Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского
Радиофизический факультет
Кафедра математики

Задачи по вариационному исчислению и теории оптимального управления

Методическая разработка для студентов
радиофизического факультета ННГУ

Нижний Новгород, 2002

УДК 517.97

Задачи по вариационному исчислению и теории оптимального управления. / Сост. И.Р. Смирнова, И.П. Смирнов, — Нижний Новгород: ННГУ. – 36 с.

Сборник задач по основным разделам вариационного исчисления и теории оптимального управления, читаемым на радиофизическом факультете ННГУ в рамках общего курса математической физики. В начале каждого раздела приводится краткая теоретическая справка и решение типовой задачи.

Составители: И.Р. Смирнова, И.П. Смирнов

Рецензенты: С.Ф. Морозов

1. Простейшая задача вариационного исчисления

Постановка задачи.

$$J\left(y\left(\cdot\right)\right)=\int\limits_{x_0}^{x_1}F\left(x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right)\,dx\to\underset{D}{\text{extr}},$$

$$D=\left\{y\left(x\right):x\in\left[x_0,x_1\right],\,y\left(\cdot\right)\in C^2\left[x_0,x_1\right],\,y\left(x_0\right)=y_0,y\left(x_1\right)=y_1\right\}$$

В данной задаче область определения допустимой функции $\left[x_0,x_1\right]$ и ее граничные значения y_0,y_1 считаются заданными. Интегрант $F\left(x,y,y'\right)\in C^2\left(R^3\right).$

Необходимые условия экстремума.

Всякая подозрительная на экстремум функция $y^*\left(x\right)\in D$ является *экстремалью* — решением уравнения Эйлера — и удовлетворяет следующей краевой задаче:

$\begin{cases} F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0, \\ y\left(x_0\right)=y_0 \\ y\left(x_1\right)=y_1 \end{cases}$	Краевая задача для *уравнения Эйлера*

Для функции $y^*\left(x\right)$ также выполнены следующие условия:

$F''_{y''}\underset{(\leqslant)}{\geqslant}0$	*Условие Лежандра*
Решение уравнения Якоби $\Omega'_\eta-\frac{d}{dx}\Omega'_{\eta'}=0,\eta\left(x_0\right)=0,\,\eta'\left(x_0\right)=1$ не обращается в 0 в интервале $\left(x_0,x_1\right)$	*Условие Якоби*

В уравнении Якоби $\Omega\left(x,\eta,\eta'\right) \equiv F''_{y^2}\eta^2+2F''_{yy'}\eta\eta'+F''_{y'^2}\eta'^2$. В условии Лежандра следует брать знак $\geqslant$ в задаче на минимум и знак $\leqslant$ в задаче на максимум. Известны следующие первые интегралы уравнения Эйлера:

$$
\begin{array}{lll}
F \equiv F\left(x,y'\right) & \Longrightarrow & F'_{y'} = C \text{ - \textit{интеграл импульса};} \\
F \equiv F\left(y,y'\right) & \Longrightarrow & H \equiv F - y'F'_{y'} = C \text{ - \textit{интеграл энергии.}}
\end{array}
$$

Достаточные условия экстремума.

Для того чтобы экстремаль $y^*\left(x\right) \in D$ доставляла C^1-локальный экстремум достаточно выполнения следующих условий

$F''_{y''} \underset{(<)}{>} 0$	*Усиленное условие Лежандра*
Решение *уравнения Якоби* $\Omega'_{\eta} - \frac{d}{dx}\Omega'_{\eta'} = 0, \eta\left(x_0\right) = 0, \eta'\left(x_0\right) = 1$ не обращается в 0 в $\left(x_0, x_1\right]$	*Усиленное условие Якоби*

Пример. *Вывести уравнение брахистохроны — кривой наискорейшего спуска:*

$$
T\left(y\left(\cdot\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx \to \min,\ y\left(0\right) = 0,\ y\left(x_1\right) = y_1
$$

Решение:

$$H = F - y'F'_{y'} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\left[\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - y'\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right] = C \Longleftrightarrow$$
$$y\left(1+y'^2\right) = 2C_1 \text{ (интеграл энергии)}$$
$$y' = \operatorname{ctg}\frac{t}{2} \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} y = C_1\left(1-\cos t\right) \\ x = \int dx = \int \frac{dy}{y'} = \int C_1\left(1-\cos t\right)dt = C_1\left(t-\sin t\right) + C_2 \end{cases}$$

Следовательно, брахистохрона описывается уравнением циклоиды ■

Задачи[1]

В аудитории:

1. Найти кривую $y = y\left(x\right)$ с заданными граничными точками, от вращения которой вокруг оси абсцисс образуется тело наименьшего объема.
2. $\int_0^1 \left(x^4 + y^4\right)\, dx \to \mathrm{extr}, y\left(0\right) = y_0,\ y\left(1\right) = y_1.$
3. $\int_0^1 \left(y^2 + x^2y'\right)\, dx \to \mathrm{extr}, y\left(0\right) = 0,\ y\left(1\right) = a.$
4. $\int_{x_0}^{x_1} \left(y' + y\right)e^x dx \to \mathrm{extr},\ y\left(x_0\right) = y_0,\ y\left(x_1\right) = y_1.$
5. $\int_0^1 \left(y' + 2y\right)e^x dx \to \mathrm{extr},\ y\left(0\right) = y_0,\ y\left(1\right) = y_1.$
6. Найти кривую $y = y\left(x\right)$ с заданными граничными точками минимальной длины.

[1] В задачах данного раздела все не определенные параметры $(a, b, x_0, y_0 \dots)$ считаются заданными. Это замечание относится ко всем разделам, за исключением задач со свободными границами.

7. Точка движется по кривой в плоскости (x, y), соединяющей точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$, проходя каждую точку кривой со скоростью, пропорциональной абсциссе x. Найти форму кривой, если время движения точки по кривой минимально.

8. Найти кривую $y = y(x)$ с заданными граничными точками, от вращения которой вокруг оси абсцисс образуется поверхность наименьшей площади.

9. Найти экстремали функционалов:

   (a) $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$;

   (b) $\int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 - 2y \sin x)\, dx$;

   (c) $\int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2)\, dx$;

   (d) $\int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 3y^2)\, e^{2x} dx$;

   (e) $\int_{t_0}^{t_1} (1 + t)\, \dot{x}^2 dt$;

   (f) $\int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}^2 - 4x^2)\, dt$.

На дом:

1. Найти кривую $y = y(x)$ с заданными граничными точками, площадь подграфика которой экстремальна.

2. $\int_0^1 (\sin x + xy^3)\ dx \to \text{extr}, y(0) = y_0,\ y(1) = y_1$.

3. $\int_0^1 (y^4 + x^4 y')\ dx \to \text{extr}, y(0) = a,\ y(1) = b$.

4. $\int_{x_0}^{x_1} (\sin xy + xy(y + xy') \cos xy)\, dx \ \to\ \text{extr},\ \ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1$.

5. Масса размазана по кривой с плотностью, пропорциональной ординате. Найти кривую $y = y(x)$ с заданными граничными точками минимальной массы.

