Государственный комитет Российской Федерации
по высшему образованию
Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского
Радиофизический факультет
Кафедра математики

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ. КЛАССИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СХЕМЫ.

Нижний Новгород
1996

УДК 519.2 (076.1)
Решение задач по теории вероятностей. Алгебра событий.
Классическая и геометрическая вероятностные схемы.
/Сост. И.Р.Смирнова, И.П.Смирнов — Н.Новгород:
ННГУ, 1996 — 14 с.

Приводится разбор решений типовых задач по соответствующим разделам теории вероятностей. Рассматриваются задачи на основные операции над случайными событиями и задачи, приводящие к классической и геометрической схемам вычисления вероятностей. Необходимый теоретический минимум сообщается в ходе решения задач.

Методическая разработка рассчитана на студентов 2-го курса дневного отделения радиофизического факультета ННГУ.

Составители: Смирнова Ирина Ростиславовна
Смирнов Иван Паисьевич
Рецензенты: Калинин Алексей Вячеславович
Богословская Надежда Матвеевна

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского
1996

1 Алгебра событий

Фундаментальными для теории вероятностей являются следующие понятия:

эксперимент — испытание — исход испытания— событие.

Под *экспериментом* понимается всякое явление (физическое, экономическое и т.д.), которое хотя бы в принципе, может наблюдаться (в неизменных условиях) неограниченное число раз. Всякое наблюдение этого явления называется иначе *испытанием* или опытом. Предполагается, что результатом испытания служит некоторый *исход* эксперимента ω (*случай, элементарное событие*). Множество всех взаимно исключающих исходов называется *пространством элементарных событий* и обозначается Ω: $\Omega = \{\omega\}$. *Событие* (наблюдаемое в условиях данного эксперимента)— это всякий факт, выполнение (или невыполнение) которого однозначно фиксируется в условиях данного эксперимента при каждом испытании.

На множестве всех событий, наблюдаемых в данном эксперименте, вводятся следующие логико–алгебраические операции. Пусть Ω также обозначает *достоверное* (всегда наступающее в условиях эксперимента) событие, $\emptyset$ — *невозможное* событие. Для каждого события A пусть $\bar{A}$ — событие, состоящее в том, что A не происходит (*противоположное* событие). Для любых двух событий A, B пусть $A \cdot B \equiv A \cap B$ — событие, состоящее в совместном их наступлении (*произведение*), $A + B \equiv A \cup B$ — событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них: или A, или B, или A и B одновременно (*сумма*). Говорят, что событие A *влечет* событие B ($A \subset B$), если при наступлении A обязятельно наступает и B. Если $A \subset B$ и при этом $B \subset A$, то по определению эти события *совпадают* ($A = B$). Если $A \cdot B = \emptyset$, то события называются *несовместными*.

Исход ω *благоприятствует* событию A, если при этом исходе событие A имеет место. Любой исход либо благоприятствует, либо не благоприятствует каждому фиксированному событию. Учитывая это, можно отождествить всякое событие A с подмножеством благоприятствующих ему исходов пространства Ω. Нетрудно проверить, что при этом противоположному событию $\bar{A}$ отвечает дополнительное до Ω множество $\Omega \backslash A$, сумме событий — теоретико-множественная сумма (объединение), произведению событий — теоретико-множественное произведение (пересечение) соответствующих подмножеств Ω. Далее, влечение $A \subset B$ означает, что A есть подмножество B, несовместность событий A и B означает, что множества A и B имеют пустое пересечение $\emptyset$, равенство событий означает, что отвечающие им подмножества Ω состоят из одних и тех же элементов.

В соответствии с описанной выше интерпретацией события как подмножества пространства элементарных событий рассматриваемые в этом разделе задачи на доказательство равенства двух событий между собой, или на доказательство эквивалентности некоторых высказываний относительно событий допускают вместе с чисто логическим доказательством эквивалентное по содержанию, но несколько отличное по форме теоретико-множественное решение.

