numerable.

Teorema 1.3.12 (Primera definición equivalente de σ -álgebra) *Sea \mathcal{A} una clase no vacía de partes de Ω . Son equivalentes:*

1. *La clase \mathcal{A} es una σ -álgebra.*
2. *La clase \mathcal{A} es álgebra y clase monótona.*

Prueba. La demostración es análoga a la del teorema 1.3.11 y se deja a cargo del lector. ■

Comentario 1.3.5 *Evidentemente, toda σ -álgebra no es más que un σ -anillo con unidad $E = \Omega$. Para probar esto basta utilizar la segunda definición equivalente de álgebra (ver el teorema 1.3.8). Además, toda σ -álgebra es cerrada para la unión e intersección numerable y, de acuerdo con el comentario 1.3.4 será cerrada para la unión finita.*

Una estructura relacionada con la de σ -álgebra es la estructura de λ -sistema, también llamada segunda estructura de Dynkin.

Definición 1.3.9 (λ -sistema) *Una clase \mathfrak{L} , no vacía, de partes de Ω se llama λ -sistema (λ -sistema sobre Ω) si cumple las siguientes condiciones:*

1. *El espacio Ω y el vacío pertenecen a \mathfrak{L} .*
2. *Para todo $A, B \in \mathfrak{L}$, la diferencia $A - B$ también pertenece a \mathfrak{L} .*
3. *La clase \mathfrak{L} es cerrada para el paso al límite de sucesiones crecientes.*

Es claro que toda σ -álgebra es un λ -sistema. Sin embargo, no todo λ -sistema es una σ -álgebra. Es necesario que dicho λ -sistema sea además cerrado para la intersección (es decir un π -sistema).

Teorema 1.3.13 (σ -álgebras y estructuras de Dynkin) *Sea \mathfrak{L} una clase de subconjuntos de Ω . Son equivalentes:*

1. *La clase \mathfrak{L} es un λ -sistema y un π -sistema.*
2. *La clase \mathfrak{L} es una σ -álgebra.*

Prueba. Probamos que 1 implica 2. En efecto, supongamos que \mathfrak{L} es un π -sistema y un λ -sistema. Entonces, por definición de π -sistema, dicha clase es cerrada para la intersección y por definición de λ -sistema es $\Omega \in \mathfrak{L}$ y dado $A \in \mathfrak{L}$ es $A^c = \Omega - A \in \mathfrak{L}$. En definitiva, hemos probado que \mathfrak{L} es un álgebra. Sea ahora (A_n) una sucesión de elementos de \mathfrak{L} . Podemos utilizar de nuevo la sucesión auxiliar (C_n) definida por 1.153. Esta sucesión es creciente y tiene la misma unión que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, por lo que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathfrak{L}. \quad (1.155)$$

Por tanto, \mathfrak{L} es un álgebra cerrada para la unión numerable, es decir, una σ -álgebra. El recíproco es trivial. La demostración termina en este punto. ■

Una *tribu* de conjuntos de Ω es una clase \mathfrak{F} , no vacía, de subconjuntos de Ω cerrada para la unión numerable y el paso al complementario. Se comprueba con facilidad que estas condiciones equivalen a la definición de σ -álgebra.

Teorema 1.3.14 (Segunda definición equivalente de σ -álgebra) Sea \mathfrak{F} una clase no vacía de partes de Ω . Son equivalentes:

1. La clase \mathfrak{F} es una σ -álgebra.
2. La clase \mathfrak{F} es una tribu de conjuntos.

Prueba. Supongamos que \mathfrak{F} es una σ -álgebra. Esto significa, en virtud de la definición 1.3.5, que es no vacía (ya que al ser álgebra contiene al espacio Ω) y cerrada para el paso al complementario y la unión numerable. En definitiva, se trata de una tribu de conjuntos. Esto prueba que 1 implica 2. Para probar el recíproco es suficiente demostrar que \mathfrak{F} contiene al espacio Ω y es un π -sistema (como, por definición, toda tribu es cerrada para el paso al complementario, estas dos condiciones que nos faltan aseguran que se trata de un álgebra). Así es, ya que toda tribu de conjuntos es no vacía y hallamos al menos una parte A del espacio Ω que pertenece a \mathfrak{F} . Luego se verifica que $\Omega = A \cup A^c \in \mathfrak{F}$ y de aquí $\Omega^c = \emptyset \in \mathfrak{F}$. Sea $(A_j)_{j \in \{1, 2, \dots, m\}}$ una sucesión finita de elementos de \mathfrak{F} . Definimos la sucesión infinita (Y_j) en \mathfrak{F} mediante

$$Y_j = \begin{cases} A_j^c & \text{para } j = 1, 2, \dots, m \\ \emptyset & \text{para } j = m+1, m+2, \dots \end{cases} \quad (1.156)$$

Entonces, de la clausura de \mathfrak{F} para la unión numerable y el paso al complementario y de la igualdad

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j \right)^c = \left(\bigcup_{j=1}^m A_j^c \right)^c = \bigcap_{j=1}^m A_j \quad (1.157)$$

se concluye que \mathfrak{F} es cerrada para la intersección finita (es decir, es un π -sistema). Esto prueba que 2 implica 1 y aquí acaba nuestra demostración. ■

Teorema 1.3.15 (Tercera definición equivalente de σ -álgebra) *Sea \mathcal{A} una clase no vacía de partes de Ω . Son equivalentes:*

1. *La clase \mathcal{A} es una σ -álgebra.*
2. *La clase \mathcal{A} es no vacía y cerrada para la unión e intersección numerables y para el paso al complementario.*

Prueba. La demostración es sencilla y se deja a cargo del lector. ■

Toda clase \mathfrak{C} que posee la estructura de σ -álgebra también posee el resto de estructuras. En efecto, se trata también de un σ -anillo (ver comentario 1.3.5), de un álgebra (ver la definición 1.3.8) y de una clase monótona (ver el teorema 1.3.12). Ahora bien, todo σ -anillo es un anillo (ver la definición 1.3.6), todo anillo un semianillo (ver el corolario 1.3.4) y todo semianillo es un π -sistema (ver la definición 1.3.1).

1.4 Clases engendradas

En muchas ocasiones disponemos de una clase de subconjuntos que no posee una estructura definida. Esto no es un obstáculo insalvable pues podemos demostrar que siempre existe otra clase que incluye a la de partida y que posee la estructura requerida.

Teorema 1.4.1 (Estructuras incluyendo a una clase) *Sea \mathfrak{C} una clase, no vacía, de subconjuntos de Ω . Afirmamos que siempre existe al menos una σ -álgebra (respectivamente π -sistema, semianillo, anillo, álgebra, σ -anillo, clase monótona) que contiene a \mathfrak{C} .*

Prueba. Toda clase \mathfrak{C} de partes de Ω es un subconjunto de $\wp(\Omega)$ y dicho conjunto es una σ -álgebra (y como hemos mencionado en el último párrafo de la sección anterior, es también un semianillo, un anillo, un álgebra, un σ -anillo y una clase monótona). En efecto, es no vacío y cerrado para la unión numerable y el paso al complementario. Esto termina nuestra demostración. ■

Hay una importante diferencia entre la estructura de semianillo y el resto de estructuras mencionadas en el teorema 1.4.1. En los semianillos se exige una condición adicional a la clausura para ciertas operaciones (ver condición 3 de la definición 1.3.2). Por ello la intersección de varios semianillos sobre Ω no es necesariamente un semianillo. Sin embargo, para el resto de estructuras sobre Ω mencionadas, su intersección es una estructura del mismo tipo.

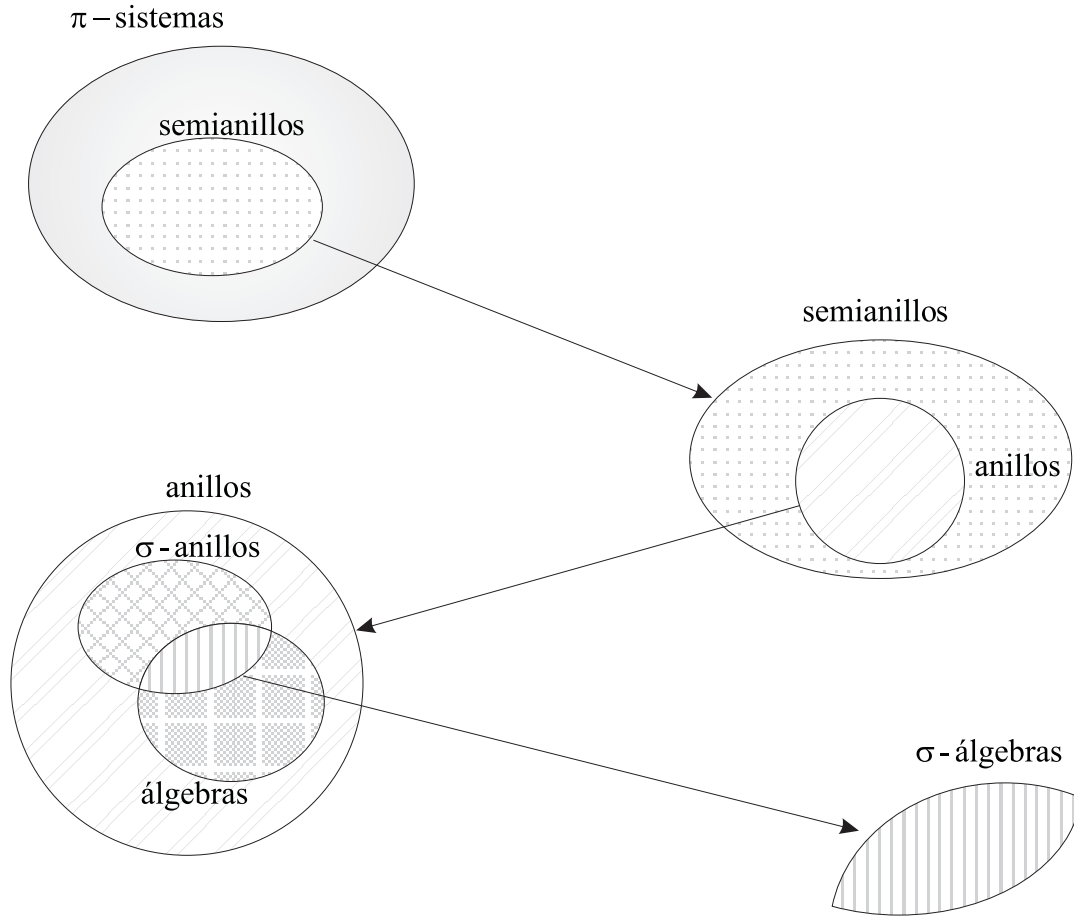


Figura 1.21: Relaciones entre las diferentes estructuras de conjuntos.