6. Точка движется по кривой в плоскости (x, y), соединяющей точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$, проходя каждую точку кривой со скоростью, пропорциональной ординате y. Найти форму кривой, если время движения точки по кривой минимально.

7. Найти экстремали функционалов:

   (a) $\int_{x_0}^{x_1} y'(1 + x^2 y')\, dx$;

   (b) $\int_{x_0}^{x_1} (y^2 + 2xyy')\, dx$;

   (c) $\int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + y^2 + 6y \operatorname{sh} 2x)\, dx$;

   (d) $\int_{x_0}^{x_1} (xy' + e^y)\, dx$;

   (e) $\int_{t_0}^{t_1} (t\dot{x}^2 + x\dot{x})\, dt$.

2. Вариационная задача на классе векторных функций

Постановка задачи.

$$J(\vec{y}(\cdot)) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, \vec{y}(x), \vec{y}'(x))\, dx \to \underset{D}{\text{extr}},$$

$$D = \{\vec{y}(x) \equiv (y_1(x), \ldots, y_n(x)) : x \in [x_0, x_1],$$
$$\vec{y}(\cdot) \in C^2[x_0, x_1], \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0, \vec{y}(x_1) = \vec{y}_1\}$$

В данной задаче область определения допустимой функции $[x_0, x_1]$ и ее граничные значения $\vec{y}_0, \vec{y}_1$ считаются заданными. Интегрант $F(x, \vec{y}, \vec{y}') \in C^2(R^{1+2n})$.

Необходимые условия экстремума.

Всякая подозрительная на экстремум функция $\vec{y}^*(x) \in D$ является *экстремалью* — решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \nabla_{\vec{y}} F - \frac{d}{dx} \nabla_{\vec{y}'} F = 0, \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \\ \vec{y}(x_1) = \vec{y}_1 \end{cases}$$

Краевая задача для *векторного уравнения Эйлера*

Первые интегралы векторного уравнения Эйлера:

$F \equiv F(x, \vec{y}') \implies \nabla_{\vec{y}'} F = \vec{C}$ — *интеграл импульса*;
$F \equiv F(\vec{y}, \vec{y}') \implies H \equiv F - \langle \vec{y}', \nabla_{\vec{y}'} F \rangle = C$ — *интеграл энергии*.

Пример.

$$J(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \int_0^1 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2x_1 x_2\right) dt \to \operatorname{extr},$$
$$x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_1(1) = \operatorname{sh} 1,\ x_1(1) = -\operatorname{sh} 1.$$

Решение:

$$\begin{cases} F'_{x_1} - \frac{d}{dt} F'_{\dot{x}_1} = -2(x_2 + \ddot{x}_1) = 0 \\ F'_{x_2} - \frac{d}{dt} F'_{\dot{x}_2} = -2(x_1 + \ddot{x}_2) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} - x_1 = 0 \\ x_2 = -\ddot{x}_1 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 \operatorname{sh} t + C_4 \operatorname{ch} t \\ x_2 = C_1 \cos t + C_2 \sin t - C_3 \operatorname{sh} t - C_4 \operatorname{ch} t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(0) = C_1 + C_4 = 0 \\ x_2(0) = C_1 - C_4 = 0 \\ x_1(1) = C_2 \sin 1 + C_3 \operatorname{sh} 1 = \operatorname{sh} 1 \\ x_2(1) = C_2 \sin 1 - C_3 \operatorname{sh} 1 = -\operatorname{sh} 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1(t) = \operatorname{sh} t \\ x_2(t) = -\operatorname{sh} t \end{cases} \blacksquare$$

Задачи

В аудитории:

1. Исходя из принципа Ферма об экстремальности времени распространения, вывести уравнения траекторий распространения колебаний в трехмерной неоднородной среде с показателем преломления $n(\vec{r}) = c_0/c(\vec{r})$ ($c(\vec{r})$ — скорость распространения волн). Для плоскослоистой среды ($n = n(z)$) получить отсюда закон Снеллиуса и найти траектории в следующих частных случаях:

   (a) $\nabla c = \mathrm{const}$;

   (b) $\nabla n = \mathrm{const}$.

2. $\int_0^1 \left[(y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1\right] dx \to \mathrm{extr}$,
   $y_1(0) = y_2(0) = 1,\ y_1(1) = \frac{3}{2},\ y_2(1) = 1.$

3. $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}_1\dot{x}_2 - x_1x_2)\ dt \to \mathrm{extr}$,
   $x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

4. $\int_1^3 (xy'^2 + z'^2 + xy'z')\ dx \to \mathrm{extr}$,
   $y(1) = 1,\ y(3) = 1 + \ln 3,\ z(1) = z(3) = 0.$

На дом:

1. Определить траектории лучей в плоскослоистой среде при $\nabla n^2 = \mathrm{const}$.

2. $\int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz)\ dx \to \mathrm{extr}$,
   $y(0) = z(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

3. $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3)\ dt \to \mathrm{extr}$,
   $x_1(0) = x_3(0) = -x_2(0) = 1,$
   $x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -x_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},\ x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

3. Вариационная задача на классе функций со старшими производными

Постановка задачи.

$$J(y(\cdot)) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k)}(x)\right) dx \to \underset{D}{\text{extr}},$$

$$D = \left\{ y(x) : x \in [x_0, x_1],\ y(\cdot) \in C^{2k}[x_0, x_1], \right.$$
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(k-1)}(x_0) = y_0^{(k-1)},$$
$$\left. y(x_1) = y_1, y'(x_1) = y_1', \ldots, y^{(k-1)}(x_1) = y_1^{(k-1)} \right\}$$

В данной задаче область определения допустимой функции $[x_0, x_1]$ и ее граничные значения $y_0, y_0' \ldots, y_0^{(k-1)}, y_1, y_1' \ldots, y_1^{(k-1)}$ считаются заданными. Интегрант $F\left(x, y, y' \ldots, y^{(k)}\right) \in C^{2k}\left(R^{k+1}\right)$.

Необходимые условия экстремума.

Всякая подозрительная на экстремум функция $y^*(x) \in D$ является *экстремалью* — решением следующей краевой задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_y' - \frac{d}{dx} F_{y'}' \ldots + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F_{y^{(k)}}' = 0, \\ y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(k-1)}(x_0) = y_0^{(k-1)} \\ y(x_1) = y_1, \ldots, y^{(k-1)}(x_1) = y_1^{(k-1)} \end{array} \right.$$

Краевая задача для *уравнения Эйлера-Пуассона*

Пример.