Задача 1. *Доказать, что для любых событий* A, B, C

$$A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}, \tag{1}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{2}$$

Решение. Установим эквивалентность утверждений $A \subset B$ и $\bar{B} \subset \bar{A}$ путем логических рассуждений. Если $A \subset B$, то при осуществлении события $\bar{B}$ событие A произойти не может (иначе произойдет влекомое A событие B). Следовательно, если $A \subset B$, то непременно $\bar{B} \subset \bar{A}$ ($A \subset B \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$). Аналогично устанавливается, что $\bar{B} \subset \bar{A} \Rightarrow A \subset B$. Утверждение (1) доказано.

Проведем теоретико-множественное доказательство формулы (2). Пусть исход $\omega \in A \cap (B \cup C)$. Тогда $\omega \in A$ и одновременно $\omega \in B \cup C$, то есть хотя бы одному из множеств B или C исход ω принадлежит. Пусть, для определенности, — это B. Тогда $\omega \in A \cap B$ и, тем более, $\omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Следовательно, любой элемент множества $A \cap (B \cup C)$ принадлежит множеству $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, то есть $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. С другой стороны, если $\omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, то ω принадлежит хотя бы одному из множеств $A \cap B$ или $A \cap C$. Пусть это $A \cap B$, тогда $\omega \in A$ и $\omega \in B$. Поэтому $\omega \in B \cup C$ и $\omega \in A \cap (B \cup C)$. Следовательно, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$, что с учетом ранее доказанного обратного включения завершает доказательство равенства (2). Задача 1 решена.

При решении задач теории вероятностей важное значение имеет умение правильно составить формулу, выражающую зависимость сложного события от событий простейшего вида, вероятности которых легко найти

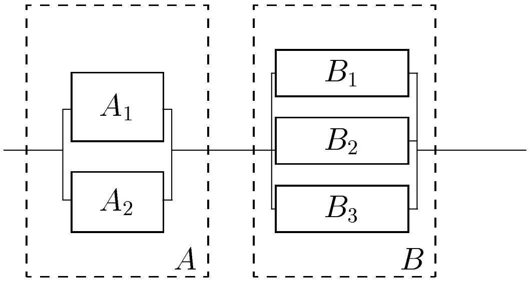

Рис. 1: Блок схема линии

непосредственно. Для составления этих формул нужно четко понимать логический смысл введенных выше операций над событиями.

Задача 2. *Для работы линии (см. рис.1) необходимо и достаточно, чтобы были исправны (только!) один элемент в блоке A и два элемента в блоке B. Выразить событие C - линия исправна - через события $A_i\,(B_i)$ - i-ый элемент в блоке $A\,(B)$ исправен.*

Решение. Для получения искомой формулы составим таблицу (см. стр. 6).

Из этой таблицы получаем

$$C = ((A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2)) \cap ((B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3)\cup \\ \cup(B_1 \cap \bar{B}_2 \cap B_3) \cup \left(\bar{B}_1 \cap B_2 \cap B_3\right).$$

Задача 2 решена.

Линия исправна	Тогда и только тогда	Далее идет перечисление вариантов
C	$=$	(
Начало первого варианта	Элемент A_1 исправен	И при этом
(	A_1	$\bigcap$
Элемент A_2 не исправен	Конец первого варианта	Или
$\overline{A}_2$	)	$\bigcup$
Начало второго варианта	Элемент A_2 исправен	И при этом
(	A_2	$\bigcap$
Элемент A_1 не исправен	Конец второго варианта	Конец перечисления вариантов
$\overline{A}_1$	)	)
И при этом	Далее вновь идет перечисление	Исправны элементы B_1 и B_2 и неисправен B_3
$\bigcap$	(	$(B_1 \bigcap B_2 \bigcap \overline{B}_3)$
Или	Исправны элементы B_1 и B_3 и неисправен B_2	Или
$\bigcup$	$(B_1 \bigcap B_3 \bigcap \overline{B}_2)$	$\bigcup$
Исправны элементы B_2 и B_3 и неисправен B_1	Конец перечисления вариантов	
$(B_2 \bigcap B_3 \bigcap \overline{B}_1)$	)	

