Стохастический принцип максимума

Смирнов Иван Паисьевич

Оглавление

Аннотация

В данном сборнике собраны работы автора по стохастической теории оптимального управления, опубликованные им в период с 1977 г. Представленные результаты относятся к теории *стохастического принципа максимума*, который представляет собой обобщение принципа максимума Л.С.Понтрягина из детерминистической теории оптимального управления на определенный класс задач стохастического управления (*обобщенно программные управления*). Работы расположены в сборнике в хронологическом порядке и представлены в том виде, как они были опубликованы в соответствующих изданиях. Списки литературы даются отдельно для каждой главы; нумерации всех утверждений и формул сквозные.

Очевидные опечатки и мелкие неточности исправлены. Относительно неверных утверждений сделаны подстрочные сноски.

Глава 1.

Принципы минимума в задачах оптимального управления случайными процессами

УДК 531.36 + 62 - 50

Рассматривается задача оптимального управления решением системы стохастических интегральных уравнений Ито общего вида, когда управляющие параметры входят в неоднородные члены и коэффициенты уравнений. Устанавливаются необходимые условия оптимальности (в форме принципов минимума) для задачи оптимального управления с ограничениями. Приводится пример.

В теории управления случайными процессами, описываемыми стохастическими интегральными уравнениями Ито, можно выделить два направления. Первое направление, развиваемое в работах [1, 2] и др., связано с выводом уравнения Беллмана для функции выигрыша. Для второго направления, берущего свое начало в работах [3, 4], характерно получение необходимых условий оптимальности в формие принципов минимума (стохастические принципы минимума).

Данное исследование, примыкающее ко второму направлению, посвящено развитию общей функциональной методики [5, 6] в случае стохастических систем управления.

[1]Морозов С.Ф., И.П. Смирнов. Принципы минимума в задачах оптимального управления случайными процессами, *Прикладная математика и механика*, т. 42, вып. 2, 1978, стр. 233 – 244.

1.1. Постановка задачи

Рассматривается задача управления процессом, заданным системой стохастических интегральных уравнений общего вида (всюду предполагается суммирование по повторяющимся индексам)

$$\begin{aligned} \eta_i(t) &= \varphi_i(t, c(t)) + \int_0^t A_i(\tau, \eta(\tau), a(\tau))\, d\tau + \int_0^t B_{ij}(\tau, \eta(\tau), b(\tau))\, dw_j(\tau), \\ i &= 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m \end{aligned} \tag{1.1}$$

когда функции управления $a(\tau, \omega), b(\tau, \omega), c(\tau, \omega)$ входят в коэффициенты и неоднородные члены уравнений, $\varphi_i(t, c, \omega), A_i(t, x, a, \omega), B_{ij}(t, x, b, \omega)$ — случайные поля (ω — случай), а вторые интегралы в (1.1) понимаются в смысле Ито [7].

Частные пример такой задачи, когда $\varphi_i(t, c, \omega) \equiv \varphi_i(\omega)$, а функции $B_{ij}(t, x, b, \omega) \equiv B_{ij}(t)$ (или зависят от неслучайных компонент решения $\eta(t, \omega)$), изучен в [3] методами, отличными от излагаемых здесь.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $w(t, \omega)$ — m-мерный винеровский процесс, согласованный с неубывающим семейством полных по мере $\mathbf{P}$ σ-алгебр $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$, $t \geqslant 0$. Через $L_p(\mathfrak{BF})$, $1 \leqslant p < \infty$ обозначим банахово пространство прогрессивно измеримых ($\mathfrak{BF}$-измеримых) относительно потока $\{\mathfrak{F}_t\}$ случайных функций $\psi(t, \omega)$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$ с конечной нормой

$$\|\psi\|_p = \left[\int_{[0,T]\times\Omega} |\psi(t, \omega)|^p \, d(\mathrm{mes} \times \mathbf{P}) \right]^{1/p}$$

Пусть $H_p(\mathfrak{BF})$ — множество функций из $L_p(\mathfrak{BF})$, для которых $\sup \mathbf{M} |\psi(t, \omega)|^p < \infty$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Множество $H_p(\mathfrak{BF})$ всюду плотно в $L_p(\mathfrak{BF})$. Пусть $L_{p,n}(\mathfrak{BF}) = L_p(\mathfrak{BF}) \times \ldots \times L_p(\mathfrak{BF})$ (n раз) — пространство вектор-функций $\xi(t, \omega) \equiv \{\xi_1(t, \omega), \ldots, \xi_n(t, \omega)\}$ с нормой $\|\xi\|_{p,n}^p = \|\xi_1\|_p^p + \cdots + \|\xi_n\|_p^p$. Аналогично $H_{p,n}(\mathfrak{BF}) = H_p(\mathfrak{BF}) \times \ldots \times H_p(\mathfrak{BF})$ (n раз).

Функции $\varphi_i(t, c, \omega), A_i(t, x, a, \omega), B_{ij}(t, x, b, \omega)$ обладают следующими свойствами:

1) они измеримы по совокупности переменных при

$$t \in [0,T]\,,\ x \equiv \{x_1, \dots, x_n\} \in E^n,\ \omega \in \Omega,$$
$$a \equiv \{a_1, \dots, a_{m_1}\} \in D^a \subset E^{m_1},\ b \equiv \{b_1, \dots, b_{m_2}\} \in D^b \subset E^{m_2},$$
$$c \equiv \{c_1, \dots, c_{m_3}\} \in D^c \subset E^{m_3},$$

где D^a, D^b, D^c — ограниченные множества в соответствующих евклидовых пространствах;

2) $\mathfrak{F}_t$-измеримы по ω при фиксированных t, x, a, b, c на $[0,T] \times E^n \times D^a \times D^b \times D^c$;

3) при фиксированных t, x, ω непрерывны по совокупности остальных переменных;

4) $A_i\,(t,x,a,\omega)\,, B_{ij}\,(t,x,b,\omega)$ дифференцируемы по переменным x_k, а их производные A'_{x_k}, B'_{x_k} непрерывны соответственно по совокупности переменных $(x,a)\,,(x,b)$ и равномерно ограничены по абсолютной величине постоянным числом $N > 0$ при всех t, x, a, b, ω из области определения;

5) $|\varphi_i\,(t,c,\omega)| \leqslant \alpha_i\,(t,\omega) \in H_r\,(\mathfrak{B}\mathfrak{F})\,,\ r > 2$ для всех $c \in D^c$.

При каждом $t \in [0,T]$ зададим множества $D^a\,(t)\,, D^b\,(t)\,, D^c\,(t)$ случайных векторов, $\mathfrak{F}_t$-измеримых и принимающих значения в D^a, D^b и D соответственно. Предполагаем, что семейства $D^i\,(t)\,,\ i = a,b,c$ неубывающие и непрерывные слева по $t:\ D^i\,(t) = D^i\,(0) \cup D^i\,(s)\,,\ 0 < s < t.$

Вектор-функции $a\,(t,\omega)\,, b\,(t,\omega)\,, c\,(t,\omega)$ будем называть допустимыми управлениями, если их компоненты $\mathfrak{B}\mathfrak{F}$-измеримы и

$$a\,(t,\omega) \in D^a\,(t)\,,\ b\,(t,\omega) \in D^b\,(t)\,,\ c\,(t,\omega) \in D^c\,(t)\ \forall t.$$

Решением системы (1.1), отвечающим допустимому управлению $u\,(t,\omega) = \{a\,(t,\omega)\,, b\,(t,\omega)\,, c\,(t,\omega)\}$, называется случайный процесс из $H_{s,n}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{F})$, для которого (1.1) выполняется при каждом t почти наверное (см. [7]).

Рассмотрим следующую проблему оптимизации: среди допустимых управлений $u\,(t,\omega)$, удовлетворяющих ограничению

$$L\,(u) = \mathbf{M}\int\limits_0^T L\,(s, \eta_u\,(s)\,, u\,(s))\;ds \leqslant 0,$$

требуется найти управление, минимизирующее функционал

$$J(u) = \mathbf{M} \int\limits_0^T J(s, \eta_u(s), u(s))\, ds.$$

Здесь $\eta_u(s)$ — решение системы (1.1), отвечающее управлению $u(s)$, $\mathbf{M}$ — знак математического ожидания.

Пусть функции $L(t, x, a, b, c, \omega)$, $J(t, x, a, b, c, \omega)$

1) измеримы по совокупности переменных при $t, x, a, b, c, \omega \in [0, T] \times E^n \times D^a \times D^b \times D^c \times \Omega$;

2) $\mathfrak{F}_t$-измеримы по ω при фиксированных t, x, a, b, c ;

3) непрерывны по совокупности переменных (a, b, c) при почти всех t, x, ω из $[0, T] \times E^n \times \Omega$ и дважды дифференцируемы по переменным x_k;

4) удовлетворяют следующим условиям порядка роста по x :

$$|J|, |L| \leqslant K_1(1 + |x|^\rho), \ \left|J'_{x_k}\right|, \left|L'_{x_k}\right| \leqslant K_2\left(1 + |x|^{\rho-1}\right),$$
$$\left|J''_{x_k x_j}\right|, \left|L''_{x_k x_j}\right| \leqslant K_3\left(1 + |x|^{\rho-2}\right), \ \rho \leqslant (\rho + 2)/2$$

для почти всех t, x, a, b, c, ω из области определения; K_1, K_2, K_3 — постоянные числа.

1.2. Вариации управлений

Пусть $u^\circ(t, \omega) \equiv \{a^\circ(t, \omega), b^\circ(t, \omega), c^\circ(t, \omega)\}$ — оптимальное допустимое управление, а $\eta^\circ(t, \omega)$ — отвечающее ему решение системы (1.1). Построим варианту управления $u^\varepsilon(t, \omega) \equiv \{a^\varepsilon(t, \omega), b^\varepsilon(t, \omega), c^\varepsilon(t, \omega)\}$. Пусть $\tau_0 \in [0, T]$. Возьмем произвольный конечный набор точек $\{\tau_k\}$ из интервала (τ_0, T). Пусть $\left\{\alpha_k^l\right\}$ — произвольный конечный набор неотрицательных чисел. Пусть, наконец, $\left\{a_k^l(\omega)\right\}, \left\{b_k^l(\omega)\right\}, \left\{c_k^l(\omega)\right\}$ — наборы случайных векторов из $D^a(\tau_0), D^b(\tau_0), D^c(\tau_0)$, соответственно. Компоненту $a^\varepsilon(t, \omega)$ варианты управления определим следующим образом

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(t, \omega) &= \begin{cases} a_k^l(\omega), & t \in \Pi_k^l(\tau_k) \\ a^\circ(t, \omega), & t \in [0, T] \setminus \bigcup\limits_{l,k} \Pi_k^l(\tau_k) \end{cases}, \\ \Pi_k^l(\tau_k) &= \left[\tau_k - \varepsilon \sum_{i=1}^{l} \alpha_k^i, \tau_k - \varepsilon \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_k^i\right). \end{aligned}$$

Ясно, что при достаточно малом ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\alpha$ интервалы Π_k^l лежат в (τ_0, T) и попарно не пересекаются. Аналогично определяются компоненты $b^\varepsilon(t,\omega), c^\varepsilon(t,\omega)$ варианты $u^\varepsilon(t,\omega)$ с параметрами $\left\{b_k^l(\omega)\right\}, \left\{c_k^l(\omega)\right\}$ соответственно.

Имеет место следующая теорема о существовании решения системы (1.1) и его устойчивости по возмущению управления.

Теорема 1. *Пусть функции* $\varphi_i(t,c,\omega), A_i(t,x,a,\omega), B_{ij}(t,x,b,\omega)$ *удовлетворяют сформулированным выше условиям. Тогда существует такое положительное число* ε^*, $0 < \varepsilon^* < \varepsilon_\alpha$, *что каждой варианте* $u^\varepsilon(t,\omega)$ *при* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$ *отвечает единственное решение* $\eta^\varepsilon(t,\omega) \in H_{r,n}(\mathfrak{BF})$ *системы (1.1). При этом* $\|\eta^\varepsilon - \eta^\circ\|_{r,n} \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Существование и единственность решения системы (1.1) следует непосредственно из [7]. При любом допустимом управлении функция $\varphi(t,c(t)) \in H_{r,n}(\mathfrak{BF})$, поэтому и соответствующее решение $\eta(t) \in H_{r,n}(\mathfrak{BF})$.

Для доказательства устойчивости оптимального решения рассмотрим систему линейных интегральных стохастических уравнений

$$\begin{aligned}\xi_i(t) &= \psi_i(t) + \int_0^t \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\left(s, \eta_{1ik}^\varepsilon(s), a^\varepsilon(s)\right)\xi_k(s)\,ds + \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k}\left(s, \eta_{2ijk}^\varepsilon(s), b^\varepsilon(s)\right)\xi_k(s)\,dw_j(s).\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь “средние точки” $\eta_{1ik}^\varepsilon, \eta_{2ik}^\varepsilon$ определены с вероятностью единица из равенств

$$\begin{aligned}A_i(t,\eta^\varepsilon(t),a^\varepsilon(t)) - A_i(t,\eta^\circ(t),a^\circ(t)) &= \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\left(t,\eta_{1ik}^\varepsilon(t),a^\varepsilon(t)\right)\Delta_\varepsilon\eta_k(t), \\ B_{ij}(t,\eta^\varepsilon(t),b^\varepsilon(t)) - B_{ij}(t,\eta^\circ(t),b^\circ(t)) &= \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k}\left(t,\eta_{2ijk}^\varepsilon(t),b^\varepsilon(t)\right)\Delta_\varepsilon\eta_k(t), \\ \Delta_\varepsilon\eta_k(t) &\equiv \eta^\varepsilon(t) - \eta^\circ(t).\end{aligned} \tag{1.3}$$

Лемма 1. *Для любой функции* $\psi(t) \in H_{p,n}(\mathfrak{BF})$ *решение системы (1.2)* $\xi(t) \in H_{p,n}(\mathfrak{BF})$ *существует, единственно, и справедлива оценка*

$$\|\xi\|_{p,n} \leqslant C_p\|\psi\|_{p,n}, \; C_p = C_p(p,m,n,T,N). \tag{1.4}$$

Доказательство. Существование и единственность решения системы (1.2) следует из той же теоремы [7]. Применяя неравенство Гельдера к тождеству (1.2), получим

$$\begin{aligned}\left|\xi_i(t)\right|^p &\leqslant 3^{p-1}\left\{\left|\psi_i(t)\right|^p+\left|\int\limits_0^t \frac{\partial A_i}{\partial x_k}(\cdot)\,\xi_k(s)\;ds\right|^p+\right.\\ &\left.+\left|\int\limits_0^t \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k}(\cdot)\,\xi_k(s)\;dw_j(s)\right|^p\right\}.\end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь оценкой моментов интеграла Ито [8], получим

$$\mathbf{M}\left|\xi_i(t)\right|^p \leqslant 3^{p-1}\left\{\mathbf{M}\left|\psi_i(t)\right|^p+C_p'\int\limits_0^t\sum_{k=1}^n \mathbf{M}\left|\xi_k(s)\right|^p\;ds\right\}.$$

Суммируя по i, применяя лемму Гронуолла и интегрируя на $[0,T]$, установим искомую оценку (1.4).

Для доказательства теоремы остается заметить, что случайная вектор-функция $\xi(t)\equiv\eta^{\varepsilon}(t)-\eta^{\circ}(t)$ удовлетворяет системе (1.2) при $\psi_i(t)=\Delta_u\Phi_i(t)\in H_{r,n}(\mathfrak{BF})$,

$$\begin{aligned}\Delta_u\Phi_i(t) &\equiv \Delta_c\varphi_i(t)+\int\limits_0^t\Delta_a A_i(s)\;ds++\int\limits_0^t\Delta_b B_{ij}(s)\;dw_j(s),\\ \Delta_c\varphi_i(t) &\equiv \varphi_i(t,c^{\varepsilon}(t))-\varphi_i(t,c^{\circ}(t)),\\ \Delta_a A_i(t) &\equiv A_i(t,\eta^{\circ}(t),a^{\varepsilon}(t))-A_i(t,\eta^{\circ}(t),a^{\circ}(t)),\\ \Delta_b B_{ij}(t) &\equiv B_{ij}(t,\eta^{\circ}(t),b^{\varepsilon}(t))-B_{ij}(t,\eta^{\circ}(t),b^{\circ}(t)).\end{aligned}$$

Тогда на основании (1.4) имеем

$$\left\|\eta^{\varepsilon}-\eta^{\circ}\right\|_{r,n}\leqslant C_r\left\|\Delta_u\Phi\right\|_{r,n}\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

1.3. Построение интегральных представлений $\Delta_{\varepsilon}J,\Delta_{\varepsilon}L$

В силу леммы 1 линейная система (1.2) определяет линейный оператор

$$R_{\varepsilon}':H_{p,n}(\mathfrak{BF})\to H_{p,n}(\mathfrak{BF}),\ \xi=R_{\varepsilon}'\psi.$$

Так как множество $H_{p,n}(\mathfrak{BF})$ всюду плотно в $L_{p,n}(\mathfrak{BF})$ и имеет место оценка (1.4), то R_{ε}' допускает продолжение R_{ε} на $L_{p,n}(\mathfrak{BF})$ по непрерывности, т.е. определен линейный непрерывный оператор $R_{\varepsilon}:L_{p,n}(\mathfrak{BF})\to L_{p,n}(\mathfrak{BF})$, $p\geqslant 2$, $\|R_{\varepsilon}\|\leqslant C_p$.

Приращение $\Delta_\varepsilon \eta\,(t)$ запишем в виде

$$\Delta_\varepsilon \eta = R_\varepsilon \Delta_u \Phi \tag{1.5}$$

Для нахождения первых вариаций функционалов J и L построим интегральные представления для приращений

$$\Delta_\varepsilon J \equiv J\,(u^\varepsilon) - J\,(u^\circ)\,,\ \Delta_\varepsilon L \equiv L\,(u^\varepsilon) - L\,(u^\circ)\,.$$

Рассмотрим, например, $\Delta_\varepsilon J$

$$\Delta_\varepsilon J = \mathbf{M} \int\limits_0^T \frac{\partial J}{\partial x_k}\,(s, \eta_{3k}^\varepsilon\,(s)\,, u^\varepsilon\,(s))\,\Delta_\varepsilon \eta_k\,(s)\,\,ds + \tag{1.6}$$

$$+\mathbf{M} \int\limits_0^T \Delta_u J\,(s)\,\,ds \equiv \Delta_\varepsilon^{(1)} J + \Delta_\varepsilon^{(2)} J,$$

$$(\Delta_u J\,(t) \equiv J\,(t, \eta^\circ\,(t)\,, u^\varepsilon\,(t)) - J\,(t, \eta^\circ\,(t)\,, u^\circ\,(t)))$$

Здесь средние точки η_{3k}^ε определены из равенств вида (1.3) для функции J.

На $L_{2,n}\,(\mathfrak{BF})$ определим семейство (по ε) ограниченных линейных функционалов

$$\{T_\varepsilon\} : (T_\varepsilon, \psi) = \mathbf{M} \int\limits_0^T \frac{\partial J}{\partial x_k}\,(s, \eta_{3k}^\varepsilon\,(s)\,, u^\varepsilon\,(s))\,\psi_k\,(s)\,\,ds.$$

Применяя теорему Рисса о представлении линейного функционала, получим в силу (1.5)

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon^{(1)} J &= (T_\varepsilon, \Delta_\varepsilon \eta) = (T_\varepsilon, R_\varepsilon \Delta_u \Phi) = (R_\varepsilon^* T_\varepsilon, \Delta_u \Phi) \equiv (Q_\varepsilon, \Delta_u \Phi) = \\ &= \mathbf{M} \int\limits_0^T \chi_i^\varepsilon\,(t)\,\Delta_u \Phi_i\,(t)\,\,dt,\ \chi^\varepsilon = R_\varepsilon^* T_\varepsilon \in L_{2,n}\,(\mathfrak{BF})\,. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (1.6), получим искомое интегральное представление

$$\Delta_\varepsilon J = \mathbf{M} \int\limits_0^T \chi_i^\varepsilon\,(t)\,\Delta_u \Phi_i\,(t)\,\,dt + \mathbf{M} \int\limits_0^T \Delta_u J\,(t)\,\,dt \tag{1.7}$$

Покажем, что при $1 < q' < 2$

$$\left\|\chi^{\varepsilon} - \chi^{\circ}\right\|_{q',n} \to 0,\ \varepsilon \to 0 \tag{1.8}$$

Здесь

$$\chi^{\circ} = R_0^* T_0,\ (T_0, \psi) = \mathbf{M} \int\limits_0^T \frac{\partial J}{\partial x_k} \left(s, \eta^{\circ}(s), u^{\circ}(s)\right) \psi_k(s)\, ds,$$

а $R_0 : L_{p,n}(\mathfrak{BF}) \to L_{p,n}(\mathfrak{BF})$, $p \geqslant 2$ — линейный оператор, связанный с системой

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= \psi_i(t) + \int\limits_0^t \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\left(s, \eta^{\circ}(s), a^{\circ}(s)\right) \xi_k(s)\, ds + \\ &+ \int\limits_0^t \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k}\left(s, \eta^{\circ}(s), b^{\circ}(s)\right) \xi_k(s)\, dw_j(s). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Имеем $(q > 2,\ 1/q + 1/q' = 1)$

$$\begin{aligned} \left\|\chi^{\varepsilon} - \chi^{\circ}\right\|_{q',n} &\leqslant \left\|R_{\varepsilon}\right\|_{L_{p,n} \to L_{2,n}} \left\|T_{\varepsilon} - T_0\right\|_{(L_{2,n})^*} + \\ &+ \left\|T_0\right\|_{(L_{2,n})^*} \left\|R_{\varepsilon} - R_0\right\|_{L_{p,n} \to L_{2,n}} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Покажем, что последняя норма операторная норма в (1.10) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Возьмем монотонно убывающую последовательность положительных чисел $\delta_m \to 0$, $m \to \infty$. Для каждой функции φ из единичного шара в $L_{q,n}(\mathfrak{BF})$ найдется последовательность $\{\varphi_m\} \subset H_{q,n}(\mathfrak{BF})$, такая, что $\left\|\varphi - \varphi_m\right\|_{q,n} \leqslant \delta_m$. Пусть $\{\xi^{\varepsilon m}\}, \{\xi^{0m}\} \subset H_{q,n}(\mathfrak{BF})$ — последовательности решений (1.2) и (1.9) соответственно, отвечающих $\{\varphi_m\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\|(R_{\varepsilon} - R_0)\varphi\right\|_{2,n} &\leqslant \left\|R_{\varepsilon}(\varphi - \varphi_m)\right\|_{2,n} + \left\|R_0(\varphi - \varphi_m)\right\|_{2,n} + \\ &+ \left\|R_{\varepsilon}\varphi_m - R_0\varphi_m\right\|_{2,n} \leqslant 2C_2 T^{(q-2)/2q} \delta_m + \left\|\xi^{\varepsilon m} - \xi^{0m}\right\|_{2,n} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Используя оценку моментов интеграла Ито, лемму Гронуолла и неравенство Гельдера, оценим норму

$$\left\|\xi^{\varepsilon m} - \xi^{0m}\right\|_{2,n}^2 \leqslant K_4 C_q^2 (1 + \delta_m)^2 \left\|\Gamma_{\varepsilon}\right\|_{q/(q-2)},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varepsilon}(t) \equiv T \sum_{i,k} \Bigg\{ &\left| \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\left(t, \eta_{1ik}^{\varepsilon}(t), a^{\varepsilon}(t)\right) - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\left(t, \eta^{\circ}(t), a^{\circ}(t)\right) \right|^2 + \\ &+ \sum_j B_2 \left| \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k}\left(t, \eta_{2ijk}^{\varepsilon}(t), b^{\varepsilon}(t)\right) - \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k}\left(t, \eta^{\circ}(t), b^{\circ}(t)\right) \right|^2 \Bigg\}, \end{aligned}$$

$(K_4, B_2 = \mathrm{const})$.

Поскольку $|\eta_{1ik}^{\varepsilon} - \eta^{\circ}|, |\eta_{2ijk}^{\varepsilon} - \eta^{\circ}|, |u^{\varepsilon} - u^{\circ}| \to 0,\ \varepsilon \to 0$ по мере mes $\times\mathbf{P}$ (теорема 1), функции A'_{x_k}, B'_{x_k} непрерывны по (x, a) и (x, b) соответственно и ограничены, то $\|\Gamma_{\varepsilon}\| \to 0, \varepsilon \to 0$.

Из (1.11) следует тогда, что $\|(R_{\varepsilon} - R_0)\,\varphi\|_{2,n} \to 0, \varepsilon \to 0$ равномерно относительно выбора φ из единичной сферы и значит

$$\|R_{\varepsilon} - R_0\|_{L_{p,n} \to L_{2,n}} \to 0, \varepsilon \to 0. \tag{1.12}$$

Условия, наложенные на интегрант функционала J, обеспечивают предельный переход

$$\|T_{\varepsilon} - T_0\|_{(L_{2,n})^*} \to 0, \varepsilon \to 0. \tag{1.13}$$

Из (1.13), (1.12) и (1.10) следует, таким образом, (1.8).