Teorema 1.4.2 (Clausura de estructuras para la intersección) Sea $(\mathfrak{R}_i)_{i \in I}$ una familia de π -sistemas sobre Ω (respectivamente, anillos, álgebras, σ -anillos, clases monótonas o σ -álgebras). Su intersección

$$\bigcap_{i \in I} \mathfrak{R}_i \quad (1.158)$$

es también un π -sistema sobre Ω (respectivamente anillo, álgebra, σ -anillo, clase monótona o σ -álgebra).

Prueba. En todas las estructuras mencionadas se ha exigido el cierre para ciertas operaciones de conjunto (finitas o numerables). De esta manera, si cada \mathfrak{R}_i es cerrada para cierta operación finita \perp y tomamos A y B pertenecientes a $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{R}_i$, se sigue que A y B pertenecen a cada \mathfrak{R}_i y por la clausura

de esta clase para dicha operación, $A \perp B$ también pertenece a cada \mathfrak{R}_i y, por tanto, pertenece a la intersección $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{R}_i$. El razonamiento es análogo para las operaciones numerables. Esto termina la demostración. ■

Ya hemos visto en el teorema 1.4.1 que para una clase dada \mathfrak{C} siempre podemos encontrar una clase que la contenga y posea alguna de las estructuras mencionadas en la sección 1.3. Sin embargo, esto es insuficiente por demasiado general. El teorema 1.4.2 nos permite afinar un poco más pues como corolario asegura la existencia de una clase *mínima* que contiene a la clase dada y posee una estructura de π -sistema, anillo, álgebra, σ -anillo, clases monótona o σ -álgebra.

Corolario 1.4.3 (Clase engendrada) *Sea \mathfrak{C} una clase de partes de Ω . Existe un π -sistema (respectivamente anillo, álgebra, σ -anillo, clase monótona o σ -álgebra) que contiene \mathfrak{C} y es el mínimo en sentido inclusivo con tal estructura.*

Prueba. Sea $(\mathfrak{R}_i)_{i \in I}$ la familia de las clases que tienen la estructura de π -sistema (respectivamente anillo, álgebra, σ -anillo, clase monótona o σ -álgebra) y contienen a \mathfrak{C} . Esta familia es no vacía ya que $\wp(\Omega)$ es uno de sus elementos (ver el teorema 1.4.1). La intersección $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{R}_i$ es también un π -sistema (respectivamente anillo, álgebra, σ -anillo, clase monótona o σ -álgebra) y cualquier π -sistema (respectivamente anillo, álgebra, σ -anillo, clase monótona o σ -álgebra) que contenga a \mathfrak{C} necesariamente incluye a dicha intersección. Esto prueba el colario. ■

A la clase mínima que contiene a \mathfrak{C} y posee la estructura requerida se le llama π -sistema (respectivamente anillo, álgebra, σ -anillo, clase monótona o σ -álgebra) *generada o engendrada* por \mathfrak{C} . Es claro que tal estructura generada es única. En los párrafos siguientes estudiamos la forma de estas clases generadas para ciertos casos particulares.

Teorema 1.4.4 (Anillo generado por un semianillo) *Sea \mathfrak{S} un semianillo sobre Ω . El anillo engendrado por \mathfrak{S} es la clase de las uniones finitas y disjuntas de elementos de \mathfrak{S} .*

Prueba. Sea \mathfrak{R} la clase de las uniones finitas y disjuntas de elementos del semianillo \mathfrak{S} . Es evidente que el semianillo está incluido en \mathfrak{R} . Si \mathfrak{A} es otro anillo que contiene a \mathfrak{S} , entonces ha de contener a todas las uniones finitas de los elementos de \mathfrak{S} (ver el teorema 1.3.3) y, por tanto, contiene a la clase \mathfrak{R} . Si probamos que \mathfrak{R} es un anillo, entonces es el anillo mínimo, en sentido inclusivo, que contiene a \mathfrak{S} . Para hacer esta prueba usamos la segunda

definición equivalente de anillo (ver teorema 1.3.6). En primer lugar, sean A y B dos elementos de \mathfrak{A} . Por definición,

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^m B_j, \quad (1.159)$$

donde los A_i y B_j son elementos del semianillo \mathfrak{S} y disjuntos dos a dos (es decir, $A_i \cap A_k = \emptyset$, para todo $i \neq k$ y $B_j \cap B_r = \emptyset$, para todo $j \neq r$). La unión de A y B es el conjunto

$$A \cup B = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m B_j \right). \quad (1.160)$$

Evidentemente, $A \cup B$ es unión finita de disjuntos del semianillo \mathfrak{S} . Veamos ahora la diferencia. Como para $U, V, W \subset \Omega$, se verifica la igualdad

$$(U \cup V) - W = (U - W) \cup (V - W), \quad (1.161)$$

Resulta que

$$A - B = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) - \left(\bigcup_{j=1}^m B_j \right) = \bigcup_{i=1}^n \left(A_i - \left(\bigcup_{j=1}^m B_j \right) \right). \quad (1.162)$$

También se verifica la igualdad

$$U - (V \cup W) = (U - V) \cap (U - W) \quad (1.163)$$

lo que nos permite poner 1.162 como

$$A - B = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) - \left(\bigcup_{j=1}^m B_j \right) = \bigcup_{i=1}^n \left(A_i - \left(\bigcup_{j=1}^m B_j \right) \right) = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^m (A_i - B_j) \right). \quad (1.164)$$

Los elementos $A_i - B_j$ se pueden expresar como unión finita y disjunta de elementos del semianillo \mathfrak{S} puesto que todos los A_i y los B_j pertenecen a dicho anillo. Así tenemos

$$A_i - B_j = \bigcup_{s_{ij}=1}^{r_{ij}} H_{s_{ij}}^{ij}, \text{ donde } H_{s_{ij}}^{ij} \in \mathfrak{S} \text{ y } H_{s_{ij}}^{ij} \cap H_{s_{rk}}^{rk} = \emptyset, \text{ para } (i, j) \neq (r, k) \quad (1.165)$$

Esto obliga a escribir 1.164 como

$$A - B = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^m (A_i - B_j) \right) = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^m \left(\bigcup_{s_{ij}=1}^{r_{ij}} H_{s_{ij}}^{ij} \right) \right). \quad (1.166)$$

Finalmente, de la igualdad

$$\begin{aligned} \bigcap_{j=1}^m \left(\bigcup_{s_{ij}=1}^{r_{ij}} H_k^{ij} \right) &= \left(\bigcup_{s_{i1}=1}^{r_{i1}} H_k^{i1} \right) \cap \left(\bigcup_{s_{i2}=1}^{r_{i2}} H_k^{i2} \right) \cap \dots \cap \left(\bigcup_{s_{im}=1}^{r_{im}} H_k^{im} \right) = \\ &= \bigcup_{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}}^{r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}} (H_{s_{i1}}^{i1} \cap H_{s_{i2}}^{i2} \cap \dots \cap H_{s_{im}}^{im}), \end{aligned} \quad (1.167)$$

se llega a la expresión

$$A-B = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^m \left(\bigcup_{s_{ij}=1}^{r_{ij}} H_{s_{ij}}^{ij} \right) \right) = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcup_{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}}^{r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}} (H_{s_{i1}}^{i1} \cap H_{s_{i2}}^{i2} \cap \dots \cap H_{s_{im}}^{im}) \right). \quad (1.168)$$

Como los $H_{s_{ij}}^{ij}$ son elementos de \mathfrak{S} , su intersección $D_i = H_{s_{i1}}^{i1} \cap H_{s_{i2}}^{i2} \cap \dots \cap H_{s_{im}}^{im}$ pertenece también a \mathfrak{S} , quedando

$$A-B = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^m \left(\bigcup_{s_{ij}=1}^{r_{ij}} H_{s_{ij}}^{ij} \right) \right) = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcup_{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}}^{r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}} (H_{s_{i1}}^{i1} \cap H_{s_{i2}}^{i2} \cap \dots \cap H_{s_{im}}^{im}) \right) = \bigcup_{i=1}^n D_i. \quad (1.169)$$

Por construcción, los conjuntos D_i son disjuntos dos a dos. Esto significa que la diferencia $A - B$ es unión finita de disjuntos del semianillo \mathfrak{S} por lo que pertenece a \mathfrak{R} . Hemos probado que \mathfrak{R} es no vacía y cerrada para la intersección finita y la diferencia, luego es un anillo. Esto termina nuestra demostración. ■

Ejemplo 1.4.1 Sea \mathfrak{S} el semianillo del ejemplo 1.3.2:

$$\mathfrak{S} = \{[a, b] \mid -\infty < a \leq b < +\infty\}.$$

El anillo generado por \mathfrak{S} consiste en la unión finita disjunta de intervalos acotados semiabiertos por la izquierda. Así pues, el conjunto $]0, 1] \cup]2, 3]$ es un elemento de dicho anillo.

Sabemos que un álgebra es un anillo con unidad $E = \Omega$ (ver el teorema 1.3.8). Por tanto, si el espacio Ω pertenece a un semianillo \mathfrak{S} , entonces el anillo engendrado por este semianillo es un álgebra pues contiene al espacio. Análogamente, si Ω es unión finita de elementos de \mathfrak{S} , también será un álgebra el anillo generado por \mathfrak{S} , pues ya hemos visto que tal anillo contiene a los elementos del semianillo. En general, el espacio Ω no tiene por qué pertenecer al semianillo o ser unión finita disjunta de sus elementos. Esta circunstancia obliga a dar caracterizaciones más generales del álgebra generada por una clase dada.

Ejemplo 1.4.2 *El anillo del ejemplo 1.4.1 no tiene al espacio $\Omega = \mathbb{R}$ como uno de sus elementos. Tampoco es posible que la unión finita de intervalos de ese tipo dé lugar a toda la recta real. Observamos que no se trata de un álgebra pues no contiene a los complementarios de todos sus elementos. En particular, para $A =]0, 1]$ es $A^c =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$ y éste no es un intervalo acotado.*

Teorema 1.4.5 (Álgebra engendrada por una clase) *Sea \mathfrak{C} una clase de partes de Ω . Sean las clases de conjuntos*

$$\mathfrak{C}_1 = \{A \in \wp(\Omega) / A = \Omega, A \in \mathfrak{C} \text{ o } A^c \in \mathfrak{C}\}, \quad (1.170)$$

$$\mathfrak{C}_2 = \{B \in \wp(\Omega) / B \text{ intersección finita de los elementos de } \mathfrak{C}_1\}, \quad (1.171)$$

$$\mathfrak{C}_3 = \{C \in \wp(\Omega) / C \text{ unión finita de elementos disjuntos de } \mathfrak{C}_2\}. \quad (1.172)$$

Afirmamos que \mathfrak{C}_3 es el álgebra engendrada por \mathfrak{C} .