Функция $y(x)$ описывает отклонение точки x балки в вертикальной плоскости; функционал U имеет смысл *суммарной потенциальной энергии упругих сил и силы тяжести; граничные условия учитывают отсутствие смещений и изгибов концов балки. Вывести уравнение прогиба балки, минимизируя суммарную потенциальную энергию*

$$U(y(\cdot)) = \int\limits_{-l}^{l} \left[\tfrac{1}{2}\mu (y'')^2 + \rho y\right] dx \to \min,$$
$$y(-l) = y(l) = y'(-l) = y'(l) = 0.$$

Решение:

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F'_{y'} = \rho + \frac{d^2}{dx^2}\mu y'' = 0 \Longrightarrow$$
$$y^{(4)} = -\frac{\rho}{\mu} \Longrightarrow y = -\frac{\rho}{24\mu}\left(x^2 - l^2\right)^2 \quad \blacksquare$$

Задачи

В аудитории:

1. $\int_0^1 (1 + y''^2)\, dx \to \text{extr},\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = y(1) = y'(1) = 1.$

2. Найти экстремали функционалов:

   (a) $\int_{x_0}^{x_1} (2xy + y'''^2)\, dx;$

   (b) $\int_{x_0}^{x_1} (y'''^2 + y^2 - 2x^3 y)\, dx;$

   (c) $\int_0^{\pi/2} (y''^2 - y'^2)\, dx;$

   (d) $\int_0^{\pi/2} (y'''^2 - y'^2)\, dx;$

   (e) $\int_1^e (t+1)\, t\ddot{x}^2\, dt.$

На дом:

1. $\int_0^{\pi/2} \left(y''^2 - y^2\right) dx \to \mathrm{extr},\ y(0) = -y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

2. Найти экстремали функционалов:

   (a) $\int_{x_0}^{x_1} \left(16y^2 - y''^2 + x^2\right) dx;$

   (b) $\int_{x_0}^{x_1} \left(y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2y\sin x\right) dx;$

   (c) $\int_0^1 y''^2 \exp(-x)\, dx;$

   (d) $\int_0^1 \left(\ddot{x}^2 - 24tx\right) dt;$

   (e) $\int_0^1 \left(\dddot{x}^2 + \ddot{x}^2\right) dt.$

3. Обобщить уравнения Пуассона на случай векторных функций.

4. Вариационная задача на классе функций многих переменных

Постановка задачи.

$$J(z(\cdot)) = \int \cdots \int_{\Omega} F(x, z(x), \nabla z(x))\, dx \to \underset{D}{\mathrm{extr}},$$

$$D = \left\{ z(x) : x \in \Omega \subset R^n,\ z(\cdot) \in C^2(\Omega),\ z|_{\partial\Omega} = \alpha(x) \right\}$$

В данной задаче область определения допустимой функции Ω и ее граничные значения $\alpha(x)$ считаются заданными. Интегрант $F(x, z, \nabla z) \in C^2(R^3)$.

Необходимые условия экстремума.

Всякая подозрительная на экстремум функция $z^*(x) \in D$ является *экстремалью* — решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} F'_z - \frac{\partial}{\partial x_1} F'_{z'_{x_1}} - \ldots - \frac{\partial}{\partial x_n} F'_{z'_{x_n}} = 0, \\ z|_{\partial\Omega} = \alpha(x) \end{cases}$$

Краевая задача для *уравнения Эйлера-Остроградского*

Пример. *Вывести уравнение свободных колебаний отрезка натянутой струны $0 \leqslant x \leqslant l$.*

Решение: Функционал действия системы в приближении малых отклонений

$$S = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{l} \left(\rho(x)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - k(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right) dx\,dt \to \mathrm{extr},$$

где $U = U(x,t)$ — вертикальное отклонение точки x струны в момент времени t, $\rho(x)$ — линейная плотность массы, $k(x)$ — характеристика упругих свойств струны ■

Задачи

В аудитории:

1. Написать уравнение Остроградского для функционалов

   (a) $\iint\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) dxdy;$

   (b) $\iiint\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 2uf(x,y,z)\right) dxdydz$

2. Написать уравнение поверхности минимальной площади, натянутой на заданный пространственный контур (уравнение мыльных пленок). Показать, что плоскость является решением задачи в случае плоского пространственного контура.

На дом:

1. Написать уравнение Остроградского для функционалов

   (a) $\iint\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right) \, dxdy.$

2. Написать уравнение продольных колебаний прямолинейного стержня — распределенной системы с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \int\limits_0^l \left(\rho \left(u_t' \right)^2 - k \left(u_x' \right)^2 \right) \, dx,$$

   где $\rho(x), k(x)$ — параметры стержня, $u(x,t)$ — продольное смещение сечения относительно равновесного положения x в момент времени t.

3. Обобщить необходимые условия экстремума из данной задачи на случай функционалов

   (a) со старшими производными;

   (b) от векторных функций;

   (c) от векторных функций со старшими производными.

5. Изопериметрическая вариационная задача

Постановка задачи.

$$J(\vec{y}(\cdot)) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, \vec{y}(x), \vec{y}'(x))\, dx \to \operatorname*{extr}_{D},$$

$$\begin{gathered} D = \{\vec{y}(x) \equiv (y_1(x), \ldots, y_n(x)) : x \in [x_0, x_1], \\ \vec{y}(\cdot) \in C^2[x_0, x_1],\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0,\ \vec{y}(x_1) = \vec{y}_1, \\ \int\limits_{x_0}^{x_1} G_i(x, \vec{y}(x), \vec{y}'(x))\, dx = l_i = \text{const}, i = \overline{1, m}\} \end{gathered}$$

В данной задаче область определения допустимой функции $[x_0, x_1]$ и ее граничные значения $\vec{y}_0, \vec{y}_1$ считаются заданными. Интегранты $F(x, \vec{y}, \vec{y}')$, $G_i(x, \vec{y}, \vec{y}') \in C^2(R^{1+2n})$.

Необходимые условия экстремума.

Всякая подозрительная на экстремум функция $\vec{y}^*(\cdot) \in D$ является *экстремалью* — решением краевой задачи Эйлера для функции Лагранжа: существует ненулевой набор чисел (множителей Лагранжа) $\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ такой, что

$\left\{\begin{array}{l} \nabla_{\vec{y}} L - \frac{d}{dx}\nabla_{\vec{y}'} L = 0, \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \\ \vec{y}(x_1) = \vec{y}_1 \end{array}\right.$	Краевая задача для *векторного уравнения Эйлера-Лагранжа*

Здесь

$$L(x, \vec{y}, \vec{y}') \equiv \lambda_0 F(x, \vec{y}, \vec{y}') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i(x, \vec{y}, \vec{y}')$$

— функция Лагранжа. При нахождении экстремалей достаточно ограничиться рассмотрением лишь двух случаев:

1. *вырожденный*: $\lambda_0 = 0,\ \ |\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_m| > 0;$

2. *невырожденный*: $\lambda_0 = 1.$

Пример.