1.4. Первые вариации функционалов

Вариации функционалов определим как пределы

$$\delta J = \lim_{\varepsilon_k \to 0} \frac{1}{\varepsilon_k} \Delta_{\varepsilon_k} J,\ \delta L = \lim_{\delta_k \to 0} \frac{1}{\delta_k} \Delta_{\delta_k} L.$$

Здесь $\{\varepsilon_k\}, \{\delta_k\}$ — некоторые подпоследовательности последовательности $\varepsilon \to 0$. Имеем из (1.7)

$$\Delta_{\varepsilon}^{(2)} J = \mathbf{M} \sum_{l,k} \int\limits_{\Pi_k^l(\tau_k)} \left[J\left(t, \eta^{\circ}(t), a_k^l, b_k^l, c_k^l\right) - J\left(t, \eta^{\circ}(t), u^{\circ}(t)\right)\right] dt,$$

$$\Delta_{\varepsilon}^{(1)} J = \mathbf{M} \sum_{l,k} \int\limits_{\Pi_k^l(\tau_k)} \left[\chi_i^{\varepsilon}(t)\, \Delta_c \varphi_i(t) + \theta_i^{\varepsilon}(t)\, \Delta_a A_i(t)\right] dt +$$

$$+\mathbf{M} \int\limits_0^T \chi_i^{\varepsilon}(t) \int\limits_0^t \Delta_b B_{ij}(s)\, dw_j(s)\, dt \equiv \Delta_{\varepsilon}^{(3)} J + \Delta_{\varepsilon}^{(4)} J,$$

$$\theta_i^{\varepsilon}(t) \equiv \int\limits_t^T \chi_i^{\varepsilon}(s)\, ds.$$

Используя (1.9), можно показать, что для любой пары целых чисел N, M и произвольного допустимого набора случайных величин $\left\{a_k^l(\omega)\right\}, \left\{b_k^l(\omega)\right\}$, $\left\{c_k^l(\omega)\right\}$; $k = 1, 2, \ldots, N$; $l = 1, 2, \ldots, M$ найдется множество $E_u^{NM} \subset$

(τ_0, T), $\operatorname{mes} E_u^{NM} = T - \tau_0$, такое, что для произвольного набора точек $\{\tau_k\} \subset E_u^{NM}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\Delta_\varepsilon^{(2)} J + \Delta_\varepsilon^{(3)} J \right) = \sum_{l,k} \alpha_k^l \left[g_1^{lk} (\tau_k) + g_2^{lk} (\tau_k) \right], \tag{1.14}$$

$$g_1^{lk} (\tau) \equiv \mathbf{M} \left[J \left(\tau, \eta^\circ (\tau), a_k^l, b_k^l, c_k^l \right) - J \left(\tau, \eta^\circ (\tau), u^\circ (\tau) \right) \right],$$
$$g_2^{lk} (\tau) \equiv \mathbf{M} \left\{ \chi_i^\circ (\tau) \left[\varphi_i \left(\tau, c_k^l \right) - \varphi_i \left(\tau, c^\circ (\tau) \right) \right] + \right.$$
$$\left. + \theta_i^\varepsilon (\tau) \left[A_i \left(\tau, \eta^\circ (\tau), a_k^l \right) - A_i \left(\tau, \eta^\circ (\tau), a^\circ (\tau) \right) \right] \right\}$$

Для того чтобы перейти к пределу в $(1/\varepsilon)\, \Delta_\varepsilon^{(4)} J$, наложим дополнительные ограничения на поток σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t\}$и произведем дополнительные построения. Именно, предположим, что

$$\mathfrak{F}_t \equiv \overline{\sigma \left[w (s), s \leqslant t \right]}. \tag{1.15}$$

Лемма 2. *Пусть выполняется условие (1.15) и* $\varphi (t, \omega) \in L_2 (\mathfrak{B}\mathfrak{F})$ *. Тогда найдется единственная функция* $\lambda (t, s, \omega) \in L_{2,m} (\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}\mathfrak{F})$*, такая, что* $\operatorname{mes} \times \mathbf{P}$*-почти всюду на* $[0, T] \times \Omega$

$$\varphi (t, \omega) = \mathbf{M} \varphi (t, \omega) + \int_0^t \lambda_j (t, s, \omega)\, dw_j (s, \omega) \tag{1.16}$$

При этом оператор $G : \lambda = G\varphi$ *ограничен из* $L_2 (\mathfrak{B}\mathfrak{F})$ *в* $L_{2,m} (\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}\mathfrak{F})$ *и* $\|G\| = 1$.

Здесь $L_{2,m} (\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}\mathfrak{F})$ — L_2-пространство m-мерных случайных полей с $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}\mathfrak{F}$-измеримыми ($\mathfrak{B}$ — борелевская σ-алгебра в E^1) компонентами.

Доказательство. Пусть $\eta (t, \omega) = \chi_{[0,t_1)} (t)\, \eta_0 (\omega) + \ldots + \chi_{[t_{n-1},T)} (t)\, \eta_{n-1} (\omega) \in L_2 (\mathfrak{B}\mathfrak{F})$. Здесь $\{t_k\}$, $= 0, 1, \ldots, n$ — конечное разбиение отрезка $[0, T]$, $\chi_{[\alpha,\beta)} (t)$ — индиккаторная функция полуинтервала $[\alpha, \beta)$; $\eta_k (\omega)$ — $\mathfrak{F}_{t_k}$-измеримая (с конечным вторым моментом) случайная величина. Согласно [9] при выполнении условия (1.15) для каждого t_k найдется $\lambda^{(k)} (s, \omega) \in L_{2,m} ([0, t_k] \times \Omega, \mathfrak{B}\mathfrak{F})$ такая, что почти наверное

$$\eta_k (\omega) = \mathbf{M} \eta_k (\omega) + \int_0^{t_k} \lambda_j^{(k)} (s, \omega)\, dw_j (s, \omega).$$

Отсюда, продолжая $\lambda_j^{(k)} (s, \omega)$ на $[0, T] \times \Omega$ нулем и полагая

$$\mu (t, s, \omega) = \chi_{[0,t_1)} (t)\, \lambda^{(1)} (s, \omega) + \ldots + \chi_{[t_{n-1},T)} (t)\, \lambda^{(n-1)} (s, \omega),$$

установим лемму для ступенчатых функций. Пусть $\varphi(t,\omega)$ — произвольная функция из $L_2(\mathfrak{BF})$. Аппроксимируем ее последовательностью ступенчатых функций (см. [10, стр. 222]): $\|\eta_n - \varphi\|_2 \to 0, n \to \infty$. Пусть $\mu^{(n)}(t,s,\omega)$ — отвечающая $\{\eta_n\}$ последовательность стохастических ядер. Тогда из (1.16) имеем

$$\int\limits_0^t \left[\mu_j^{(n)}(t,s,\omega) - \mu_j^{(k)}(t,s,\omega)\right] dw_j(s,\omega) =$$
$$= \eta_n(t,\omega) - \eta_k(t,\omega) + \mathbf{M}(\eta_k(t,\omega) - \eta_n(t,\omega)).$$

Отсюда, используя известные свойства интеграла Ито, выводим

$$\left\|\mu^{(n)} - \mu^{(k)}\right\|_{L_{2,m}(\mathfrak{B}\times\mathfrak{BF})} \leqslant 2\|\eta_n - \eta_k\|_2 \to 0,\ k,n\to\infty.$$

Таким образом, последовательность $\left\{\mu^{(n)}\right\}$ фундаментальна в $L_{2,m}(\mathfrak{B}\times\mathfrak{BF})$ и, значит, в силу полноты этого пространства сходится к некоторому его элементу λ. Из теоремы Фубини для стохастических интегралов (см. [11, стр. 217]) следует, что стохастический интеграл

$$\int\limits_0^t \lambda_j(t,s,\omega)\ dw_j(s,\omega)$$

определен и $\mathfrak{BF}$-измерим по t,ω. Наконец

$$\left\|\varphi - \mathbf{M}\varphi - \int\limits_0^t \lambda_j(t,s,\omega)\ dw_j(s,\omega)\right\|_2 \leqslant \|\varphi - \eta_n\|_2 +$$
$$+ \|\mathbf{M}(\varphi-\eta_n)\|_{L_2(0,T)} + \left\|\lambda - \mu^{(n)}\right\|_{L_{2,m}(\mathfrak{B}\times\mathfrak{BF})} \to 0,\ n\to\infty.$$

Возводя тождество (1.16) во вторую степень и интегрируя по мере $\mathbf{P}$, убедимся в справедливости второго утверждения леммы.

Применяя доказанную лемму к семейству (по $\varepsilon \geqslant 0$) функций $\chi^\varepsilon(t,\omega) \in L_{2,n}(\mathfrak{BF})$, получим семейство матриц $\left\{\lambda_{ij}^\varepsilon(t,s,\omega)\right\} : \{\lambda_{i1}^\varepsilon, \ldots, \lambda_{im}^\varepsilon\} = G\chi_i^\varepsilon$. Введем обозначение

$$\varkappa_{ij}^\varepsilon(t,\omega) = \int\limits_t^T \lambda_{ij}^\varepsilon(t,s,\omega)\ ds \in L_2(\mathfrak{BF}).$$

Покажем, что при $1 < \delta < 2$

$$\left\|\varkappa_{ij}^\varepsilon - \varkappa_{ij}^\circ\right\|_\delta \to 0,\ \varepsilon\to 0 \tag{1.17}$$

Применяя дважды неравенства Гельдера и оценку снизу для δ-момента интеграла Ито [8], получим последовательность неравенств

$$\begin{aligned}
&\left\|\varkappa_{ij}^{\varepsilon}-\varkappa_{ij}^{\circ}\right\|_{\delta}^{\delta}\equiv\mathbf{M}\int\limits_{0}^{T}\left|\varkappa_{ij}^{\varepsilon}-\varkappa_{ij}^{\circ}\right|^{\delta}ds=\\
&=\mathbf{M}\int\limits_{0}^{T}\left|\int\limits_{s}^{T}\left|\lambda_{ij}^{\varepsilon}\left(t,s,\omega\right)-\lambda_{ij}^{\circ}\left(t,s,\omega\right)\right|\right|^{\delta}ds\leqslant\\
&\leqslant\mathbf{M}\int\limits_{0}^{T}ds\left\{\int\limits_{s}^{T}\left|\lambda_{ij}^{\varepsilon}\left(\cdot\right)-\lambda_{ij}^{\circ}\left(\cdot\right)\right|^{\delta}dt\ \left(T-s\right)^{\delta-1}\right\}\leqslant\\
&\leqslant D_{\delta}\,\mathbf{M}\int\limits_{0}^{T}\left\{s^{\delta/2-1}\int\limits_{s}^{T}\left|\lambda_{ij}^{\varepsilon}\left(\cdot\right)-\lambda_{ij}^{\circ}\left(\cdot\right)\right|^{\delta}dt\right\}ds\leqslant\\
&\leqslant D_{\delta}\,\mathbf{M}\int\limits_{0}^{T}\left\{\int\limits_{s}^{T}t^{\delta/2-1}\left|\lambda_{ij}^{\varepsilon}\left(\cdot\right)-\lambda_{ij}^{\circ}\left(\cdot\right)\right|^{\delta}dt\right\}ds\leqslant\\
&\leqslant D_{\delta}\,\mathbf{M}\int\limits_{0}^{T}\left|\int\limits_{0}^{t}\left|\lambda_{ij}^{\varepsilon}\left(\cdot\right)-\lambda_{ij}^{\circ}\left(\cdot\right)\right|^{2}ds\right|^{\delta/2}dt\leqslant\\
&\leqslant\frac{D_{\delta}}{A_{\delta}}\int\limits_{0}^{T}dt\,\mathbf{M}\left|\int\limits_{0}^{t}\left[\lambda_{ij}^{\varepsilon}\left(\cdot\right)-\lambda_{ij}^{\circ}\left(\cdot\right)\right]\,dw\left(s\right)\right|^{\delta}\leqslant\\
&\leqslant\frac{D_{\delta}}{A_{\delta}}2^{\delta}\left\|\chi^{\varepsilon}-\chi^{\circ}\right\|_{\delta,n}^{\delta}\ \left(A_{\delta}=A_{\delta}\left(\delta\right)>0\right).
\end{aligned}$$

Здесь использовано также неравенство

$$\left(T-t\right)^{\delta-1}\leqslant D_{\delta}t^{\delta/2-1},\ 0\leqslant t\leqslant T,\ 0<D_{\delta}=D_{\delta}\left(\delta\right)<\infty.$$

Таким образом, (1.17) следует из (1.8).

Возвращаясь к $\Delta_{\varepsilon}^{(4)}J$, запишем

$$\Delta_{\varepsilon}^{(4)}J = \mathbf{M}\int\limits_0^T \chi_i^{\varepsilon}(t)\left[\int\limits_0^t \Delta_b B_{ij}(s)\ dw_j(s)\right]dt =$$

$$= \int\limits_0^T dt\,\mathbf{M}\int\limits_0^t \lambda_{ij}^{\varepsilon}(t,s)\ dw_j(s)\int\limits_0^t \Delta_b B_{ij}(s)\ dw_j(s) =$$

$$= \int\limits_0^T dt\,\mathbf{M}\int\limits_0^t \lambda_{ij}^{\varepsilon}(t,s)\ \Delta_b B_{ij}(s)\ ds\ = \mathbf{M}\int\limits_0^T \varkappa_{ij}^{\varepsilon}(s)\ \Delta_b B_{ij}(s)\ ds =$$

$$= \sum_{l,k}\mathbf{M}\int\limits_{\Pi_k^l(\tau_k)} \operatorname{Tr}\Delta_b B(s)\left(\varkappa^{\varepsilon}(s)\right)'\ ds.$$

(Tr — взятие следа матрицы, штрих означает транспонирование). Используя (1.17), можно показать, что для любой пары целых чисел N, M и произвольного набора $\left\{b_k^l(\omega)\right\}$ найдется множество $E_b^{NM} \subset [\tau_0, T]$ полной меры $\operatorname{mes} E_b^{NM} = T - \tau_0$ такое, что для произвольного набора точек $\{\tau_k\} \subset E_b^{NM}$

$$\lim_{\vartheta_k\to 0}\frac{1}{\vartheta_k}\Delta_{\vartheta_k}^{(4)}J = \sum_{l,k}\alpha_k^l g_3^{lk}(\tau_k),$$

$$g_3^{lk}(\tau_k) = \mathbf{M}\operatorname{Tr}\left[B\left(\tau,\eta^{\circ}(\tau),b_k^l\right) - B\left(\tau,\eta^{\circ}(\tau),b^{\circ}(\tau)\right)\right]\left(\varkappa^{\circ}(\tau)\right)'$$

Учитывая (1.14), получаем, что при $\{\tau_k\} \subset E_u^{NM} \cap E_b^{NM}$ первая вариация функционала J представима в виде

$$\delta J = \sum_{l,k}\alpha_k^l\left[g_1^{lk}(\tau_k) + g_2^{lk}(\tau_k) + g_3^{lk}(\tau_k)\right]. \tag{1.18}$$

Область определения в (1.18) зависит от чисел N, M и конкретных наборов $\left\{a_k^l\right\}, \left\{b_k^l\right\}, \left\{c_k^l\right\}$. Чтобы избавиться от этой зависимости, выделим в $L_2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbf{P})$ счетную, всюду плотную сеть случайных величин S_2. Можно показать тогда, что предельные переходы, определяющие вариацию δJ, выполняются по некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon_k\}$ на множестве $E \subset (\tau_0, T)$, $\operatorname{mes} E = T - \tau_0$ при произвольных допустимых наборах

$$
\begin{gathered}
\left\{a_k^l\right\} \subset D^a\left(\tau_0\right) \cap S_{2,m_1}, \\
\left\{b_k^l\right\} \subset D^b\left(\tau_0\right) \cap S_{2,m_2}, \\
\left\{c_k^l\right\} \subset D^b\left(\tau_0\right) \cap S_{2,m_3}, \\
\left(S_{2,n} \equiv \underbrace{S_2 \times \cdots \times S_2}_{n}\right)
\end{gathered}
$$

Вводя по аналогии с $T_\varepsilon, \chi^\varepsilon$ пару $P_\varepsilon, \nu^\varepsilon = R_\varepsilon^* P_\varepsilon$, вычислим вариацию δL.

1.5. Принципы минимума

Рассмотрим в E^2 множество пар $Q = (\delta J, \delta L)$, получающихся при всевозможных допустимых наборах точек $\{\tau_k\} \subset E$, чисел $\left\{\alpha_k^l\right\}$ и случайных величин $\left\{a_k^l\right\}, \left\{b_k^l\right\}, \left\{c_k^l\right\}$. Можно показать, что Q — выпуклый конус с вершиной в начале координат. Пусть $R = \{(x_1, x_2) : x_1 < 0, x_2 < 0\} \subset E^2$. Из оптимальности допустимого управления $u^\circ(t,\omega)$ следует, что конусы Q и R не пересекаются и, значит, разделяются некоторой прямой с вектором нормали $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1^2 + \mu_2^2 > 0$. Направляя этот вектор в сторону конуса Q, получим

$$
\mu_1 \delta J + \mu_2 \delta L \geqslant 0 \tag{1.19}
$$

Зададим конкретный набор параметров

$$
\tau_1 \subset E;\ a_1^1(\omega), b_1^1(\omega), c_1^1(\omega);\ \alpha_1^1 = 1.
$$

Вычисляя соответствующий набор вариаций, учитывая непрерывность функций A_i, B_{ij}, φ_i по a, b, c (соответственно) и свойства семейств $D^i(t)$, $i = a, b, c$, полчим из (1.19) следующие

Принципы минимума.[1] *Если $u^\circ(t,\omega)$ — оптимальное допустимое управление, а $\eta^\circ(t,\omega) \in H_{r,n}(\mathfrak{BF})$, $r > 2$ — отвечающее ему оптимальное*

[1]Сформулированный результат относительно управляющих функций b, c верен, в действительности, только в случае функций, линейных по данным параметрам (см. главу 8 настоящего сборника). Для получения вариаций в форме (1.18) недостаточно интегральной сходимости сопряженных функций (1.17), (1.8). Необходимая же равномерная сходимость по t имеет место только для сопряженных функций θ_ε, что и обеспечивает справедливость поточечного принципа максимума для управляющей функции a. Данная ошибка исправлена в диссертационной работе.

решение системы (1.1), то существуют функции $\chi^\circ, \nu^\circ \in L_{2,n}(\mathfrak{BF})$, определяемые единственным образом операторными соотношениями

$$\chi^\circ = R_0^* T_0,\ \nu^\circ = R_0^* P_0$$

и неотрицательные числа μ_1, μ_2 ($\mu_1^2 + \mu_2^2 > 0$), такие, что почти всюду на $[0,T]$ ($\inf$ берется по всем $a(\omega) \in D^a(t)$, $b(\omega) \in D^b(t)$, $c(\omega) \in D^c(t)$)

$$\mathbf{MH}\left(t, \eta^\circ(t,\omega), a^\circ(t,\omega), b^\circ(t,\omega), c^\circ(t,\omega), \omega\right) = \\ = \inf \mathbf{MH}\left(t, \eta^\circ(t,\omega), a(\omega), b(\omega), c(\omega), \omega\right), \tag{1.20}$$

$$\mathbf{H}\left(t, \eta^\circ(t,\omega), \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \omega\right) = \mu_1 \left[J\left(t, \eta^\circ(t,\omega), \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \omega\right) + \right. \\ + \chi_i^\circ(t,\omega)\, \varphi_i(t, \zeta_3, \omega) + \theta_i^\circ(t,\omega)\, A_i\left(t, \eta^\circ(t,\omega), \zeta_1, \omega\right) + \\ \left. \operatorname{Tr} B\left(t, \eta^\circ(t,\omega), \zeta_2, \omega\right)\left(\varkappa^\circ(t,\omega)\right)'\right] + \mu_2 \left[L\left(t, \eta^\circ(t,\omega), \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \omega\right) + \right. \\ + \nu_i^\circ(t,\omega)\, \varphi_i(t, \zeta_3, \omega) + \int_t^T \nu_i^\circ(s,\omega)\, ds A_i\left(t, \eta^\circ(t,\omega), \zeta_1, \omega\right) + \\ \left. \operatorname{Tr} B\left(t, \eta^\circ(t,\omega), \zeta_2, \omega\right)\left(\alpha^\circ(t,\omega)\right)'\right]$$

Замечания.

1°. Из (1.20) можно получить неполные приниуипы минимума для любых двух групп управляющих параметров и для каждой группы в отдельности. Например, для того чтобы получить приниуип минимума по группе параметров $\{a, c\}$ достаточно положить в правой части (1.20) $b(\omega) = b_t^\circ(\omega) \equiv b^\circ(t,\omega)$ и т.д.

2°. Для справедливости неполного принципа минимума по группе параметров $\{a, c\}$ достаточно предположений п. 1.1. Для справедливости приниуипов минимума по группе параметров, включающей параметры $\{b\}$, необходимо выполнение условия (1.15).

3°. Если считать множества $D^i(t)$, $i = a, b, c$ множествами векторов из D^i, не зависящих от случая ω, то (1.20) будет являться необходимым условием оптимальности в задаче с детерминированными управлениями.

1.6. Пример

Можно показать, что оператор R_0, введенный в п. 1.3, имеет ограниченный обратный оператор R_0^{-1} и, следовательно, выполняется равенство

$\left(R_0^{-1}\right)^* = \left(R_0^*\right)^{-1}$. Это означает, что функции χ°, ν° могут быть найдены как решения сопряженных задач

$$\left(R_0^{-1}\right)^* \chi^\circ = T_0, \ \left(R_0^{-1}\right)^* \nu^\circ = P_0. \tag{1.21}$$

При выполнении условия (1.15) можно найти явное представление для оператора $\left(R_0^{-1}\right)^*$ и показать, таким образом, что решение задачи (1.21) удовлетворяет $\mathrm{mes} \times \mathbf{P}$-почти всюду тождеству

$$\begin{gathered}\chi_i^\circ(t,\omega) - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}(t, \eta^\circ(t,\omega), a^\circ(t,\omega))\, M\{\theta_k^\circ(t,\omega)|\, \mathfrak{F}_t\} - \\ -\frac{\partial B_{kj}}{\partial x_i}(t, \eta^\circ(t,\omega), b^\circ(t,\omega))\, \varkappa_{kj}^\circ(t,\omega) \equiv \frac{\partial J}{\partial x_i}(t, \eta^\circ(t,\omega), u^\circ(t,\omega)).\end{gathered} \tag{1.22}$$

Здесь $M\{\xi|\,\mathfrak{F}\}$ — условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно -алгебры $\mathfrak{F}$.

Лемма 3. *Пусть $\partial B_{ij}/\partial x_k \equiv 0$ и случайная функция $y^\circ(t,\omega) \equiv \{y_1^\circ(t,\omega), \ldots, y_n^\circ(t,\omega)\}$ — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными правыми частями*

$$\frac{dy_i^\circ}{dt} = -y_k^\circ(t)\frac{\partial A_k}{\partial x_i}(t) - \frac{\partial J}{\partial x_i}(t), \ y_i^\circ(T) = 0 \tag{1.23}$$

Тогда прогрессивно измеримая модификация процесса

$$\chi_i^\circ(t) = \frac{\partial J}{\partial x_i}(t) + \frac{\partial A_k}{\partial x_i}(t)\, M\{y_k^\circ(t)|\,\mathfrak{F}_t\}$$

удовлетворяет системе (1.22).

Рассмотрим простейший пример. Пусть $\eta(t) \equiv \{\eta_1(t), \eta_2(t)\}$ — управляемый стохастический процесс, заданный в виде системы

$$\begin{cases} d\eta_1 = (a_1 + \eta_2)\, dt + b_1 dw_1, & \eta_1(0) = \eta_1^\circ, \\ d\eta_2 = (a_2 + \eta_1)\, dt + b_2 dw_1, & \eta_2(0) = \eta_2^\circ. \end{cases}$$

Требуется найти управление $\{a_1^\circ, a_1^\circ; b_1^\circ, b_2^\circ\}$ в классе детерминированных управлений со значениями на отрезке $[-1, 1]$, минимизирующее функционал

$$J(u) = \mathbf{M}\int_0^T [T_1^\circ(s)\,\eta_1^\circ(s) + T_2^\circ(s)\,\eta_2^\circ(s)]\, ds.$$

Для простоты считаем случайные процессы $T_1^\circ(s)\,, T_2^\circ(s)$ мартингалами: $GT_i^\circ = \alpha_i^\circ(s,\omega)\,, i=1,2$. Используя (1.23), получим

$$\begin{cases} \chi_i^\circ(t) = T_i^\circ(t)\operatorname{ch}(T-t) + T_j^\circ(t)\operatorname{sh}(T-t)\,, \\ \lambda_i^\circ(t) = \alpha_i^\circ(s)\operatorname{ch}(T-t) + \alpha_j^\circ(t)\operatorname{sh}(T-t)\,, \quad i,j=1,2, i\neq j \end{cases}$$

Тогда из (1.20) следует, что подозрительными на оптимальность являются следующие управления

$$\begin{cases} a_i^\circ(t) = -\operatorname{sign}\mathbf{M}\left\{T_i^\circ(t)\operatorname{sh}(T-t) + T_j^\circ(t)\left(\operatorname{ch}(T-t)-1\right)\right\}, \\ b_i^\circ(t) = -\operatorname{sign}\mathbf{M}\left\{\alpha_i^\circ(s)\operatorname{sh}(T-t) + \alpha_j^\circ(t)\left(\operatorname{ch}(T-t)-1\right)\right\}, \quad i,j=1,2, i\neq j \end{cases}$$

Можно показать, что эти управления действительно оптимальные.

Поступила 8 II 1977

Литература

[1] Крылов Н.В. Об управлении решением стохастического интегрального уравнения, Теория вероятностей и ее применения, 1972, т. 17, вып. 1.

[2] Fleming W.H. Optimal control of partially observable diffusions. SIAM J. Control, 1968, vol.6, No.2.

[3] Kushner H.J., Schweppe F.C. A maximum principle for stochastic control systems. J. Math. Analysis and Appl., 1964, vol. 8, No. 2.

[4] Kushner H.J. On the stochastic maximum principle: Fixed time of control. J. Math. Analysis and Appl., 1965, vol. 11, No. 1–3.

[5] Плотников В.И. Необходимые условия оптимальности для управляемых систем общего вида. Докл. АН СССР, 1971, т. 199, №2.

[6] Плотников В.И. Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1972, т. 36, №3.

[7] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, “Наукова думка”, 1968.

[8] Новиков А.А. О моментных неравенствах для стохастических интегралов. Теория вероятностей и ее применения, 1971, т. 16, вып. 3.

[9] Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т. 3. М., “Наука”, 1975.

[10] Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М., “Наука”, 1975.

[11] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М., “Наука”, 1974.

Глава 2.

Об одной задаче оптимального управления стохастическим процессом

УДК 517.948.3

1. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $w(t,\omega)$ — m-мерный винеровский процесс, согласованный с неубывающим семейством σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t\}$, $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$, $t \in [0,T]$. Обозначим через $\mathcal{H}$ гильбертово пространство прогрессивно измеримых относительно $\{\mathfrak{F}_t\}$ вектор-функций со скалярным произведением

$$(\xi, \eta) = \mathbf{M} \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \xi_i(s) \eta_i(s)\, ds.$$

Пусть $\eta_u(t)$ — сильное решение управляемой системы стохастиче-

[1]С.Ф. Морозов, И.П. Смирнов. Об одной задаче оптимального управления стохастическим процессом, *Дифференциальные уравнения*, т. 15, №5, 1979, стр. 945 – 946.

Полностью статья депонирована в ВИНИТИ №3677-78 Деп.

ских уравнений Ито:

$$\eta(t) = \varphi(t, u(t)) + \int_0^t A(s, \eta(s), u(s))\, ds + \int_0^t B(s, \eta(s), u(s))\, dw(s), \tag{2.1}$$

$$\eta \equiv \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix},\ \varphi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix},\ A \equiv \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nm} \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix},$$

когда управляющие параметры (u) включены в неоднородные члены и коэффициенты уравнений.