Prueba. (****completar esta demostración****) ■

Los σ -anillos y las σ -álgebras son estructuras muy complicadas de generar en un número finito de etapas. Por ello, recurrimos a caracterizaciones que nos permiten comprobar que una determinada clase es la σ -álgebra generada por otra (generalmente esa otra tiene una estructura dada). El siguiente teorema nos muestra la coincidencia de la σ -álgebra y la clase monótona generadas por un álgebra.

Teorema 1.4.6 (Teorema de las clases monótonas para álgebras) *Sea \mathcal{A} un álgebra de partes de Ω . Afirmamos que la σ -álgebra generada por \mathcal{A} y la clase monótona engendrada por \mathcal{A} coinciden.*

Prueba. Sean $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ y $\sigma(\mathcal{A})$ la clase monótona y la σ -álgebra, respectivamente, generadas por \mathcal{A} . Como $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A})$ y toda σ -álgebra es clase monótona (ver el teorema 1.3.12) se concluye que $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$. En efecto, $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ es la “mínima” clase monótona que incluye a la clase \mathcal{A} , luego está incluida en cualquier otra clase monótona que incluya a la clase \mathcal{A} .

Nos falta comprobar que se da la inclusión recíproca $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Para ello, es suficiente probar que la clase $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ es una σ -álgebra, pues entonces contiene a la σ -álgebra mínima $\sigma(\mathcal{A})$ que incluye a la clase \mathcal{A} . Ahora bien, como $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ es una clase monótona sólo necesita ser un álgebra para demostrar que se trata de una σ -álgebra (de nuevo esto es consecuencia del teorema 1.3.12). El procedimiento que vamos a usar para probar esto se suele llamar el “método de los conjuntos buenos”. Consiste en considerar una clase

de conjuntos que cumplan las condiciones buscadas y comprobar que dicha clase coincide con la de partida.

Como \mathcal{A} es un álgebra, contiene al espacio Ω (ver la definición 1.3.5). Así que $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ también contiene al espacio Ω . Si $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ es cerrada para la diferencia y la unión finita entonces es un anillo con unidad $E = \Omega$ y se trata de un álgebra. Esto nos permite definir la clase de los conjuntos “buenos” mediante

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \mid A - B, B - A, A \cup B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \text{ para todo } B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})\}. \quad (1.173)$$

La clase \mathcal{G} es una clase monótona incluida en $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$. En efecto, sea (A_n) una sucesión creciente de elementos de \mathcal{G} . Las sucesiones $(A_n - B)$, $(A_n \cup B)$ son también crecientes para todo $B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ y están formada por elementos de dicha clase monótona. Por ello

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - B) \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \quad (1.174)$$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B) \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}). \quad (1.175)$$

La sucesión $(B - A_n)$ es decreciente y también está formada por elementos de \mathcal{G} . Se tiene que

$$B - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B - A_n) \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}). \quad (1.176)$$

Esto significa que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pertenece a \mathcal{G} y ésta es cerrada para el paso al límite de sucesiones crecientes. Análogamente, se prueba que \mathcal{G} es cerrada para el paso al límite de sucesiones decrecientes de sus elementos.

Como \mathcal{G} es clase monótona, basta probar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ para que se dé la inclusión $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{G}$. Como la inclusión recíproca $\mathcal{G} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ es evidente, esto nos lleva a la igualdad $\mathcal{G} = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Tal igualdad significa que la clase monótona es un álgebra pues entonces todos sus conjuntos son “buenos”.

Sea $A \in \mathcal{A}$. Definimos el conjunto

$$\mathcal{G}_A = \{B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \mid A - B, B - A, A \cup B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})\}. \quad (1.177)$$

Este conjunto es una parte de $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ y se diferencia de \mathcal{G} en que se toma un conjunto fijo A . Es fácil comprobar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}_A$. A continuación, con una argumentación similar a la empleada para \mathcal{G} se prueba que \mathcal{G}_A es una clase monótona. Pero si es clase monótona e incluye al álgebra \mathcal{A} se da también la

inclusión $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{G}_A$. Así que $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{G}_A$. Esta igualdad quiere decir que cada conjunto A del álgebra \mathcal{A} verifica las condiciones para estar en \mathcal{G} y es cierta la inclusión $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$. Esto prueba que $\mathcal{G} = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ y la clase monótona es un álgebra por lo que se trata de una σ -álgebra y se cumple $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ y la igualdad $\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Esto termina nuestra demostración. ■

Existe un teorema similar para los anillos.

Teorema 1.4.7 (Teorema de las clases monótonas para anillos) *Sea \mathfrak{R} un anillo sobre Ω . La clase monótona engendada por \mathfrak{R} y el σ -anillo engendrado por \mathfrak{R} coinciden.*

Prueba. La demostración es análoga a la del teorema 1.4.6 y se deja a cargo del lector ■

Las contraímagenes (o imágenes inversas) de las aplicaciones conservan las operaciones conjuntistas y las relaciones de inclusión. Esto es útil a la hora de “trasladar” estructuras de un conjunto a otro mediante una aplicación.

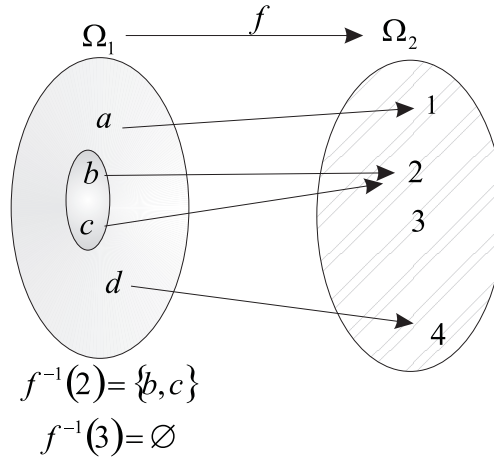


Figura 1.22: Imagen inversa o contraímagen de un elemento.

Teorema 1.4.8 (Conservación de estructuras por contraímagenes) *Sea $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una aplicación y sea \mathfrak{C} una clase de partes de Ω_2 con estructura de π -sistema (respectivamente anillo, álgebra, σ -anillo, clase monótona o σ -álgebra), entonces la clase de sus contraímagenes*

$$f^{-1}(\mathfrak{C}) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathfrak{C}\} \quad (1.178)$$

es también un π -sistema (respectivamente anillo, álgebra, σ -anillo, clase monótona o σ -álgebra).

Prueba. Supongamos que \mathfrak{C} es un π -sistema sobre Ω_2 y sean X e Y dos elementos de $f^{-1}(\mathfrak{C})$. Hallaremos entonces $A, B \in \mathfrak{C}$ tales que $X = f^{-1}(A)$ e $Y = f^{-1}(B)$. De esta manera,

$$X \cap Y = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B). \quad (1.179)$$

Como el conjunto $A \cap B$ pertenece a la clase \mathfrak{C} (no olvidemos que es cerrada para la intersección finita) se concluye que $X \cap Y \in f^{-1}(\mathfrak{C})$. Esto prueba que $f^{-1}(\mathfrak{C})$ es también un π -sistema.

Sea \mathfrak{C} un anillo sobre Ω_2 . En tal caso, \mathfrak{C} es un π -sistema cerrado para la diferencia simétrica. Empleando la misma argumentación que en el párrafo anterior, concluimos que $f^{-1}(\mathfrak{C})$ es un π -sistema. Sean X e Y dos elementos de $f^{-1}(\mathfrak{C})$. Entonces, $X = f^{-1}(A)$ e $Y = f^{-1}(B)$ para ciertos $A, B \in \mathfrak{C}$. Como sabemos que si $M \subset N$ es

$$f^{-1}(N - M) = f^{-1}(N) - f^{-1}(M), \quad (1.180)$$

resulta que la diferencia simétrica de X e Y es

$$\begin{aligned} X \triangle Y &= f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B) = (f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)) - (f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) = \\ &= f^{-1}(A \cup B) - f^{-1}(A \cap B). \end{aligned} \quad (1.181)$$

Como $A \cap B \subset A \cup B$ podemos aplicar 1.180 para obtener

$$X \triangle Y = f^{-1}((A \cup B) - (A \cap B)) = f^{-1}(A \triangle B) \quad (1.182)$$

Pero \mathfrak{C} es un anillo por lo que $A \triangle B$ pertenece a \mathfrak{C} y, en consecuencia, $X \triangle Y \in f^{-1}(\mathfrak{C})$. Hemos probado que $f^{-1}(\mathfrak{C})$ es un anillo. Las propiedades

$$f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1, \quad (1.183)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n), \quad (1.184)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \quad (1.185)$$

y un razonamiento análogo al empleado, permiten probar el resto del teorema. Esto termina nuestra demostración. ■

Otra consecuencia importante de la conservación de las operaciones conjuntistas en las contraímagenes es el siguiente teorema.

Teorema 1.4.9 Sea $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una aplicación y supongamos que \mathfrak{C} es una clase de partes de Ω_2 . Entonces, la clase de las contraímagenes de la σ -álgebra generada por \mathfrak{C} y σ -álgebra generada por la clase de las contraímagenes de \mathfrak{C} coinciden.

Prueba. Sea $f^{-1}(\sigma(\mathfrak{C}))$ la clase de las imágenes inversas de la σ -álgebra generada por \mathfrak{C} y sea $\sigma(f^{-1}(\mathfrak{C}))$ la σ -álgebra generada por $f^{-1}(\mathfrak{C})$. El teorema que queremos probar se expresa en la forma: $f^{-1}(\sigma(\mathfrak{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathfrak{C}))$. Como $f^{-1}(\sigma(\mathfrak{C}))$ es una σ -álgebra (ver el teorema 1.4.8) y se tiene que $\mathfrak{C} \subset \sigma(\mathfrak{C})$, podemos afirmar que

$$f^{-1}(\mathfrak{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathfrak{C})). \quad (1.186)$$

Esta relación nos lleva a la siguiente:

$$\sigma(f^{-1}(\mathfrak{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathfrak{C})),$$

puesto que $\sigma(f^{-1}(\mathfrak{C}))$ es la σ -álgebra mínima que contiene a $f^{-1}(\mathfrak{C})$ y cualquier otra σ -álgebra que contenga a $f^{-1}(\mathfrak{C})$ la incluye. Sólo nos resta probar la inclusión recíproca: $f^{-1}(\sigma(\mathfrak{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathfrak{C}))$. Para ello vamos a usar de nuevo el método de los “conjuntos buenos”. Sea

$$\mathfrak{F} = \{A \in \sigma(\mathfrak{C}) \mid f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathfrak{C}))\}. \quad (1.187)$$