Найти кривую (график функции $y = y\,(x)\,,\ x \in [x_0, x_1]$) заданной длины l, соединяющую заданные точки в плоскости, с максимальной площадью подграфика (задача Дидоны)

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx \to \max,\ \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l,\ y\,(x_0) = y_0,\ y\,(x_1) = y_1$$

Решение: Составляем функцию Лагранжа

$$L = \lambda_0 y + \lambda_1 \sqrt{1+y'^2},\ (\lambda_0, \lambda_1) \neq \vec{0}$$

и записываем интеграл энергии для уравнения Лагранжа

$$H = L - y' L'_{y'} = C \Rightarrow$$
$$\lambda_0 y + \lambda_1 \sqrt{1+y'^2} - y' \tfrac{\lambda_1 y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C.$$

Вырожденный случай. В случае $\lambda_0 = 0$ получаем отсюда $y' = C_1 \Rightarrow y = C_1 x + C_2$. Из граничных условий имеем далее

$$y = y_0 + (y_1 - y_0)\,\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Для данной прямой выполнено изопериметрическое условие тогда и только тогда, когда параметр l совпадает с расстоянием между граничными точками кривой

$$l = l_{\min} \equiv \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Невырожденный случай. В случае $\lambda_0 = 1$ интегрируем неразрешенное относительно производной дифференциальное уравнение подстановкой $y' = \operatorname{tg} t$. Имеем

$$\begin{gathered} y = C - \lambda_1 \cos t \Rightarrow \\ dx = \frac{dy}{y} = \frac{\lambda_1 \sin t \, dt}{\operatorname{tg} t} = \lambda_1 \cos t \, dt \Rightarrow \\ x = C_1 + \lambda_1 \sin t. \end{gathered}$$

Таким образом, экстремалями являются две дуги окружности $y = C \pm \sqrt{\lambda_1^2 - (x - C_1)^2}$. Для выполнения изопериметрического условия необходимо и достаточно, чтобы $l_{\min} < l < l_{\max}$. Здесь $l_{\max}$ — длина дуги той окружности, которая имеет в граничной точке с меньшей ординатой вертикальную касательную ■

Задачи

В аудитории:

1. Найти форму подвешенного за концы в поле силы тяжести абсолютно гибкого нерастяжимого однородного каната длины l (минимизируя положение его центра тяжести).

2. Найти кривую $y = y(x)$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ минимальной длины с заданной площадью подграфика.

3. $\int_0^1 (y'^2 + x^2)\, dx \to \text{extr}$,
$\int_0^1 y^2 \, dx = 1$,
$y(0) = y(1) = 0$.

4. $\int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\, dx \to \text{extr}$,
$\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2)\, dx = 2$,
$y(0) = z(0) = 0$, $y(1) = z(1) = 1$.

5. Составить краевую задачу для нахождения экстремалей задачи

   $\int_0^l \left(p\left(x\right)y'^2 + q\left(x\right)y^2\right)\,dx \to \mathrm{extr},$
   $\int_0^l \rho\left(x\right)y^2\,dx = 1,$
   $y\left(0\right) = y\left(l\right) = 0.$

6. $\int_0^1 \dot{x}_1\dot{x}_2\,dt \to \mathrm{extr},$
   $\int_0^1 tx_1\,dt = 0,$
   $\int_0^1 tx_2\,dt = 0,$
   $x_1\left(0\right) = x_1\left(1\right) = x_2\left(0\right) = 0,\ x_2\left(1\right) = 1$

На дом:

1. Определить форму кривой $y = y\left(x\right),\ x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ заданной длины l, от вращения которой вокруг оси абсцисс образуется тело экстремальной боковой поверхности. Написать дифференциальное уравнение кривой, для которой экстремален соответствующий объем тела вращения.

2. $\int_{x_0}^{x_1} y'^2\,dx \to \mathrm{extr},$
   $\int_{x_0}^{x_1} y\,dx = \mathrm{const},$
   $y\left(x_0\right) = y_0,\ y\left(x_1\right) = y_1.$

3. $\int_0^1 \left(y'^2 + z'^2 - 4xz - 4z\right)\,dx \to \mathrm{extr},$
   $\int_0^1 \left(y'^2 - xy' - z'^2\right)\,dx = 2,$
   $y\left(0\right) = z\left(0\right) = 0,\ y\left(1\right) = z\left(1\right) = 1.$

4. $\int_0^\pi \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},$
   $\int_0^\pi x\cos t\,dt = \frac{\pi}{2},$
   $\int_0^\pi x\sin t\,dt = \pi + 2,$
   $x\left(0\right) = 2,\ x\left(\pi\right) = 0.$

5. $\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2-(y')^2\right)\,dx\to \mathrm{extr},$
$\int_0^{\pi/2} y\,(x)\;dx=0,$
$y\,(0)=y\,(\pi/2)=0,\; y'\,(0)=1.$

6. Задача Лагранжа

Постановка задачи.

$$J\left(\vec{y}\left(\cdot\right)\right)=\int\limits_{x_0}^{x_1}F\left(x,\vec{y}\left(x\right),\vec{y}'\left(x\right)\right)\,dx\to \underset{D}{\mathrm{extr}},$$

$$\begin{gathered} D=\{\vec{y}\left(x\right)\equiv\left(y_1\left(x\right),\ldots,y_n\left(x\right)\right):x\in\left[x_0,x_1\right], \\ \vec{y}\left(\cdot\right)\in C^2\left[x_0,x_1\right],\ \vec{y}\left(x_0\right)=\vec{y}_0,\ \vec{y}\left(x_1\right)=\vec{y}_1, \\ \varphi_i\left(x,\vec{y}\left(x\right),\vec{y}'\left(x\right)\right)=0,\ x\in\left(x_0,x_1\right),\ i=\overline{1,m}\} \end{gathered}$$

В данной задаче область определения допустимой функции — отрезок $[x_0,x_1]$ — и ее граничные значения $\vec{y}_0,\vec{y}_1$ считаются заданными. Интегрант $F\left(x,\vec{y},\vec{y}'\right)$ и определяющие дифференциальные связи функции $\varphi_i\left(x,\vec{y},\vec{y}'\right)$, принадлежат пространству $C^2\left(R^{2n+1}\right)$.

Необходимые условия экстремума.

Всякая подозрительная на экстремум функция $\vec{y}^*\left(x\right)\in D$ является *экстремалью* - решением следующей краевой задачи Эйлера для функции Лагранжа: существует нетривиальный набор множителей Лагранжа $\left\{\lambda_0,\vec{\lambda}\left(x\right)\right\}$: $|\lambda_0|+\max_x\left|\vec{\lambda}\left(x\right)\right|>0$ такой, что

$\left\{\begin{array}{l}\nabla_{\vec{y}}L-\frac{d}{dx}\nabla_{\vec{y}'}L=0,\\ \vec{y}\left(x_0\right)=\vec{y}_0\\ \vec{y}\left(x_1\right)=\vec{y}_1\end{array}\right.$	Краевая задача для *векторного уравнения Эйлера-Лагранжа*

Здесь

$$L\left(x, \vec{y}, \vec{y}'\right) \equiv \lambda_0 F\left(x, \vec{y}, \vec{y}'\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\left(x\right) \varphi_i\left(x, \vec{y}\left(x\right), \vec{y}'\left(x\right)\right)$$

— функция Лагранжа. При нахождении экстремалей можно ограничиться рассмотрением лишь двух случаев:

1. *вырожденный*: $\lambda_0 = 0$, $\max\limits_x \left|\vec{\lambda}\left(x\right)\right| > 0$;
2. *невырожденный*: $\lambda_0 = 1$.

Примером задачи Лагранжа служит задача о геодезических на поверхности $\varphi\left(x, y, z\right) = 0$, $(\boldsymbol{\nabla}\varphi \neq \mathbf{0}$ во всех точках). *Геодезической* называется кривая минимальной длины, соединяющая две заданные точки поверхности и целиком лежащая на ней:

$$\begin{array}{l} J\left(\mathbf{r}\left(\cdot\right)\right) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left|\dot{\mathbf{r}}\left(t\right)\right| \, dt \to \min, \\ \mathbf{r}\left(t_0\right) = \mathbf{r}_0, \mathbf{r}\left(t_1\right) = \mathbf{r}_1, \\ \varphi\left(\mathbf{r}\left(t\right)\right) = 0 \, \forall t \in \left[t_0, t_1\right]. \end{array}$$

Уравнение геодезических (при натуральном параметре кривой t)

$$\ddot{\mathbf{r}}\left(t\right) = \lambda\left(t\right) \boldsymbol{\nabla}\varphi,$$

где $\lambda\left(t\right)$ — неизвестный множитель Лагранжа.