Рассмотрим следующую оптимизационную проблему, связанную с системой (2.1): среди всех управляющих функций $u(t, \omega)$, принадлежащих допустимому классу $\mathcal{U}$ и удовлетворяющих ограничениям

$$\mathbf{M}\int_0^T L_1(s, \eta_u(s), u(s))\, ds \leqslant 0,\ \mathbf{M}\int_0^T L_2(s, \eta_u(s), u(s))\, ds = 0, \tag{2.2}$$

требуется определить оптимальную функцию $u^0(t, \omega)$, минимизирующую функционал

$$\mathbf{M}\int_0^T J(s, \eta_u(s), u(s))\, ds. \tag{2.3}$$

Предполагается, что функции $\varphi_i, A_i, B_{ij}, L_1, L_2, J$ удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование решения системы (2.1) [1], отвечающего произвольному $u \in \mathcal{U}$ и непрерывную дифференцируемость по Фреше функционалов (2.2),(2.3) на некоторой окрестности оптимальной пары u^0, η^0.

Введем понятие класса $\mathcal{U}$ допустимых управлений. Пусть $\{\mathfrak{A}_t\}$— неубывающее семейство σ-алгебр, удовлетворяющих включению $\mathfrak{A}_t \subset \mathfrak{F}_t$, $t \in [0, T]$. Случайная вектор-функция $u(t, \omega) \equiv \{u_1(t, \omega), \ldots, u_n(t, \omega)\}$ называется допустимым управлением, если она:

1) прогрессивно измерима относительно потока $\{\mathfrak{A}_t\}$;

2) принимает значения в заданном выпуклом множестве $D \subset R^n$;

3) имеет траектории, принадлежащие заданному классу функций $\mathcal{B}$ (непрерывны, кусочно-непрерывны, измеримы и.д.);

4) $u(t,\omega) \in \mathcal{H}$.

Для формулировки основного результата введем линейный ограниченный оператор $R_0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, связанный с линейной системой

$$\begin{aligned} \xi(t) \;=\; & \psi(t) + \int_0^t \frac{\partial A}{\partial x}\left(s, \eta^0(s), u^0(s)\right)\xi(s)\, ds + \\ & + \int_0^t \frac{\partial B}{\partial x}\left(s, \eta^0(s), u^0(s)\right)\xi(s)\, dw(s) \end{aligned} \tag{2.4}$$

по формуле $\xi = R_0\psi$.

Интегральный принцип минимума. *Пусть $u^0 \in \mathcal{U}$ — допустимое управление, удовлетворяющее ограничениям (2.2) и минимизирующее функционал (2.3), а η^0 — отвечающее ему решение системы (2.1). Тогда существуют функции*

$$\chi^0 = R_0^*\frac{\partial J}{\partial x}\left(s,\eta^0,u^0\right),\ \chi_1^0 = R_0^*\frac{\partial L_1}{\partial x}\left(s,\eta^0,u^0\right),\ \chi_2^0 = R_0^*\frac{\partial L_2}{\partial x}\left(s,\eta^0,u^0\right) \in \mathcal{H} \tag{2.5}$$

и числа μ_1, μ_2, μ_3 $\left(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2 > 0,\ \mu_{1,2} \geqslant 0\right)$ такие[1]*, что*

$$H\left[u^0\right] = \inf_{u\in\mathcal{U}} H[u].$$

Здесь

$$\begin{gathered} H[u] = \mu_1\left\{\left(\chi^0, \Psi^0[u]\right) + \left(\tfrac{\partial J}{\partial u}\left(u^0\right), u\right)\right\} + \\ +\mu_2\left\{\left(\chi_1^0, \Psi^0[u]\right) + \left(\tfrac{\partial L_1}{\partial u}\left(u^0\right), u\right)\right\} + \mu_3\left\{\left(\chi_2^0, \Psi^0[u]\right) + \left(\tfrac{\partial L_2}{\partial u}\left(u^0\right), u\right)\right\}, \\ \Psi^0[u] = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(u^0\right)u + \int_0^t \frac{\partial A}{\partial u}\left(u^0\right)u\, ds + \int_0^t \frac{\partial B}{\partial u}\left(u^0\right)u\, dw. \end{gathered}$$

Используя (2.5), можно преобразовать гамильтониан H таким образом, чтобы он не содержал функций Лагранжа $\chi^0, \chi_1^0, \chi_2^0$, а зависел лишь от фундаментальной матрицы решений однородной линейной системы (2.4) (при $\psi(t) \equiv \xi(0)$) [2].

При выводе необходимых условий использовалась методика [3].

[1] В опубликованном кратком сообщении ошибочно утверждается, что $\mu_3 \geqslant 0$

Литература

[1] Гихман И.М., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, “Наукова думка”, 1968.

[2] Садовяк А.М., Царьков Е.Ф. Теория вероятностей и ее применения, **18**, №2, 1973.

[3] Плотников В.И. Изв. АН СССР, сер. матем., **36**, №3, 1972.

Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию 4 декабря 1975 г.

Глава 3.

Об оптимальном управлении динамической системой со случайными параметрами при неполной информации

УДК 531.36 + 62 - 50

Рассматривается задача оптимального управления линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными начальными данными и неоднородными членами, когда функционалом качества управления служит интегральный квадратичный функционал. Выбор параметра управления в каждый момент времени производится на основании наблюдения реализовавшихся значений заданной совокупности случайных параметров системы. Выводятся явные выражения для оптимальных управляющих функций и производится сравнение полученных результатов с известными ранее результатами.

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u(t,\omega) + f(t,\omega)\,,\ x(0) = \xi(\omega) \tag{3.1}$$

$$(x \equiv \operatorname{col}\{x_1, \ldots, x_n\}\,,\ u(t,\omega) = \operatorname{col}\{u_1(t,\omega), \ldots, u_m(t,\omega)\})\,,$$

[1] И.П. Смирнов. Об оптимальном управлении динамической системой со случайными параметрами при неполной информации, *Прикладная математика и механика*, т. 43, вып. 4, 1979, стр. 621 – 628.

где x — "состояние" системы, $u(t,\omega)$ — управляющая вектор-функция. Предполагается, что $A(t), B(t)$ — матрицы размера $n\times n$, $n\times m$ соответственно с детерминированными (т.е. не зависящими от случая ω), равномерно ограниченными на отрезке управления $[0,T]$ измеримыми компонентами. Случайные вектор начальных данных $\xi(\omega)$ и вектор-функция неоднородных членов $f(t,\omega)$ считаются заданными на полном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbf{P})$ и удовлетворяют ограничению

$$\mathbf{M}\left\{\xi'(\omega)\,\xi(\omega)+\int\limits_0^T f'(s,\omega)\,f(s,\omega)\;ds\right\}<\infty. \tag{3.2}$$

Здесь $\mathbf{M}$ — знак интегрирования по мере $\mathbf{P}$ (математическое ожидание); штрих — операция транспонирования.

В качестве функционала потерь рассмотрим функционал

$$J(u)=\frac{1}{2}\mathbf{M}\int\limits_0^T\left[x_u'(s,\omega)\,C(s)\,x_u(s,\omega)+u'(s,\omega)\,D(s)\,u(s,\omega)\right]\,ds, \tag{3.3}$$

где $x_u(s,\omega)$ — решение системы (3.1), отвечающее управлению $u(s,\omega)$. Предполагается, что $C(s)$ — симметрическая, неотрицательно определенная матрица размера $n\times n$, а $D(s)$ — симметрическая, положительно определенная матрица размера $m\times m$. Элементы матриц $C(s)$, $D(s)$, $D^{-1}(s)$ — неслучайные, измеримые, равномерно ограниченные при $s\in[0,T]$ функции.

Введем понятие класса допустимых управлений U. Обозначим через $\mathfrak{F}_t$ минимальную σ-подалгебру σ-алгебры $\mathfrak{F}$, относительно которой измеримы в совокупности случайные векторы $\xi(\omega)$, $f(s,\omega), s\leqslant t$. Семейство $\{\mathfrak{F}_t\}$ монотонно не убывает по параметру t, т.е. образует поток σ-алгебр. Пусть $\{\mathfrak{E}_t\}$ — произвольный подпоток этого потока ($\mathfrak{E}_t\subset\mathfrak{F}_t$, $t\in[0,T]$), $\mathfrak{B}\mathfrak{E}$ — σ-алгебра прогрессивно измеримых относительно потока $\{\mathfrak{E}_t\}$ подмножеств произведения $[0,T]\times\Omega$. Пусть далее $L_2(\mathfrak{B}\mathfrak{E})$ — гильбертово пространство $\mathfrak{B}\mathfrak{E}$-измеримых функций со скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)=\mathbf{M}\int\limits_0^T\varphi'(s,\omega)\,D(s)\,\psi(s,\omega)\;ds. \tag{3.4}$$

Допустимым управлением назовем тогда всякий элемент пространства $L_2(\mathfrak{B}\mathfrak{E})$, т.е. положим $U\equiv L_2(\mathfrak{B}\mathfrak{E})$.

Поясним физический смысл введенного определения: σ-алгебра $\mathfrak{E}_t$ интерпретируется здесь как совокупность тех случайных событий, связанных с системой регулирования, которые могут наблюдаться к моменту времени t; требование $\mathfrak{B}\mathfrak{E}$-измеримости управления $u\,(t,\omega)$ означает при этом, что величина $u_t\,(\omega)$ допустимого управления в каждый момент времени t выбирается с учетом информации о поведении случайных параметров системы, содержащейся в σ-алгебре $\mathfrak{E}_t$.

Практически совокупность наблюдаемых событий может быть задана, например, указанием множества наблюдаемых случайных параметров системы

$$\mathfrak{E}_t = \sigma\left[\xi_i\,(\omega)\,,\ i = i_1, \ldots, i_l;\ f_k\,(s,\omega)\,,\ k = k_1, \ldots, k_j;\ s \in S\,(t) \subset [0,t]\right]$$

В этом случае (см. [1, стр. 31]) $\mathfrak{E}_t$-измеримая случайная величина $u_t\,(\omega)$ допускает представление

$$u_t\,(\omega) = g_t\left(\xi_{i_1}\,(\omega)\,, \ldots, \xi_{i_l}\,(\omega)\,;\ f_{k_1}\,(\cdot,\omega)\,, \ldots, f_{k_j}\,(\cdot,\omega)\right),$$

где $g_t\,(\cdot)$ — некоторое измеримое (неслучайное) отображение пространства “траекторий” $\{y_1, \ldots, y_{l;}\, z_1\,(\cdot)\,, \ldots, z_j\,(\cdot)\}$ в пространство R^m, наглядно демонстрирующее явную зависимость управляющей функции от результатов наблюдений.

Заметим, что выбором потока $\{\mathfrak{E}_t\}$ можно задать самые разнообразные классы управляющих функций. Так, в случае $\mathfrak{E}_t \equiv \{\emptyset, \Omega\}$ получаем класс детерминированных управлений (программное управление), в случае $\mathfrak{E}_t \equiv \mathfrak{F}_{t-\delta}$, $\delta > 0$ — управление по запаздывающей информации и т.д.

Данная работа посвящена задаче минимизации функционала (3.3) на введенном выше классе допустимых управлений U. Близкие задачи изучались ранее в ряде работ (см., например, [2]) при дополнительном предположении о марковском свойстве процесса f.

3.2. Существование оптимального управления

Следуя [3], решением системы (3.1) назовем измеримую случайную вектор-функции $x_u\,(t,\omega)$, которая при каждом $t \in [0,T]$ почти наверное удовлетворяет соответствующей (3.1) системе интегральных уравнений.

Лемма 1[3]. В условиях п. 3.1 система (3.1) при любом допустимом управлении имеет единственное (с точностью до модификации) $\mathfrak{B}\mathfrak{F}$-измеримое решение

$$x_u\,(t,\omega) = \Phi_0\,(t)\left\{\xi\,(\omega) + \int\limits_0^t \Phi_0^{-1}\,(s)\left[B\,(s)\,u\,(s,\omega) + f\,(s,\omega)\right]\,ds\right\}, \quad (3.5)$$

где $\Phi_0(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot{x} = A(t)\, x$.

Лемма 2. В условиях п. 3.1 в классе допустимых управлений существует оптимальный элемент $u^0 : \ J(u^0) \leqslant J(u), u \in U$.

Доказательство. Имеем в силу (3.2): $J(0) = c < \infty$. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{u_k\} \subset U : u_1 \equiv 0, J(u_k) \downarrow \inf J(u)\,,\ u \in U$. Из (3.3) и (3.4) имеем

$$\|u_k\|^2 = (u_k, u_k) \leqslant J(u_k) \leqslant c,\ k \geqslant 1.$$

Так как шар пространства $L_2(\mathfrak{BE})$ слабо компактен, то из последовательности $\{u_k\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность: $u_l \to u^0 \in L_2(\mathfrak{BE})$. Заметим, что поскольку $L_2(\mathfrak{BE}) \subset L_2(\mathfrak{BF})$, то последовательность $\{u_l\}$ — слабо сходящаяся также и в пространстве $L_2(\mathfrak{BF})$. Из формулы (3.5) вытекает поэтому слабая сходимость в $L_2(\mathfrak{BF})$ последовательности x_{u_l} к x_{u^0}. Так как интегрант функционала (3.3) — выпуклая (вниз) функция своих аргументов, то из результатов работы [4] следует, что функционал J полунепрерывен снизу относительно последовательности $\{u_l\}$

$$\inf_{u \in U} J(u) = \lim_{l \to \infty} J(u_l) \geqslant \varliminf_{l \to \infty} \inf J(u_l) \geqslant J\left(u^0\right).$$

Но, с другой стороны, поскольку $u^0 \in U$, то $J(u^0) \geqslant \inf\limits_{u \in U} J(u)$.

3.3. Критерии оптимальности

Лемма 3. Для того чтобы допустимое управление u^0 было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло следующему интегральному принципу минимума

$$\min_{u \in U} H(u) = H\left(u^0\right) \tag{3.6}$$

$$H(u) \equiv (\varphi_0, u)\,,\ \varphi_0(t, \omega) \equiv D^{-1}(t)\, B'(t)\, \Theta_0(t, \omega) + u^0(t, \omega)\,,$$

$$\Theta_0(t, \omega) \equiv \mathbf{M}\left\{ \left(\Phi_0'(t)\right)^{-1} \int\limits_t^T \Phi_0'(s)\, C(s)\, x^0(s, \omega)\ ds \middle|\, \mathfrak{E}_t \right\},\ x^0 \equiv x_{u^0}$$

($\mathbf{M}\{\eta | \mathfrak{E}_t\}$ — условное математическое ожидание случайной величины η относительно σ-алгебры $\mathfrak{E}_t$).

Доказательство. Необходимость (3.6) вытекает из результатов работ [5, 6]. Чтобы доказать достаточность этого условия, предположим, что

$u^0 \in U$ удовлетворяет (3.6), а u — произвольное допустимое управление. Имеем

$$\begin{gathered}2J(u) = \mathbf{M}\int\limits_0^T \left[(x_u' - x^0)' C (x_u - x^0) + (u - u^0)' D (u - u^0)\right] ds + \\ +2\mathbf{M}\int\limits_0^T [x^{0\prime} C x_u + u^{0\prime} D u]\, ds - 2J(u^0) \equiv J_1 + J_2 - 2J(u^0).\end{gathered} \tag{3.7}$$

В силу свойств матриц C и D имеем $J_1 \geqslant 0$, причем равенство $J_1 = 0$ достигается лишь при условии, что $u(t,\omega) = u^0(t,\omega)$ для почти всех t, ω. Преобразуем J_2, используя (3.5) и (3.6). Имеем, меняя порядки интегрирования и учитывая свойства условного математического ожидания

$$\begin{gathered}J_2 = 2\mathbf{M}\int\limits_0^T x^{0\prime} C \Phi_0 \left[\xi + \int\limits_0^s \Phi_0^{-1}(Bu + f)\, d\tau\right] ds + 2\left(u^0, u\right) = \\ = 2\left\{\mathbf{M}\int\limits_0^T x^{0\prime} C \Phi_0 \left(\xi + \int\limits_0^s \Phi_0^{-1} f\, d\tau\right) ds\right\} + \\ +2\mathbf{M}\int\limits_0^T \left(\int\limits_s^T x^{0\prime} C \Phi_0 d\tau\right) \Phi_0^{-1} B u\, ds + 2\left(u^0, u\right) \equiv \\ \equiv 2\{\alpha_1\} + 2(\varphi_0, u) = 2\alpha_1 + 2H(u).\end{gathered}$$

Аналогично получаем

$$2J\left(u^0\right) = \alpha_1 + H\left(u^0\right). \tag{3.8}$$

Поэтому из (3.7) вытекает в силу (3.6) и (3.8)

$$2J(u) \geqslant \alpha_1 + H\left(u^0\right) + 2\left(H(u) - H\left(u^0\right)\right) \geqslant 2J\left(u^0\right),$$

что и означает оптимальность управления u^0. Заметим, что отсюда же в силу сделанного выше замечания о величине J_1 выводится утверждение о единственности оптимального управления.

Лемма 4. Для того чтобы допустимое управление u^0 было оптимальным необходимо и достаточно, чтобы для почти всех t, ω выполнялось равенство

$$\varphi_0(t,\omega) = 0. \tag{3.9}$$

Доказательство. Достаточность условия (3.9) следует непосредственно из предыдущей леммы. Пусть далее $u^0 \in U$ — оптимальное допустимое управление. Предположим, что (3.9) нарушается на множестве положительной меры, т.е. $\|\varphi_0\| > 0$. Положим $u_1 \equiv \gamma\varphi_0$, где γ — положительное число. Используя допустимость u^0, легко проверить допустимость управления u_1. Но тогда

$$H(u_1) = \gamma \|\varphi_0\|^2 < H\left(u^0\right)$$

при $\gamma < H(u^0)\|\varphi_0\|^{-2}$, что противоречит в силу (3.6) оптимальности управления u^0.

Объединим результаты лемм 1 – 4 в следующей теореме.

Теорема. Поставленная в п. 3.1 задача оптимального управления имеет единственное решение. Оптимальная управляющая функция (и только она) удовлетворяет при всех t, ω соотношению (3.9).

3.4. Вспомогательные результаты

Следующие предложения будут неоднократно использованы в дальнейшем.

Лемма 5. Пусть числовые функции $\eta_1(t,\omega), \eta_2(t,\tau,\omega)$; $t,\tau \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$ измеримы по совокупности переменных относительно σ-алгебр $\mathfrak{B}\times\mathfrak{F}$, $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}\times\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0,T]$) и интегрируемы по $(t,\omega), (t,\tau,\omega)$ соответственно. Пусть далее $\{C_t\}$ — произвольный поток полных по мере $\mathbf{P}$ σ-подалгебр σ-алгебры $\mathfrak{F}$. Тогда существует такой выбор вариантов условных математических ожиданий, что

а) функция $\eta_3(t,\omega) \equiv \mathbf{M}\{\eta_1(t,\omega)|\, C_t\}$ прогрессивно измерима относительно потока $\{C_t\}$ и интегрируема по совокупности переменных (t,ω);

б) для почти всех t, ω

$$\mathbf{M}\left\{\int_0^T \eta_2(t,\tau,\omega)\, d\tau \,\middle|\, C_t\right\} = \int_0^T \mathbf{M}\{\eta_2(t,\tau,\omega)|\, C_t\}\, d\tau.$$

Доказательство леммы непосредственно вытекает из близких результатов работ [1, 7].

Лемма 6. Пусть $Y(t,\omega)$ — решение (в смысле п. 3.2) системы интегральных уравнений

$$Y(t,\omega) = \alpha(t,\omega) + \int_0^t P(s)\, Y(s,\omega)\, ds,$$

где $P(s)$ — матрица размера $n \times n$ с равномерно ограниченными на $[0,T]$ измеримыми компонентами, $\alpha(t,\omega)$ — измеримая случайная вектор-функция с интегрируемыми траекториями. Тогда при каждом $t \in [0,T]$ почти наверное

$$Y(t,\omega) = \alpha(t,\omega) + \Psi(t) \int\limits_0^t \Psi^{-1}(s) P(s) \alpha(s,\omega)\, ds.$$

Здесь $\Psi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = P(t)x$.

Доказательство следует из формулы Коши, если учесть, что $Y = K + \alpha$, где K — решение системы $\dot{K} = PK + P\alpha,\ K(0) = 0$.

3.5. Построение оптимального управления

Будем искать оптимальное управление в виде

$$u^0(t,\omega) = -D^{-1}(t) B'(t) \left[G(t) \mathbf{M}\left\{ x^0(t,\omega) \middle| \mathfrak{E}_t \right\} + h(t,\omega)\right] \tag{3.10}$$

Здесь $x^0(t,\omega)$ — как и раньше, решение системы (3.1), отвечающее управлению $u^0(t,\omega)$, а $G(t), h(t,\omega)$ — неизвестные пока матрица размера $n \times n$ с детерминированными, равномерно ограниченными на $[0,T]$ измеримыми компонентами и $\mathfrak{B}\mathfrak{E}$-измеримая интегрируемая вектор-функция соответственно. Подставляя (3.10) в формулу (3.2), получим

$$z^0(t,\omega) = \alpha(t,\omega) + \int\limits_0^t P(s) z^0(s,\omega)\, ds$$

$$z^0(t,\omega) \equiv \Phi_0^{-1}(t) \mathbf{M}\left\{ x^0(t,\omega) \middle| \mathfrak{E}_t \right\},\ P(t) = -\Phi_0^{-1}(t) \Gamma(t) G(t) \Phi_0(t)$$

$$\Gamma(t) \equiv B(t) D^{-1}(t) B'(t),\ \alpha(t,\omega) \equiv \mathbf{M}\left\{ \xi(\omega) - \int\limits_0^t \Phi_0^{-1}[\Gamma h - f]\, ds \middle| \mathfrak{E}_t \right\}$$

Применяя лемму 6, имеем отсюда

$$z^0(t,\omega) = \alpha(t,\omega) + \Psi(t) \int\limits_0^t \Psi^{-1}(s) P(s) \alpha(s,\omega)\, ds.$$

Используя эту формулу, можно установить, что при $s > t$

$$\mathbf{M}\left\{ z^0(s,\omega) \middle| \mathfrak{E}_t \right\} = \Psi(s) \Psi^{-1}(t) z^0(t,\omega) + \mathbf{M}\left\{ \beta(t,s,\omega) \middle| \mathfrak{E}_t \right\}, \tag{3.11}$$

$$\beta(t,s,\omega) \equiv \alpha(s,\omega) + \Psi(s) \Psi^{-1}(t) \alpha(t,\omega) + \Psi(s) \int\limits_t^s \Psi^{-1} P \alpha\, d\tau$$

Поскольку u^0 — оптимальное управление, то в силу теоремы оно удовлетворяет соотношению (3.9). Используя (3.11), получаем из (3.9)

$$u^0(t,\omega) = -D^{-1}(t)\,B'(t)\left[I_1(t)\,z^0(t,\omega) + I_2(t,\omega)\right], \tag{3.12}$$

$$I_1(t) \equiv \left(\Phi_0'(t)\right)^{-1}\int\limits_t^T \Phi_0'(s)\,C(s)\,\Phi_0(s)\,\Psi(s)\;ds\Psi^{-1}(t),$$

$$I_2(t,\omega) \equiv \left(\Phi_0'(t)\right)^{-1}\int\limits_t^T \Phi_0'(s)\,C(s)\,\Phi_0(s)\;\mathbf{M}\left\{\beta(t,s,\omega)\right|\mathfrak{E}_t\}\,ds.$$

Сравнивая (3.10) с (3.12), потребуем, чтобы при каждом t почти наверное удовлетворялись следующие равенства:

$$I_1(t) = G(t)\,\Phi_0(t)\,,\ I_2(t,\omega) = h(t,\omega)\,. \tag{3.13}$$

Дифференцируя первое из этих равенств по t, получаем известное матричное уравнение Риккати для определения матрицы $G(t)$

$$\dot{G} + GA + A'G - G\Gamma G + C = 0,\ G(T) = 0 \tag{3.14}$$

В условиях п. 3.1 его решением служит симметрическая, неотрицательно-определенная матрица (см., например, [1, 2]).

Пусть всюду далее $G(t)$ — решение системы (3.14). Используя (3.11) и лемму 5, преобразуем второе уравнение (3.13) к эквивалентному

$$\mathbf{M}\left\{\int\limits_t^T \Phi_0'(s)\,G(s)\left[\Gamma(s)\,h(s,\omega) - f(s,\omega)\right]\,ds + \Phi_0'(t)\,h(t,\omega)\right|\mathfrak{E}_t\left.\vphantom{\int\limits_t^T}\right\} = 0. \tag{3.15}$$

Пусть измеримая случайная вектор-функция $h_1(t,\omega)$ обращает в нуль (при каждом t почти наверное) выражение, стоящее в (3.15) под знаком условного математического ожидания. Тогда $\mathfrak{BE}$-измеримая случайная функция $h(t,\omega) \equiv \mathbf{M}\{h_1(t,\omega)|\,\mathfrak{E}_t\}$ (см. лемму 5) удовлетворяет системе (3.15). В этом можно убедиться непосредственной подстановкой, если учесть, что при $s > t$ почти наверное

$$\mathbf{M}\{h(s,\omega)|\,\mathfrak{E}_t\} = \mathbf{M}\{h_1(s,\omega)|\,\mathfrak{E}_t\}\,.$$

Для определения функции $h_1(t,\omega)$ получаем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{h}_1 + (A' - G\Gamma)\,h_1 + Gf = 0,\ h_1(T,\omega) = 0,$$

интегрируя которую, находим

$$h(t,\omega) = M\left\{ \Psi_0(t) \int\limits_t^T \Psi_0^{-1}(s)\, G(s)\, f(s,\omega)\, ds \right| \mathfrak{E}_t \left. \vphantom{\int\limits_t^T} \right\} \tag{3.16}$$

Здесь $\Psi_0(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = (G\Gamma - A')\,x$.

Повторяя предыдущие рассуждения, можно установить теперь, что допустимое управление, удовлетворяющее соотношенияю (3.10), где $G(t)\,, h(t,\omega)$ — решения первой и второй систем (3.13) соответственно, удовлетворяет также и соотношению (3.9), т.е. оптимально.