Es decir, \mathfrak{F} es un subconjunto de $\sigma(\mathfrak{C})$ formado por los elementos de esta σ -álgebra sobre Ω_2 , tales que su imagen inversa está en la σ -álgebra sobre Ω_1 generada por $f^{-1}(\mathfrak{C})$ (\mathfrak{F} es el conjunto “bueno”). Si probamos que \mathfrak{F} es una σ -álgebra que contiene a \mathfrak{C} , entonces $\sigma(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{F}$ y será cierta la igualdad $\sigma(\mathfrak{C}) = \mathfrak{F}$, de donde $f^{-1}(\sigma(\mathfrak{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathfrak{C}))$. En efecto, como para cada $A \in \mathfrak{C}$ es $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\mathfrak{C}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathfrak{C}))$, se puede afirmar que $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$. También, como $\Omega_1 \in \sigma(f^{-1}(\mathfrak{C}))$ (el espacio es elemento de toda σ -álgebra sobre él), resulta

$$f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1 \in \sigma(f^{-1}(\mathfrak{C})), \quad (1.188)$$

y esto implica que $\Omega_2 \in \mathfrak{F}$. Sea $A \in \mathfrak{F}$, su complementario A^c también pertenece a \mathfrak{F} . Así es, ya que

$$f^{-1}(A^c) = f^{-1}(\Omega_2 - A) = f^{-1}(\Omega_2) - f^{-1}(A) = \Omega_1 - f^{-1}(A) = (f^{-1}(A))^c \quad (1.189)$$

y de aquí se sigue que $(f^{-1}(A))^c \in \sigma(\mathfrak{C})$. Consideremos ahora una sucesión (A_n) de elementos de \mathfrak{F} . Entonces, $f^{-1}(A_n) \in \sigma(f^{-1}(\mathfrak{C}))$ para todo n y de la igualdad

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \sigma(f^{-1}(\mathfrak{C})) \quad (1.190)$$

se concluye que $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in \mathfrak{F}$. Hemos probado que \mathfrak{F} es una σ -álgebra y esto termina nuestra demostración. ■

Una de las σ -álgebras más importantes es la llamada σ -álgebra de Borel.

Definición 1.4.1 (σ -álgebra de Borel) Sea (Ω, \mathfrak{T}) un espacio topológico. Se llama σ -álgebra de Borel asociada a la topología \mathfrak{T} a la σ -álgebra generada por los conjuntos de dicha topología (es decir, la engendrada por los abiertos). Se notará por $\mathfrak{B}(\Omega)$ y sus elementos se llamarán conjuntos de Borel o borelianos.

Ejemplo 1.4.3 Sea \mathfrak{T} la topología usual de la recta real. Sabemos que todo abierto de la recta real está formado por unión numerable disjunta de intervalos abiertos. La σ -álgebra de Borel asociada a esta topología es la engendrada por estos abiertos y se nota por \mathfrak{B} . De esta manera, el conjunto $A =]0, 1[$ es un boreliano.

Comentario 1.4.1 Probaremos que la σ -álgebra \mathfrak{B} está engendrada por cualquiera de las siguientes clases:

$$I_1 = \{]a, b[\mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}, \quad (1.191)$$

$$I_2 = \{]a, b] \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}, \quad (1.192)$$

$$I_3 = \{[a, b[\mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}, \quad (1.193)$$

$$I_4 = \{[a, b] \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}, \quad (1.194)$$

$$I_5 = \{]-\infty, b[\mid b \in \mathbb{R}\}, \quad (1.195)$$

$$I_6 = \{]a, +\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}, \quad (1.196)$$

$$I_7 = \{]-\infty, b] \mid b \in \mathbb{R}\}, \quad (1.197)$$

$$I_8 = \{[a, +\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}. \quad (1.198)$$

En efecto, es claro que la clase I_1 de los intervalos abiertos acotados está incluida en la topología usual de la recta real. Por tanto, la σ -álgebra generada por I_1 está incluida en \mathfrak{B} . En símbolos, $\sigma(I_1) \subset \mathfrak{B}$. Como todo abierto es unión numerable de intervalos abiertos disjuntos, los abiertos de la topología usual \mathfrak{T} están incluidos en $\sigma(I_1)$. Al ser \mathfrak{B} la “mínima” σ -álgebra que incluye a \mathfrak{T} , se tiene que $\mathfrak{B} \subset \sigma(I_1)$. La doble inclusión lleva a la igualdad $\sigma(I_1) = \mathfrak{B}$.

La clase I_2 está formada por intervalos acotados semiabiertos por la izquierda. Cada uno de estos intervalos puede ponerse como intersección numerable de intervalos abiertos:

$$]a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]a, b + \frac{1}{n} \right[. \quad (1.199)$$

Esto significa que la clase I_2 está incluida en \mathfrak{B} , por lo que la σ -álgebra generada por I_2 está incluida en \mathfrak{B} . En símbolos, $\sigma(I_2) \subset \mathfrak{B}$. Para probar la inclusión recíproca, observamos que todo intervalo abierto puede ponerse como unión numerable de intervalos acotados semiabiertos por la izquierda:

$$]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left] a, b - \frac{1}{n} \right]. \quad (1.200)$$

Luego todo abierto de \mathfrak{T} está incluido en $\sigma(I_2)$. Como \mathfrak{B} es la mínima σ -álgebra que incluye a los abiertos de la topología usual, se ha de dar la inclusión $\mathfrak{B} \subset \sigma(I_2)$. La doble inclusión implica la igualdad $\mathfrak{B} = \sigma(I_2)$.

De modo análogo al empleado para I_2 se prueba que $\mathfrak{B} = \sigma(I_3)$. Veamos ahora que $\mathfrak{B} = \sigma(I_4)$. En efecto, todo intervalo cerrado y acotado puede ponerse como intersección numerable de abiertos:

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right]. \quad (1.201)$$

Por tanto, la clase I_4 está incluida en la σ -álgebra \mathfrak{B} y de esta inclusión se sigue que $\sigma(I_4) \subset \mathfrak{B}$. También todo intervalo abierto acotado puede ponerse como unión numerable de cerrados y acotados:

$$]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right]. \quad (1.202)$$

Esta igualdad implica que $\mathfrak{T} \subset \sigma(I_4)$, de donde $\mathfrak{B} \subset \sigma(I_4)$.

Un intervalo abierto no acotado por la izquierda puede ponerse en la forma:

$$]-\infty, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]b - n, b[. \quad (1.203)$$

Así que $I_5 \subset \mathfrak{B}$ y de aquí $\sigma(I_5) \subset \mathfrak{B}$. Para probar la inclusión recíproca, observamos que todo intervalo semiabierto por la derecha $]a, b[, a < b$, puede obtenerse como:

$$]a, b[= (]-\infty, a[\cup (]-\infty, b[)^c)^c. \quad (1.204)$$

Como todo intervalo abierto acotado resulta de

$$]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b \right[\quad (1.205)$$

se sigue que todo intervalo abierto acotado $]a, b[$ pertenece a $\sigma(I_4)$. Por ello, todo abierto A de la topología usual también ha de pertenecer a $\sigma(I_4)$ y es

cierta la inclusión $\mathfrak{T} \subset \sigma(I_5)$, de donde también se da $\mathfrak{B} \subset \sigma(I_5)$. Dejamos al lector la tarea de comprobar que las clases I_6, I_7 e I_8 también generan la σ -álgebra de Borel.

Un resultado inmediato de las demostraciones anteriores es que todo intervalo de la recta real es un boreliano y también son borelianos los complementarios, uniones (finitas o numerables), intersecciones (finitas o numerables) y diferencias de intervalos. Ahora bien, no todo subconjunto de \mathbb{R} es un boreliano.

1.5 El caso $\Omega = \mathbb{R}$

Al comienzo de la sección 1.3 comentamos que las estructuras de conjuntos se toman con la idea de extender una medida desde una sencilla a otra más complicada. En lo que sigue, tomamos el caso de los números reales para mostrar de forma intuitiva las líneas generales que debe tener una extensión de este tipo.

La medida²⁰ a considerar es la *longitud*. En el caso de un intervalo acotado $I \subset \mathbb{R}$ de cualquier tipo (cerrado, abierto, semicerrado, etc.) y con extremos a y b , su longitud se define como la diferencia $b - a$. En símbolos:

$$|I| = b - a, \quad (1.206)$$

donde $|I|$ es la notación para la longitud del intervalo I .

Obsérvese que si el intervalo se reduce a un punto, entonces su longitud es cero.

Ejemplo 1.5.1 ¿Cuál es la longitud del intervalo $]-1, 0]$? Pues, de acuerdo con lo expuesto en el párrafo anterior, debe ser

$$|]-1, 0]| = 0 - (-1) = 1. \quad (1.207)$$

Valor que coincide con nuestra idea de longitud en la recta.

Ejemplo 1.5.2 Si aplicamos la definición de longitud al intervalo $[2, 2] = \{2\}$, obtenemos

$$|\{2\}| = 2 - 2 = 0. \quad (1.208)$$

Sabemos que la clase de todos los intervalos acotados \mathfrak{J} es un semianillo (ver ejemplo 1.3.3). Así que utilizando 1.206 tenemos definida una longitud para todos los elementos de \mathfrak{J} .

²⁰En el capítulo siguiente veremos que la longitud es una medida.

Una primera ampliación surge cuando consideramos las uniones disjuntas y finitas de intervalos. Tales uniones deben tener como longitud la suma de las longitudes de los intervalos que las componen. En símbolos, si $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$, con $I_k \cap I_r = \emptyset$, para todo $k \neq r$, entonces

$$|A| = \sum_{j=1}^n |I_j|. \quad (1.209)$$

De acuerdo con el teorema 1.4.4 el anillo generado por un semianillo consiste en la clase de las uniones finitas y disjuntas de elementos del semianillo. Nuestra ampliación de la medida de la longitud (1.209) parece, pues, aplicable al anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{J})$ generado por el semianillo \mathfrak{J} de los intervalos acotados. Sin embargo, hay una dificultad. Debemos probar que diferentes uniones disjuntas que dan lugar al mismo conjunto A del anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{J})$ también dan lugar al mismo valor para la longitud de A . Esta circunstancia queda demostrada en posteriores capítulos.

Una segunda ampliación del concepto de longitud se obtiene para el paso al límite de sucesiones de conjuntos del anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{J})$. En efecto, para toda sucesión (A_n) de elementos del anillo, tal que $\lim A_n = A$, resulta razonable definir:

$$\lim |A_n| = |A|. \quad (1.210)$$

Esta definición de longitud puede aplicarse a toda clase monótona que contenga al anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{J})$ puesto que, como ya hemos visto, tales clases monótonas son cerradas para el paso al límite de las sucesiones crecientes y decrecientes. Particularmente, puede aplicarse al σ -anillo generado por $\mathfrak{R}(\mathfrak{J})$, ya que todo σ -anillo es anillo y clase monótona (ver el teorema 1.3.11). Finalmente, como

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}]-n, n[, \quad (1.211)$$

resulta que este σ -anillo engendrado coincide con la σ -álgebra $\sigma(\mathfrak{R}(\mathfrak{J}))$ (ver el comentario 1.3.5). Por otro lado, sabemos que la σ -álgebra de Borel \mathfrak{B} en la recta real está generada por cualquier clase de intervalos acotados, por lo que \mathfrak{B} está incluida en toda σ -álgebra engendrada por \mathfrak{J} . Particularmente, como $\mathfrak{J} \subset \sigma(\mathfrak{R}(\mathfrak{J}))$ se sigue que $\mathfrak{B} \subset \sigma(\mathfrak{R}(\mathfrak{J}))$ y la extensión de la longitud parece aplicable a todos los borelianos de la recta.