2 Классическая вероятностная схема

К классической вероятностной схеме описания эксперимента прибегают в тех случаях, когда эксперимент имеет конечное число "равновозможных" исходов: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. При этом обычно считается, что все исходы являются наблюдаемыми (событиями), вероятность каждого исхода полагается равной

$$P(\omega_i) = \frac{1}{N},$$

где N — общее число возможных исходов. Отсюда получается известная формула

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = \frac{K}{N},$$

где K — число благоприятствующих событию A исходов.

Подсчет чисел K и N обычно требует знания основных понятий и правил комбинаторики. К таковым относятся, например, понятия *перестановки, сочетания и размещения.* Перестановкой из n элементов называется всякое их расположение в определенном порядке (слева-направо); сочетанием из n элементов по k — всякое k-элементное подмножество множества, состоящего из n элементов, а размещением из n элементов по k — всякое (линейно) упорядоченное k-элементное подмножество такого множества. Многие комбинаторные результаты легко получаются из следующего *основного правила комбинаторики.*

Правило умножения: *пусть требуется произвести последовательно k операций, причем первую из них можно осуществить n_1 способами, вторую — при выполненной первой — n_2 способами, ..., k-ую — при выполненных $(k-1)$-ых предыдущих — n_k способами. Тогда общее число способов выполнения k операций равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.*

Задача 3. *Найти число*

1. *перестановок из n элементов;*
2. *сочетаний из n по k ;*
3. *размещений из n по k .*

Решение.

1. Получение всякой перестановки из n элементов — это результат осуществления n-последовательных операций: выбор первого элемента и помещение его на первое место, выбор второго элемента из оставшихся $(n-1)$-ых и помещение его на второе место и т.д. Ясно, что первую операцию можно выполнить n способами, вторую — $(n-1)$-им и т.д. Поэтому из правила умножения следует, что общее число перестановок $p_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

2. Получение любой перестановки из n элементов можно рассматривать как результат выполнения следующих трех последовательных операций:

   (a) выбор k элементов из n (k фиксировано!);

   (b) расположение их на первых k местах;

   (c) расположение оставшихся элементов на оставшихся $n-k$ местах.

   Число способов выполнения первой операции — это как раз число сочетаний из n по k. Обозначим его C_n^k. Число способов выполнения второй операции равно числу перестановок из k элементов $p_k = k!$. Аналогично третью операцию можно выполнить $(n-k)!$ способами. В соответствии с правилом умножения число способов выполнения трех последовательных операций равно $C_n^k \cdot k! \cdot (n-k)!$. Но оно же равно согласно п.1 $n!$ Отсюда получаем

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

3. Всякое размещение из n по k — результат выполнения двух последовательных операций:

   (a) выбор сочетания из n по k;

   (b) перестановка элементов этого сочетания.

   Первая операция выполняется C_n^k способами, вторая — $k!$ способами. В итоге число размещений из n по k

$$A_n^k = C_n^k \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

   Задача 3 решена.

Задача 4. *Рассматривается эксперимент с n-кратным бросанием симметричного шестигранного кубика. Построить вероятностное пространство, описывающее данный эксперимент. Найти вероятность выпадения "шестерки" k $(0 \leq k \leq n)$ раз.*