Покажем, что такое управление действительно существует и найдем его в явном виде. Имеем из (3.10) и (3.2) уравнение для u^0

$$\begin{aligned} u^0(t,\omega) &= -D^{-1}(t)\, B'(t) \left[G(t)\, \Phi_0(t) \int\limits_0^t \Phi_0^{-1}(s)\, B(s)\, u^0(s,\omega)\, ds + \gamma(t,\omega) \right] \quad (3.17) \\ \gamma(t,\omega) &\equiv M\left\{ G(t)\, \Phi_0(t) \left[\xi(\omega) + \int\limits_0^t \Phi_0^{-1}(s)\, f(s,\omega)\, ds \right] \right| \mathfrak{E}_t \left. \vphantom{\int\limits_0^t} \right\} + h(t,\omega)\,. \end{aligned}$$

Предположим, что $\delta(t,\omega)$ — решение системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(t,\omega) = -\Gamma(t)\left[G(t)\, v(t,\omega) + \gamma(t,\omega)\right] \\ v(t,\omega) = \Phi_0(t) \int\limits_0^t \Phi_0^{-1}(s)\, \delta(s,\omega)\, ds. \end{array} \right. \tag{3.18}$$

Тогда функция

$$u^0(t,\omega) \equiv -D^{-1}(t)\, B'(t)\left[G(t)\, v(t,\omega) + \gamma(t,\omega)\right],$$

как можно убедиться непосредственной подстановкой, удовлетворяет системе (3.17). Систему (3.18) приведем к эквивалентной

$$\dot{v} - (A - \Gamma G)\, v + \Gamma\gamma = 0,\ \ v(0,\omega) = 0,$$

интегрируя которую, определим окончательное выражение для оптимального управления

$$u^0(t,\omega) = D^{-1}(t)\, B'(t) \left[G(t)\left(\Psi_0'(t)\right)^{-1} \int\limits_0^t \Psi_0'(s)\, \Gamma(s)\, \gamma(s,\omega)\, ds - \gamma(t,\omega) \right]. \tag{3.19}$$

3.6. Примеры

Рассмотрим некоторые конкретные способы задания потока наблюдаемых событий $\{\mathfrak{E}_t\}$.

Программное управление. Пусть $\mathfrak{E}_t \equiv \{\emptyset, \Omega\}$. При этом всякое допустимое управление с вероятностью единица не зависит от случая. Управление осуществляется на основе априорных сведений о системем регулирования.

Из (3.16), (3.17) и (3.19) имеем почти наверное

$$\gamma(t,\omega) = \gamma(t) = G(t)\,\Phi_0(t)\left[\mathbf{M}\xi(\omega) + \int\limits_0^t \Phi_0^{-1}(s)\,\mathbf{M}f(s,\omega)\;ds\right] +$$
$$+\Psi_0(t)\int\limits_t^T \Psi_0^{-1}(s)\,G(s)\,\mathbf{M}f(s,\omega)\;ds,$$
$$u^0(t,\omega) = u^0(t) = D^{-1}(t)\,B'(t)\left[G(t)\,(\Psi_0'(t))^{-1}\int\limits_0^t \Psi_0'(s)\,\Gamma(s)\,\gamma(s)\;ds - \gamma(t)\right]$$

Марковский случай. Пусть начальные данные неслучайны: $\xi(\omega) \equiv \xi_0$, а вектор-функция $f(t,\omega)$ — марковский процесс, удовлетворяющий системе стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$df = l(t,f)\;dt + m(t,f)\;dw,\;\; f(0) = f_0, \tag{3.20}$$

где $w(t,\omega)$ — n-мерный винеровский процесс на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, l — n-мерный вектор, m — матрица размера $n \times n$. Функции $l_i(t,x)$, $m_{ij}(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in R^n$ предполагаются такими, что решение системы (3.20) обладает переходной плотностью распределения вероятностей $p(t,x;s,y)$, удовлетворяющей обратному уравнению А.Н. Колмогорова (см. [3, стр. 96, 106]).

Рассмотрим такой способ управления, когда осуществляется наблюдение всей траектории процесса $f : \mathfrak{E}_t \equiv \sigma[f(s,\omega), s \leqslant t]$. Имеем

$$\begin{gathered} M\{f(s,\omega)|\,\mathfrak{E}_t\} = M\{f(s,\omega)|\,f(t,\omega)\} = \\ = \int\limits_{R^n} xp(t,f(t,\omega);s,x)\;dx \equiv a(s,t;f(t,\omega)) \end{gathered} \tag{3.21}$$

Функция $a(s;t,y)$ удовлетворяет (см. [3, стр. 105]) уравнению (Tr — след матрицы)

$$a(s;t,y) = y + \int\limits_t^s l'(\tau,y)\,\tfrac{\partial a}{\partial y}(s;\tau,y)\;d\tau +$$
$$+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\int\limits_t^s m(\tau,y)\,m'(\tau,y)\,\tfrac{\partial^2 a}{\partial y^2}(s;\tau,y)\;d\tau.$$

Введем функцию

$$N(t,y) \equiv \Psi_0(t) \int\limits_t^T \Psi_0^{-1}(s)\, G(s)\, a(s;t,y)\; ds$$

для которой, согласно (3.20) и (3.16), имеем

$$N(t, f(t,\omega)) = h(t,\omega). \tag{3.22}$$

Испльзуя (3.21), можно показать, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t} + (A' - G\Gamma)\, N + l'(t,y)\, \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} m(t,y)\, m'(t,y)\, \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} = 0,\;\; N(T,y) = 0.$$

Учитывая, что решение x^0 в рассматриваемом примере согласовано с потоком $\{\mathfrak{C}_t\}$, получим из (3.10), (3.22) следующее удобное представление для оптимального управления

$$u^0(t,\omega) = -D^{-1}(t)\, B'(t)\left[G(t)\, x^0(t,\omega) + N(t, f(t,\omega))\right].$$

Отметим, что этот результат был известен ранее (см. [2, стр. 135]).

Другое представление для оптимального управления можно получить из (3.19), если учесть, что в данном случае

$$\gamma(t,\omega) = G(t)\, \Phi_0(t)\left[\xi_0 + \int\limits_0^t \Phi_0^{-1}(s)\, f(s,\omega)\; ds\right] + N(t, f(t,\omega)).$$

Автор благодарит В.И. Плотникова за обсуждение работы.
Поступила 17 IV 1978

Литература

[1] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М., “Наука”, 1975.

[2] Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М., “Сов. радио”, 1976.

[3] Гихман И.М., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, “Наукова думка”, 1968.

[4] Морозов С.Ф., Плотников В.И. О необходимых и достаточных условиях непрерывности и полунепрерывности функционалов вариационного исчисления. Матем. сб., 1962, т.57(99), №3.

[5] Морозов С.Ф., Смирнов И.П. Об одной задаче оптимального управления стохастическим процессом. Дифференциальные уравнения, 1979, т.15, №5 (Глава 2 настоящего сборника)

[6] Морозов С.Ф., Смирнов И.П. Принципы минимума в задачах оптимального управления случайными процессами. ПММ, 1978, т. 42, вып. 2 (Глава 1 настоящего сборника)

[7] О представлении процессов Ито. Теория вероятностей и ее применения, 1972, т. 17, вып. 1.

Глава 4.

Структура операторов стохастического интегрирования на пространствах суммируемых случайных функций

УДК 531.36 + 62 - 50

При построении сопряженной задачи в теории оптимизации управляемых систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями, возникает потребность в знании структуры операторов, порождаемых операциями стохастического интегрирования на пространствах суммируемых случайных функций [1, 2].

В п. 4.1 вводятся основные определения и доказываются некоторые вспомогательные результаты; свойства операторов интегрирования по Лебегу, Ито и случайной пуассоновской мере изучаются соответственно в п. 4.2, 4.3, 4.4; 4.5 посвящен установлению взаимных связей, существующих между этими операторами.

[1]С.Ф. Морозов, И.П. Смирнов. Структура операторов стохастического интегрирования на пространствах суммируемых случайных функций, Горький, 1979. Деп. в ВИНИТИ, 1980, №397 - 80 Деп.

Содержание главы опубликовано также в диссертационной работе.

4.1. Введение

4.1.1. Основные функциональные пространства

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство; $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in [0,1]\}$ — непрерывный справа поток полных по мере $\mathbf{P}$ σ-подалгебр σ-алгебры $\mathfrak{F}$. Введем следующие обозначения: $\mathfrak{B}^n$ — σ-алгебра борелевских подмножеств n-мерного евклидова пространства R^n; mes — мера Лебега на $\mathfrak{B}^n$; $\mathfrak{B}^1 \times \mathfrak{F}$ и mes $\times$ $\mathbf{P}$ — прямые произведения σ-алгебр $\mathfrak{B}^1$ и $\mathfrak{F}$ и мер mes и $\mathbf{P}$, соответственно; $\mathfrak{B}\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}^1 \times \mathfrak{F}$ — σ-алгебра прогрессивно измеримых относительно потока $\{\mathfrak{F}_t\}$ подмножеств множества $[0,1] \times \Omega$.

Рассмотрим основные функциональные пространства, используемые в этой работе. Пусть $p \in [1, \infty)$.

1) $L_p(\Omega)$ — банахово пространство (классов эквивалентности по мере $\mathbf{P}$) $\mathfrak{F}$-измеримых случайных величин (с.в.) $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ с нормой
$$\|\xi\|_{L_p(\Omega)} = \left\{\mathbf{M}\,|\xi|^p\right\}^{1/p}.$$
Здесь $\mathbf{M}$ — знак математического ожидания по вероятности $\mathbf{P}$.

2) E_p — множество $\mathfrak{B}\mathfrak{F}$-измеримых случайных функций (с.ф.) $f(t,\omega)$, $t \in [0,1]$, $\omega \in \Omega$, для которых $\mathbf{P}$-п.н.
$$\int\limits_0^1 |f(t,\omega)|^p \, dt < \infty;$$

3) L_p — банахово пространство (классов эквивалентности по мере mes $\times \mathbf{P}$) $\mathfrak{B}\mathfrak{F}$-измеримых случайных функций с нормой
$$\|f\|_p = \left\{\mathbf{M}\int\limits_0^1 |f(t,\omega)|^p \, dt\right\}^{1/p};$$

4) N_p — банахово пространство (классов эквивалентности по мере mes $\times \mathbf{P}$) $\mathfrak{B}\mathfrak{F}$-измеримых случайных функций с нормой
$$\|f\|_{N_p} = \left\{\mathbf{M}\left(\int\limits_0^1 |f(t,\omega)|^2 \, dt\right)^{p/2}\right\}^{1/p};$$

5) H_p — банахово пространство (классов $\mathbf{P}$-модификаций[1]) $\mathfrak{BF}$-измеримых случайных функций с нормой

$$|f|_p = \left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \mathbf{M} \left| f(t, \omega) \right|^p \right\}^{1/p};$$

6) DH_p — нормированное пространство (классов $\mathbf{P}$-неотличимых) $\mathfrak{BF}$-измеримых случайных функций, имеющих $\mathbf{P}$-п.н. траектории класса[2] D с нормой

$$|f|_p^{(d)} = \left\{ \mathbf{M} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| f(t, \omega) \right|^p \right\}^{1/p};$$

7) CH_p — подпространство DH_p, состоящее из функций, непрерывных с вероятностью 1;

8) Пусть $\Pi(\cdot)$ — σ-конечная мера на $\mathfrak{B}^n$. Обозначим

   а) $E_p(\Pi)$ — множество $\mathfrak{BF} \times \mathfrak{B}^n$-измеримых функций $\psi(t, \omega, y)$, $t \in [0, 1]$, $\omega \in \Omega$, $y \in R^l$, для которых с вероятностью 1

$$\int_0^1 \int \left| \psi(t, \omega, y) \right|^p \Pi(dy) < \infty;$$

   б) $L_p(\Pi)$ — банахово пространство (классов $\mathrm{mes} \times \mathbf{P} \times \Pi$-эквивалентных) $\mathfrak{BF} \times \mathfrak{B}^n$-измеримых функций $\psi(t, \omega, y)$ с нормой

$$\|\psi\|_{L_p(\Pi)} = \left\{ \mathbf{M} \int_0^1 \left[\int |\psi|^p \, \Pi(dy) + \left(\int |\psi|^2 \, \Pi(dy) \right)^{p/2} \right] \right\}^{1/p}.$$

Сделаем ряд замечаний относительно введенных пространств. Можно рассматривать вложения вида $DH_p \subset H_p \subset L_p$. При этом элемент из более узкого пространства отождествляется с отвечающим ему классом эквивалентности из более широкого пространства. Напротив, если

[1] Случайные функции ξ_1, ξ_2 называются $\mathbf{P}$-*модификациями друг друга,* если $\forall t \in [0, 1]$ $\mathbf{P}$-п.н. $\xi_1(t, \omega) = \xi_2(t, \omega)$ и $\mathbf{P}$-*неотличимыми друг от друга,* если $\mathbf{P}$-п.н. $\xi_1(t, \omega) = \xi_2(t, \omega)$ $\forall t \in [0, 1]$

[2] Функция $\varphi : [0, 1] \to R^1$ принадлежит классу D, если она непрерывна справа и имеет конечный предел слева всюду на отрезке $[0, 1]$.

утверждается, что некоторый элемент пространства принадлежит более узкому пространству, то имеется в виду, что соответствующий класс эквивалентности содержит функцию из указанного узкого пространства. Отметим, что при этих вложениях DH_p, а значит и H_p всюду плотны в L_p.

Далее, $L_p(\Omega), L_p, N_p, L_p(\Pi)$ — банаховы идеальные пространства измеримых функций с порядково непрерывными нормами (здесь использована терминология [3]). Пусть $\mathcal{H}$ обозначает любое из этих пространств. Как показано в [3], существует линейный изоморфизм между сопряженным пространством $\mathcal{H}^*$ и множеством $X_{\mathcal{H}}$ всех измеримых функций x (классов μ-эквивалентных функций, где μ — мера, соответствующая выбору пространства $\mathcal{H}$) таких, что

$$\int |x\varphi|\ d\mu < \infty\ \forall \varphi \in \mathcal{H}.$$

Этот изоморфизм имеет вид

$$X_{\mathcal{H}}\ \ni x \longleftrightarrow f(\cdot) = \int x \cdot\ d\mu \in \mathcal{H}^*.$$

Имея в виду этот факт, будем отождествлять $\mathcal{H}^*$ с $X_{\mathcal{H}}$. В частности, отождествляем

$$L_p^* \equiv X_{L_p} = L_{p'},\ N_p^* \equiv X_{N_p} = N_{p'},$$
$$L_2^*(\Pi) \equiv X_{L_2(\Pi)} = L_2(\Pi),$$

где $p > 1, p' = p/(p-1)$.

4.1.2. Операторы

Пусть $w(t,\omega), \nu(t,A)$ $(A \subset R^l)$, $t \in [0,1]$ — стандартный винеровский процесс и случайная пуассоновская мера на R^{l+1}с параметром $\Pi(A)\,t$ ($\Pi(\cdot)$ — σ-конечная мера на R^l), соответственно, согласованные с потоком $\{\mathfrak{F}_t\}$ и имеющие при $s > t$ не зависящие от $\mathfrak{F}_t$ приращения $w(s) - w(t)$, $\nu(s,A) - \nu(t,A)$. Пусть $\nu(t,A) \equiv \nu(t,A) - \Pi(A)\,t$.

Положим для $f \in E_1$, $\varphi \in E_2, \alpha \in E_2(\Pi)$

$$\mathcal{L}(f)(t,\omega) \equiv \int\limits_0^t f(s,\omega)\ ds,\ \mathcal{J}(\varphi)(t,\omega) \equiv \int\limits_0^t \varphi(s,\omega)\ dw(s,\omega), \tag{4.1}$$

$$\mathcal{P}(\alpha)(t,\omega) \equiv \int\limits_0^t \int \alpha(s,\omega,y)\ \tilde{\nu}(ds,dy).$$

Правые части тождеств (4.1) понимаются соответственно как интеграл Лебега (потраекторный), стохастический интеграл Ито и стохастический интеграл по центрированной пуассоновской мере [4]. В настоящей работе изучаются свойства операторов, порождаемых этими интегралами на введенных ранее пространствах случайных функций. Для всех этих операторов используются одни и те же обозначения, введенные в (4.1). Это не приводит к недоразумениям, так как всякий раз будет указываться пара пространств, в которых рассматривается тот или иной оператор.

4.1.3. Вспомогательные результаты

Напомним некоторые известные факты из теории мартингалов и теории стохастических интегралов [4]. Пользуясь полнотой пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, будем рассматривать лишь сепарабельные модификации случайных проуессов. Пусть $\mu(t), t \in [0,1]$ — мартингал относительно потока $\{\mathfrak{F}_t\}$ (как и все другие рассматриваемые в данной работе мартингалы). Так как этот поток непрерывен справа, то $\mu(t)$ имеет модификацию с траекториями из класса D. При этом, если $\mathbf{M}\,|\mu(t)|^p < \infty$, $p \in (1,\infty)$, то справедлива оценка

$$\mathbf{M} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\mu(t)|^p \leqslant (p')^p \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \mathbf{M}\,|\mu(t)|^p = (p')^p\, \mathbf{M}\,|\mu(1)|^p \qquad (4.2)$$

Пусть $\mathcal{M}_2$ — класс всех таких мартингалов на $[0,1]$ с траекториями из D, для которых $\mathbf{M}\mu^2(1) < \infty$. $\mathcal{M}_2$ — гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$(\mu_1, \mu_2) = \mathbf{M}\mu_1(1)\,\mu_2(1).$$

Замкнутые подпространства в $\mathcal{M}_2$ образуют множества мартингалов

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^w &= \left\{ \int_0^t \varphi\, dw,\ \varphi \in L_2 \right\}, \\ \mathcal{M}_2^\nu &= \left\{ \int_0^t \int \psi \tilde{\nu}(\,ds, dy),\ \psi \in L_2(\Pi) \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $\varphi \in N_p, p \in (1,\infty), \psi \in L_2(\Pi)$. Имеют место следующие оценки моментов стохастических интегралов

$$A_p^p \|\varphi\|_{N_p}^p \leqslant \mathbf{M}\left|\int_0^1 \varphi(s)\; dw(s)\right|^p \leqslant B_p^p \|\varphi\|_{N_p}^p, \qquad (4.3)$$

$$\mathbf{M}\left|\int\limits_0^1 \int \psi(s,y)\,\tilde{\nu}(\,ds,dy)\right|^2 = \mathbf{M}\int\limits_0^1 \int \psi^2(s,y)\; ds\Pi(dy), \qquad (4.4)$$

где A_p, B_p — положительные постоянные, зависящие только от p, причем $A_2 = B_2 = 1$. Согласно [8] постоянные A_p могут быть выбраны так, что $\forall r > 2$ можно найти $r_1 < r$, при котором $\tilde{A}_r \equiv \inf\limits_{p\in(r_1,r)} A_p > 0$. Правое из неравенств (4.3) справедливо также и при $p \in (0,1]$. При этом, если $\varphi \in N_1$, то с.ф. $\mathcal{J}(\varphi)(t,\omega)$ является мартингалом и $\mathbf{M}\mathcal{J}(\varphi)(t,\omega) = 0$.

Пусть $\mathfrak{F}_t^w = \sigma[w(s), s \leqslant t]$. Обозначим $N_p(w)$ подпространство пространства N_p, состоящее из с.ф., прогрессивно измеримых относительно потока $\{\mathfrak{F}_t^w\}$. Если с.в. $\xi(\omega)$ является $\mathfrak{F}_1^w$-измеримой и принадлежит пространству $L_2(\Omega)$, то существует единственная функция $\lambda \in N_2(w)$ такая, что п.н.

$$\xi(\omega) = \mathbf{M}\xi(\omega) + \int\limits_0^1 \lambda(s,\omega)\; dw(s,\omega) \qquad (4.5)$$

(теорема Ито-Кларка). Пользуясь неравенствами (4.3), обобщим формулу (4.5) на более широкий класс с.в.

Лемма 1[3]. *Пусть с.в. $\xi(\omega)$ $\mathfrak{F}_1^w$-измерима, и $\mathbf{M}|\xi|^p < \infty$, где $p \in (1,\infty)$. Тогда существует единственная функция $\lambda \in N_p(w)$, для которой с вероятностью 1 выполнено (4.5). При этом*

$$A_p \|\lambda\|_{N_p} \leqslant \|\xi - \mathbf{M}\xi\|_p \leqslant B_p \|\lambda\|_{N_p} \qquad (4.6)$$

В частности, если мартингал $\mu(t)$ согласован с потоком $\{\mathfrak{F}_t^w\}$ и $\mathbf{M}|\mu(1)|^p < \infty$, то он единственным образом представим в виде

$$\mu(t) = \mathbf{M}\mu(t) + \int\limits_0^t \lambda(s,\omega)\; dw(s,\omega),\ \lambda \in N_p(w). \qquad (4.7)$$

Доказательство. Пусть $P(r)$ — утверждение, состоящее в том, что теорема верна при $p = r$. Справедливы следующие утверждения.

[3]В опубликованной работе теорема доказана лишь для $p \in (1,2]$. Представленный результат опубликован в диссертационной работе.

У1. $P(p) \Rightarrow P(r)\ \forall r \in (1, p)$.

У2. *Пусть* $r \geqslant 4$ *и известно, что любой* $\xi \in L_r(w)$ *отвечает единственная функция* $\lambda \in N_{r-2}(w)$, *при которой выполнено (4.5). Тогда* $P(r)$.

Доказательство У1. Воспользуемся тем, что $L_p(w)$ всюду плотно вложено в $L_r(w)$ при $p > r$. Пусть $\xi \in L_r(w)$, $\{\xi_n\} \subset L_p(w)$ и $\|\xi - \xi_n\|_r \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть далее $\{\lambda_n\} \subset N_p(w) \subset N_r(w)$ — последовательность функций из (4.5), отвечающая $\{\xi_n\}$. Согласно (4.3) имеем при $n, m \to \infty$

$$A_r \|\lambda_n - \lambda_m\|_{N_r} \leqslant \|\xi_n - \mathbf{M}\xi_n - \xi_m + \mathbf{M}\xi_m\|_r \leqslant 2\|\xi_n - \xi_m\|_r \to 0.$$

Итак, последовательность $\{\lambda_n\}$ фундаментальна в $N_r(w)$ и потому сходится к элементу этого пространства λ. Пусть $\tilde{\xi} = \mathbf{M}\xi + \mathcal{J}(\lambda)(1)$. Имеем, учитывая правое неравенство (4.3),

$$\begin{aligned}
\left\|\xi - \tilde{\xi}\right\|_r &\leqslant \|\xi - \xi_n\|_r + \left\|\xi_n - \tilde{\xi}\right\|_r, \\
\left\|\xi_n - \tilde{\xi}\right\|_r &\leqslant \left\|\mathbf{M}\left(\xi_n - \tilde{\xi}\right)\right\|_r + \left\|\int_0^1 (\lambda_n - \lambda)\, dw\right\|_r \leqslant \\
&\leqslant \|\xi_n - \xi\|_r + B_r \|\lambda_n - \lambda\|_{N_r}.
\end{aligned}$$

Переходя в этих неравенствах к пределам при $n \to \infty$, получаем $\xi = \tilde{\xi}$ п.н., что и требовалось доказать. Единственность представления (4.5) легко выводится из левого неравенства (4.3).

Доказательство У2. Рассмотрим мартингал $\eta(t) = \mathcal{J}(\lambda)(t)$, $\eta(1) = \xi$. Пользуясь правилом дифференцирования Ито, имеем при $t \in [0, 1]$ п.н.

$$\eta^2(t) = \int_0^t \lambda^2\, ds + 2\int_0^t \eta\lambda\, dw, \tag{4.8}$$

$$\eta^4(t) = 6\int_0^t \eta^2\lambda^2\, ds + 4\int_0^t \eta^3\lambda\, dw. \tag{4.9}$$

Покажем, что $\lambda \in N_{p_n}$, $p_n = r - 2^{-n}, n = -1, 0, 1, 2, \ldots$ При $n = -1$ это верно по условию леммы. Покажем, что если это выполнено при $n = k - 1, k \geq 0$, то выполнено и при $n = k$. Отсюда, применяя индукцию по n, получим наше утверждение.

Имеем, используя неравенство Гельдера и оценку (4.2)

$$\mathbf{M}\left|\int\limits_0^t \eta^2\lambda^2\,ds\right|^{p_k/8} \leqslant \mathbf{M}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\eta(t)|^{3p_k/4}\left(\int\limits_0^t \lambda^2\,ds\right)^{p_k/8} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{d_k}{d_k-1}\right)^{3p_k/4}\left(\mathbf{M}\,|\xi|^{d_k}\right)^{3p_k/4d_k}\left(\left(\mathbf{M}\int\limits_0^t \lambda^2\,ds\right)^{p_{k-1}/2}\right)^{p_k/4p_{k-1}} < \infty,$$

$$d_k \equiv \frac{3p_kp_{k-1}}{4p_{k-1}-p_k} \leqslant r,\ k=0,1,2\ldots$$

Поэтому в силу (4.3)

$$\mathbf{M}\left|\int\limits_0^1 \eta^3\lambda dw\right|^{p_k/4} \leqslant B_{p_k/4}^{p_k/4}\mathbf{M}\left(\int\limits_0^1 \eta^6\lambda^2 ds\right)^{p_k/8}$$

и значит, из (4.9) вытекает оценка

$$\mathbf{M}\left|6\int\limits_0^1 \eta^2\lambda^2 ds\right|^{p_k/4} \leqslant \mathbf{M}\left|\xi^4-4\int\limits_0^1 \eta^3\lambda dw\right|^{p_k/4} < \infty.$$

Но тогда, используя (4.8) и (4.3), получаем

$$\mathbf{M}\left|\int_0^1 \lambda^2 ds\right|^{p_k/2} \leqslant 2^{p_k/2-1}\left[\mathbf{M}\,|\xi|^{p_k} + 2^{p_k/2}B_{p_k/2}^{p_k/2}\mathbf{M}\left(\int_0^1 \eta^2\lambda^2 ds\right)^{p_k/4}\right] < \infty,$$

что и требовалось проверить. Итак, $\lambda \in N_{p_n}$ и, следовательно, согласно (4.3)

$$A_{p_n}\|\lambda\|_{N_{p_n}} \leqslant 2\,\|\xi\|_{p_n} \leqslant 2\,\|\xi\|_r\,.$$

Переходя в левой части этого неравенства к пределу при $n\to\infty$ и учитывая непрерывность слева функции $p\to\|\lambda\|_{N_p}$[7], получаем

$$\tilde{A}_r\,\|\lambda\|_{N_r} \leqslant 2\,\|\xi\|_r\,,$$

т.е. $\lambda\in N_r$. У2 доказано.

Используя доказанные утверждения, легко теперь доказать лемму. Действительно, из У2 следует, что $P(p)\Rightarrow P(p+2)\ \forall p\geqslant 4$. Но $P(4)$

является в силу того же утверждения следствием результата Ито-Кларка. Поэтому при всех $n = 2, 3, \ldots$ имеет место $P\,(2n)$. Применяя У1, получаем отсюда $P\,(r)$ для всех $r \in (1, 2n)$, что в силу произвольности n эквивалентно первому утверждению леммы. Для получения оценок (4.6) достаточно применить к (4.5) неравенства (4.3).