1.6 El conjunto de Cantor

Para construir el conjunto de Cantor partimos del intervalo unidad $[0, 1]$ de la recta real. Dentro de dicho intervalo se halla la familia de intervalos definida

por

$$I_{k,n} = \left] \frac{3k-2}{3^n}, \frac{3k-1}{3^n} \right[, \text{ con } 1 \leq k \leq 3^{n-1}. \quad (1.212)$$

Es decir, dado n consideramos los intervalos de la forma $I_{k,n}$ con k comprendido entre 1 y 3^{n-1} . Por ejemplo para $n = 2$, tenemos

$$I_{1,2} = \left] \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2} \right[, I_{2,2} = \left] \frac{4}{3^2}, \frac{5}{3^2} \right[, I_{3,2} = \left] \frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2} \right[. \quad (1.213)$$

Tales intervalos se obtienen de la división del intervalo unidad en $3^2 = 9$ partes iguales (ver figura 1.23).

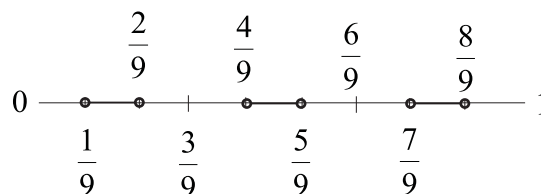


Figura 1.23: División del intervalo unidad en nueve partes iguales.

A continuación, para cada n , efectuamos la unión de los 3^{n-1} intervalos de la familia 1.212:

$$J_n = \bigcup_{k=1}^{3^{n-1}} I_{k,n}. \quad (1.214)$$

Por ejemplo, para $n = 2$, resulta

$$J_2 = \bigcup_{k=1}^3 I_{k,2} = I_{1,2} \cup I_{2,2} \cup I_{3,2}. \quad (1.215)$$

En la figura 1.23 tal unión puede observarse fácilmente. Ahora, unimos los J_n obtenidos en 1.214:

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n. \quad (1.216)$$

Finalmente, el conjunto de Cantor corresponde al complementario de J respecto de $[0, 1]$. Es decir,

$$C = [0, 1] - J. \quad (1.217)$$

El conjunto de Cantor es cerrado ya que su complementario respecto a $[0, 1]$ es J y éste es abierto por ser unión numerable de abiertos. Además, C está acotado por lo que será compacto.

El conjunto de Cantor es un boreliano ya que resulta de la diferencia de dos borelianos (concretamente J es boreliano por ser unión de abiertos).

Una forma alternativa de caracterizar al conjunto de Cantor pasa por la expresión en base 3 de los puntos del intervalo unidad $[0, 1]$. Sabemos que cada x de dicho intervalo puede ponerse en la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 3^{-n}, \text{ donde } x_n \in \{0, 1, 2\}. \quad (1.218)$$

Los puntos $x \in J$ se caracterizan porque en su desarrollo 1.218 los coeficientes x_n son necesariamente 1. Esto quiere decir que, para los puntos del conjunto de Cantor, hallamos un desarrollo 1.218 donde los x_n son 0 o 2. Por ejemplo, $\frac{2}{3} \in C$ ya que podemos escribir

$$\frac{2}{3} = 2 \cdot 3^{-1} + 0 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + \dots \quad (1.219)$$

También es $\frac{1}{3} \in C$ puesto que

$$\frac{1}{3} = 1 \cdot 3^{-1} + 0 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + \dots = 0 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + \dots, \quad (1.220)$$

y la segunda representación sólo contiene x_n iguales a 0 o a 2.

El conjunto de Cantor tiene el cardinal del continuo. Para probar esta afirmación, consideramos el desarrollo en base 2 de los puntos del intervalo $[0, 1]$, (prefiriendo para los casos donde tengamos más de una representación, la representación indefinida), es decir:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n}, \text{ donde } x_n \in \{0, 1\}. \quad (1.221)$$

La aplicación

$$f : [0, 1] \longrightarrow C, \quad (1.222)$$

definida por

$$f \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n 3^{-n}, \text{ siendo } y_n = 0 \text{ si } x_n = 0 \text{ e } y_n = 2 \text{ si } x_n = 1 \quad (1.223)$$

es inyectiva y aplica el intervalo $[0, 1]$ en $f([0, 1])$, el cual es un subconjunto propio de C . Esto significa, que C tiene un subconjunto propio ($f([0, 1])$) equipotente²¹ a $[0, 1]$ y, evidentemente, $[0, 1]$ tiene un subconjunto propio (C)

²¹Un conjunto A es equipotente a otro B o coordinable, si es posible hallar una biyección $f : A \longrightarrow B$.

equipotente a C . Aplicando el Teorema de Bernstein, se tiene entonces que el cardinal de C es el cardinal de $[0, 1]$. Como el intervalo unidad tiene el cardinal del continuo, también C tiene el cardinal del continuo.

El conjunto de Cantor no contiene a ningún intervalo abierto por lo que su interior es vacío. En efecto, si A es un abierto incluido en $[0, 1]$ con longitud $\delta > 0$, se tiene que para el entero positivo n tal que $\frac{2}{3^n} < \delta$, el abierto A corta a algún intervalo $I_{k,n}$ por lo que no puede estar contenido en C (ver figura 1.24).

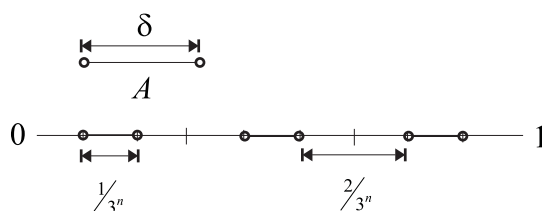


Figura 1.24: El abierto A contiene algún intervalo $I_{k,n}$.

Comentario 1.6.1 *El Teorema de Bernstein (o de Cantor-Bernstein) se enuncia de la siguiente manera:*

Sean A y B dos conjuntos arbitrarios. Si en A existe un subconjunto A_1 equipotente a B y en B existe un subconjunto B_1 equipotente a A , los conjuntos A y B son equipotentes.

1.7 Conjuntos producto

El producto cartesiano de dos conjuntos es un nuevo tipo de operación de conjunto que tiene importantes aplicaciones.

Definición 1.7.1 (Producto cartesiano) Sean A y B dos conjuntos. El conjunto de todos los pares ordenados (a, b) , donde $a \in A$ y $b \in B$ se llama producto cartesiano de A y B y se nota por $A \times B$.

Ejemplo 1.7.1 Sean $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{Z}$. El producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ está formado por todos los pares ordenados (x, k) , tales que x es real y k es entero. Así, $(\pi, 2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ pero $(2, \pi) \notin \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

Comentario 1.7.1 (Par ordenado) El concepto de par ordenado es el fundamento de la definición de producto cartesiano. Un par ordenado se obtiene

cuando en una pareja de elementos distinguimos uno (que llamamos primero) de otro (que llamamos segundo). Para establecer este concepto podemos utilizar la teoría de conjuntos. Así, diremos que un par ordenado (x, y) es el conjunto

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}. \quad (1.224)$$

Esta definición nos permite establecer la propiedad fundamental de los pares ordenados: dos pares ordenados (x, y) , (u, v) son iguales si y sólo si $x = u$ e $y = v$. El lector puede comprobar fácilmente este extremo.

A continuación exponemos algunas propiedades del producto cartesiano

Teorema 1.7.1 (Propiedades del producto cartesiano) Sean A, B, C y D conjuntos. Se tiene que:

1. El producto cartesiano $A \times B$ es vacío si y sólo si alguno de los conjuntos A o B es vacío.
2. Si el producto cartesiano $A \times B$ es no vacío, entonces $C \times D \subset A \times B$ equivale a $C \subset A$ y $D \subset B$.
3. El producto cartesiano es distributivo respecto a la unión por ambos lados. Es decir, $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ y $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
4. El producto cartesiano es distributivo respecto a la intersección por ambos lados. Es decir, $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ y $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
5. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
6. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$.
7. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.
8. $(A \times B) - (C \times D) = ((A - C) \times (B - D)) \cup ((A - C) \times (B \cap D)) \cup ((A \cap C) \times (B - D))$.
9. $(A \times B) - (C \times D) = ((A - C) \times B) \cup (C \times (B - D))$.

Prueba. La demostración es sencilla y se deja a cargo del lector. ■

Podemos generalizar por inducción el concepto de par ordenado.

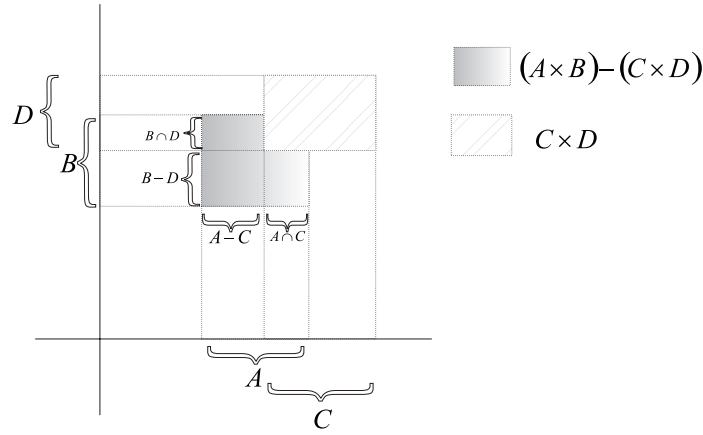


Figura 1.25: Ilustración de las propiedades 8 y 9 del teorema 1.7.1 para el caso de productos de intervalos.

Definición 1.7.2 (n -pla o n -tupla) Sean A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos. Una n -pla es un par ordenado cuyo primer elemento es la $(n-1)$ -pla $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ con $x_i \in A_i$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$ y cuyo segundo elemento es x_n con $x_n \in A_n$. Esto es

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = ((x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n). \quad (1.225)$$

Esta definición garantiza que dos n -plas $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)$ son iguales si y sólo si $x_i = y_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Además, nos permite generalizar también el producto cartesiano a un número finito de conjuntos.