Решение. Очевидно, исход эксперимента однозначно определяется последовательностью $\omega = [i_1 i_2 \dots i_n]$, где i_j — количество очков, выпавшее при j-ом бросании, $1 \le i_j \le 6$. Из симметрии эксперимента следует, что все такие исходы равновозможны. Общее их число по основному правилу комбинаторики $N = \underbrace{6 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 6}_{n} = 6^n$. Прибегая к классической схеме описания данного эксперимента,заключаем, что вероятность любого исхода $P(\omega) = 6^{-n}$. Обозначим событие, состоящее в том, что при n бросаниях "шестерка" выпадет ровно k раз, через A. Подсчитаем число K благоприятствующих событию A исходов. Если $0 < k < n$, то каждый благоприятсвующий исход можно представить как результат осуществления трех последовательных операций:

1. выбор k "удачных" бросаний из n;
2. выбрасывание "шестерки" в этих k "удачных" бросаниях;
3. выбрасывание отличных от "шестерки" граней в оставшихся $n-k$ бросаниях.

Первую операцию можно выполнить C_n^k способами. Вторую операцию естественно рассматривать как последовательность k подопераций вида: выбрасывание "шестерки" при однократном бросании. Поэтому число способов выполнения второй операции есть $\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{k} = 1$. Аналогично, третья операция есть последовательность k подопераций вида: выбрасывание грани, отличной от "шестерки". Поэтому число способов ее выполнения равно $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}_{n-k} = 5^{n-k}$.

В итоге получаем

$$K = C_n^k \cdot 5^{n-k}$$

$$P(A) = \frac{K}{N} = \frac{C_n^k}{5^k} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \tag{3}$$

При $k = 0$ благоприятствующий исход есть последовательность n бросаний, при каждом из которых "шестерка" не выпадает. Ясно поэтому, что в этом случае $K = 5^n$. Аналогично, при $k = n$ $K = 1$. Поскольку $C_n^k = 1$ при $k = 0$ и $k = n$, то (3) дает верный ответ при всех $0 \le k \le n$. Задача 4 решена.

Задача 5. *В партии из n деталей k бракованных. На экспертизу наудачу выбирается l деталей. Какова вероятность, что среди выбранных деталей m бракованных?*

Решение. Исходом эксперимента в данном случае следует считать выборку из l деталей. Очевидно, что число всех исходов $N = C_n^l$, и все исходы равновозможны. Вычислим искомую вероятность по классической схеме. Для этого всякий благоприятствующий рассматриваемому событию исход представим как последовательность двух операций:

1. выбор m бракованных деталей из общего числа k;

2. выбор оставшихся $l - m$ небракованных деталей из множества, состоящего из $n - k$ таких элементов.

Первую операцию можно выполнить C_k^m, вторую — C_{n-k}^{l-m} способами. В итоге число благоприятствующих исходов

$$K = C_k^m \cdot C_{n-k}^{l-m}$$

$$P = \frac{K}{N} = \frac{C_k^m \cdot C_{n-k}^{l-m}}{C_n^l}$$

Задача 5 решена.

Задача 6. *Преподаватель наудачу раздает задания n студентам, сидящим за одним столом (слева-направо). Среди заданий лишь 2 совпадают между собой. Какова вероятность, что эти задания попадутся соседям?*

Решение.

Способ 1. Присвоим произвольным образом заданиям номера от 1 до n, указывающую расположение номеров выданных заданий слева-направо. Тогда все исходы равновозможны, и их число есть $n!$ Каждый благоприятствующий интересующему нас событию A исход представим как последовательность следующих трех операций:

1. перестановка совпадающих заданий между собой;

2. выдача совпадающих заданий (студентам-соседям);

3. выдача прочих заданий.