Для доказательства (4.7) теперь достаточно представить $\mu\,(1)$ в виде (4.5). Тогда

$$\mu\,(t) = \mathbf{M}\left\{\,\mu\,(1)\,|\,\mathfrak{F}_t\right\} = \mathbf{M}\mu\,(1) + \mathbf{M}\left\{\int\limits_0^1 \varphi\;(s)\,dw\,(s)\,\middle|\,\mathfrak{F}_t\right\} =$$

$$= \mathbf{M}\mu\,(1) + \int\limits_0^t \varphi\;(s)\,dw\,(s)\,.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{M}\,|\xi|^r < \infty$, *но* $\mathbf{M}\,|\xi|^{r+\epsilon} = \infty \forall \epsilon > 0$. *Тогда в (4.5)* $\lambda \in N_r\,(w)$, *но* $\lambda \notin N_{r+\epsilon}\,(w)$, $\epsilon > 0$.

Следствие 2. *Пусть* $\mu\,(t) = \mathcal{J}\,(\lambda)\,(t)$, *где* $\lambda \in E_2$. *Тогда, если процесс* $\mu\,(t)$ *согласован с потоком* $\{\mathfrak{F}_t^w\}$ *и* $\mathbf{M}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\eta\,(t)|^p < \infty$, *где* $p \in (1, \infty)$, *то* $\mu\,(t)$ *— мартингал и* $\|\lambda\|_{N_p} < \infty$..

Установим также следующее вспомогательное утверждение

Лемма 2. *Пусть* $\varphi \in N_p$, $\varkappa \in N_p$, $p > 1$. *Тогда*

$$\mathbf{M}\int\limits_0^t \varphi\;(s)\,dw\,(s)\int\limits_0^t \varkappa\;(s)\,dw\,(s) = \mathbf{M}\int\limits_0^t \varkappa\;(s)\,\varphi\;(s)\;ds,\; t \in [0, 1]\,.$$

Доказательство. Обозначим

$$\eta_1\,(t) \equiv \int\limits_0^t \varphi\;(s)\,dw\,(s)\,,\; \eta_2\,(t) \equiv \int\limits_0^t \varkappa\;(s)\,dw\,(s)\,.$$

По формуле дифференцирования Ито имеем

$$\eta_1\,(t)\,\eta_2\,(t) = \int\limits_0^t \eta_1\varkappa\,dw + \int\limits_0^t \eta_2\varphi dw + \int\limits_0^t \varphi\varkappa ds$$

поэтому для доказательства леммы достаточно проверить, что

$$\mathbf{M}\int\limits_0^t \eta_1\varkappa\,dw,\; \mathbf{M}\int\limits_0^t \eta_2\varphi\,dw. \tag{4.10}$$

Применяя к мартингалу $\eta_1(t)$ оценку (4.2), а затем — оценку (4.3), имеем

$$\mathbf{M} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\eta_1(t)|^p \leqslant (p')^p \mathbf{M} |\eta(1)|^p \leqslant (p')^p B_p^p \|\varphi\|_{N_p}^p < \infty.$$

Поэтому

$$M \left(\int_0^1 |\eta_1 \varkappa|^2 \, ds \right)^{1/2} \leqslant \mathbf{M} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\eta_1(t)| \left(\int_0^1 |\varkappa|^2 \, ds \right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\mathbf{M} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\eta_1(t)|^p \right)^{1/p} \|\varkappa\|_{N_{p'}} < \infty$$

и, значит, $\eta_1 \varkappa \in N_1$. Как было отмечено выше, отсюда следует первое из равенств (4.10). Аналогично устанавливается и второе равенство.

4.2. Свойства оператора $\mathcal{L}$

4.2.1. Определение $\mathcal{L}$

Пусть $f \in L_1$. Случайные функции $\mathcal{L}\left(\tilde{f}\right)(t, \omega)$, отвечающие различным представителям $\tilde{f}$ класса эквивалентности f неотличимы друг от друга и непрерывны с вероятностью 1. Естественно поэтому рассматривать операторы вида $\mathcal{L} : L_p \to CH_p$.

Лемма 3. *Линейный оператор $\mathcal{L} : L_p \to CH_p$, $p \in [1, \infty)$ ограничен.*

Доказательство. Имеем, применяя неравенство Гельдера, п.н.

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| \int\limits_0^t f(s) \, ds \right|^p \leqslant \int\limits_0^1 |f(s)|^p \, ds.$$

Усредняя это неравенство по мере $\mathbf{P}$, получаем

$$|\mathcal{L}(f)|_p^{(d)} \leqslant \|f\|_p \,,$$

что и требовалось доказать.

4.2.2. Сопряженный оператор $\mathcal{L}^*$

Обозначим $\mathcal{L}^* : (CH_p)^* \to L_p^*$ оператор, сопряженный введенному в лемме 3 оператору $\mathcal{L}$. Получим явное представление для сужения этого оператора на подпространство $L_{p'} \equiv (L_p)^*$ пространства $(CH_p)^*$.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_{p'}$. Существует такой выбор вариантов условных математических ожиданий, что*

$$\mathcal{L}^*(f)(t,\omega) = \mathbf{M}\left\{ \int_t^1 f(s,\omega)\, ds \middle| \mathfrak{F}_t \right\} \tag{4.11}$$

*Более точно: классу эквивалетности $\mathcal{L}^*(f)$ принадлежат все $\mathfrak{B}\mathfrak{F}$-измеримые функции вида (*4.11*).*

Доказательство. По определению сопряженного оператора, $\mathcal{L}^*(f)$ есть такой элемент h пространства $L_{p'}$, что

$$\langle f, \mathcal{L}(\varphi)\rangle = \langle h, \varphi\rangle = \mathbf{M}\int_0^1 h(s)\, \varphi(s)\, ds\ \forall \varphi \in L_p.$$

Так как с.ф. $\int_t^1 f(s,\omega)\, ds$ является $\mathfrak{B}^1 \times \mathfrak{F}$-измеримой (теорема Фубини), то согласно [5] существует такой выбор вариантов условных математических ожиданий, что с.ф. $\tilde{h}(t)$ из (4.11) является $\mathfrak{B}\mathfrak{F}$-измеримой. Легко проверить, что $\tilde{h} \in L_{p'}$. Наконец, применяя теорему Фубини и свойства условных математических ожиданий, имеем при $\varphi \in L_p$

$$\mathbf{M}\int_0^1 \tilde{h}(s)\, \varphi(s)\, ds = \int_0^1 \mathbf{M}\mathbf{M}\left\{ \int_s^1 f(t,\omega)\, dt \middle| \mathfrak{F}_s \right\} \varphi(s)\, ds =$$

$$= \int_0^1 \mathbf{M}\mathbf{M}\left\{ \int_s^1 f(t,\omega)\, dt \varphi(s) \middle| \mathfrak{F}_s \right\} ds =$$

$$= \mathbf{M}\int_0^1 \int_s^1 f(t,\omega)\, dt \varphi(s)\, ds = \langle f, \mathcal{L}(\varphi)\rangle .$$

Отсюда в силу произвольности $\varphi \in L_p$ получаем (4.11).

Следствие 1. *Сужение оператора $\mathcal{L}^*$ на L_q ограничено из L_q в DH_q, $q \in (1,\infty)$.*

Доказательство. Имеем из (4.11) при $f \in L_q$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*(f)(t,\omega) &= \mathbf{M}\left\{ \int_0^1 f(s,\omega)\, ds \middle| \mathfrak{F}_t \right\} - \int_0^t f(s,\omega)\, ds \equiv \\ &\equiv \mu(t,\omega) - \mathcal{L}(f)(t,\omega). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Но $\mu(t)$ — мартингал относительно потока $\{\mathfrak{F}_t\}$ и, следовательно, имеет модификацию с траекториями из D. Далее из (4.2) имеем

$$\mathbf{M} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\mu(t)|^q \leqslant (q')^q \mathbf{M} |\mu(1)|^q \leqslant (q')^q \|f\|_q^q .$$

Учитывая эту оценку и свойства оператора $\mathcal{L}$, получим из (4.12) утверждения следствия.

Следствие 2. *Пусть поток* $\{\mathfrak{F}_t\}$ *непрерывен на* $[0,1]$. *Тогда сужение оператора* $\mathcal{L}^*$ *на* L_q *ограничено из* L_q *в* CH_q.

Доказательство непосредственно вытекает из (4.12), если заметить, что в этом случае мартингал $\mu(t)$ допускает непрерывную модификацию.

4.3. Свойства оператора $\mathcal{J}$

4.3.1. Определение $\mathcal{J}$

Пусть $\varphi \in N_1$. Будем рассматривать лишь непрерывные с вероятностью 1 модификации интеграла Ито. Тогда с.ф. $\mathcal{J}(\tilde{\varphi})(t,\omega)$, отвечающие различным представителям $\tilde{\varphi}$ класса эквивалентности φ неотличимы друг от друга. Естественно поэтому рассматривать операторы вида $\mathcal{J} : N_p \to CH_p$.

Лемма 4. *Линейный оператор* $\mathcal{J} : N_p \to CH_p$ *ограничен.*

Доказательство. Так как при $\varphi \in N_p$ с.ф. $\mathcal{J}(\varphi)(t,\omega)$ является мартингалом, то применяя оценки (4.2) и (4.3), имеем

$$\mathbf{M} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\mathcal{J}(\varphi)(t,\omega)|^p \leqslant (p')^p \mathbf{M} |\mathcal{J}(\varphi)(1,\omega)|^p \leqslant (p')^p B_p^p \|\varphi\|_{N_p}^p .$$

Следовательно,

$$|\mathcal{J}(\varphi)(t,\omega)|_p^{(d)} \leqslant p' B_p \|\varphi\|_{N_p} ,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Оператор* $\mathcal{J} : L_p \to CH_p,\ p \in [2,\infty)$ *ограничен.*

Доказательство очевидно.

4.3.2. Оператор $\tilde{J}$

Обозначим $\mathcal{J}^* : (CH_p)^* \to N_p^*$ оператор, сопряженный оператору $\mathcal{J}$, введенному в лемме 4. Получим явное представление для сужения этого оператора на подпространство $L_{p'} \equiv (L_p)^* \subset (CH_p)^*$. С этой целью выполним ряд предварительных построений.

Пусть $N_r(\mathcal{B}\times\mathcal{BF})$, $r\in(1,\infty)$ — банахово пространство (классов эквивалентности по мере $\mathrm{mes}\times\mathrm{mes}\times\mathbf{P}$) $\mathcal{B}\times\mathcal{BF}$-измеримых функций $\lambda(t,s,\omega)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant s\leqslant t$, $\omega\in\Omega$ с нормой

$$|||\lambda|||_r=\left\{\mathbf{M}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\lambda^2(t,s,\omega)\right)^{r/2}\right\}^{1/r}.$$

Рассмотрим в $N_r(\mathcal{B}\times\mathcal{BF})$ линейное многообразие T_r, состоящее из функций вида

$$\lambda(t,s,\omega)=\sum_{=0}^{n-1}\chi_{\Delta_k}(t)\,\alpha_k(s,\omega)\,,\ t\in[0,1]\,,s\in[0,t]\,,\omega\in\Omega,\qquad(4.13)$$

где $\chi_{\Delta_k}(t)$ — индикатор множества A; $\Delta_k\equiv[t_k,t_{k-1})$, $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$; функции $\alpha_k(s,\omega)$ — $\mathcal{BF}$-измеримы; $\alpha_0\equiv 0$; $\alpha_k(s,\omega)=0$ при $s\in(t_k,1]$, $k\geqslant 1$;

$$M\left(\int\limits_0^{t_k}\alpha_k^2(s,\omega)\,ds\right)^{r/2}<\infty.$$

Положим для $\lambda\in T_r$

$$\tilde{\mathcal{J}}(\lambda)(t,\omega)=\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{\Delta_k}(t)\int\limits_0^{t_k}\alpha_k(s,\omega)\,dw(s,\omega)\,.$$

Легко проверить линейность оператора $\tilde{\mathcal{J}}$ на T_r. Применяя оценки (4.3), получим кроме того

$$A_r\,|||\lambda|||_r\leqslant\left\|\tilde{\mathcal{J}}(\lambda)\right\|_r\leqslant B_r\,|||\lambda|||_r\,.\qquad(4.14)$$

Пусть $\bar{T}_r$ — замыкание множества T_r в $N_r(\mathcal{B}\times\mathcal{BF})$. Используя правое неравенство (4.14), можно продолжить оператор $\tilde{\mathcal{J}}$ на $\bar{T}_r$ по непрерывности с сохранением оценок (4.14). Справедлива

Лемма 5. *Множество* $L_r(w)\equiv\left\{\tilde{\mathcal{J}}(\lambda)\,,\ \lambda\in\bar{T}_r\right\}$ *замкнуто в* L_r.

Доказательство. Пусть $\left\{\xi_n=\tilde{\mathcal{J}}(\lambda_n)\,,\ \lambda_n\in\bar{T}_r\right\}\subset L_r(w)$ и $\|\xi_n-\xi_m\|_r\to 0$ при $n,m\to\infty$. Применяя левое неравенство (4.14), получаем

$$A_r\,|||\lambda_n-\lambda_m|||_r\leqslant\|\xi_n-\xi_m\|_r\to 0,\ n,m\to\infty.$$

Таким образом, последовательность $\{\lambda_n\}$ фундаментальна в $N_r(\mathcal{B}\times\mathcal{BF})$ и, следовательно, сходится к некоторому его элементу λ. В силу замкнутости $\bar{T}_r$ имеем $\lambda\in\bar{T}_r$. Пусть $\xi=\tilde{\mathcal{J}}(\lambda)$. Тогда из правого неравенства (4.14) имеем

$$\|\xi_n-\xi\|_r\leqslant B_r\,|||\lambda_n-\lambda|||_r\to 0,\ n\to\infty,$$

что и означает замкнутость множества $L_r(w)$. Лемма доказана.

Установим ряд свойств оператора $\tilde{\mathcal{J}}$.

Лемма 6. *Пусть* $\lambda\in\bar{T}_r$, $\eta=\tilde{\mathcal{J}}(\lambda)$. *Тогда*

а) *для п.в.* $t\in[0,1]$ $\mathbf{M}\eta(t)=0$;

б) $\forall t\in[0,1]$ *и п.в.* $s\in[t,1]$ *п.н.*

$$\mathbf{M}\{\eta(s)|\,\mathcal{F}_t\}=\int\limits_0^t\lambda(t,s,\omega)\ dw(s,\omega);$$

в) *если* $\varphi\in N_{r'}$, *то для п.в* $t\in[0,1]$

$$\mathbf{M}\eta(t)\,\mathcal{J}(\varphi)(t)=\mathbf{M}\int\limits_0^t\lambda(t,s,\omega)\,\varphi(s,\omega)\ ds;$$

г) *если* $r=2$ *и* $\tau\in(0,1]$, *то п.н.*

$$\int\limits_o^\tau\eta(s)\ ds=\int\limits_o^\tau\left(\int\limits_t^\tau\lambda(t,s,\omega)\ ds\right)\ dw(t,\omega).$$

Доказательство. Так как $\lambda\in N_r(\mathcal{B}\times\mathcal{BF})$, то для п.в. $t\in[0,1]$ $\lambda(t,\cdot)\in N_r([0,t]\times\Omega)$. Используя это, введем с.в.

$$\xi_t(\omega)=\int\limits_0^t\lambda(t,s,\omega)\ dw(s,\omega),$$

где интеграл справа понимается в смысле Ито. Покажем, что для п.в. t п.н.

$$\xi_t(\omega)=\eta(t,\omega)\tag{4.15}$$

Действительно, имеем $\eta = \lim\limits_{n\to\infty} (L_r)\, \tilde{\mathcal{J}}(\lambda_n)$, где $\{\lambda_n\} \subset T_r$. Поэтому для п.в. t и некоторой последовательности $n_k \to \infty$

$$\mathbf{M}\left|\eta_{n_k}(t) - \eta(t)\right|^r \to 0,\ \eta_k = \tilde{\mathcal{J}}(\lambda_k).$$

С другой стороны, для подпоследовательности последовательности n_k

$$\mathbf{M}\left|\eta_{n_{k_m}}(t) - \xi(t)\right|^r \leqslant B_r^r \mathbf{M}\left(\int\limits_0^t \left|\lambda(t,s) - \lambda_{n_{k_m}}(t,s)\right|^2 ds\right)^{r/2} \to 0,\ m \to \infty$$

для п.в. t. Следовательно, для п.в. $t \in [0,1]$ имеем $\mathbf{M}\left|\eta(t) - \xi_t\right|^r = 0$, что эквивалетно (4.15).

Используя это равенство, лемму 2 и обычные свойства интеграла Ито [4], получаем утверждения а)-в) леммы.

Докажем последнее утверждение. Обозначим α и β, соответственно, с.в., стоящие в левой и правой частях равенства г). Пусть также

$$\alpha_n \equiv \int\limits_0^\tau \eta_n(s)\, ds,\ \beta_n \equiv \int\limits_0^\tau \left(\int\limits_t^\tau \lambda_n(s,t)\, ds\right) dw(t).$$

Используя вид функции $\lambda_n \in T$, легко проверить, что

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{mes}(\Delta_k \cap [0,\tau]) \int\limits_0^{t_k} \alpha_k(s)\, dw(s) = \beta_n$$

п.н. Кроме того,

$$\mathbf{M}\left|\alpha_n - \alpha\right|^2 \leqslant \|\eta_n - \eta\|_2^2 \to 0,$$

$$\mathbf{M}\left|\beta_n - \beta\right|^2 = \mathbf{M}\int\limits_0^\tau \left|\int\limits_t^\tau (\lambda_n(s,t) - \lambda(s,t))\, ds\right|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{M}\int\limits_0^1 \int\limits_0^t \left|\lambda_n(s,t) - \lambda(s,t)\right|^2 ds\, dt \equiv |||\lambda_n - \lambda|||_2^2 \to 0,\ n \to \infty.$$

Поэтому $\mathbf{M}\left|\alpha - \beta\right|^2 = 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 7. *Для любой $\varphi \in L_r(w)$, $r \in (1,2]$ существует единственный элемент $\lambda \in \bar{T}_r$ такой, что* mes $\times\mathbf{P}$-*п.в.*

$$\varphi(t,\omega) = \mathbf{M}\varphi(t,\omega) + \tilde{\mathcal{J}}(\lambda)(t,\omega). \tag{4.16}$$

При этом линейный оператор $\mathcal{K} : \lambda = \mathcal{K}\varphi$ ограничен из $L_r(w)$ в $N_r(\mathcal{B} \times \mathcal{BF})$.

Доказательство. Пусть S_r — множество ступенчатых функций из $L_r(w)$, т.е. класс функций вида

$$\psi(t,\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{\Delta_k}(t)\,\psi_k(\omega)\,,\ \psi_k \in L_r(\Omega)\,,$$

где с.в. $\psi_k(\omega)\,, k \geqslant 0$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}^w_{t_k}$. Известно, что $\bar{S}_r = L_r(w)$ [4]. Покажем, что любая $\psi \in S_r$ однозначно представима в виде (4.16), причем соответствующая функция $\lambda \in T_r$. Действительно, согласно леммы 1 с.в. $\psi_k(\omega)$ единственным образом представима в виде

$$\psi_k(\omega) = \mathbf{M}\psi_k(\omega) + \int\limits_0^{t_k} \alpha_k(s,\omega)\ dw(s,\omega)\,,$$

где $M\left(\int_0^{t_k} \alpha_k^2(s)\ ds\right)^{r/2}$. Продолжая каждую из функций $\alpha_k(s,\omega)$ на $[0,1]\times\Omega$ нулем, получим отсюда

$$\psi(t,\omega) = \mathbf{M}\psi(t,\omega) + \tilde{\mathcal{J}}(\lambda)(t,\omega)\,,$$

где функция λ имеет вид (4.13).

Пусть далее φ — произвольная функция из $L_r(w)$ и $\|\varphi - \psi_n\|_r \to 0$, $n \to \infty$, где $\{\psi_n\} \subset S_r$. Пусть $\lambda_n = \mathcal{K}\psi_n$. Применяя левую оценку (4.14) и учитывая фундаментальность последовательности $\{\psi_n\}$, получаем при $n, m \to \infty$

$$A_r\,|||\lambda_n - \lambda_m|||_r \leqslant \left\|\tilde{\mathcal{J}}(\lambda_n - \lambda_m)\right\|_r \leqslant 2\,\|\psi_n - \psi_m\|_r \to 0.$$

Следовательно, последовательность $\{\lambda_n\}$ фундаментальна в $N_r(\mathcal{B} \times \mathcal{BF})$ и поэтому сходится к некоторому $\lambda \in \bar{T}_r$. Пусть $\varphi_1 = \mathbf{M}\varphi + \tilde{\mathcal{J}}(\lambda)$. Тогда

$$\begin{gathered}\|\varphi_1 - \varphi\|_r \leqslant \|\varphi - \psi_n\|_r + \|\varphi_1 - \psi_n\|_r \leqslant \\ \leqslant \|\varphi - \psi_n\|_r + \|\mathbf{M}(\varphi - \psi_n)\|_r + \\ + \left\|\tilde{\mathcal{J}}(\lambda_n - \lambda)\right\|_r \leqslant 2\,\|\varphi - \psi_n\|_r + B_r\,|||\lambda_n - \lambda|||_r \to 0,\ n \to \infty\end{gathered}$$

откуда вытекает (4.16). Применяя к этому равенству левую оценку (4.14), получаем

$$A_r\,|||\lambda|||_r \leqslant \left\|\tilde{\mathcal{J}}(\lambda)\right\|_r = \|\varphi - \mathbf{M}\varphi\|_r \leqslant 2\,\|\varphi\|_r\,.$$

Отсюда следует единственность представления (4.16) и ограниченность оператора $\mathcal{K}$. Лемма доказана.

4.3.3. Сопряженный оператор $\mathcal{J}^*$

Используем результаты лемм 6,7 для исследования структуры оператора $\mathcal{J}^*$. Пусть $L_2^{\perp}(w)$ — ортогональное дополнение пространства $L_2(w)$ в гильбертовом пространстве $L_2 = L_2(w) \oplus L_2^{\perp}(w)$. Справедлива

Теорема 2. *Сужение оператора $\mathcal{J}^* : (CH_p)^* \to N_p^*$, $p \in [2, \infty)$ на подпространство $L_2 \subset (CH_p)^*$, а также — на подпространство $L_{p'}(w) \subset (CH_p)^*$ имеет вид*

$$\mathcal{J}^*(\chi)(t,\omega) = \int_t^1 \lambda(s,t,\omega)\, ds \tag{4.17}$$

где $\chi = \chi_1 + \tilde{\mathcal{J}}(\lambda)$, $\chi_1 \in L_2^{\perp}(w)$, $\lambda \in \bar{T}_2$ и $\lambda = \mathcal{K}\chi$ в первом и втором случаях соответственно.

Доказательство. Докажем теорему в случае $\chi \in L_{p'}(w)$. Пусть $\varphi \in N_p$. Разлагая функцию χ в сумму (4.16), применяя утверждение в) леммы 6 и теорему Фубини, получим

$$\langle \chi, \mathcal{J}(\varphi) \rangle = \mathbf{M} \int_0^1 \Big(\mathbf{M}\chi(t) + \tilde{\mathcal{J}}(\lambda)(t) \Big) \mathcal{J}(\varphi)(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \mathbf{M} \int_0^t \lambda(t,s)\, \varphi(s)\, dsdt = \mathbf{M} \int_0^1 \left(\int_t^1 \lambda(t,s)\, ds \right) \varphi(t)\, dt = \langle \mathcal{J}^*\chi, \varphi \rangle .$$

Отсюда в силу произвольности φ вытекает утверждение теоремы. Аналогично проводится доказательство и в случае $\chi \in L_2$. Заметим, что если $\chi \in L_2(w) \subset L_2 \cap L_{p'}(w)$, то согласно (4.16) $\chi_1 = M\chi \in L_2^{\perp}(w)$.

Следствие. *Указанные в теореме сужения ограничены из L_2 в L_2 и из $L_q(w)$ в $L_q(w)$, $q \in [p', 2]$ соответственно.*

Доказательство. Имеем из (4.17)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}^*\chi\|_q^q &= \mathbf{M} \int_0^1 \left| \int_t^1 \lambda(s,t)\, ds \right|^q dt \leqslant \mathbf{M} \int_0^1 \int_t^1 |\lambda(s,t)|^q\, dsdt = \\ &= \mathbf{M} \int_0^1 \int_0^t |\lambda(s,t)|^q\, dsdt \leqslant |||\lambda|||_q^q \leqslant (2A_q)^{-q} \|\chi\|_q^q . \end{aligned}$$

Аналогично проверяется и первое утверждение теоремы.

4.4. Свойства оператора $\mathcal{P}$

4.4.1. Определение $\mathcal{P}$

Пусть $\psi \in L_2(\Pi)$. Так как с.ф. $\mathcal{P}\left(\tilde{\psi}\right)(t,\omega)$, отвечающие различным представителям $\tilde{\psi}$ класса эквивалентности ψ с вероятностью 1 имеют траектории из D и неотличимы друг от друга, то можно рассматривать операторы вида $\mathcal{P} : L_p(\Pi) \to DH_p$, $p \geqslant 2$.

Лемма 8. *Линейный оператор $\mathcal{P} : L_p(\Pi) \to DH_p$, $p \geqslant 2$ (p — целое, четное) ограничен.*

Доказательство. При $p = 2$ утверждение леммы легко выводится из равенства (4.4). Пусть далее $p > 2$. Установим сначала ограниченность оператора $\mathcal{P} : L_p(\Pi) \to DH_p$. Воспользуемся для этого оценкой, имеющейся в работе [6, стр. 150]. Пусть $\alpha \in L_p(\Pi)$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\left|\mathcal{P}(\alpha)(t)\right|^p &\leqslant K_1(p)\,\mathbf{M}\int\limits_0^t \sum_{k=2}^{p} v_k^{p/k}(s)\,ds,\\ v_k(s) &\equiv \int \left|\alpha(s,y)\right|^k \Pi(dy).\end{aligned}$$

Применяя к этому неравенству неравенство Гельдера и формулу бинома Ньютона, получаем

$$\mathbf{M}\left|\mathcal{P}(\alpha)(t)\right|^p \leqslant K_2(p)\,\mathbf{M}\sum_{k=2}^{p}\left(\int\limits_0^t v_2^{p/2}(s)\,ds\right)^{\frac{2(p-k)}{k(p-2)}}\left(\int\limits_0^t v_p(s)\,ds\right)^{\frac{p(k-2)}{k(p-2)}} \leqslant$$

$$\leqslant K_2(p)\,\mathbf{M}\sum_{k=2}^{p}\left[\left(\int\limits_0^t v_2^{p/2}(s)\,ds\right)^{\frac{1}{k(p-2)}} + \left(\int\limits_0^t v_p(s)\,ds\right)^{\frac{1}{k(p-2)}}\right]^{(p-2)k} \leqslant$$

$$\leqslant K_2(p)\sum_{k=2}^{p} 2^{(p-2)k-1}\mathbf{M}\int\limits_0^t \left[v_2^{p/2}(s) + v_p(s)\right] ds \leqslant K_p^p \left\|\alpha\right\|_{L_p(\Pi)}^p.$$

Следовательно,

$$\left|\mathcal{P}(\alpha)(t)\right|_p \leqslant K_p \left\|\alpha\right\|_{L_p(\Pi)}$$

$(K_1(p), K_2(p), K(p)$ — постоянные, зависящие только от $p)$.