Пример: $\int_0^{\pi/2} \left(y_1^2 + y_2^2 - \left(y_1'\right)^2 - \left(y_2'\right)^2\right) \, dx \to \mathrm{extr}$,
$y_1\left(x\right) - y_2\left(x\right) = 2 \sin x$,
$y_1\left(0\right) = y_2\left(0\right) = y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Решение: Для функции Лагранжа

$$L = \lambda_0 \left(y_1^2 + y_2^2 - \left(y_1' \right)^2 - \left(y_2' \right)^2 \right) + \lambda(x)\left(y_1 - y_2 - 2\sin x \right)$$

составляем систему уравнений Лагранжа

$$\begin{cases} L'_{y_1} - \frac{d}{dx} L'_{y_1'} = 2\lambda_0 y_1 + \lambda + 2\lambda_0 y_1'' = 0, \\ L'_{y_2} - \frac{d}{dx} L'_{y_2'} = 2\lambda_0 y_2 - \lambda + 2\lambda_0 y_2'' = 0, \end{cases}$$

Вырожденный случай невозможен, так как при $\lambda_0 = 0$ получаем $\lambda(x) \equiv 0$, что противоречит нетривиальности набора множителей Лагранжа. Полагая поэтому $2\lambda_0 = 1$, приходим к системе

$$\begin{cases} y_1 + \lambda + y_1'' = 0, \\ y_2 - \lambda + y_2'' = 0, \\ y_1 - y_2 = 2\sin x. \end{cases}$$

Складывая первые два уравнения, получаем $(y_1 + y_2)'' + (y_1 + y_2) = 0$, откуда

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2C_1 \cos x + 2C_2 \sin x, \\ y_1 - y_2 = 2\sin x, \end{cases}$$

а потому

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x, \\ y_2 = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sin x. \end{cases}$$

После определения констант из граничных условий получаем ответ:

$$\begin{cases} y_1 = \cos x + \sin x, \\ y_2 = \cos x - \sin x \quad \blacksquare \end{cases}$$

Задачи

В аудитории:

1. $\int_0^1 \left((y_1')^2 + 2(y_2')^2 + y_2^2\right) dx \to \mathrm{extr},$
$y_2'(x) = y_1(x),\ x \in [0,1],$
$y_1(0) = -2,\ y_2(0) = 1,$
$y_1(1) = -\frac{1}{e},\ y_2(1) = 0.$

2. $\int_0^1 \dot{x}_2^2\, dt \to \mathrm{extr},$
$\dot{x}_1 = x_2,\ t \in [0,1],$
$x_1(0) = x_2(0) = 0,$
$x_1(1) = 1,\ \dot{x}_2(1) = 0.$

3. Показать, используя принцип Гамильтона , что траектория движения по инерции материальной точки по поверхности $\varphi(x,y,z) = 0$ является геодезической данной поверхности.

На дом:

1. $\int_0^1 \left((y_1')^2 + (y_2')^2 + y_1^2 + y_2^2\right) dx \to \mathrm{extr},$
$y_2(x) + y_1(x) = 2\,\mathrm{sh}\, x,\ x \in [0,1],$
$y_1(0) = y_2(0) = 1,\ y_1(1) = \mathrm{sh}\, 1 + \mathrm{ch}\, 1,$
$y_2(1) = \mathrm{ch}\, 1 - \mathrm{sh}\, 1.$

2. $\int_0^1 \dot{x}_1^2\, dt \to \mathrm{extr},$
$\dot{x}_1 = -x_2,\ t \in [0,1],$
$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_1(1) = 1,\ \dot{x}_2(1) = 0.$

3. Найти геодезические на цилиндре.

7. Задача Лагранжа в понтрягинской форме

Постановка задачи.

$$J(\vec{x}(\cdot),\vec{u}(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t,\vec{x}(t),\vec{u}(t))\,dt \to \underset{D}{\mathrm{extr}},$$

$$\begin{gathered} D = \{(\vec{x}(t),\vec{u}(t)) : t \in [t_0,t_1], \\ \vec{x}(\cdot) \in C^1[t_0,t_1],\ \vec{u}(\cdot) \in C[t_0,t_1], \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0,\ \vec{x}(t_1) = \vec{x}_1, \\ \dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(t,\vec{x}(t),\vec{u}(t)),\ t \in (t_0,t_1)\} \end{gathered}$$

В данной задаче область определения допустимой пары $(\vec{x}(t),\vec{u}(t))$ — отрезок времени $[t_0,t_1]$ — и граничные значения фазового вектора $\vec{x}_0,\vec{x}_1$ считаются заданными. Интегрант $F(t,\vec{x},\vec{u})$ и функции $f_i(t,\vec{x},\vec{u})$, определяющие уравнения движения управляемого объекта в фазовом пространстве, принадлежат пространству $C^2(R^{1+n+m})$.

Необходимые условия экстремума.

Всякая подозрительная на экстремум функция $(\vec{x}^*(t),\vec{u}^*(t)) \in D$ является *экстремалью* — решением следующей краевой задачи Эйлера для функции Лагранжа: существует нетривиальный набор множителей Лагранжа $\left\{\lambda_0,\vec{\lambda}(t)\right\}$: $|\lambda_0| + \max_t \left|\vec{\lambda}(t)\right| > 0$ такой, что

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla_{\vec{x}}L - \frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\vec{x}}}L = 0, \\ \dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(t,\vec{x}(t),\vec{u}(t)), \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \\ \vec{x}(t_1) = \vec{x}_1, \\ \nabla_{\vec{u}}L = 0, \end{array}\right.$$

Краевая задача для *векторного уравнения Эйлера-Лагранжа* + условие стационарности

Здесь

$$L\left(t,\vec{x},\vec{u},\dot{\vec{x}}\right)\equiv\lambda_0 F\left((t,\vec{x},\vec{u})\right)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(t\right)\left(f_i\left(t,\vec{x}\left(t\right),\vec{u}\left(t\right)\right)-\dot{x}_i\left(t\right)\right)$$

— функция Лагранжа. При нахождении экстремалей можно ограничиться рассмотрением двух случаев:

1. *вырожденный*: $\lambda_0=0$, $\max_t\left|\vec{\lambda}\left(t\right)\right|>0$;

2. *невырожденный*: $\lambda_0=1$.