Первая операция выполняется $2! = 2$ способами, вторая — $(n-1)$-им способом (первому и второму, второму и третьему,… $(n-1)$-му и n-му студентам, считая слева-направо), третья — $(n-2)!$ способами. Таким образом,

$$K = 2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)! = 2(n-1)!$$

$$P(A) = \frac{2(n-1)!}{n!} = \frac{2}{n}.$$

<u>Способ 2</u>. Пронумеруем студентов слева-направо, присвоив им номера от 1 до n. Исходом эксперимента будем считать теперь множество из двух чисел $\omega = (a, b)$, где a, b — номера студентов, получивших совпадающие задания. Все такие исходы, очевидно, равновозможны, их число равно C_n^k. Исход благоприятствует событию A, если числа a, b отличаются друг от друга на 1. Таких исходов $n-1$ $((1;2),(2;3),\ldots,(n-1,n))$. Поэтому $K = n-1$,

$$P(A) = \frac{n-1}{C_n^k} = \frac{(n-1)\cdot 2!(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n}$$

Задача 6 решена.

Задача 7. *Из курса в 90 студентов деканат формирует три группы, в каждой из которых наудачу назначает старосту. Какова вероятность, что друзья Иванов, Петров и Сидоров все окажутся старостами?*

Решение.

<u>Способ 1</u>. Пронумеруем студентов произвольным образом от 1 до 90. Исходом эксперимента будем считать три упорядоченные набора по 30 чисел, первое из которых в каждом наборе есть номер студента, назначенного старостой. Все такие исходы, очевидно, равновозможны, их число

$$N = A_{90}^{30} A_{60}^{30} A_{30}^{30} = \frac{90!}{60!}\frac{60!}{30!}\frac{30!}{0!} = 90!$$

Исход благоприятствует интересующему нас событию, если номера студентов Иванова Петрова и Сидорова попадают на первые места в указанных наборах. Всякий такой исход является последовательностью четырех операций:

1. размещение номеров друзей на трех командных местах;

2. размещение 87-ми прочих номеров на 29-ти оставшихся местах первой группы;

3. размещение 58-ти номеров на 29-ти оставшихся местах второй группы;

4. размещение 29-ти оставшихся номеров на 29-ти оставшихся местах третьей группы.

Первая операция выполняется A_3^3 способами, вторая (при выполненной первой) - A_{87}^{29} способами, третья - A_{58}^{29} способами, четвертая - A_{29}^{29} способами. В итоге число благоприятствующих исходов

$$K = \frac{3!}{0!}\frac{87!}{58!}\frac{58!}{29!}\frac{29!}{0!} = 6 \cdot 87!,$$

а искомая вероятность

$$P\left(A\right) = \frac{3! \cdot 87!}{90!} = \frac{1}{117480} \simeq 8.5 \cdot 10^{-6}.$$

Способ 2. Будем считать исходом эксперимента тройку номеров студентов, попавших в старосты. Очевидно, все такие тройки равновозможны. Их число - C_{90}^3. Благоприятствует интересующему нас событию лишь один единственный исход, при котором в заветной тройке находятся номера друзей. Следовательно,

$$P\left(A\right) = \frac{1}{C_{90}^3} = \frac{3! \cdot 87!}{90!} = \frac{1}{117480}.$$

Задача 7 решена.

Из решения двух последних задач видно, что вероятностное пространство - математическая модель эксперимента - определяется, вообще говоря, не однозначно. От того, насколько удачно оно выбрано, зависит простота подсчета вероятностей тех или иных событий.

3 Геометрическая вероятностная схема

Данную вероятностную схему описания эксперимента применяют в тех случаях, когда множество равновозможных исходов эксперимента бесконечно. Пространство элементарных событий Ω в этом случае отождествляется с некоторым подмножеством конечномерного эвклидова пространства R^l, конечного l-мерного объема $mes\left(\Omega\right)$. Вероятность события

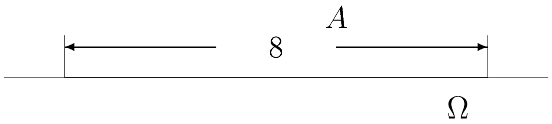

Рис. 2: Вероятностное пространство в задаче 8

A вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}.$$

Задача 8. *Разрыв телефонной линии длиной 10 км одинаково возможен в любой ее точке. Какова вероятность, что он произойдет на расстоянии не менее 1 км от ее концов?*

Решение. Возьмем в качестве пространства элементарных событий Ω отрезок длины 10(км) (рис.2). Исход эксперимента - разрыв линии в точке x, $0 \leq x \leq 10$ - отождествляем с этой точкой. Так как все исходы равновозможны, применим геометрическую схему для вычисления вероятности интересующего нас события $A \equiv \{x : 1 \leq x \leq 9\}$:

$$P(A) = \frac{8}{10}.$$

Задача 8 решена.