Но $\mathcal{P}(\alpha)(t)$ — мартингал, поэтому в силу (4.2)

$$\left|\mathcal{P}(\alpha)\right|_p^{(d)} \leqslant p' \left|\mathcal{P}(\alpha)\right|_p \leqslant p' K_p \left\|\alpha\right\|_{L_p(\Pi)},$$

что и требовалось доказать.

4.4.2. Оператор $\tilde{P}$

Для того чтобы исследовать структуру сопряженного оператора $\mathcal{P}^*$ введем по аналогии с $N_2(\mathcal{B}\times\mathcal{BF})$ гильбертово пространство $N_2\left(\mathcal{B}\times\mathcal{BF}\times\mathcal{B}^l\right)$ (классов эквивалентности по мере mes $\times$ mes $\times\mathbf{P}\times\Pi$) $\mathcal{B}\times\mathcal{BF}\times\mathcal{B}^l$-измеримых функций $\mu(t,s,\omega,y)$, $t\in[0,1]$, $s\in[0,t]$, $\omega\in\Omega$, $y\in R^l$ с нормой

$$|||\mu|||_{\Pi}=\left\{\mathbf{M}\int\limits_0^1\int\limits_0^t\int\mu^2(t,s,\omega,y)\,\Pi(dy)\,dsdt\right\}^{1/2}.$$

Аналогично T_r и $\tilde{\mathcal{J}}$ вводятся линейное многообразие $T_2(\nu)\subset N_2\left(\mathcal{B}\times\mathcal{BF}\times\mathcal{B}^l\right)$ и оператор $\tilde{\mathcal{P}}$ на нем и строится продолжение этого оператора на замыкание $\overline{T_2(\nu)}$ по непрерывности. При этом вместо (4.14) используется равенство

$$\left\|\tilde{\mathcal{P}}(\mu)\right\|_2=|||\mu|||_{\Pi},\ \mu\in T_2(\nu),$$

которое непосредственно выводится из (4.4).

Доказательства следующих предложений вполне аналогичны доказательствам лемм 6 и 7.

Лемма 9. *Пусть* $\mu\in\overline{T_2(\nu)}$, $\eta(t)=\tilde{\mathcal{P}}(\psi)(t)$. *Тогда*

а) *для п.в.* $t\in[0,1]$ $\mathbf{M}\eta(t)=0$;

б) $\forall t\in[0,1]$ *и п.в.* $s\in[t,1]$ *п.н.*

$$\mathbf{M}\{\eta(s)|\,\mathcal{F}_t\}=\int\limits_0^t\int\mu(s,\tau,\omega,y)\,\tilde{\nu}(d\tau,dy);$$

в) *если* $\alpha\in L_2(\Pi)$, *то для п.в.* t

$$\mathbf{M}\eta(t)\,\mathcal{P}(\alpha)(t)=\mathbf{M}\int\limits_0^t\int\mu(t,\tau,\omega,y)\,\alpha(\tau,\omega,y)\,\Pi(dy)\,d\tau;$$

г) $\forall\tau\in(0,1]$ *п.н.*

$$\int\limits_0^\tau\eta(s)\,ds=\int\limits_0^\tau\int\left(\int\limits_t^\tau\mu(s,t,\omega,y)\,ds\right)\tilde{\nu}(dt,dy).$$

Лемма 10. *Множество* $L_2(\nu)\equiv\left\{\tilde{\mathcal{P}}(\mu),\mu\in\overline{T_2(\nu)}\right\}$ *является замкнутым подпространством в* L_2.

4.4.3. Сопряженный оператор $\mathcal{P}^*$

Пусть $L_2^\perp(\nu)$ — ортогональное дополнение $L_2(\nu)$ в гильбертовом пространстве $L_2 = L_2(\nu) \oplus L_2^\perp(\nu)$. Используя результаты лемм 9, 10, докажем следующую теорему

Теорема 3. *Сужение оператора $\mathcal{P}^* : (DH_p)^* \to (L_p(\Pi))^*$, $p \geqslant 2$ (p – четное) на пространство $L_2 \subset (DH_p)^*$ ограничено из L_2 в $L_2(\Pi)$ и имеет вид*

$$\mathcal{P}^*(\chi)(t,\omega,y) = \int\limits_t^1 \mu(s,t,\omega,y)\, ds,$$

где $\chi = \chi_1 + \tilde{\mathcal{P}}(\mu)$, $\chi_1 \in L_2^\perp(\nu)$, $\mu \in \overline{T_2(\nu)}$.

4.5. Некоторые связи между операторами $\mathcal{L}$,$\mathcal{J}$,$\mathcal{P}$

В этом разделе всюду предполпгается, что винероский процесс w и пуассоновская случайная мера ν независимы между собой.

Теорема 4. *Гильбертово пространство L_2 допускает следующие разложения в прямые суммы взаимно ортогональных замкнутых подпространств*

$$L_2 = L_2(w) \oplus L_2^\perp(w) = L_2(\nu) \oplus L_2^\perp(\nu) = L_2(w) \oplus L_2(\nu) \oplus L_2^\perp.$$

Доказательство. Единственное, что требует проверки это ортогональность подпространств $L_2(w)$ и $L_2(\nu)$ между собой. Так как w и ν независимы между собой, то как известно, $\mathbf{M}\tilde{\mathcal{J}}(\lambda)\tilde{\mathcal{P}}(\mu) = 0$ для любых $\lambda \in T_2$, $\mu \in T_2(\nu)$. Поэтому множества $\tilde{\mathcal{J}}(T_2)$ и $\tilde{\mathcal{P}}(T_2(\nu))$ ортогональны между собой. Но тогода ортогональны и их замыкания $L_2(w)$ и $L_2(\nu)$.

Лемма 11. *Пусть $\chi \in L_2$. Обозначим $\theta \equiv \mathcal{L}^*(\chi)$, $\varkappa \equiv \mathcal{J}^*(\chi)$, $\alpha \equiv \mathcal{P}^*(\chi)$. Существует единственный мартингал $h \in \mathcal{M}_2^\perp$, где $\mathcal{M}_2^\perp = \mathcal{M}_2^w \oplus \mathcal{M}_2^\nu \oplus \mathcal{M}_2^\perp$, такой, что*

$$\theta(t) = -\int\limits_0^t \chi(s)\, ds + \int\limits_0^t \varkappa(s)\, dw(s) +$$

$$+\int\limits_0^t \int \alpha(s,y)\, d\tilde{\nu}(ds,dy) + h(t),\ t \in [0,1].$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (4.12). Разложим мартингал $\mu \in \mathcal{M}_2$ в сумму

$$\mu(t) = \mathcal{J}(\varkappa_1)(t) + \mathcal{P}(\alpha_1)(t) + h(t),$$

где $h \in \mathcal{M}_2^{\perp}$, $\varkappa_1 \in L_2$, $\alpha_1 \in L_2(\Pi)$. Для доказательства леммы остается показать, что $\varkappa_1 = \varkappa$, $\alpha_1 = \alpha$.

Пусть $\varphi \in L_2$. Имеем, применяя теорему Фубини и известные свойства условных математических ожиданий,

$$\begin{aligned}
\langle \varkappa_1, \varphi \rangle &= \mathbf{M}\int_0^1 \varkappa_1 \varphi\, ds = \mathbf{M}\int_0^1 \varkappa_1 dw \int_0^1 \varphi\, dw = \mathbf{M}\mu(1)\int_0^1 \varphi\, dw = \\
&= \mathbf{M}\int_0^1 \chi ds \int_0^1 \varphi\, dw = \int_0^1 \mathbf{M}\mathbf{M}\left\{ \chi(s)\int_0^1 \varphi\, dw \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right\} ds = \\
&= \mathbf{M}\int_0^1 \chi(s)\int_0^s \varphi\, dw ds = \langle \chi, \mathcal{J}(\varphi) \rangle .
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая произвол в выборе φ, получаем $\varkappa_1 = \mathcal{J}^*(\chi) = \varkappa$. Аналогично устанавливается, что $\alpha_1 = \alpha$.

Лемма 12. *Пусть*[4] $\mathcal{F}_t \equiv \mathcal{F}_t^w$, $\chi \in L_r$, $r \in (1,2]$; $\theta = \mathcal{L}^*(\chi)$, $\varkappa = \mathcal{J}^*(\chi)$. *Тогда при* $t \in [0,1]$

$$\theta(t) = -\int_0^t \chi(s)\; ds + \int_0^t \varkappa(s)\; dw(s).$$

Доказательство. По лемме 1 в этом случае мартингал $\mu(t)$ представляется в виде

$$\mu(t) = \mathbf{M}\mu(t) + \int_0^t \varkappa_1(s)\; dw(s),$$

где $\varkappa_1 \in N_r$. Доказательство того, что $\varkappa_1 = \varkappa$ выполняется так же как и в лемме 11, если учесть результат леммы 2.

Лемма 13. *Пусть* $\chi \in L_2$, $\theta = \mathcal{L}^*(\chi)$. *Представим функцию* $\theta \in L_2$ *в виде суммы*

$$\theta = \tilde{\mathcal{J}}(\lambda) + \tilde{\mathcal{P}}(\mu) + \theta_1,$$

[4] В этом случае мы, разумеется, не предполагаем существования пуассоновской меры ν, удовлетворяющей условиям п. 4.1.

где $\lambda \in \overline{T_2}$, $\mu \in \overline{T_2}(\nu)$, $\theta_1 \in L_2^{\perp}$. *Тогда* $\lambda(t,\tau,\omega), \mu(t,\tau,\omega,y)$ *непрерывны по* $t \geqslant \tau$ *и п.в.*

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^*(\chi)(t,\omega) &= \lambda(t,t,\omega),\\ \mathcal{P}^*(\chi)(t,\omega,y) &= \mu(t,t,\omega,y).\end{aligned}$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что $\overline{T_2} = N_2(\mathcal{B}\times\mathcal{BF})$. Действительно, любая функция $\varphi \in N_2(\mathcal{B}\times\mathcal{BF})$ может быть продолжена нулем до некоторой функции φ_1 из $L_2([0,1]\times[0,1]\times\Omega)$. Но в последнем пространстве всюду плотное множество образует класс функций вида

$$\psi_n(t,\omega) = \sum_{k=0}^{n-1}\chi_{\Delta_k}(t)\,\alpha_k(s,\omega),$$
$$\mathbf{M}\int_0^{t_k}\alpha_k^2(s)\,ds < \infty.$$

Пусть $\psi_n \to \varphi_1, n\to\infty$ в $L_2([0,1]\times\Omega)$. Положим при $s\in[0,t]$

$$\hat{\psi}_n(t,\omega) = \sum_{k=0}^{n-1}\chi_{\Delta_k}(t)\,\hat{\alpha}_k(s,\omega),$$

где

$$\begin{cases}\hat{\alpha}_k(s,\omega) = \alpha_k(s,\omega), & s\in[0,t_k],\\ \hat{\alpha}_k(s,\omega) = 0, & s\in(t_k,1].\end{cases}$$

Легко видеть, что $\hat{\psi}\in T_2$ и $\left|\left|\left|\hat{\psi}-\varphi\right|\right|\right|_2 \to 0$, $n\to\infty$.

Приступим к доказательству леммы. По теореме 4 $\chi = \chi_1 + \tilde{\mathcal{J}}(\lambda_1)$, где $\lambda_1\in\overline{T_2}$, $\chi_1\in L_2^{\perp}(w)$. Поэтому $\theta = \theta_2 + \mathcal{L}^*\tilde{\mathcal{J}}(\lambda_1)$, $\theta_2 \equiv \mathcal{L}^*(\chi_1)$. Согласно (4.12) имеем

$$\mathcal{L}^*\tilde{\mathcal{J}}(\lambda_1)(t) = \mathbf{M}\left\{\int_0^1 \tilde{\mathcal{J}}(\lambda_1)(s)\,ds\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right\} - \int_0^t \tilde{\mathcal{J}}(\lambda_1)(s)\,ds.$$

Преобразуем правую часть этого равенства, используя утверждение г) леммы 6:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{*}\tilde{\mathcal{J}}(\lambda_1)(t) &= \mathbf{M}\left\{\int\limits_0^1\left(\int\limits_\tau^1 \lambda_1(s,\tau)\,ds\right)dw(\tau)\middle|\,\mathcal{F}_t\right\} - \int\limits_0^t\left(\int\limits_\tau^t \lambda_1(s,\tau)\,ds\right)dw(\tau) = \\
&= \int\limits_0^t\left(\int\limits_\tau^1 \lambda_1(s,\tau)\,ds\right)dw(\tau) - \int\limits_0^t\left(\int\limits_\tau^t \lambda_1(s,\tau)\,ds\right)dw(\tau) = \\
&= \int\limits_0^t\left(\int\limits_t^1 \lambda_1(s,\tau)\,ds\right)dw(\tau),\ t\in[0,1].
\end{aligned}
$$

Легко проверяется, что

$$
\lambda_2(t,\tau,\omega) \equiv \int\limits_t^1 \lambda_1(s,\tau,\omega)\,ds \in N_2(\mathcal{B}\times\mathcal{BF}) = \overline{T_2}.
$$

Поэтому, как было отмечено при доказательстве леммы 6,

$$
\mathcal{L}^{*}\tilde{\mathcal{J}}(\lambda_1)(t) = \int\limits_0^t \lambda_2(t,\tau,\omega)\,dw(\tau) = \tilde{\mathcal{J}}(\lambda_2)(t)
$$

для п.в. t п.н. Покажем далее, что $\theta_2 \in L_2^{\perp}(w)$. В самом деле, если $\varphi = \tilde{\mathcal{J}}(\psi) \in L_2(w)$, то как и выше получаем для п.в. t п.н.

$$
\mathcal{L}(\varphi)(t) = \int\limits_0^t\left(\int\limits_\tau^t \psi(s,\tau,\omega)\,ds\right)dw(\tau) = \tilde{\mathcal{J}}(\mu_1)(t) \in L_2(w),
$$

$$
\mu_1(t,\tau,\omega) \equiv \int\limits_\tau^t \psi(s,\tau,\omega)\,ds \in N_2(\mathcal{B}\times\mathcal{BF}).
$$

Учитывая, что $\chi_1 \in L_2^{\perp}(w)$, имеем тогда

$$
\langle\varphi,\theta_2\rangle = \langle\varphi,\mathcal{L}^{*}(\chi_1)\rangle = \langle\mathcal{L}(\varphi),\chi_1\rangle = 0
$$

откуда следует наше утверждение. Итак, доказано, что

$$
\theta = \tilde{\mathcal{J}}(\lambda_2) + \theta_2,\ \theta_2 \in L_2^{\perp}(w).
$$

Сравнивая это разложение с исходным, получаем

$$\lambda\left(t,\tau,\omega\right)=\lambda_{2}\left(t,\tau,\omega\right)=\int\limits_{t}^{1}\lambda_{1}\left(s,\tau,\omega\right)\,ds.$$

Но с другой стороны согласно теоремы 2

$$\mathcal{J}^{*}\left(\chi\right)\left(t,\omega\right)=\int\limits_{t}^{1}\lambda_{1}\left(s,t,\omega\right)\,ds.$$

Из этих двух равенств выводим первое утверждение леммы. Второе устанавливается так же.

Литература

[1] Bismut J.-M. SIAM Rev., vol. 20, N 1, 1978.

[2] Морозов С.Ф., Смирнов И.П. ПММ, т. 42, вып. 2, 1978 (Глава 1 настоящего сборника)

[3] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., Наука, 1977.

[4] Справочник по теории вероятностей и математической статистике. К., Наукова думка, 1978.

[5] Ершов М.П. Теория вероятн. и ее применен., т. 17, №1, 1972.

[6] Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т. Ш. М., Наука, 1975.

[7] Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.

Глава 5.

О построении минимизирующих последовательностей в стохастических задачах оптимального управления

УДК 531.36 + 62-50

5.1. Введение

В работе развивается некоторый общий подход к построению минимизирующих последовательностей в задачах оптимального управления. В основе его лежит анализ т.н. возмущенного принципа максимума Л.С. Потрягина, которому удовлетворяют члены этих последовательностей.

Рассматривается простейшая задача оптимизации управляемой системы стохастических дифференциальных уравнений Ито с интегральным функционалом качества. В детерминированном случае исходный результат в этом направлении (соответствующий первому утверждению теоремы 2) получен в [2]. В работе предложена схема вывода возмущенного принципа максимума, соответствующего последнему утверждению

[1]И.П. Смирнов, М.И. Сумин. О построении минимизирующих последовательностей в стохастических задачах оптимального управления, Горький, 1981. Деп. в ВИНИТИ, 1981, №1836 - 81 Деп. (Из материалов V научной конференции молодых ученых механико-математического факультета и НИИ Механики Горьковского университета за 1980 г., ч. 2)

теоремы 2 для задачи управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства.

5.2. Постановка задачи

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $\{\mathfrak{F}_t\}$, $t \in [0,1]$ — поток полных по вероятности $\mathbf{P}$ σ-подалгебр $\mathfrak{F}$; $\mathcal{BF}$ — σ-алгебра прогрессивно измеримых относительно этого потока подмножеств множества $[0,1] \times \Omega$. Пусть $w = \{w_1, \ldots, w_m\}$ — m-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами, марковский относительно $\{\mathfrak{F}_t\}$.

Рассмотрим управляемый n-мерный процесс $\eta(t)$, являющийся сильным решением [3] стохастического дифференциального уравнения

$$d\eta = A(t, \eta(t), u(t))\, dt + \sum_{j=1}^{m} B^{(j)}(t, \eta(t))\, dw_j(t),\ \eta(0) = \eta_0, \qquad (5.1)$$

где $u : [0,1] \in \Omega \to R^k$ — допустимое управление.

Класс допустимых управлений U состоит из всех вектор-функций u, прогрессивно измеримых относительно заданного потока σ-алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}$, $\mathfrak{A}_t \subset \mathfrak{F}_t$, и принимающих свои значения в заданном ограниченном множестве $D \subset R^k$.

Введем на множестве U, отождествляя функции, совпадающие для mes-п.в. t (mes — мера Лебега) $\mathbf{P}$-п.н., метрику

$$\Delta(u, v) = \mathrm{mes}\,\{t : \mathbf{P}\,\{u(t,\omega) \neq v(t,\omega)\} > 0\}.$$

Пусть $\bar{U}$ — пополнение этого множества в данной метрике. Элементами пространства $\bar{U}$ можно считать $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$-измеримые функции, принимающие свои значения в замыкании $\bar{D}$.

Рассмотрим на U задачу минимизации функционала

$$g(u) = \mathbf{M} \int_0^1 f(s, \eta_u(s), u(s))\, ds, \qquad (5.2)$$

где η_u — решение уравнения (5.1), отвечающее допустимому управлению u, $\mathbf{M}$ — знак математического ожидания по мере $\mathbf{P}$.

В (5.1) и (5.2) функции $A : [0,1] \times \Omega \times R^n \times R^k \to R^n$, $B^{(j)} : [0,1] \times \Omega \times R^n \to R^n$, $f : [0,1] \times \Omega \times R^n \times R^k \to R^1$ вместе со своими производными $A_x = \{\partial A_i / \partial x_l\}$, $B_x^{(j)} = \left\{\partial B_i^{(j)} / \partial x_l\right\}$, $f_x = \{\partial f / \partial x_l\}$ измеримы по совокупности переменных, $\mathfrak{BF}$-измеримы по (t,ω) при фиксированных остальных переменных, непрерывны по (t,x,u) для $\mathbf{P}$-п.в. ω. Кроме того, всюду на множествах определения этих функций выполнены неравенства[1]

$$|A|^2+\max_j\left|B^{(j)}\right|^2\leqslant K^2\left(1+|x|^2\right), \tag{5.3}$$
$$\|A_x\|+\max_j\left\|B_x^{(j)}\right\|\leqslant K,$$
$$|f|\leqslant N\left(1+|x|^r\right),\ \left|f_x^{(j)}\right|\leqslant N\left(1+|x|^{r-1}\right),$$

где K,N — положительные числа, $r\geqslant 1$.

5.3. Существование решения

Лемма. *В условиях п. 5.2 любому $u\in\bar U$ отвечает сильное решение η_u уравнения (5.1). При этом для любого $p\in[2,\infty)$ имеем $\sup\limits_t \mathbf{M}\left|\eta_u(t)\right|^p\leqslant \nu_p$, и если η_v — решение, отвечающее управлению $v\in\bar U$, то*

$$\mathbf{M}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\eta_u(t)-\eta_v(t)\right|^p\leqslant\mu_p\mathbf{M}\int\limits_0^1\left|A\left(s,\eta_u(s),u(s)\right)-A\left(s,\eta_u(s),v(s)\right)\right|^p ds, \tag{5.4}$$

где ν_p,μ_p — положительные постоянные, не зависящие от u,v.

Следствие. *Функционал g определен, ограничен и непрерывен на всем пространстве $\bar U$. При этом*

$$-\infty<I\equiv\inf_{u\in U}g(u)=\inf_{u\in\bar U}g(u)<\infty.$$

Доказательство. Утверждения леммы легко доказываются методами работ [3, 4]. Учитывая (), имеем далее оценку

$$\mathbf{M}\int\limits_0^1\left|A\left(s,\eta_u(s),u(s)\right)-A\left(s,\eta_u(s),v(s)\right)\right|^p ds\leqslant 2^pK^p\left(1+\nu_p\right)\Delta(u,v), \tag{5.5}$$

применяя которую к (5.4) и замечая, что из сходимости по метрике Δ следует сходимость по мере $\mathrm{mes}\times\mathbf{P}$, получим утверждение следствия.

[1] $|\cdot|,\|\cdot\|$ — евклидовы векторная и матричная нормы соответственно

5.4. Определения

Введем ряд определений и обозначений. Оптимальное допустимое управление (если такое существует) обозначим $u^0 : I = g(u^0)$. Последовательность управлений $\{u_k\} \subset \bar{U}$ назовем *минимизирующей*, если $g(u_k) \to I$ при $k \to \infty$ и ε_k*-минимизирующей*, если

$$g(u_k) \leqslant I + \varepsilon_k^2,\ k = 1, 2, \dots$$

Пусть $v \in \bar{U}$. Обозначим

$$\vartheta_v(t) = \left(\Phi_v'(t)\right)^{-1} \mathbf{M}\left\{ \int\limits_t^1 \Phi_v'(s)\, f_x'(s, \eta_v(s), v(s))\, ds \right| \left. \mathfrak{F}_t \right\}, \tag{5.6}$$
$$H_v(t, u) = \vartheta_v'(t)\, A(t, \eta_v(t), u) + f(t, \eta_v(t), u).$$

Здесь $\Phi_v(t)$ — фундаментальная матрица решений линейной системы

$$d\xi = A_x(t, \eta_v(t), v(t))\, \xi\, dt + \sum_{j=1}^{m} B_x^{(j)}(t, \eta_v(t))\, \xi\, dw_j,$$

штрих означает транспонирование, $M\{\cdot|\,\mathfrak{F}\}$ — условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}$.

Обозначим $D(t)$ множество всех $\mathfrak{A}_t$-измеримых случайных векторов, принимающих свои значения в множестве D. Пусть даны последовательности положительных чисел $\delta_k \to 0$ и множеств $T_k \subset [0, 1]$, mes $T_k \to 1$ при $k \to \infty$. Множество всех последовательностей $\{v_k\} \subset \bar{U}$, для которых при каждом $k = 1, 2, \dots$ для mes-п.в. $t \in T_k$ и всех $u(\omega) \in D(t)$ выполнено неравенство

$$\mathbf{M}H_v^{(k)}(t, v_k(t)) \leqslant \mathbf{M}H_v^{(k)}(t, u(\omega)) + \delta_k,\ H_v^{(k)} \equiv H_{v_k} \tag{5.7}$$

обозначим $\Gamma\{\delta_k, T_k\}$.

5.5. Основной результат

Теорема 1[1]. *Пусть V — полное метрическое пространство с метрикой $d(u, v)$, $G(v)$ — непрерывный ограниченный снизу функционал на V. Тогда для любого $u \in V$ такого, что*

$$G(u) \leqslant \inf_V G + \varepsilon,\ \varepsilon > 0$$

и любого $\lambda > 0$ *существует такой* $v \in V$*, что*

$$\begin{aligned} G(v) &\leqslant G(u),\ d(u,v) \leqslant \lambda, \\ G(v) &\leqslant G(w) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(w,v)\ \forall w \in V,\ w \neq v. \end{aligned}$$

Теорема 2. *При принятых выше предположениях для любой последовательности* $\varepsilon_k \downarrow 0$ *множество* $\Gamma\{\varepsilon_k, [0,1]\}$ *содержит* ε_k*-минимизирующую последовательность* $\{v_k\} \subset \bar{U}$*. При этом в случае существования оптимального управления можно считать* $\Delta(u^0, v_k) \leqslant \varepsilon_k$.

С другой стороны, для любой минимизирующей последовательности $\{u_k\} \subset U$ *найдутся последовательности положительных чисел* $\delta_k \to 0$ *и множеств* $T_k \subset [0,1]$, $\operatorname{mes} T_k \to 1$, $k \to \infty$ *такие, что* $\{u_k\} \in \Gamma\{\delta_k, T_k\}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_k \downarrow 0$, $\{u_k\} \subset U$ — ε_k-минимизирующая последовательность. По теореме 1 при каждом k существует $v_k \in \bar{U}$ такое, что $g(v_k) \leqslant g(u_k)$, $\Delta(u_k, v_k) \leqslant \varepsilon_k$ и v_k минимизирует на $\bar{U}$ функционал $\varphi_k(u) = g(u) + \varepsilon_k \Delta(u, v_k)$.