Для записи необходимых условий экстремума удобно также использовать *функцию Понтрягина*

$$H\left(t,\vec{x},\vec{u}\right)\equiv\lambda_0 F\left((t,\vec{x},\vec{u})\right)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(t\right)f_i\left(t,\vec{x}\left(t\right),\vec{u}\left(t\right)\right)$$

с помощью которой эти условия можно записать в форме следующей *канонической системы*

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial\lambda_i},\\ \dot{\lambda}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\\ \vec{x}\left(t_0\right)=\vec{x}_0\\ \vec{x}\left(t_1\right)=\vec{x}_1\\ \frac{\partial H}{\partial u_l}=0\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{c}\text{Краевая задача для}\\ \text{канонической системы}\\ +\\ \text{условие стационарности}\\ \text{функции Понтрягина по } u\end{array}\right.$$

или — в векторном виде —

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\vec{x}}=\nabla_{\vec{\lambda}}H,\\ \dot{\vec{\lambda}}=-\nabla_{\vec{x}}H\\ \vec{x}\left(t_0\right)=\vec{x}_0\\ \vec{x}\left(t_1\right)=\vec{x}_1\\ \nabla_{\vec{u}}H=0\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{c}\text{Краевая задача для векторной}\\ \text{канонической системы}\\ +\\ \text{условие стационарности}\\ \text{функции Понтрягина по } u\end{array}\right.$$

Пример. *Математический маятник*

$$\ddot{x} + x = u$$

в начальный момент времени $t = 0$ *покоится при заданном угле отклонения:* $x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0$. *За отрезок времени* $t \in [0,1]$ *перевести его в устойчивое состояние* $x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 0$ *с минимальным расходом силы* $\int_0^1 u^2\,dt \to \min$.

Решение.

Первый способ. Для функции Лагранжа $L \equiv \lambda_0 u^2 + \lambda(t)(\ddot{x} + x - u)$ выписываем краевую задачу

$$\begin{cases} L'_x - \frac{d}{dt}L'_{\dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}L'_{\ddot{x}} = \lambda + \ddot{\lambda} = 0 \\ L'_u = 2\lambda_0 u - \lambda = 0 \\ \ddot{x} + x = u \end{cases}$$

В вырожденном случае $\lambda_0 = 0$ получаем $\lambda(t) \equiv 0$, что противоречит нетривиальности набора множителей Лагранжа. Полагая далее $2\lambda_0 = 1$, находим последовательно

$$u = \lambda \Rightarrow \ddot{u} + u = 0 \Rightarrow x^{(4)} + 2x^{(2)} + x = 0 \Rightarrow$$
$$x = (C_1 + C_2 t)\cos t + (C_3 + C_4 t)\sin t.$$

Из граничных условий получаем

$$\begin{cases} x(0) = C_1 = 1 \\ \dot{x}(0) = C_2 + C_3 = 0 \\ x(1) = (C_1 + C_2)\cos 1 + (C_3 + C_4)\sin 1 = 0 \\ \dot{x}(1) = (C_2 + C_3 + C_4)\cos 1 + (C_4 - C_1 - C_2)\sin 1 = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 1, C_4 = -\operatorname{tg}^2 1,\ C_2 = -\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg}^2 1 - 1,\ C_3 = \operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg}^2 1 + 1$. Неизвестная сила $u(t) \equiv \ddot{x}(t) + x(t)$.

Второй способ. Переходя к фазовым координатам $x_1 \equiv x$, $x_2 = \dot{x}$, записываем уравнение движения $\ddot{x}+x = u$ в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - x_1. \end{cases}$$

Следовательно, функция Понтрягина $H \equiv \lambda_0 u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (u - x_1)$, а каноническая система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - x_1 \\ \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 2\lambda_0 u + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, получаем тот же ответ, что и в первом способе ■

Задачи

В аудитории:

1. $\int_0^1 u^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} - x = u,\ x(0) = 2,$
   $\dot{x}(0) = 0,\ x(1) = 2\,\mathrm{ch}\,1,\ \dot{x}(1) = 2\,\mathrm{sh}\,1;$
2. $\int_0^1 \left(x^2 + u^2\right)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = x + u,$
   $x(0) = 0,\ x(1) = 2\,\mathrm{sh}\sqrt{2};$
3. $\int_0^{\pi/2} u^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \ddot{x} + x = u,\ x(0) = 0,$
   $\dot{x}(0) = 1,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1;$

На дом:

1. $\int_0^1 \left(x^2+u^2\right)\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = -x+u,$
   $x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0;$

2. $\int_0^1 u^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \dot{x} = 2x-u,$
   $x(0)=0,\ x(1)=\operatorname{sh}2;$

3. $\int_0^{\pi/4} u^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \ddot{x}+4x=u,$
   $x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1,$
   $x\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,\ \dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.$

8. Задача Понтрягина (оптимального управления)

Постановка задачи.

$$J\left(\vec{x}(\cdot),\vec{u}(\cdot)\right)=\int\limits_{t_0}^{t_1} F\left(t,\vec{x}(t),\vec{u}(t)\right)\,dt \to \max_D,$$

$$\begin{gathered}D=\{\left(\vec{x}(t),\vec{u}(t)\right): t\in[t_0,t_1],\\ \vec{x}(\cdot)\in KC^1[t_0,t_1],\ \vec{u}(\cdot)\in KC[t_0,t_1],\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0,\ \vec{x}(t_1)=\vec{x}_1,\\ \vec{u}(t)\in U,\\ \dot{\vec{x}}(t)=\vec{f}\left(t,\vec{x}(t),\vec{u}(t)\right),\ t\in T_c\subset(t_0,t_1)\}\end{gathered}$$

В данной задаче область определения допустимой пары $\left(\vec{x}(t),\vec{u}(t)\right)$ — отрезок времени $[t_0,t_1]$ — и граничные значения фазового вектора $\vec{x}_0,\vec{x}_1$ считаются заданными, T_c — множество точек непрерывности управления $\vec{u}(\cdot)$. Интегрант $F(t,\vec{x},\vec{u})$ и функции $f_i(t,\vec{x},\vec{u})$, определяющие уравнения движения управляемого объекта в фазовом пространстве, принадлежат пространству $C^2\left(R^{n+m+1}\right)$. В дополнение к стандартным условиям, характерным для задачи Лагранжа, здесь присутствует дополнительное *условие Понтрягина:* $\vec{u}(t) \in U$, $\forall t$, где множество U не обязательно является открытым (в случае открытого множества задача является лагранжевой).

Необходимые условия экстремума.