Задача 9. *Студент и преподаватель приходят на пересдачу зачета в течение одного и того же временного промежутка длительности T (с равной возможностью в любой его момент). Какова вероятность, что их встреча состоится, если преподаватель ждет студента τ_1, а студент преподавателя - τ_2 единиц времени ($\tau_{1,2} \leq T$).*

Решение. Обозначим через $t_{1,2}$ моменты прибытия субъектов встречи. Исход эксперимента однозначно описывается вектором $\omega = (t_1, t_2)$. Множество всех равновозможных исходов $\Omega = \{\omega\}$ образует квадрат $[0, T] \times [0, T]$ на плоскости $t_1 t_2$ (рис.3). Выделим в этом квадрате множество точек A, удовлетворяющих хотя бы одному из условий встречи:

1. $0 \leq t_1 - t_2 \leq \tau_2$ - студент дождется преподавателя;

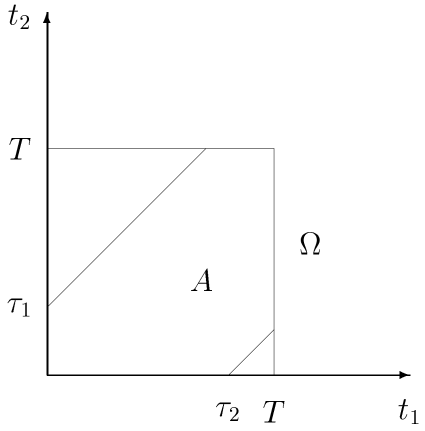

Рис. 3: Вероятностное пространство в задаче 9

2. $0 \le t_2 - t_1 \le \tau_1$ - преподаватель дождется студента.

Согласно геометрической схемы вероятность встречи

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} =$$

$$= \frac{T^2 - \frac{1}{2}\left((T-\tau_2)^2 + (T-\tau_1)^2\right)}{T^2} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\tau_2}{T}\right)^2 + \left(1 - \frac{\tau_1}{T}\right)^2\right].$$

При $\tau_1 = \tau_2 = T \quad P(A) = 1$; если же $\tau_1 \ll \tau_2 \le T$, то

$$P(A) \simeq \frac{\tau_2}{T}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_2}{T}\right) \le \frac{1}{2}.$$

Причина последнего удручающего результата - в неправильном поведении одного из субъектов. Какого? Неверно, другого. Предложить удовлетворительную модель поведения этого субъекта, гарантирующую встречу. Задача 9 решена.

Задача 10. *Значение скорости влетающей в вещество элементарной частицы равновозможно в интервале $[v, V]$, а время ее полета в веществе до поглощения равновозможно в промежутке $[0, T]$. Какова вероятность, что частица проникнет в вещество на глубину, большую S?*

Решение. Ясно, что при $S > VT$ вероятность интересующего нас события A равна нулю. Поэтому будем считать, что $S \leq VT$. Пусть u - скорость влетающей частицы, t - время ее полета до поглощения (считаем, что полет происходит с постоянной скоростью). Вектор $\omega = (u, t)$ полностью описывает эксперимент и с равной возможностью указывает на произвольную точку прямоугольника $\Omega \equiv [v, V] \times [0, T]$ на плоскости переменных u, t . Множество благоприятствующих событию A исходов описывается неравенством $ut \geq S$. Вычислим вероятность события по геометрической схеме. Если $vT \geq S$ (рис.4), то

$$mes\,(A) = (V - v)\left(T - \tfrac{S}{V}\right) - \int\limits_{S/V}^{S/v} \left(\tfrac{S}{t} - v\right) dt =$$
$$= (V - v)\,T - S \ln \tfrac{V}{v},$$
$$P\,(A) = \tfrac{mes(A)}{mes(\Omega)} = 1 - \tfrac{S}{(V-v)T} \ln \tfrac{V}{v}.$$