Построим одноточечную вариацию управления v_k

$$v_{k\varepsilon}(t) = \begin{cases} u(\omega), & t \in (\tau, \tau+\varepsilon],\ u(\omega) \in D(\tau), \\ v_k(t), & t \in [0,1] \setminus (\tau, \tau+\varepsilon]. \end{cases}$$

Можно показать, что при для первой вариации функционала , отвечающей этой варианте, справедливо неравенство

$$\delta\varphi_k \equiv \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(\varphi_k(v_{k\varepsilon}) - \varphi_k(v_k)\right) \leqslant \mathbf{M}\left(H_v^{(k)}\left(\tau, u(\omega) - H_v^{(k)}(\tau, v_k(\tau))\right) + \varepsilon_k\right).$$

Поскольку необходимо, чтобы $\delta\varphi_k \geqslant 0$, то отсюда вытекает первое утверждение теоремы. Для доказательства второго — достаточно взять $u_k \equiv u^0$ при всех k.

Докажем последнее утверждение. Пусть $\{u_k\}, \{v_k\}$ — те же последовательности, что и выше. Имеем оценку

$$\begin{gathered} \left|\mathbf{M}\left[H_v^{(k)}(t, u_k(t)) - H_v^{(k)}(t, v_k(t))\right]\right| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\mathbf{M}\left|\vartheta_v^{(k)}(t)\right|^2 \mathbf{M}\left|A\left(t, \eta_u^{(k)}(t), u_k(t)\right) - A\left(t, \eta_u^{(k)}(t), v_k(t)\right)\right|^2} + \\ + \sqrt{\mathbf{M}\left|\vartheta_u^{(k)}(t) - \vartheta_v^{(k)}(t)\right|^2 \mathbf{M}\left|A\left(t, \eta_v^{(k)}(t), v_k(t)\right)\right|^2} + \\ + \mathbf{M}\left|f\left(t, \eta_u^{(k)}(t), u_k(t)\right) - f\left(t, \eta_v^{(k)}(t), v_k(t)\right)\right|, \end{gathered} \tag{5.8}$$

где $\eta_u^{(k)} \equiv \eta_{u_k}, \vartheta_u^{(k)} \equiv \vartheta_{u_k}$. Используя (5.3) и лемму, можно получить из (5.6) оценки

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \mathbf{M} \left|\vartheta_v^{(k)}(t)\right|^2 \leqslant K_1, \ \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \mathbf{M} \left|\vartheta_u^{(k)}(t) - \vartheta_v^{(k)}(t)\right|^2 \leqslant \gamma_k^{(1)},$$

где $\gamma_k^{(1)} = \gamma_k^{(1)}(\varepsilon_k) \to 0, k \to \infty$.

Если $t \in T_k \equiv \{t : u_k(t,\omega) = v_k(t,\omega) \ \mathbf{P}\text{-п.н.}\}$, то отсюда, а также из (5.5), (5.4) и (5.8) получаем

$$\left|\mathbf{M}\left[H_v^{(k)}(t, u_k(t)) - H_v^{(k)}(t, v_k(t))\right]\right| \leqslant \gamma_k^{(2)} = \gamma_k^{(2)}(\varepsilon_k) \to 0, k \to \infty.$$

Аналогично, если $t \in [0,1]$, $u(\omega) \in D(t)$, то

$$\left|\mathbf{M}\left[H_v^{(k)}(t, u(\omega)) - H_v^{(k)}(t, u(\omega))\right]\right| \leqslant \gamma_k^{(3)} = \gamma_k^{(3)}(\varepsilon_k) \to 0, k \to \infty.$$

Таким образом, используя неравенства (5.7) для $v_k(t)$, имеем при $t \in T_k$, $u(\omega) \in D(t)$

$$\begin{gathered}\mathbf{M}H_v^{(k)}(t, u_k(t)) \leqslant \mathbf{M}H_v^{(k)}(t, v_k(t)) + \gamma_k^{(2)} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{M}H_v^{(k)}(t, u(\omega)) + \varepsilon_k + \gamma_k^{(2)} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{M}H_u^{(k)}(t, u(\omega)) + \varepsilon_k + \gamma_k^{(2)} + \gamma_k^{(3)}\end{gathered}$$

и, значит, $\{u_k\} \in \Gamma\{\delta_k, T_k\}$, где $\delta_k = \varepsilon_k + \gamma_k^{(2)} + \gamma_k^{(3)}$. Теорема доказана.

5.6. Пример

Пусть

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_t &= \{\emptyset, \Omega\}, \ D = [-1, 1], \ n = m = 1, \\ d\eta &= u\,dt + dw, \ \eta(0) = 0, \\ g(u) &= \frac{1}{2}\mathbf{M}\int_0^1 \left(\eta^2(s) - u^2(s)\right) ds. \end{aligned}$$

Используя (5.6), получаем условие (5.7) в виде

$$\psi_v^{(k)}(t)\left(v_k(t) - u\right) + \left(u^2 - v_k^2(t)\right) \leqslant \varepsilon_k, \tag{5.9}$$

$$\psi_v^{(k)}(t) \equiv \int_t^1 \zeta_k(s)\, ds, \ \zeta_k(t) \equiv \int_0^t v_k(s\,ds)\,.$$

Из (5.9) видно, что если взять $v_k(t)$ со значениями на границе отрезка D, то второе слагаемое суммы будет неположительно при всех $u \in U$. Возьмем при $\tau_k > 0$

$$v_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in [2m\tau_k, (2m+1)\tau_k), \\ -1 & t \in [(2m+1)\tau_k, 2(m+1)\tau_k), \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда $|\zeta_k(t)| \leqslant \tau_k$, $\left|\psi_v^{(k)}(t)\right| \leqslant \tau_k$, $|v_k(t) - u| \leqslant 2$. Поэтому, если $2\tau_k \leqslant \varepsilon_k$, то для v_k выполнено (5.9). Проверкой можно убедиться в том, что последовательность $\{v_k\}$ действительно является ε_k-минимизирующей.

Литература

[1] Ekeland I. On the variational Principle, J. Math. Anal. and Appl., 1974, vol.47, N 2.

[2] Сумин М.И. Об оптимальном управлении системами с фазовыми ограничениями, Деп. в ВИНИТИ, №1836 - 81 Деп.

[3] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, Наукова думка, 1968.

[4] Морозов С.Ф., Смирнов И.П. Принципы минимума в задачах оптимального управления случайными процессами, ПММ, 1978, т. 42, вып. 2. (Глава 1 настоящего сборника)

Представлено в Совет молодых ученых механико-математического факультета ГГУ 20 апреля 1980 г.

Глава 6.

Оптимизация стационарного процесса переноса

УДК 517.977.55

Данная задача выделяется своей постановкой из общего ряда задач, рассматриваемых в сборнике. Ее включение связано с тем, что используемая в ней для доказательства принципа максимума техника в точности совпадает с той, что используется для доказательства стохастического принципа максимума. Это показывает, что указанная техника может быть полезна при исследовании целого ряда задач оптимального управления. Общей чертой этих задач является то, что в них управление является функцией независимых переменных существенно различной природы (например, часть из них может изменяться в топологических, а прочие — в измеримых пространствах). Это обстоятельство не позволяет строить локальные вариации оптимальных управлений по единой схеме для различных независимых переменных.

[1]Докладывалось на школе-семинаре "Моделирование, идентификация, синтез систем управления", Донецк, 1990. Опубликовано в сборнике тезисов семинара и вошла диссертационную работу. Частично опубликовано в работе Морозов С.Ф., Смирнов И.П. Нелинейные математические задачи переноса тормозных и возбуждающих импульсов в нервных тканях. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1977, т. 17, №1, с. 149-161.

6.1. Обобщенное решение стационарного уравнения переноса

Рассмотрим краевую задачу для слабонелинейного стационарного уравнения переноса [1, 2, 3]

$$\frac{1}{\alpha(P)}(\mathbf{s},\nabla)\varphi+\varphi(\mathbf{s},P)=\int\limits_{\Omega}h(P,\mu_0)\,\varphi(\mathbf{s}_1,P)\;d\mathbf{s}_1+ \tag{6.1}$$
$$+f(\mathbf{s},P,R(\varphi)(\mathbf{s},P)),\;\;\varphi(\mathbf{s},P)|_{P\in\Gamma_{-\mathbf{s}}}=0.$$

Здесь $P\in G\subset R^3$; G — выпуклая ограниченная область с гладкой границей Γ; $s\in\Omega$, Ω — единичная сфера с центром в начале R^3; $\mu_0=\mathbf{s}_1'\mathbf{s}$; $\Gamma_{-\mathbf{s}}$ — та часть границы Γ, на которой $\mathbf{n}'(P)\,\mathbf{s}\leqslant 0$; $\mathbf{n}(P)$ — внешняя нормаль в точке $P\in\Gamma$.

Коэффициенты уравнения (6.1) удовлетворяют следующим ограничениям: $\alpha(P)$ — измеримая функция, $0<\alpha(P)\leqslant\alpha_0=\mathrm{const}$; $h(P,\mu)\equiv\sum_{i=1}^{n}b_i(P)\,h_i(\mu)$, где b_i — ограниченные, а h_i — суммируемые на $[-1,1]$ измеримые функции; функция $f(\mathbf{s},P,x)$, $x\in R^1$ измерима по совокупности переменных и непрерывно дифференцируема по x для всех $(\mathbf{s},P)$, причем $|f_x'|\leqslant K=\mathrm{const}$; $R\in\mathcal{B}(h_p,h_p)$ (определение класса h_p см. далее).

При каждом $\mathbf{s}\in\Omega$ пусть $\pi_{\mathbf{s}}$ — ортогональная проекция области G на плоскость, проходящую через начало координат, перпендикулярную вектору $\mathbf{s}$. Пусть $Q\in\pi_{\mathbf{s}}$. Сечение области G прямой, проходящей через точку Q в направлении вектора $\mathbf{s}$, обозначим $\pi_{\mathbf{s},Q}\equiv(\xi_1(\mathbf{s},Q),\xi_2(\mathbf{s},Q))$. При любом $\mathbf{s}\in\Omega$ множество G разлагается в декртово произведение $G=\pi_{\mathbf{s}}\times\pi_{\mathbf{s},Q}:P=Q+\xi\mathbf{s}$, где $P\in G$, $Q\in\pi_{\mathbf{s}}$, $\xi\in\pi_{\mathbf{s},Q}$ [1].

Пусть $p\in(1,\infty)$. Обозначим через h_p пространство измеримых по Лебегу на $\Omega\times G$ функций $\varphi(\mathbf{s},P)$ с нормой

$$\|\varphi\|_p=\left\{\int\limits_{\Omega\times G}\alpha(P)\,|\varphi(\mathbf{s},P)|^p\,d\mathbf{s}dP\right\}^{1/p}.$$

В класс d_p включим те измеримые функции $\varphi(\mathbf{s},P)$, $(\mathbf{s},P)\in\Omega\times\bar{G}$, для которых выполнены следующие условия:

1) для п.в. $(\mathbf{s},Q)\in\Omega\times\pi_{\mathbf{s}}$ функция $\xi\to\varphi(\mathbf{s},Q+\xi\mathbf{s})$ абсолютно непрерывна на замыкании $\bar{\pi}_{\mathbf{s},Q}$;

2) $\varphi(\mathbf{s},P)=0$ при $P\in\Gamma_{-\mathbf{s}}$;

3) $l\varphi \equiv \frac{1}{\alpha(P)}(\mathbf{s},\nabla)\varphi + \varphi \in h_p$.

Пусть k_p — нормированное пространство (классов эквивалентных) функций $\varphi(\mathbf{s},P) \equiv \varphi(\mathbf{s},Q+\xi\mathbf{s})$, непрерывных по ξ на $\bar{\pi}_{\mathbf{s},Q}$ для п.в. $(\mathbf{s},Q) \in \Omega \times \pi_{\mathbf{s}}$, с нормой

$$|\varphi|_p = \left\{ \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\pi_{\mathbf{s}}} \sup_{\xi \in \pi_{\mathbf{s},Q}} |\varphi(\mathbf{s},Q+\xi\mathbf{s})|^p \right\}^{1/p}.$$

Можно показать [1], что $d_p \subset k_p \subset h_p$.

Оператор, порождаемый на d_p дифференциальным выражением l обозначим L. Введем также оператор

$$S\varphi = \int\limits_{\Omega} h(P,\mu_0)\,\varphi(\mathbf{s}_1,P)\,d\mathbf{s}_1.$$

Справедлива

Лемма 1. *Оператор L отображает d_p в h_p и имеет обратный L^{-1}. Операторы S и L^{-1} ограничены из h_p в h_p и из h_p в k_p, соответственно.*

Доказательство. Первые два утверждения доказаны в [1]; последнее непосредственно вытекает из представления оператора L^{-1}, полученного там же.

Обобщенным решением (решением) задачи (6.1) назовем всякую функцию $\varphi \in d_p$, для которой в h_p выполнено равенство

$$L\varphi = S\varphi + f(\cdot, R(\varphi)). \tag{6.2}$$

Примем следующие сокращенные обозначения для операторных норм

$$\|A\|_{h_p \to h_p} \equiv \|A\|_p\,,\ \|A\|_{h_p \to k_p} \equiv |A|_p\,.$$

Теорема 1. *Пусть $f(s,P,0) \in h_p$ и $\|L^{-1}S\|_p + K\|L^{-1}\|_p\|R\|_p \leqslant 1$. Тогда уравнение (6.2) имеет решение, и любые два его решения совпадают в h_p.*

Доказательство легко выполняется методом последовательных приближений [2, 3].

Рассмотрим в d_p уравнение

$$L\varphi = \mathcal{K}\varphi + g, \tag{6.3}$$

где $\mathcal{K} \in \mathcal{B}(h_p,h_p)$. Справедлива

Лемма 2. *Пусть* $\|L^{-1}\mathcal{K}\|_p \leqslant 1$. *Тогда любому* $g \in h_p$ *отвечает решение* $\varphi \in d_p$ *уравнения (6.3) и*

$$|\varphi|_p \leqslant C_p \|g\|_p \,, \; C_p = \text{const} \,. \tag{6.4}$$

Доказательство. Так как в условиях леммы существует ограниченный из h_p в h_p оператор $\left(I - L^{-1}\mathcal{K}\right)^{-1}$, то существование решения $\varphi \in d_p$ очевидно. При этом

$$\|\varphi\|_p \leqslant \left\|(L - \mathcal{K})^{-1}\right\|_p \|g\|_p \,.$$

Но $\varphi = L^{-1}\left(\mathcal{K}\varphi + g\right)$, следовательно, по лемме 1 имеем

$$|\varphi|_p \leqslant \left|L^{-1}\right|_p \|\mathcal{K}\varphi + g\|_p \leqslant \left|L^{-1}\right|_p \left(\|\mathcal{K}\|_p \|\varphi\|_p + \|g\|_p\right) \leqslant C_p \|g\|_p \,,$$

что и требовалось доказать.

6.2. Задача оптимального управления процессом переноса

Предположим, что функция источника f следующим образом зависит от управляющего параметра $u \in U \subset R^k$:

$$f\left(\mathbf{s}, P, x, u\right) \equiv f_1\left(\mathbf{s}, P, x\right) + g\left(\mathbf{s}, P, u\right).$$

Функция $g\left(\mathbf{s}, P, u\right) \equiv g\left(\mathbf{s}, Q + \xi\mathbf{s}, u\right)$, $\mathbf{s} \in \Omega$, $P \in \bar{G}$, $u \in R^k$ непрерывна по u при всех $(\mathbf{s}, P)$ и непрерывна справа по ξ на $\bar{\pi}_{\mathbf{s},Q}$ при всех $(u, \mathbf{s}, Q)$; кроме того, $|g\left(\mathbf{s}, P, u\right)| \leqslant g_0\left(\mathbf{s}, P\right)$ для всех $(\mathbf{s}, P, u)$, где $g_0 \in k_p$, $p \in (1, \infty)$.

Рассмотрим функцию $F\left(\mathbf{s}, P, x\right)$, измеримую по совокупности всех переменных $\mathbf{s} \in \Omega$, $P \in \bar{G}$, $x \in R^1$ и непрерывно дифференцируемую по x при всех фиксированных $(\mathbf{s}, P)$. Пусть существуют числа $K_1 > 0$, $r \in [1, p)$, такие, что при всех $(\mathbf{s}, P, x)$

$$|F| \leqslant K_1\left(1 + |x|^r\right), \; |F_x| \leqslant K_1\left(1 + |x|^{r-1}\right) \tag{6.5}$$

Определим *класс допустимых управлений* $\mathcal{U}$ как множество всех измеримых функций $u : \Omega \times G \to R^k$, для которых $u\left(\mathbf{s}, P\right) \in U$ п.в. Пусть выполнены условия пункта 6.1 и теоремы 1. Тогда по этой теореме любому управлению $u \in \mathcal{U}$ отвечает единственное в h_p решение задачи (6.1) $\varphi_u \in d_p$ и можно поставить следующую *задачу оптимизации*

$$J\left(u\right) \equiv \int\limits_{\Omega \times G} F\left(\mathbf{s}, P, \varphi_u\left(\mathbf{s}, P\right)\right) \, d\mathbf{s}dP \to \min, \; u \in \mathcal{U}.$$

Пусть $u^0(\mathbf{s},P)$ — оптимальное в поставленной выше задаче допустимое управление. Пусть $\xi_0 \in R^1$; $v(\mathbf{s},Q)$, $(\mathbf{s},Q) \in \Omega\times\pi_{\mathbf{s}}$ — произвольная измеримая функция со значениями в U. Положим при $\varepsilon > 0$

$$u^\varepsilon(\mathbf{s},Q+\xi\mathbf{s}) \equiv \begin{cases} v(\mathbf{s},Q)\,, & \xi\in(\xi_0,\xi_0+\varepsilon)\cap\pi_{\mathbf{s},Q} \\ u^0(\mathbf{s},Q+\xi\mathbf{s})\,, & \xi\notin(\xi_0,\xi_0+\varepsilon)\cap\pi_{\mathbf{s},Q}. \end{cases}$$

Очевидно, что $u^\varepsilon \in \mathcal{U}$, $u^\varepsilon\to u^0$, $\varepsilon\to 0$ для п.в. $(\mathbf{s},P)\in\Omega\times G$.

Пусть $\Delta_\varepsilon\varphi \equiv \varphi_{u^\varepsilon} - \varphi^0, \varphi^0 \equiv \varphi_{u^0}$. Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, получаем

$$\Delta_\varepsilon J \equiv J(u^\varepsilon) - J\left(u^0\right) = \int\limits_{\Omega\times G} F_x(\varepsilon)\,\Delta_\varepsilon\varphi\, d\mathbf{s}dP,$$

$$F_x(\varepsilon)(\mathbf{s},P) \equiv \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{s},P,\varphi_{1\varepsilon}(\mathbf{s},P))\,,\ \varphi_{1\varepsilon}\equiv\varphi^0+\theta_{1\varepsilon}\Delta_\varepsilon\varphi,\ 0\leqslant\theta_{1\varepsilon}(\mathbf{s},P)\leqslant 1.$$

Аналогично, из (6.2) получаем

$$L(\Delta_\varepsilon\varphi) = \mathcal{K}_\varepsilon(\Delta_\varepsilon\varphi) + \Delta_u g, \tag{6.6}$$

где $\mathcal{K}_\varepsilon \equiv S + f_{1x}(\mathbf{s},P,R(\varphi^0)+\theta_{2\varepsilon}R(\Delta_\varepsilon\varphi))\,R$, $\Delta_u g \equiv g(u^\varepsilon) - g(u^0)$.

Пусть $\mathcal{K}_0 \equiv S + f_{1x}(\mathbf{s},P,R(\varphi^0))\,R$, $F_x(0)\equiv\frac{\partial}{\partial x}F(\mathbf{s},P,\varphi^0(\mathbf{s},P))$. Имеем $\mathcal{K}_\varepsilon\in\mathcal{B}(h_p,h_p)\,,\varepsilon\geqslant 0$. Кроме того, по лемме 2 $(L-\mathcal{K}_\varepsilon)^{-1}\in\mathcal{B}(h_p,h_p)$. Так как в силу (6.5) $F_x(\varepsilon)\in h_{p'},\varepsilon\geqslant 0$, то полагая $\chi_\varepsilon = (L-\mathcal{K}_\varepsilon)^{-1*}F_x(\varepsilon)$, запишем приращение функционала в следующем виде

$$\Delta_\varepsilon J = \int\limits_{\Omega\times G}\chi_\varepsilon\Delta_u g\, d\mathbf{s}dP. \tag{6.7}$$

Покажем, что $\chi_\varepsilon\in k_{p'}$ и $|\chi_\varepsilon-\chi_0|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Используя явное представление оператора L^*, полученное в работе [1], можно показать, что функция $\hat\chi_\varepsilon(\mathbf{s},P)\equiv\chi_\varepsilon(-\mathbf{s},P)$ удовлетворяет уравнению

$$L\hat\chi_\varepsilon = \mathcal{K}^*_\varepsilon\hat\chi_\varepsilon + \hat F_x(\varepsilon)\,,\ \hat F_x(\varepsilon)(\mathbf{s},P)\equiv F_x(\varepsilon)(-\mathbf{s},P)\,,\ \varepsilon\geqslant 0.$$

Применяя лемму 2, получаем отсюда оценку

$$|\hat\chi_\varepsilon-\hat\chi_0|_{p'} \leqslant C_{p'}\left\{\|(\mathcal{K}^*_\varepsilon-\mathcal{K}^*_0)\,\hat\chi_0\|_{p'} + \left\|\hat F_x(\varepsilon)-\hat F_x(0)\right\|_{p'}\right\}. \tag{6.8}$$

Из той же леммы и (6.6) имеем $|\Delta_\varepsilon\varphi|_p\leqslant C_p\|\Delta_u g\|_p\to 0,\ \varepsilon\to 0$. Используя это и принимая во внимание оценку

$$\int\limits_{\Omega\times G}|F_x(\varepsilon)|^q\, d\mathbf{s}dP \leqslant K_1^q\int\limits_{\Omega\times G}(1+|\varphi_{1\varepsilon}|^p)\, d\mathbf{s}dP\leqslant \mathrm{const}<\infty,$$

где $p' < q \equiv p/\left(r-1\right)$, можно показать, что правая часть (6.8) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Для доказательства высказанного выше утверждения остается в силу (6.8) заметить, что $\left|\hat{f}\right|_{p'} = \left|f\right|_{p'}\ \forall f \in k_{p'}$.

Первую вариацию функционала определим равенством

$$\delta J = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Delta_\varepsilon J.$$

При ее вычислении удобно считать функции $g\left(\mathbf{s},P,u\right)$, $u^0\left(\mathbf{s},P\right)$, $\chi_\varepsilon\left(\mathbf{s},P\right)$, $\varepsilon \geqslant 0$ продолженными нулем в область $P \in R^3\backslash\bar{G}$. Имеем при этом соглашении

$$\Bigg|\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\pi_{\mathbf{s}}} dQ\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\varepsilon}\left(\chi_\varepsilon\left(\mathbf{s},Q+\xi\mathbf{s}\right)-\chi_0\left(\mathbf{s},Q+\xi\mathbf{s}\right)\right)\left(g\left(\mathbf{s},Q+\xi\mathbf{s},v\left(s,Q\right)\right)-\right.$$
$$\left.-g\left(\mathbf{s},Q+\xi\mathbf{s},u^0\left(s,Q+\xi\mathbf{s}\right)\right)\right)d\xi\Big| \leqslant \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\pi_{\mathbf{s}}} dQ\sup_{\pi_{\mathbf{s},Q}}\left|\chi_\varepsilon-\chi_0\right|\cdot \tag{6.9}$$
$$\cdot\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\varepsilon}\left|\Delta_u g\right|\,d\xi \leqslant 2\left|\chi_\varepsilon-\chi_0\right|_{p'}\left|g_0\right|_p \to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

Рассмотрим функцию

$$\xi \to \varkappa\left(\xi\right) \equiv \chi_0\left(\mathbf{s},Q+\xi\mathbf{s}\right)g\left(\mathbf{s},Q+\xi\mathbf{s},v\left(\mathbf{s},Q\right)\right),$$

считая $(\mathbf{s},Q)$ параметром. В условиях п. 6.1 эта функция непрерывна справа $\forall\xi \in R^1$. Следовательно, $\forall\xi_0$ п.в. на $\Omega\times\pi_{\mathbf{s}}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\varepsilon}\varkappa\left(\xi\right)\,d\xi = \varkappa\left(\xi_0\right).$$

Рассмотрим далее функцию

$$\xi \to \beta\left(\xi\right) \equiv \chi_0\left(\mathbf{s},Q+\xi\mathbf{s}\right)g\left(\mathbf{s},Q+\xi\mathbf{s},u^0\left(\mathbf{s},Q+\xi\mathbf{s}\right)\right).$$

По лемме Кушнера-Флеминга [4] существует множество $E \subset R^1$, $\operatorname{mes}E = 0$, такое, что при $\xi_0 \notin E$ для п.в. $(\mathbf{s},Q)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\varepsilon}\beta\left(\xi\right)\,d\xi = \beta\left(\xi_0\right).$$

Заметим, наконец, что

$$\left|\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\varepsilon} \varkappa(\xi)\ d\xi\right| + \left|\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\varepsilon} \beta(\xi)\ d\xi\right| \leqslant 2\varepsilon \sup_{\bar{\pi}_{\mathbf{s},Q}} |\chi_0| \sup_{\bar{\pi}_{\mathbf{s},Q}} |g_0|.$$

Поэтому, применяя теорему Лебега о предельном переходе и учитывая (6.9), получаем из (6.7)

$$\delta J = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\pi_{\mathbf{s}}} dQ\, \chi_0(\mathbf{s}, Q+\xi_0\mathbf{s})\, \Delta_u g(\mathbf{s}, Q+\xi_0\mathbf{s}).$$

Для оптимальности управления u^0 необходимо, чтобы $\delta J \geqslant 0$. Следовательно. если $\xi \notin E$, то

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\pi_{\mathbf{s}}} dQ\ \left(H(\mathbf{s}, Q+\xi\mathbf{s}, v(\mathbf{s},Q)) - H\left(\mathbf{s}, Q+\xi\mathbf{s}, u^0(\mathbf{s}, Q+\xi\mathbf{s})\right)\right) \leqslant 0, \tag{6.10}$$

где

$$H(\mathbf{s}, P, u) \equiv -\chi_0(\mathbf{s}, P)\, g(\mathbf{s}, P, u). \tag{6.11}$$

Отсюда вытекает, что при $\xi \notin E$ $\forall v(\mathbf{s}, Q)$ п.в. на $\Omega \times \pi_{\mathbf{s}}$

$$H(\mathbf{s}, Q+\xi\mathbf{s}, v(\mathbf{s},Q)) \leqslant H\left(\mathbf{s}, Q+\xi\mathbf{s}, u^0(\mathbf{s}, Q+\xi\mathbf{s})\right). \tag{6.12}$$

Действительно, если при некоторой v^* множество A, на котором неравенство неверно, имеет положительную меру, то полагая $v^{**} = v^*$ на A и $v^{**} = u^0$ на дополнении A и интегрируя противоположное (6.12) на A неравенство, справедливое для v^{**}, получаем противоречие с (6.10). Из (6.12) далее получаем, что для п.в. ξ п.в. на $\Omega \times \pi_{\mathbf{s}}$

$$H\left(\mathbf{s}, Q+\xi\mathbf{s}, u^0(\mathbf{s}, Q+\xi\mathbf{s})\right) = \max_{u\in U} H(s, Q+\xi\mathbf{s}, u). \tag{6.13}$$

В самом деле, пусть $\{v_j\}$ — счетное, всюду плотное множество в U. Применяя к функциям $v(\mathbf{s}, Q) \equiv v_j$ неравенство (6.12), получаем для п.в. ξ п.в. на $\Omega \times \pi_{\mathbf{s}}$

$$\sup_{u\in\{v_j\}} H(s, Q+\xi\mathbf{s}, u) = \sup_{u\in U} H(s, Q+\xi\mathbf{s}, u) \leqslant H\left(\mathbf{s}, Q+\xi\mathbf{s}, u^0(\mathbf{s}, Q+\xi\mathbf{s})\right).$$

Так как u^0— допустимое управление, то неравенство с обращенным знаком очевидно и, следовательно, (6.13) верно.