Definición 1.7.3 (Producto cartesiano de un numero finito de conjuntos)

Sean A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos. El producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ es el conjunto de todas las n -plas (x_1, x_2, \dots, x_n) con $x_i \in A_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Ejemplo 1.7.2 Sea \mathbb{R} el conjunto de los números reales. Se define $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como el conjunto de todas las 3-plas (o ternas) (x_1, x_2, x_3) donde $x_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$. Abreviadamente, escribimos $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

El producto cartesiano de un número no finito de conjuntos es más complicado de establecer.

Definición 1.7.4 (Producto cartesiano de una familia de conjuntos)

Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos y sea $\bigcup_{i \in I} A_i$ la unión de los elementos

de dicha familia. Su producto cartesiano se designa por

$$\prod_{i \in I} A_i \quad (1.226)$$

y consiste en un conjunto cuyos elementos son las familias $(a_i)_{i \in I}$ obtenidas eligiendo un elemento a_i en cada A_i . Es decir, es el conjunto de pares (I, f) , donde f es una aplicación de I en $\bigcup_{i \in I} A_i$, tal que $f(i) \in A_i$ para cada $i \in I$. El valor $f(i)$ recibe el nombre de i -ésima coordenada de (I, f) .

Definición 1.7.5 (Notación potencial) Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos tal que $A_i = A$ para todo $i \in I$ (es decir, todos los A_i son iguales). El producto cartesiano $\prod_{i \in I} A_i$ se nota ahora mediante

$$A^I \quad (1.227)$$

y consiste en el conjunto cuyos elementos son las familias $(a_i)_{i \in I}$ tales que $a_i \in A$ para todo índice $i \in I$. Se trata, pues, del conjunto de pares (I, f) , donde f es una aplicación de I en A .

Ejemplo 1.7.3 Sea $\Omega = \mathbb{R}^2$ y sea $I = \{(p, q) \in \mathbb{Q}^2 / 0 < p < q\}$. Para cada (p, q) perteneciente a I sea el conjunto

$$A_{(p,q)} = [p, q] \times [0, 1]. \quad (1.228)$$

El producto cartesiano de la familia $(A_{(p,q)})_{(p,q) \in I}$ es el conjunto

$$\prod_{(p,q) \in I} A_{(p,q)} = \left\{ (a_{(p,q)})_{(p,q) \in I} / a_{(p,q)} \in A_{(p,q)} \text{ para cada } (p, q) \in I \right\}. \quad (1.229)$$

Así, la familia $((\frac{p+q}{2}, 1))_{(p,q) \in I}$ es un elemento de dicho producto cartesiano ya que $(\frac{p+q}{2}, 1) \in [p, q] \times [0, 1]$, para cada $(p, q) \in I$. Observe el lector que tal familia es, más precisamente, el par (I, f) con $f((p, q)) = (\frac{p+q}{2}, 1)$.

Ejemplo 1.7.4 Sea la familia $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}^+}$, donde $A_i = \mathbb{R}$ para todo entero positivo i . El producto cartesiano de esta familia es el conjunto

$$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^+} \quad (1.230)$$

y está formado por todas las aplicaciones $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir, se trata del conjunto de todas las sucesiones reales.

Definición 1.7.6 (Aplicación de conjunto) Una aplicación f se dice de conjunto si su dominio es una clase de conjuntos.

Ejemplo 1.7.5 Sea la clase $\mathfrak{A} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots\}$. La aplicación

$$f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1.231)$$

definida por $f(\{1, 2, \dots, n\}) = n^2$ es una aplicación de conjunto

Definición 1.7.7 (Aplicación de elección) Sea $(A_i)_{i \in I}$ una colección de subconjuntos de Ω y sea $\mathfrak{A} = \{A_i / i \in I\}$ la clase asociada a tal familia (ver el comentario 1.1.1). Una aplicación

$$f : \mathfrak{A} \longrightarrow \Omega \quad (1.232)$$

se dice que es de elección si verifica la propiedad:

$$f(A_i) \in A_i, \text{ para todo } i \in I. \quad (1.233)$$

Es decir, si la imagen de cada conjunto A_i de la clase es un elemento de dicho conjunto A_i .

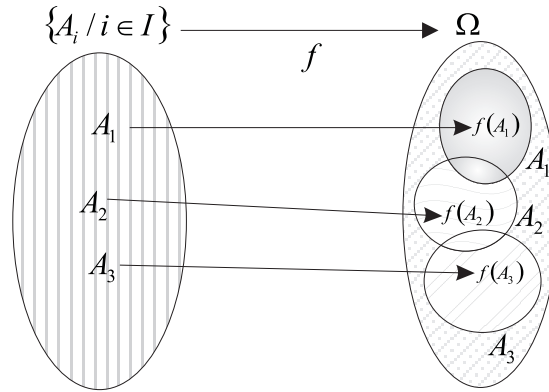


Figura 1.26: Una aplicación de elección definida sobre la clase $\{A_i / i = 1, 2, 3\}$.

Ejemplo 1.7.6 Para la clase \mathfrak{A} del ejemplo 1.7.5, la aplicación

$$f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1.234)$$

definida por $f(\{1, 2, \dots, n\}) = n$ es una aplicación de elección. En efecto, el entero positivo n pertenece al conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, para cada n .

Teorema 1.7.2 (Producto cartesiano y aplicaciones de elección) *Sea $(A_i)_{i \in I}$ una colección de conjuntos cuya clase asociada²² es $\mathfrak{A} = \{A_i / i \in I\}$ y sea $\bigcup_{i \in I} A_i$ el conjunto unión de los elementos de dicha clase. El producto cartesiano $\prod_{i \in I} A_i$ puede definirse como el conjunto de las aplicaciones de elección*

$$f : \{A_i / i \in I\} \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i. \quad (1.235)$$

Prueba. Por la definición 1.7.4, cada elemento del producto cartesiano $\prod_{i \in I} A_i$ es una familia $(a_i)_{i \in I}$ de elementos de $\bigcup_{i \in I} A_i$, con $a_i \in A_i$ para cada $i \in I$. Evidentemente, esta familia se puede obtener como imagen de una aplicación de elección $f : \{A_i / i \in I\} \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$. Recíprocamente, toda aplicación de elección de la forma anterior da lugar a una familia que verifica las condiciones para ser un elemento del producto cartesiano $\prod_{i \in I} A_i$. En resumen, es equivalente determinar el producto cartesiano mediante la definición 1.7.4 o mediante el conjunto de las aplicaciones de elección de la forma expuesta. Esto termina nuestra demostración. ■

En el Teorema 1.7.1 vimos que el producto cartesiano de un par de conjuntos no vacíos es también no vacío. Ahora bien, para el caso de una familia no vacía de conjuntos no vacíos asegurar que su producto cartesiano es no vacío no es nada fácil. Para demostrar este extremo usamos el llamado axioma de elección.

Axioma 1.7.1 (Axioma de elección) *Para todo conjunto X existe, al menos, una aplicación ϕ de $\wp(X) - \emptyset$ en X tal que, para cada $A \in \wp(X) - \emptyset$ se verifica que $\phi(A) \in A$.*

Supuesta la validez de dicho axioma demostramos el siguiente teorema.

Teorema 1.7.3 (Producto cartesiano no vacío) *El producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos no vacíos es no vacío.*

Prueba. Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia no vacía con $A_i \neq \emptyset$ para todo índice $i \in I$. Si la familia es una colección, entonces identificamos cada elemento del producto cartesiano con una aplicación $f : \{A_i / i \in I\} \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ para la que es $f(A_i) \in A_i$ para todo índice i (ver el teorema 1.7.2). Haciendo $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, podemos garantizar, por el axioma de elección, que existe al menos una de tales aplicaciones. En efecto, habrá una aplicación

$$\phi : \wp\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, \quad (1.236)$$

²²Ver al respecto el comentario 1.1.1.

de forma que $\phi(A) \in A$ para toda parte no vacía de $\bigcup_{i \in I} A_i$. Como por hipótesis, cada A_i es no vacío, se sigue que la restricción de ϕ a la clase $\{A_i/i \in I\} \subset \wp(\bigcup_{i \in I} A_i)$ es la aplicación f de elección buscada.

Si la familia $(A_i)_{i \in I}$ no es una colección, el producto cartesiano se puede determinar como el conjunto de aplicaciones $f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ tales que $f(i) \in A_i$ para todo $i \in I$. Sea el conjunto $I \times \bigcup_{i \in I} A_i$, el cual es no vacío puesto que tanto I como $\bigcup_{i \in I} A_i$ son no vacíos. El axioma de elección garantiza la existencia de una aplicación

$$\phi : \wp\left(I \times \bigcup_{i \in I} A_i\right) \longrightarrow I \times \bigcup_{i \in I} A_i, \quad (1.237)$$

tal que es $\phi(A) \in A$ para toda parte A , no vacía, de $I \times \bigcup_{i \in I} A_i$. La restricción de ϕ a la clase $\{\{i\} \times A_i/i \in I\}$ es una aplicación

$$g : \{\{i\} \times A_i/i \in I\} \longrightarrow I \times \bigcup_{i \in I} A_i \quad (1.238)$$

que verifica $g(\{i\} \times A_i) \in \{i\} \times A_i$. Finalmente, asignando a cada i del conjunto $\{i\} \times A_i$ la segunda proyección de g , se consigue la aplicación f de elección buscada:

$$f(i) = \pi_2(g(\{i\} \times A_i)). \quad (1.239)$$

Esto termina nuestra demostración. ■

El producto cartesiano de una familia de conjuntos admite las siguientes propiedades.

Teorema 1.7.4 *Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos y sea B un conjunto dado. Se tiene que:*

1. $B \times \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} B \times A_i$.
2. $(\bigcup_{i \in I} A_i) \times B = \bigcup_{i \in I} A_i \times B$.
3. $B \times \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} B \times A_i$.
4. $(\bigcap_{i \in I} A_i) \times B = \bigcap_{i \in I} A_i \times B$.