Если же $vT < S$ (рис.5), то

$$mes\,(A) = \int\limits_{S/V}^{T} \left(V - \tfrac{S}{t}\right) dt = VT - S\left(1 + \ln \tfrac{VT}{S}\right),$$
$$P\,(A) = \tfrac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \tfrac{V}{V-v} - \tfrac{S\left(1+\ln \frac{VT}{S}\right)}{(V-v)T}.$$

Задача 10 решена.

Задача 11. *Найти вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков длины не более 1 каждый можно построить треугольник.*

Решение. Обозначим длины отрезков соответственно x, y, z. Тогда $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ и вектор $\omega \equiv (x, y, z)$ с равной возможностью указывает на произвольную точку куба Ω (см. рис.6).

Множество благоприятствующих нашему событию A исходов описывается системой неравенств

$$\begin{cases} x + y > z \\ x + z > y \\ y + z > x \end{cases}$$

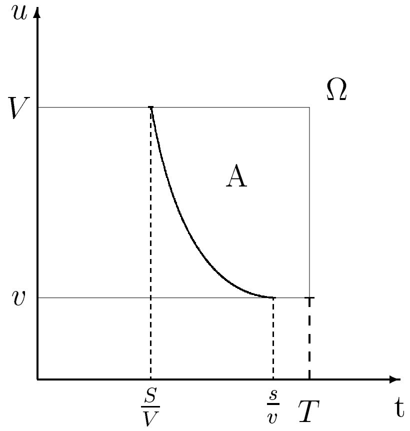

Рис. 4: Задача 10. Случай $vT \geq S$.

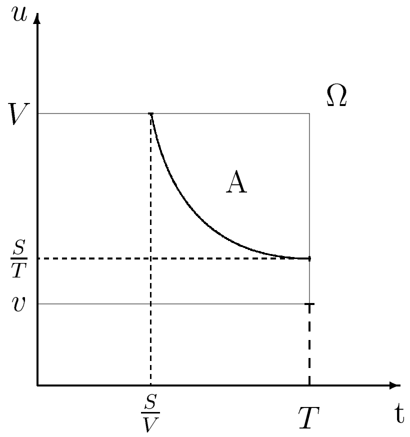

Рис. 5: Задача 10. Случай $vT < S$.

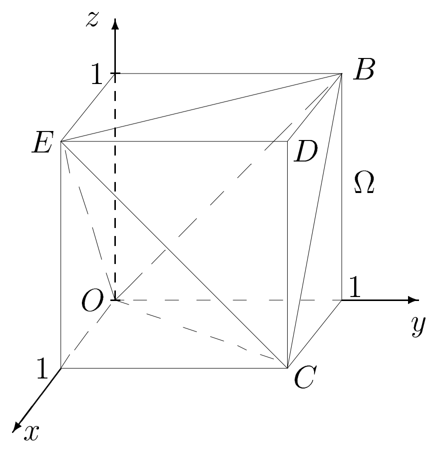

Рис. 6: Вероятностное пространство в задаче 11.

и геометрически представляет собой внутренность тела OBCDE. Вычисляя его объем $mes\,(A) = 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, находим искомую вероятность

$$P\,(A) = \frac{mes\,(A)}{mes\,(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$

Задача 11 решена.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.
АЛГЕБРА СОБЫТИЙ. КЛАССИЧЕСКАЯ
И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Составители:

Смирнова Ирина Ростиславовна, Смирнов Иван Паисьевич