Для записи необходимых условий экстремума используем функцию Понтрягина

$$H(t, \vec{x}, \vec{u}) \equiv \lambda_0 F((t, \vec{x}, \vec{u})) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) f_i(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)),$$

с помощью которой эти условия можно записать в форме следующей канонической системы: существует нетривиальный набор множителей Лагранжа $\left\{\lambda_0, \vec{\lambda}(t)\right\} : |\lambda_0| + \max_t \left|\vec{\lambda}(t)\right| > 0$ такой, что $\forall t \in T_c$

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \\ \dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \\ \vec{x}(t_1) = \vec{x}_1 \\ H(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) = \max\limits_{\vec{u} \in U} H(t, \vec{x}(t), \vec{u}) \end{cases}$$

Краевая задача для канонической системы уравнений + принцип максимума

или — в векторном виде —

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \nabla_{\vec{\lambda}} H, \\ \dot{\vec{\lambda}} = -\nabla_{\vec{x}} H \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \\ \vec{x}(t_1) = \vec{x}_1 \\ H(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) = \max\limits_{\vec{u} \in U} H(t, \vec{x}(t), \vec{u}) \end{cases}$$

Краевая задача для векторной канонической системы + принцип максимума

Пример. *Синтезировать оптимальные по быстродействию траектории в задаче об управлении материальной точкой в вязкой среде:*

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}+\beta\dot{x}=u\,(t)\,,\ 0\leqslant t\leqslant t_1,\\
&-1\leq u\,(t)\leq 1,\\
&x\,(0)=x_0,\ \dot{x}\,(0)=\dot{x}_0,\\
&t_1\to\min\ (\beta>0)\,.
\end{aligned}$$

Решение. Строго говоря, задача быстродействия не принадлежит классу вышеописанных задач оптимального управления, так как временной интервал управления $[0,t_1]$ в ней не задан. Тем не менее, приведенные выше необходимые условия экстремума выполняются и в данной задаче. Вдобавок можно доказать, что в задаче быстродействия $\max_t\left|\vec{\lambda}\,(t)\right|>0.$

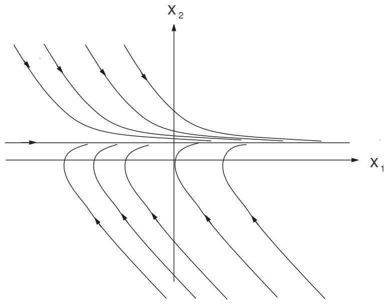
Вводя фазовые координаты $x_1\equiv x$, $x_2\equiv\dot{x}$ и записывая функционал задачи в интегральном виде $-t_1=\int_0^{t_1}(-1)\ dt\to$ max, получаем с помощью функции Понтрягина $H=-\lambda_0+$ $\lambda_1\,(t)\,x_2+\lambda_2\,(t)\,(u-\beta x_2)$ следующие необходимые условия экстремума

$$\begin{cases}
\dot{x}_1=\frac{\partial H}{\partial\lambda_1}=x_2,\\
\dot{x}_2=\frac{\partial H}{\partial\lambda_2}=u-\beta x_2,\\
\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0,\\
\dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1+\beta\lambda_2,\\
\lambda_2\,(t)\,u\,(t)=\max\limits_{-1\leqslant u\leqslant 1}\lambda_2\,(t)\,u.
\end{cases}$$

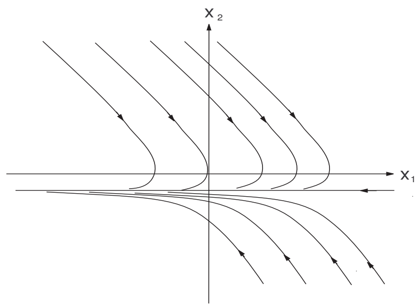
Решив сопряженные уравнения, находим $\lambda_1\,(t)=C_1$, $\lambda_2\,(t)=$ $C_1/\beta+C_2\exp\,(\beta t)\,.$ Отсюда следует, что множитель $\lambda_2\,(t)$ на любом временно́м интервале меняет свой знак не более одного раза. Далее, из принципа максимума получаем $u\,(t)\,=\,\operatorname{sign}\lambda_2\,(t)\,.$ Таким образом, оптимальное управление релейно (принимает только свои граничные значения

± 1) и переключается с одного значения на другое не более одного раза. Нарисуем семейства траекторий управляемой системы на фазовой плоскости (x_1, x_2), отвечающих управлениям $u(t) = \pm 1$:

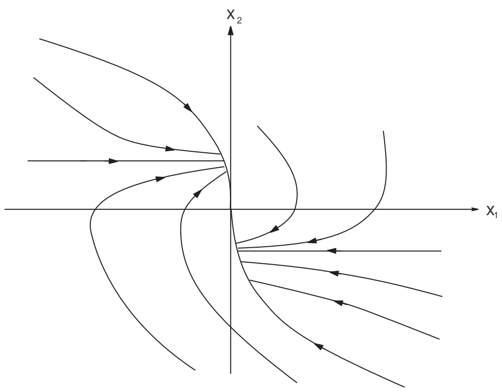
$u(t) = +1$



$u(t) = -1$



Оптимальная фазовая траектория состоит из не более чем двух кусков этих двух семейств и заканчивается в начале координат. Единственный способ удовлетворить указанным требованиям изображен на нижеследующем рисунке (синтез оптимальных траекторий):



■

Задачи

В аудитории:

1. Синтезировать оптимальные по быстродействию траектории в следующих задачах управления по быстродействию: $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $x(t_1) = \dot{x}(t_1) = 0$, $t_1 \to \min$

   (a) $\ddot{x} = u$, $u_1 \le u \le u_2$;

   (b) $\ddot{x} + x = u$, $u_1 \le u \le u_2$;

   Здесь $u_{1,2}$ — заданные величины (параметры задач). Исследовать зависимость решений от указанных параметров.

2. Решить задачу о мягкой посадке космического аппарата с минимальным расходом топлива.

На дом:

1. Синтезировать оптимальные по быстродействию траектории в следующих задачах управления по быстродействию: $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $x(t_1) = \dot{x}(t_1) = 0$, $t_1 \to \min$

   (a) $\ddot{x} - x = u$, $u_1 \le u \le u_2$;

   (b) $\ddot{x} + \beta x = u$, $u_1 \le u \le u_2$.

   Здесь $\beta > 0, u_{1,2}$ — заданные величины (параметры задач). Исследовать зависимость решений от указанных параметров.

9. Вариационные задачи с подвижными границами

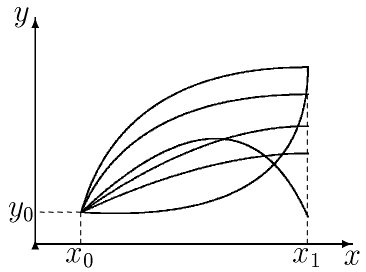
Постановка задачи.

$$J\left(\left(\vec{y}\left(\cdot\right),\left[x_0,x_1\right]\right)\right)=\int\limits_{x_0}^{x_1}F\left(x,\vec{y}\left(x,\vec{y}'\left(x\right)\right)\right)\,dx+ \\ +f\left(x_0,\vec{y}\left(x_0\right),x_1,\vec{y}\left(x_1\right)\right)\to\underset{D}{\operatorname{extr}}$$

В данной задаче область определения допустимой функции — отрезок $[x_0, x_1]$ — в общем случае не задан. Определяющие *функционал Больца* функции $F\left(x,\vec{y},\vec{y}'\right)\in C^2\left(R^{2n+1}\right)$, $f\left(x_0,\vec{y}_0,x_1,\vec{y}_1\right)\in C^2\left(R^{2n+2}\right)$

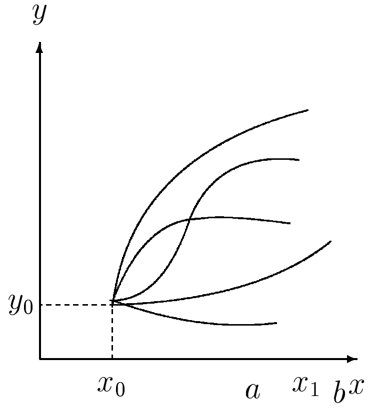
Рассмотрим три варианта постановки подобных задач, отличающиеся друг от друга множеством допустимых функций:

$\boxed{\mathbf{I}_1}$ $D_1=\left\{\begin{array}{c} y\left(x\right):x\in\left[x_0,x_1\right],\ y\left(\cdot\right)\in C^2\left[x_0,x_1\right], \\ y\left(x_0\right)=y_0,\ \text{величины } x_0,x_1,y_0 \text{ заданы}\end{array}\right\}$



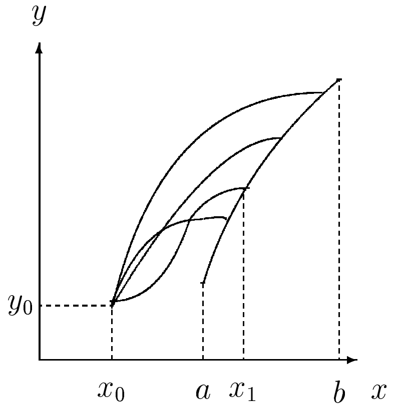
Пучок допустимых кривых в задаче I_1 (ордината правого конца кривой произвольна)

$\boxed{\mathbf{I}_2}$ $D_2 = \left\{ \begin{array}{c} y(x) : x \in [x_0, x_1], \;\; y(\cdot) \in C^2[x_0, x_1], \\ y(x_0) = y_0, \; x_1 \in (a, b), \text{ величины } x_0, y_0, a, b \text{ заданы} \end{array} \right\}$



Пучок допустимых кривых в задаче I_2 (положение правого конца кривой произвольно)

$\boxed{\mathbf{I}_3}$ $D_3 = \left\{ \begin{array}{c} y(x) : x \in [x_0, x_1], \;\; y(\cdot) \in C^2[x_0, x_1], \;\; y(x_0) = y_0, \\ x_1 \in (a, b), \;\; y(x_1) = g(x_1), \\ \text{величины } x_0, y_0, a, b \text{ и функция } g(\cdot) \text{ заданы} \end{array} \right\}$



Пучок допустимых кривых в задаче I_3 (правый конец кривой скользит по заданной кривой $y = g(x)$)

Необходимые условия экстремума.

Всякая подозрительная на экстремум функция $\vec{y}^*(x) \in D$ является *экстремалью* — решением следующей краевой задачи:

$\begin{cases} \nabla_{\vec{y}} F - \frac{d}{dx} \nabla_{\vec{y}'} F = 0, \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \\ \text{Условие трансверсальности} \\ \text{на правом конце кривой} \end{cases}$	Краевая задача для *векторного уравнения Эйлера*

Условие трансверсальности зависит от типа рассматриваемой задачи. В вышеперечисленных задачах они имеют, соответственно, следующий вид:

$\boxed{\mathbf{I}_1}$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) + \frac{\partial f}{\partial y_1}(y(x_1)) = 0;$$

$\boxed{\mathbf{I}_2}$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) + \frac{\partial f}{\partial y_1}(x_1, y(x_1)) = 0; \\ F(x_1, y(x_1), y'(x_1)) + \\ + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, y(x_1)) + y'(x_1) \frac{\partial f}{\partial y_1}(x_1, y(x_1)) = 0; \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{I}_3}$

$$\begin{aligned} & F(x_1, y(x_1), y'(x_1)) + \\ & + (g'(x_1) - y'(x_1)) \frac{\partial F}{\partial y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) + \\ & + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, y(x_1)) + g'(x_1) \frac{\partial f}{\partial y_1}(x_1, y(x_1)) = 0. \end{aligned}$$

Если подвижным является не правый, а левый конец допустимой кривой, то условия трансверсальности выписывается для него. Для того чтобы получить нужное условие из соответствующего условия на правом конце достаточно в последнем произвести замены

$$\begin{gathered} F \to -F \\ F'_{y'} \to -F'_{y'} \\ \ldots \end{gathered}$$

Пример. $\int_0^{x_1} y'^2\,dx + y^2(0) \to \text{extr},\ y(x_1) = x_1^2 + 2$
Решение:

$$\begin{gathered} F'_y - \tfrac{d}{dx}F'_{y'} = -2y'' = 0 \Longrightarrow y(x) = C_1x + C_2 \\ F'_y - 2\,y\big|_{x=0} = 2\left(y'(0) - y(0)\right) = 2\left(C_1 - C_2\right) = 0 \\ \Longrightarrow C_1 = C_2 \\ F + \left(g'(x_1) - y'(x_1)\right)F'_{y'}\Big|_{x=x_1} = y'^2(x_1) + \\ + \left(2x_1 - y'(x_1)\right)2y'(x_1) = y'(x_1)\left(4x_1 - y'(x_1)\right) = \\ = C_1\left(4x_1 - C_1\right) = 0 \\ y(x_1) = C_1x_1 + C_2 = x_1^2 + 2 \end{gathered}$$

a) $C_1 = C_2 = 0 \Longrightarrow y(x) \equiv 0 \Longrightarrow x_1^2 + 2 = 0 \Longrightarrow$ нет решения;

b) $4x_1 = C_1 \Longrightarrow C_1x_1 + C_2 - x_1^2 - 2 = 3x_1^2 + 4x_1 - 2 = 0$
$\Longrightarrow x_1 = \frac{\sqrt{10}-2}{3},\ y(x) = \frac{4\left(\sqrt{10}-2\right)}{3}(x-1),\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{10}-2}{3}$.

Задачи

В аудитории:

1. $\int_0^{x_1} y'^2\,dx \to \text{extr},\ y(0) = 0,\ y(x_1) = -x_1 - 1$
2. $\int_0^{1/2} \left(y - y'^2\right)\,dx \to \text{extr},\ y(0) = 0$
3. $\int_0^3 4y'^2y^2\,dx + y^4(0) - 8y(3) \to \text{extr}$

4. $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx \to \mathrm{extr},\ y(x_0) = x_0^2,\ y(x_1) = x_1 - 5$

5. Вывести условия трансверсальности в задачах а) с векторными функциями; б) со старшими производными

На дом:

1. $\int_0^{x_1} y'^2\, dx \to \mathrm{extr},\ y(0) = 0,\ y(x_1) = \frac{2}{1-x_1}$

2. $\int_0^1 \left(y + y'^2\right) dx - 2\,\mathrm{sh}\,(1)\, y(1) \to \mathrm{extr}$

3. $\int_0^1 e^y y'^2 dx + 4e^{y(0)} + 32e^{-y(1)} \to \mathrm{extr}$

4. $\int_0^{\pi/2} \left(y'^2 - y^2\right) dx + y^2(0) - y^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4y\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \mathrm{extr}$

Задачи по вариационному исчислению и теории оптимального управления

Методическая разработка для студентов радиофизического факультета ННГУ

Составители:

Ирина Ростиславовна Смирнова
Иван Паисьевич Смирнов

Подписано к печати . Формат 60 x 84 1/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. печ.л. 2.2.
Тираж 500 экз. Заказ . Бесплатно.

Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского.
603600 ГСП-20, Н.Новгород, просп. Гагарина, 23.
Типография ННГУ. 603600, Н.Новгород, ул. Б. Покровская, 37.