Prueba. La demostración es sencilla y se deja a cargo del lector. ■

Teorema 1.7.5 *Sean $(A_i)_{i \in I}$ y $(B_j)_{j \in J}$ dos familias de conjuntos. Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $(\bigcup_{i \in I} A_i) \times (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j)$.

$$2. \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j).$$

Prueba. Demostramos la propiedad 1 y dejamos la prueba de la 2 para el lector. Sea $x = (a, b) \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right)$, entonces $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ y $b \in \bigcup_{j \in J} B_j$. Estas relaciones de pertenencia significan que existen al menos un $i_0 \in I$ y al menos un $j_0 \in J$, tales que $a \in A_{i_0}$ y $b \in B_{j_0}$. En definitiva, existe al menos un par $(i_0, j_0) \in I \times J$, de forma que $(a, b) \in A_{i_0} \times B_{j_0}$. Esto implica que

$$x = (a, b) \in \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j) \quad (1.240)$$

y se da la inclusión $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) \subset \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j)$. Recíprocamente, sea $x = (a, b) \in \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j)$. Existe entonces al menos un $(i_0, j_0) \in I \times J$ para el que es $(a, b) \in A_{i_0} \times B_{j_0}$, luego $a \in A_{i_0}$ y $b \in B_{j_0}$. Esto implica que $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ y $b \in \bigcup_{j \in J} B_j$ y de aquí

$$x = (a, b) \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right). \quad (1.241)$$

Hemos probado la inclusión $\bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j) \subset \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right)$. La doble inclusión lleva a la igualdad y la demostración de 1 queda terminada. ■

Teorema 1.7.6 Sean $(A_i)_{i \in I}$ y $(B_i)_{i \in I}$ dos familias de partes de Ω , tales que $A_i \subset B_i$ para todo i . Entonces se cumple que

$$\prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} B_i. \quad (1.242)$$

Prueba. Sea $x \in \prod_{i \in I} A_i$. En este caso, x es una familia (I, f) tal que $f(i) \in A_i$ para todo $i \in I$. Como $A_i \subset B_i$, para todo $i \in I$, se concluye que también $f(i) \in B_i$, para todo $i \in I$. Esto significa que $x = (I, f) \in \prod_{i \in I} B_i$ y la inclusión queda demostrada. ■

Teorema 1.7.7 Sea $(A_{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J}$ una familia de partes de Ω . Entonces

$$\bigcap_{i \in I} \prod_{j \in J} A_{(i,j)} = \prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{(i,j)}. \quad (1.243)$$

Prueba. Sea $x \in \bigcap_{i \in I} \prod_{j \in J} A_{(i,j)}$. Entonces $x \in \prod_{j \in J} A_{(i,j)}$ para todo $i \in I$. Esto significa que x es una familia (J, f) , tal que $f(j) \in A_{(i,j)}$ para todo $j \in J$ y para todo $i \in I$. Así que $f(j) \in \bigcap_{i \in I} A_{(i,j)}$ para todo $j \in J$ y de aquí x es una familia (I, g) , tal que $g(i) = f(j) \in \bigcap_{j \in J} A_{(i,j)}$ para todo $i \in I$. En definitiva, $x \in \prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{(i,j)}$. La inclusión $\bigcap_{i \in I} \prod_{j \in J} A_{(i,j)} \subset \prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{(i,j)}$ queda probada. La inclusión recíproca se prueba de forma análoga y el teorema queda así demostrado. ■

Teorema 1.7.8 Sean $(A_i)_{i \in I}$ y $(B_i)_{i \in I}$ dos familias de subconjuntos de Ω . Se verifica que

$$\left(\prod_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\prod_{i \in I} B_i \right) = \prod_{i \in I} (A_i \cap B_i). \quad (1.244)$$

Prueba. Hagamos $J = \{1, 2\}$ y consideremos la familia con índices en J :

$$f(1) = (A_i)_{i \in I}, \quad f(2) = (B_i)_{i \in I}. \quad (1.245)$$

Aplicando a esta familia el teorema 1.7.7, tenemos

$$\bigcap_{j=1}^2 \prod_{i \in I} A_{(i,j)} = \prod_{i \in I} \bigcap_{j=1}^2 A_{(i,j)} = \prod_{i \in I} (A_i \cap B_i). \quad (1.246)$$

El teorema queda demostrado. ■

1.8 El caso $\Omega = \mathbb{R}^n$

En el espacio \mathbb{R}^n consideramos la clase de los paralelepípedos de la forma:

$$] \mathbf{a}, \mathbf{b}] = \prod_{i=1}^n]a_i, b_i], \quad \text{donde } a_i \leq b_i \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.247)$$

Esta clase es un semianillo donde podemos considerar una medida que llamamos *volumen* y que definimos así:

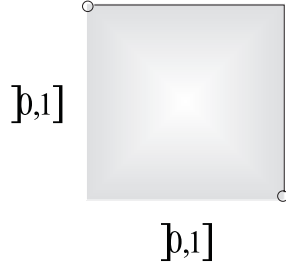
$$v(] \mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \prod_{i \in I} (b_i - a_i). \quad (1.248)$$

Ejemplo 1.8.1 El conjunto

$$A =]0, 1] \times]0, 1] \quad (1.249)$$

es un paralelepípedo en \mathbb{R}^2 , cuyo volumen vale

$$v(A) = (1 - 0) \cdot (1 - 0) = 1. \quad (1.250)$$

Figura 1.27: El paralelepípedo unidad en \mathbb{R}^2 .

Teorema 1.8.1 *La clase*

$$\mathfrak{S}^n = \left\{]\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \prod_{i=1}^n]a_i, b_i] \mid a_i \leq b_i \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (1.251)$$

es un semianillo sobre \mathbb{R}^n .

Prueba. En primer lugar, si hacemos $a_i = b_i$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, obtenemos el conjunto vacío. Por ello $\emptyset \in \mathfrak{S}^n$.

Sean los paralelepípedos

$$\mathbf{A} = \prod_{i=1}^n]a_i, b_i], \quad \mathbf{B} = \prod_{i=1}^n]c_i, d_i]. \quad (1.252)$$

Su intersección es, de acuerdo con el teorema 1.7.8,

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \left(\prod_{i=1}^n]a_i, b_i] \right) \cap \left(\prod_{i=1}^n]c_i, d_i] \right) = \prod_{i=1}^n (]a_i, b_i] \cap]c_i, d_i]). \quad (1.253)$$

La intersección $]a_i, b_i] \cap]c_i, d_i]$ es un intervalo del mismo tipo:

$$]a_i, b_i] \cap]c_i, d_i] =]x_i, y_i] \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.254)$$

Esto implica que

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \prod_{i=1}^n (]a_i, b_i] \cap]c_i, d_i]) = \prod_{i=1}^n]x_i, y_i] \quad (1.255)$$

y la clase \mathfrak{S}^n es un π -sistema.

La diferencia $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ puede ponerse en la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \left(\prod_{i=1}^n]a_i, b_i] \right) - \left(\prod_{i=1}^n]c_i, d_i] \right) = \left(\left(\prod_{i=1}^{n-1}]a_i, b_i] \right) \times]a_n, b_n] \right) - \\ &\quad - \left(\left(\prod_{i=1}^{n-1}]c_i, d_i] \right) \times]c_n, d_n] \right). \end{aligned} \quad (1.256)$$

Podemos aplicar ahora la propiedad 9 del teorema 1.7.1 a la expresión anterior para obtener

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \left(\left(\left(\prod_{i=1}^{n-1}]a_i, b_i] \right) - \left(\prod_{i=1}^{n-1}]a_i, b_i] \right) \right) \times]a_n, b_n] \right) \cup \\ &\quad \cup \left(\left(\prod_{i=1}^{n-1}]c_i, d_i] \right) \times (]a_n, b_n] -]c_n, d_n]) \right). \end{aligned} \quad (1.257)$$

La primera parte de la expresión 1.257:

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1}]a_i, b_i] \right) - \left(\prod_{i=1}^{n-1}]a_i, b_i] \right) \quad (1.258)$$

puede someterse a la una descomposición análoga a la de 1.263 y aplicársele de nuevo el apartado 9 del teorema 1.7.1. La segunda parte de 1.257:

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1}]c_i, d_i] \right) \times (]a_n, b_n] -]c_n, d_n]), \quad (1.259)$$

puede ponerse como

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1}]c_i, d_i] \right) \times (]a_n, b_n] -]c_n, d_n]) = \left(\prod_{i=1}^{n-1}]c_i, d_i] \right) \times \left(\bigcup_{k_n=1}^{r_n}]x_{k_n}, y_{k_n}] \right), \quad (1.260)$$

donde los intervalos $]x_{k_n}, y_{k_n}]$ son disjuntos dos a dos. En efecto, como vimos en el ejemplo 1.3.2, la diferencia $]a_n, b_n] -]c_n, d_n]$ puede ponerse como unión disjunta de intervalos de esa misma forma. Aplicando la propiedad 1 del teorema 1.7.4 a 1.260, resulta:

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1}]c_i, d_i] \right) \times \left(\bigcup_{k_n=1}^{r_n}]x_{k_n}, y_{k_n}] \right) = \bigcup_{k_n=1}^{r_n} \left(\left(\prod_{i=1}^{n-1}]c_i, d_i] \right) \times]x_{k_n}, y_{k_n}] \right) \quad (1.261)$$

Así, la segunda parte de 1.257 es unión disjunta de paralelepípedos de \mathbb{R}^n . Para no alargar demasiado esta demostración, diremos que aplicando la inducción a la primera parte de 1.257 llegamos a probar que $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ es unión disjunta de paralelepípedos. Nuestra demostración acaba aquí. ■

El anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}^n)$ generado por \mathfrak{S}^n consiste en las uniones finitas y disjuntas de elementos del semianillo \mathfrak{S}^n . Podemos extender a este anillo el volumen mediante el mismo proceso que utilizamos en el caso $\Omega = \mathbb{R}$ (ver la sección 1.5 de este capítulo). Es decir, si $\mathbf{M} = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{A}_i$, con $\mathbf{A}_i \in \mathfrak{S}^n$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y además $\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, entonces

$$v(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^n v(\mathbf{A}_i). \quad (1.262)$$

También podemos extender el volumen a los límites de las sucesiones de conjuntos formadas con elementos del anillo. En efecto, para toda sucesión (\mathbf{A}_n) de elementos del anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}^n)$ definimos

$$v\left(\lim_n \mathbf{A}_n\right) = \lim_n v(\mathbf{A}_n). \quad (1.263)$$

Evidentemente, toda clase monótona que contenga al anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}^n)$ tiene definido el volumen mediante 1.263. Así, el σ -anillo engendrado por $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}^n)$ es clase monótona y contiene al anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}^n)$ por lo que admite la definición de volumen 1.263. Para acabar, resulta que \mathbb{R}^n es unión numerable de paralelepípedos, luego el σ -anillo generado por $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}^n)$ coincide con la σ -álgebra generada por $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}^n)$ y podemos extender la medida de volumen a todos los conjuntos de esta σ -álgebra.

Sea \mathfrak{B} la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R}^n . Se puede probar que $\mathfrak{B} = \sigma(\mathfrak{S}^n)$ y esto nos lleva a afirmar que $\mathfrak{B} \subset \sigma(\mathfrak{R}(\mathfrak{S}^n))$, por lo que el volumen se puede extender a todos los borelianos de \mathbb{R}^n .

1.9 Ejercicios

1. Sean $(A_i)_{i \in I}$ una familia de partes de un conjunto X y $(B_j)_{j \in J}$ una familia de partes de un conjunto Y . Calcular la unión y la intersección de la familia $(A_i \times B_j)_{i \in I, j \in J}$ de partes de $X \times Y$ con la ayuda de las intersecciones y las uniones de las familias mencionadas al principio.

Solución:

De acuerdo con el teorema 1.7.5, tenemos

$$\bigcup_{i \in I, j \in J} (A_i \times B_j) = \bigcup_{i \in I} A_i \times \bigcup_{j \in J} B_j, \quad (1.264)$$

$$\bigcap_{i \in I, j \in J} (A_i \times B_j) = \bigcap_{i \in I} A_i \times \bigcap_{j \in J} B_j. \quad (1.265)$$

2. Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de partes de un conjunto X ; se verifica entonces que $\wp(A_i) \subset \wp(X)$ para todo $i \in I$. ¿Son verdaderas las relaciones

$$\wp\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \wp(A_i), \quad (1.266)$$

$$\wp\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \wp(A_i)? \quad (1.267)$$

3. Sean X e Y dos conjuntos y $(X_i)_{i \in I}$ una familia de partes de X cuya unión es el conjunto X . Para cada $i \in I$, se supone dada una aplicación f_i de X_i en Y . Mostrar que las dos condiciones siguientes son equivalentes: a) se verifica que $f_i(x) = f_j(x)$ para todo $x \in X_i \cap X_j$, cualesquiera que sean $i, j \in I$; b) existe una aplicación f de X en Y , la cual, para todo $i \in I$ coincide con f_i en X_i . La aplicación f es entonces única (se dice que f se obtiene por amalgama de las f_i).
4. Se llama recubrimiento de un conjunto X a toda familia $(U_i)_{i \in I}$ de partes de X cuya reunión es el conjunto X . Dados dos recubrimientos $(U_i)_{i \in I}$, $(V_j)_{j \in J}$ de X , se dice que el segundo es más fino que el primero si, para todo índice $j \in J$, existe un índice $i \in I$, tal que se verifique $V_j \subset U_i$. Mostrar que dados dos recubrimientos cualesquiera de X , existe un tercero más fino que los dos primeros.
5. Sean $(A_i)_{i \in I}$, $(B_j)_{j \in J}$ dos familias de partes de un mismo conjunto X . Probar que

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i, j \in I \cup J} (A_i \cup B_j), \quad (1.268)$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i, j \in I \cup J} (A_i \cap B_j), \quad (1.269)$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{i, j \in I \cup J} (A_i \cap B_j), \quad (1.270)$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i, j \in I \cup J} (A_i \cap B_j). \quad (1.271)$$

6. Sean (A_n) y (B_n) dos sucesiones de conjuntos. Consideremos (C_n) , donde $C_{2n} = A_n$ y $C_{2n-1} = B_n$ para cada entero positivo n . Calcular $\limsup C_n$ y $\liminf C_n$.
7. Sean (A_n) y (B_n) dos sucesiones de conjuntos. Probar que se verifican
- (a) $\limsup (A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n$,
 - (b) $\limsup (A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$,
 - (c) $\liminf A_n \cup \limsup B_n \subset \limsup (A_n \cup B_n)$.
8. Calcular $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$ para las siguientes sucesiones de conjuntos:
- (a) $A_n =]-n, \frac{n+1}{n}[$,
 - (b) $A_n = [n, +\infty[$,
 - (c) $A_n = \left[0, \frac{(-1)^n + n}{n}\right[$.

9. ¿Existe alguna σ -álgebra infinita numerable?

Solución:

La respuesta es no. Para probar este extremo razonaremos por reducción al absurdo. Sea X un conjunto cualquiera y supongamos que \mathcal{A} es una σ -álgebra infinita numerable sobre X . Para cada $x \in X$ podemos hallar el menor, en sentido inclusivo, de los conjuntos de \mathcal{A} que contienen a x . En efecto, definiendo

$$\mathcal{C}(x) = \{A \in \mathcal{A} / x \in A\} \quad (1.272)$$

obtenemos una clase numerable y no vacía de elementos de \mathcal{A} (al ser un subconjunto de un conjunto numerable será también numerable), ya que $\Omega \in \mathcal{C}(x)$. Además, la intersección

$$E_x = \bigcap_{A \in \mathcal{C}(x)} A \quad (1.273)$$

es el “mínimo” conjunto de la σ -álgebra que contiene a x pues es intersección numerable de elementos de la σ -álgebra. La minimalidad de E_x hace que cualquier otro conjunto de \mathcal{A} que no lo contenga sea disjunto con él. En particular, si $y \in X$ es tal que $E_y \neq E_x$, entonces E_x y E_y son disjuntos.

La familia $\mathfrak{E} = \{E_x/x \in X\}$ es numerable por lo que hallaremos un conjunto I finito o infinito numerable y una biyección $f : I \longrightarrow \mathfrak{E}$ que nos permite hacer de \mathfrak{E} un conjunto con índices $\mathfrak{E} = \{E_i/i \in I\}$, tal que $E_i \neq E_j$ para todo $i \neq j$. Finalmente, para cada parte $M \subset I$ definimos el conjunto $E_M = \bigcup_{i \in M} E_i$ y la aplicación

$$g : \wp(I) \ni M \longrightarrow E_M \in X \quad (1.274)$$

es una biyección, lo que nos obliga a que X sea finito si I es finito o X infinito no numerable si I es infinito numerable. En todo caso, hay una contradicción que se salva si nuestra hipótesis de numerabilidad infinita para \mathcal{A} es falsa.

10. Determinar la σ -álgebra de \mathbb{N} que está generada por los subconjuntos de \mathbb{N} que contienen a todos los primos. Decidir razonadamente si están en esta σ -álgebra los conjuntos $\{5\}$ y $\{6\}$.

Solución:

Sea \mathfrak{C} la clase formada por los subconjuntos de \mathbb{N} que contienen a todos los primos. La unión y la intersección numerable de elementos de \mathfrak{C} es también un elemento de \mathfrak{C} . También es $\mathbb{N} \in \mathfrak{C}$. Esto significa que si añadimos a \mathfrak{C} los complementarios de cada uno de sus elementos tendremos una σ -álgebra que debe ser la generada por \mathfrak{C} puesto que es la mínima que incluye a dicha clase. El conjunto $\{5\}$ no pertenece a $\sigma(\mathfrak{C})$ ya que no contiene a todos los primos (de hecho sólo contiene al 5), mientras que el conjunto $\{6\}$ sí pertenece a la σ -álgebra generada por \mathfrak{C} puesto que no contiene a ningún primo.

11. Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Comprobar que la clase de conjuntos

$$\mathfrak{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

forma una σ -álgebra sobre X .

Solución:

Como la clase \mathfrak{A} es no vacía, bastará comprobar que es cerrada para la unión numerable y el paso al complementario. En efecto, junto con cada conjunto de \mathfrak{A} se halla su complementario y las uniones finitas de elementos de \mathfrak{A} dan lugar a elementos de \mathfrak{A} , por lo que las uniones numerables también darán lugar a elementos de \mathfrak{A} puesto que son reiteración de las uniones finitas al ser la clase finita.

12. Sea \mathfrak{F} una σ -álgebra de subconjuntos de Ω y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación tal que $f^{-1}([-\infty, x]) \in \mathfrak{F}$, para cada $x \in D$, donde D es un subconjunto denso en \mathbb{R} . Probar que $f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$ para cada $B \in \mathfrak{B}$.

Solución:

Sea $p \in \mathbb{R}$. Sabemos que la clase

$$I_7 = \{]-\infty, p] \mid p \in \mathbb{R}\} \quad (1.275)$$

genera la σ -álgebra de Borel \mathfrak{B} en la recta real. Por otro lado, como D es denso en \mathbb{R} , podemos hallar una sucesión creciente de puntos de D convergente a p . En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $x_n \in D \cap]p - \frac{1}{n}, p[$. Esta elección permite la igualdad

$$]-\infty, p[= \bigcap_{n=1}^{\infty}]-\infty, x_n]. \quad (1.276)$$

Por ello, tenemos

$$f^{-1}(]-\infty, p[) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\infty, x_n]\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(]-\infty, x_n]). \quad (1.277)$$

Como cada $]-\infty, x_n]$ pertenece a la σ -álgebra \mathfrak{F} se concluye que $f^{-1}(]-\infty, p[) \in \mathfrak{F}$ y de aquí $f^{-1}(I_7) \subset \mathfrak{F}$. En particular, esto significa que la σ -álgebra generada por $f^{-1}(I_7)$ ha de estar contenida en \mathfrak{F} . Para acabar, vemos que

$$f^{-1}(\mathfrak{B}) = f^{-1}(\sigma(I_7)) = \sigma(f^{-1}(I_7)) \subset \mathfrak{F}, \quad (1.278)$$

donde hemos aplicado el teorema 1.4.9.

13. Mostrar con un ejemplo que la unión de σ -álgebras no es álgebra. Probar que la unión de una sucesión creciente de σ -álgebras es álgebra.

Solución

Sea el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$. Las siguientes clases son σ -álgebras sobre X

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}, \quad (1.279)$$

$$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X, \{a, b, c\}, \{d\}\}. \quad (1.280)$$

Su unión es la clase

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d\}\} \quad (1.281)$$

que no es una álgebra sobre X puesto que la unión $\{a, b\} \cup \{d\} = \{a, b, d\}$ no pertenece a la clase.

Sea (\mathcal{A}_n) una sucesión creciente de σ -álgebras sobre un conjunto Ω y sea $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ la unión de todos los elementos de esta sucesión.

Afirmamos que \mathcal{U} es un álgebra. En efecto, el conjunto Ω pertenece a \mathcal{U} puesto que $\Omega \in \mathcal{A}_n$ para todo n . Si $A \in \mathcal{U}$, entonces existe al menos un $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, tal que $A \in \mathcal{A}_{n_0}$. Esto significa que $A^c \in \mathcal{A}_{n_0}$ y, en consecuencia, $A^c \in \mathcal{U}$. Finalmente, sean A y B dos elementos de \mathcal{U} , hallamos $n_0, n_1 \in \mathbb{Z}^+$, tales que $A \in \mathcal{A}_{n_0}$ y $B \in \mathcal{A}_{n_1}$. Como la sucesión (\mathcal{A}_n) es creciente, basta tomar $v = \max(n_0, n_1)$ para asegurar que $A \cap B \in \mathcal{A}_v$. Así pues, $A \cap B \in \mathcal{U}$. Hemos probado que la clase \mathcal{U} contiene a Ω , es cerrada para el paso al complementario y la intersección y es, por tanto, un álgebra (ver la definición 1.3.5).

14. Determinar el álgebra \mathcal{A} que genera la colección de los subconjuntos finitos de un conjunto X no numerable. Determinar la σ -álgebra generada por \mathcal{A} . Estudiar el mismo problema en el caso de que X sea un conjunto infinito numerable.
15. Describir la σ -álgebra de \mathbb{N} engendrada por $\mathfrak{E} = \{N \subset \mathbb{N} / \forall n \in N, 2n \in N\}$