Но равенство (6.13) двух измеримых функций имеет место на измеримом множестве. Так как для п.в. ξ сечения этого множества имеют полную меру в $\Omega \times \pi_{\mathbf{s}}$, то по теореме Фубини пересечение самого множества с $\Omega \times G$ имеет полную меру в $\Omega \times G$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть выполнены условия п. 6.1. Тогда для оптимальности допустимого управления u^0 необходимо, чтобы п.в. на $\Omega \times G$*

$$H\left(\mathbf{s}, P, u^0\left(\mathbf{s}, P\right)\right) = \max_{u \in U} H\left(s, P, u\right),$$

где H — гамильтониан, определенный в (6.11).

Литература

[1] Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса. Труды МИАН СССР, т. 61, 1961. – 160 с.

[2] Морозов С.Ф., Смирнов И.П. Нелинейные математические задачи переноса тормозных и возбуждающих импульсов в нервных тканях. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977, т. 17, №1, с. 149-161.

[3] Морозов С.Ф., Смирнов И.П., Сумин В.И. Нелинейные интегро-дифференциальные системы переноса спайков в нейронных ансамблях. Доклад на совместном заседании сем. им. И.Г. Петровского и ММО. Успехи матем. наук, 1978, т. 33, №3, с. 137.

[4] Kushner H.J. Necessary conditions for continuous parameter stochastic problems. SIAM J. Control and Optimiz., 1972, v.10, N3, p. 550-565.

Глава 7.

Об оптимальном управлении линейной системой стохастических дифференциальных уравнений с квадратическим критерием качества

УДК 517.977.55

7.1. Введение

Рассмотрим управляемую систему, описываемую векторным стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$d\eta = \left(A\left(t\right)\eta + B\left(t\right)a + f\left(t\right)\right)\,dt + \sum_{j=1}^{m}\left(R^{(j)}\left(t\right)\eta + E^{(j)}\left(t\right)b + g^{(j)}\left(t\right)\right)\,dw_j\left(t\right),$$

$$\eta\left(t_0\right) = \eta_0,\ t_0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{7.1}$$

где η — n-мерный фазовый вектор, a, b — управляющие векторные параметры. Пусть критерием качества управления служит величина функ-

[1]И.П. Смирнов. Об оптимальном управлении линейной системой стохастических дифференциальных уравнений с квадратическим критерием качества, *Дифференциальные уравнения*, т. 18, №4, 1982, стр. 607 – 614..

ционала

$$J(t_0, \eta_0; u) = M \int_{t_0}^{1} (\eta_u' C \eta_u + a' D_a a + b' D_b b)\, ds, \tag{7.2}$$

где $\eta_u(s)$ — решение уравнения (7.1), отвечающее управлению $u(s) \equiv (a(s), b(s))$ (штрих означает транспонирование), и требуется минимизировать функционал (7.2) на заданном классе допустимых управлений.

Задачам оптимизации линейных управляемых систем с квадратичными критериями качества посвящено значительное число работ (см., например, [1-9]). При управлении по полным данным подобные задачи обычно исследуются методами динамического программирования [1-3;8,9]; в случае неполной информации применяется редукция к вспомогательным задачам управления по полным данным [4,8].

Для исследования задач управления по неполным данным, задач со случайными коэффициентами и т.д. удобными оказваются также методы стохастического принципа максимума [5-7,10-13], позволяющие в ряде случаев получить решение, не прибегая к построению вспомогательных задач (см. [5-7]). В настоящей работе критерий оптимальности в форме локального стохастического принципа макисмума применяется для решения двух задач оптимального управления системой (7.1) — задачи программного управления и задачи управления по полным данным.

7.2. Постановка задачи

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство; $w(t,\omega) \equiv \{w_1(t,\omega), \ldots, w_m(t,\omega)\}$, $t \in [0,1]$, $\omega \in \Omega$ — m-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами; $\{\mathfrak{F}_t\}$ — порождаемый этим процессом поток σ-подалгебр $\mathfrak{F}$. Через $\mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{M}\{\xi | \mathfrak{A}\}$ будем обозначать соответственно безусловное и условное по отношению к σ-алгебре $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{F}$ математические ожидания случайной величины $\xi(\omega)$ по вероятности $\mathbf{P}$.

Коэффициенты уравнения (7.1) удовлетворяют следующим требованиям: $A(t)$, $R^{(j)}(t)$, $B(t)$, $E^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, — матрицы размера $n \times n$, $n \times n$, $n \times n_a$, $n \times n_b$ соответственно с детерминированными (т.е. не зависящими от случая ω), борелевскими компонентами; компоненты матрицы $A(t)$ суммируемы по мере Лебега, матриц $R^{(j)}(t)$ суммируемы с квадратом, а матриц $B(t), E^{(j)}(t)$ равномерно ограничены при $t \in [0,1]$; $f(t), g^{(j)}(t)$ — n-мерные вектор-функции с детерминированными, суммируемыми с квадратом на $[0,1]$ компонентами.

Матрицы $C(t)$, $D_a(t)$, $D_b(t)$ в (7.2) являются симметрическими и имеют соответственно размеры $n \times n$, $n_a \times n_a$, $n_b \times n_b$. Для почти всех $t \in [0,1]$ матрицы $D_a(t)$, $D_b(t)$ положительно, а матрицы $C(t)$ неотрицательно определены. Компоненты этих матриц, а также компоненты матриц $D_a^{-1}(t)$, $D_b^{-1}(t)$ являются функциями детерминированными, борелевскими, равномерно ограниченными на отрезке $[0,1]$.

Для $t_0 \in [0,1]$ обозначим $U^a(t)$ гильбертово пространство прогрессивно измеримых относительно потока $\{\mathfrak{F}_t\}$ случайных n_a-мерных вектор-функций $a(t,\omega)$, $t \in [t_0,1]$, $\omega \in \Omega$ со скалярным произведением

$$\left(a^{(1)}, a^{(2)}\right) = \mathbf{M} \int\limits_{t_0}^{1} a^{(1)\prime}(s)\, D_a(s)\, a^{(2)}(s)\; ds.$$

Пусть $U_1^a(t)$ — подпространство $U^a(t)$, состоящее из детерминированных вектор-функций. Аналогично введем пространство $U^b(t)$ и его подпространство $U_1^b(t)$. Пусть $U(t_0) = U^a(t) \times U^b(t)$, $U_1(t_0) = U_1^a(t) \times U_1^b(t)$.

Обозначим $L_2(t)$ пространство $\mathfrak{F}_t$-измеримых n-мерных случайных векторов с квадратично суммируемыми на Ω компонентами. При заданных $t_0 \in [0,1)$, $\eta_0 \in L_2(t_0)$ рассмотрим задачи минимизации функционала $J(t_0, \eta_0; u)$ по всем $u \in U(t_0)$ (задача управления по полным данным) и по всем $u \in U_1(t_0)$ (задача программного управления). Заметим, что при принятых выше предположениях любому $u \in U(t_0)$ отвечает единственное сильное (непрерывное) решение η_u уравнения (7.1) [9]; при этом $0 \leqslant J(t_0, \eta_0; u) < \infty$.

7.3. Формулировка основного результата

Введем формальные обозначения:

$$Q^{(j)}(t,\Lambda) \equiv \left(D_b(t) + \sum_{i=1}^{m} E^{(j)\prime}(t)\, \Lambda E^{(j)}(t)\right)^{-1} E^{(j)\prime}(t)\, \Lambda,$$
$$S^{(ij)}(t,\Lambda) \equiv \Lambda\delta_{ij} - \Lambda E^{(i)}(t)\, Q^{(j)}(t,\Lambda), \quad \Gamma(t) \equiv B'(t)\, D_a^{-1}(t)\, B(t),$$

где Λ — $n \times n$-матрица, $\delta_{ij}, i,j = 1,2,\ldots,m,$ — символ Кронекера.

Теорема 1. *а) При любом $t_0 \in [0,1)$ задача программного управления имеет единственное решение. Оптимальное программное управление* *имеет вид*

$$
\begin{aligned}
a(t) &= D_a^{-1}(t)\, B'(t)\, p(t)\,, \\
b(t) &= -\sum_{i=1}^{m} Q^{(j)}(t, \Lambda_1(t)) \left[R^{(j)}(t)\, m(t) + g^{(j)}(t)\right],
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

где симметрическая, неотрицательно определенная $n \times n$-матрица Λ_1 является единственным абсолютно непрерывным решением линейной задачи Коши

$$
\frac{d}{dt}\Lambda_1 + A'(t)\,\Lambda_1 + \Lambda_1 A(t) + C(t) + \sum_{i=1}^{m} R^{(j)\prime}(t)\,\Lambda_1 R^{(j)}(t) = 0,\ \Lambda_1(1) = 0,
\tag{7.4}
$$

а (p, m) — единственное абсолютно непрерывное решение краевой задачи

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p &= -A'(t)\,p + \left[C(t) + \sum_{i,j=1}^{m} R^{(j)\prime}(t)\, S^{(ij)}(t, \Lambda_1(t))\, R^{(j)}(t)\right] m + \\
&+ \sum_{i,j=1}^{m} R^{(j)\prime}(t)\, S^{(ij)}(t, \Lambda_1(t))\, g^{(j)}(t)\,,\ p(1) = 0, \\
\frac{d}{dt}m &= A(t)\, m + \Gamma(t)\, p + f(t)\,,\ m(t_0) = \mathbf{M}\eta_0.
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

б) Пусть в дополнение к условиям п.7.2 компоненты всех матриц в (7.1) ограничены на $[0,1]$. Тогда при любом $t_0 \in [0,1)$ задача управления по полным данным имеет единственное решение. Оптимальная пара (η, u), $\eta \equiv \eta_u$ и только она почти всюду на $[t_0, 1] \times \Omega$ удовлетворяет соотношениям

$$
\begin{aligned}
a(t,\omega) &= -D_a^{-1}(t)\, B'(t) \left[\Lambda(t)\, \eta(t,\omega) + Z(t)\right], \\
b(t,\omega) &= -\sum_{i=1}^{m} Q^{(j)}(t, \Lambda(t)) \left[R^{(j)}(t)\, \eta(t,\omega) + g^{(j)}(t)\right],
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

где симметрическая, неотрицательно определенная $n \times n$-матрица Λ является единственным абсолютно непрерывным решением нелинейной задачи Коши

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Lambda + A'(t)\,\Lambda + \Lambda A(t) - \Lambda\Gamma(t)\,\Lambda + C(t) + \\
&+ \sum_{i=1}^{m} R^{(j)\prime}(t)\, S^{(ij)}(t, \Lambda)\, R^{(j)}(t) = 0,\ \Lambda(1) = 0,
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

а Z — единственное абсолютно непрерывное решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}Z + \left(A'(t) - \Lambda(t)\,\Gamma(t)\right)Z + \Lambda(t)\,f(t) + \\ + \sum_{i,j=1}^{m} R^{(j)\prime}(t)\,S^{(ij)}\left(t, \Lambda(t)\right)g^{(j)}(t) = 0,\ Z(1) = 0.$$

7.4. Метод решения

Доказательство теоремы 1 основано на использовании следующего критерия оптимальности.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{A}_t \equiv \{\emptyset, \Omega\}$ ($\emptyset$ — пустое множество) в задаче программного управления и $\mathfrak{A}_t \equiv \mathfrak{F}_t$ в задаче управления по полным данным. Тогда для оптимальности допустимого управления $u(t) = (a(t), b(t))$ в каждой из этих задач необходимо и достаточно, чтобы для него было выполнено следующее соотношение локального принципа минимума: для почти всех $t \in [t_0, 1]$ почти наверное по ω*

$$\min_{a \in R^{n_a}, b \in R^{n_b}} \mathbf{M}\left\{ H(t, a, b) \middle| \mathfrak{A}_t \right\} = \mathbf{M}\left\{ H(t, a(t), b(t)) \middle| \mathfrak{A}_t \right\}. \tag{7.8}$$

Здесь

$$H(t, a, b) \equiv \left[\theta'(t)\,B(t) + a'(t)\,D_a(t)\right]a + \left[\sum_{j=1}^{m} \varkappa'_{(j)}(t)\,E^{(j)}(t) + b'(t)\,D_b(t)\right]b, \tag{7.9}$$

$$\theta(t) = \mathbf{M}\left\{ \Phi^{-1\prime}(t) \int_t^1 \Phi'(s)\,C(s)\,\eta(s)\,ds \middle| \mathfrak{F}_t \right\},$$

$\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы (7.1), $\varkappa_{(j)}(t) \equiv \mu^{(j)}(t, t, \omega)$, функции $\mu^{(j)}(t, \tau, \omega)$ однозначно определены для $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1$ из равенств

$$\theta(t) = M\left\{ \theta(t) \middle| \mathfrak{F}_{t_0} \right\} + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \mu^{(j)}(t, \tau, \omega)\,dw_j(\tau). \tag{7.10}$$

Отметим основные моменты доказательства теоремы 2. Используя формулу Коши [14] для решения уравнения (7.1), получаем явное представление функционала $J(u)$ на множестве $U(t_0)$. Нетрудно проверить теперь, что этот функционал является строго выпуклым и имеет производную $\delta J(u;v)$ в любой точке пространства $U(t_0)$ по любому направлению v. Как хорошо известно (см., например, [8]), при этих условиях существует не более одной точки, в которой $J(u)$ достигает своего минимума на $U(t_0)$ $(U_1(t_0))$, и критерием оптимальности точки w является условие $\delta J(w;v) \geqslant 0$, $v \in U(t_0)$ $(v \in U_1(t_0))$.

Последнее условие для задачи более общего вида, чем (7.1),(7.2), получено в [10] в интегральной форме. Учитывая вид множеств допустимых управлений, в рассматриваемом случае нетрудно привести это интегральное условие к локальной форме (7.8). Набор функций $\left\{\theta, \varkappa_{(j)}\right\}$, входящих в состав "гамильтониана" H, удовлетворяет сопряженной задаче Бисмута [6,11] в стохастических дифференциалах. Решение этой задачи для функции θ приведено в (7.9), а для функций $\varkappa_{(j)}$ указана их непосредственная связь (7.10) с функцией θ через стохастические ядра $\mu^{(j)}$, установленная в [13]. Заметим, что возможность представления функции $\theta(t)$ в виде (7.10) при каждом $t \in [t_0, 1]$ с некоторыми функциями $\mu_t^{(j)}(\tau,\omega) \equiv \mu^{(j)}(t,\tau,\omega)$ вытекает из известного результата Кларка [9] о представлении функционалов от винеровского процесса. В [12,13] дополнительно показано, что эти функции могут быть выбраны измеримыми по совокупности переменных (t,τ,ω), причем функции $\mu^{(j)}(t,t,\omega)$ при этом выборе прогрессивно измеримы относительно потока $\{\mathfrak{F}_t\}$.

7.5. Доказательство теоремы 1

1. Доказательство утверждения (б) теоремы 1 проведем в два этапа. На первом этапе покажем, что уравнение (7.7) имеет локальное решение, определенное на некотором интегрвале $(\tau_1, 1)$, и при $t_0 \in (\tau_1, 1)$ существует единственное управление из $U(t_0)$, для которого выполнены соотношения (7.6) и которое удовлетворяет принципу минимума (7.8), а значит, оптимально. Используя это, докажем на втором этапе , что решение уравнения (7.7) может быть продолжено на весь отрезок $[0,1]$.

Обозначим $\|A\|$ спектральную норму квадратной матрицы $A : \|A\| = r^{1/2}(A'A)$, где $r(B)$ — спектральный радиус матрицы B [15]. Заметим, что если матрица A имеет размеры $n\times n$, а матрица B — размеры $n\times m$, то $\|B'AB\| \leqslant \|A\|\,\|B'B\|$. Пусть

$$\alpha = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \left\|D_b^{-1}(t)\right\| \sum_{j=1}^{m} \left\|E^{(j)\prime}(t)\,E^{(j)}(t)\right\|,$$

S_1 — открытый шар радиуса $1/(2\alpha)$ с центром в нуле пространства $n\times n$ матриц, снабженного спектральной нормой, ∂S_1 — его граница. Нетрудно проверить, что на множестве $[0,1] \times S_1$ правая часть уравнения (7.7) является функциоей ограниченной и лишицевой по Λ равномерно относительно t. Следовательно, по теореме Каратеодори существует удинственное асолютно непрерывное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\Lambda(1) = 0$, определенное на некотором интервале $(\tau_1, 1]$, где либо $\tau_1 = 0$, либо $\tau_1 > 0$ и $\Lambda(\tau_1) \equiv \lim\limits_{t \to \tau_1} \Lambda(t) \in \partial S_1$.

Пусть $t_0 \in (\tau_1, 1)$. Очевидно, что соотношение (7.8) эквивалентно условию $M\left\{ H(t, a(t), b(t)) \middle| \mathfrak{A}_t \right\} = 0$, $t \in [t_0, 1]$. Следовательно, для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче управления по полным данным необходимо и достаточно, чтобы для почти всех $t \in [t_0, 1]$ почти наверное выполнялись равенства

$$\begin{aligned} a(t) &= -D_a^{-1}(t)\, B'(t)\, M\left\{ \theta(t) \middle| \mathfrak{A}_t \right\} = -D_a^{-1}(t)\, B'(t)\, \theta(t), \qquad (7.11) \\ b(t) &= -D_a^{-1}(t) \sum_{j=1}^{m} E^{(j)\prime}(t)\, M\left\{ \varkappa_{(j)}(t) \middle| \mathfrak{A}_t \right\} = \\ &= -D_a^{-1}(t) \sum_{j=1}^{m} E^{(j)\prime}(t)\, \varkappa_{(j)}(t). \end{aligned}$$

Проверим, что соотношениям (7.6) удовлетворяет единственное управление $u(t) \in U(t_0)$, и для этого управления выполнены равенства (7.11). Поскольку $\|\Lambda(t)\|, \left\|Q^{(j)}(t, \Lambda(t))\right\|$ равномерно ограничены на $[t_0, 1]$, то, подставляя (7.6) в (7.1), получаем линейное уравнение относительно $\eta(t)$, удовлетворяющее условиям теоремы существования и единственности сильного решения [9]. Отсюда вытекает первое из сделанных утверждений; для доказательства второго вычислим функции $\theta(t), \varkappa_{(j)}(t)$, отвечающие управлению (7.6).

Пусть $\varphi^{(k)}(t)$ — k-ый столбец матрицы $\Phi(t)$, $X^{(k)}(t) = \varphi^{(k)}(t) \otimes \eta'(t)$, где $\otimes$ — прямое произведение матриц [15]. Применяя формулу дифференцирования Ито, получаем из (7.1)

$$\begin{gathered} dX^{(k)} = \left(X^{(k)} \tilde{A}' + A X^{(k)} + \textstyle\sum_{j=1}^{m} R^{(j)} X^{(k)} \tilde{R}^{(j)\prime} \right) dt + \\ + \left\{ \textstyle\sum_{j=1}^{m} \left[\left(X^{(k)} \tilde{R}^{(j)\prime} + R^{(j)} X^{(k)} + \varphi^{(k)} \otimes \tilde{g}^{(j)\prime} \right) dw_j \; + \right.\right. \\ \left.\left. + \left(R^{(j)} \varphi^{(k)} \right) \otimes \tilde{g}^{(j)\prime}\, dt \right] + \varphi^{(k)} \otimes \tilde{f}' dt \right\}, \end{gathered} \qquad (7.12)$$

где

$$\tilde{A} = A - BD_a^{-1}B'\Lambda,\ \tilde{R}^{(j)} = R^{(j)} - E^{(j)} \sum_{i=1}^{m} Q^{(j)}(t, \Lambda(t))\, R^{(i)},$$

$$\tilde{f} = f - BD_a^{-1}B'Z,\ \tilde{g}^{(j)} = g^{(j)} - E^{(j)} \sum_{i=1}^{m} Q^{(j)}(t, \Lambda(t))\, g^{(i)}.$$

Пусть $W(t)$ — фундаментальная $n^2 \times n^2$-матрица решений линейной системы

$$\frac{d}{dt}k = \left(I \otimes \tilde{A} + A \otimes I + R^{(i)} \otimes \tilde{R}^{(j)}\right) k.$$

Тогда, применяя к (7.12) формулу Коши, получим для матрицы $X^{(k)}$, рассматриваемой как n^2-вектор $\left\{X_{11}^{(k)}, \ldots, X_{1n}^{(k)}, X_{21}^{(k)}, \ldots, X_{nn}^{(k)}\right\}$ тождество

$$X^{(k)}(t) = W(t)\left\{W^{-1}(t_0)\left(I^{(k)} \otimes \eta_0'\right) + \int\limits_{t_0}^{t} W^{-1}(s)\, d\xi(s)\right\},$$

где $d\xi(t)$ — стохастический дифференциал, заключенный в (7.12) в фигурные скобки, $I^{(k)}$ — k-ый столбец единичной матрицы I.

Отсюда, используя также тождества

$$\Phi(t) = \Psi(t)\left\{\Psi^{-1}(t_0) + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_0}^{t} \Psi^{-1} R^{(i)} \Phi\, dw_j\right\},$$
$$M\left\{\varphi^{(k)}(s)\middle|\, \mathfrak{F}_t\right\} = \Psi(s)\,\Psi^{-1}(t)\,\varphi^{(k)}(t),\ s \geqslant t,$$

где $\Psi(t)$ — фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = Ax$, получаем при $s \geqslant t$

$$M\left\{X^{(k)}(s)\middle|\, \mathfrak{F}_t\right\} = W(s)\,W^{-1}(t)\,X^{(k)}(t) + W(s)\int\limits_{t}^{s} W^{-1}(\tau) \times$$
$$\times\left[\sum_{j=1}^{m} R^{(i)}(\tau)\,\Psi(\tau)\,\Psi^{-1}(t)\,\varphi^{(k)}(t) \otimes \tilde{g}^{(j)\prime}(\tau) + \Psi(\tau)\,\Psi^{-1}(t)\,\varphi^{(k)}(t) \otimes \tilde{f}'(\tau)\right] d\tau.$$

Подставляя это выражение в формулу для i-ой компоненты вектор-функции $\theta(t)$ и учитывая определения матриц W, Λ, Φ и вектор-функции Z, получаем

$$\begin{aligned}\theta_i(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\Phi^{-1}(t)\right)_{ki}\int\limits_{t}^{1} \operatorname{Tr} C(s)\, M\left\{X^{(k)}(s)\middle|\, \mathfrak{F}_t\right\} ds = \\ = \left(\Lambda(t)\,\eta(t) + Z(t)\right)_i.\end{aligned} \qquad (7.13)$$

Из (7.13) далее, используя тождество

$$\eta(t) = \tilde{\Psi}(t)\left\{\tilde{\Psi}^{-1}(t_0)\,\eta_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\Psi}^{-1}\tilde{f} ds + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\Psi}^{-1}\left(\tilde{R}^{(j)}\eta + \tilde{g}^{(j)}\right) dw_j\right\},$$

где $\tilde{\Psi}$ — фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = \tilde{A}x$, имеем

$$\varkappa_{(j)}(t) = \mu^{(j)}(t,t) = \Lambda(t)\left[\tilde{R}^{(j)}(t)\,\eta(t) + \tilde{g}^{(j)}(t)\right]. \tag{7.14}$$

Подставляя (7.14) и (7.13) в (7.11) и замечая, что

$$\sum_{j=1}^{m} D_b^{-1}(t)\,E^{(j)\prime}(t)\,S^{(ij)}(t,\Lambda(t)) \equiv Q^{(i)}(t,\Lambda(t)),$$

убедимся в том, что управление (7.6) действительно обращает (7.11) в тождества, т.е. оптимально.

Покажем, что при $\tau_1 > 0$ возможно продолжение решения уравнения (7.7) на весь отрезок $[0,1]$. Рассмотрим тот частный случай, когда в (7.1) $f \equiv g^{(j)} \equiv 0$. Подставляя (7.6) в (7.1) и (7.2), легко получить, что в этом случае $J(t_0,\eta_0;u) = \frac{1}{2}\mathbf{M}\eta_0'\Lambda\eta_0$.

В частности, при неслучайном $\eta_0(\omega) \equiv x$ имеем

$$J(t_0,x;u) = \frac{1}{2}x'\Lambda(t_0)\,x. \tag{7.15}$$

Транспонируя уравнение (7.7) и учитывая единственность локального решения, убедимся в том, что $\Lambda(t) = \Lambda'(t)$ при $t \in [\tau_1,1]$. Поскольку $J \geqslant 0$, то из (7.15) получаем, что матрица $\Lambda(t)$ неотрицательно определена для всех $t \in [\tau_1,1]$.

Пусть $u^0 \equiv 0$. Имеем $u^0 \in U(t_0)$ и $J(t_0,x;u^0) = \frac{1}{2}x'N(t_0)\,x$, где $N(t)$ — неотрицательно определенная, непрерывная при $t \in [0,1]$ матрица (которую легко найти в явном виде). Так как управление (7.6) оптимально, то при $t \in (\tau_1,1]$ $0 \leqslant x'\Lambda(t)\,x \leqslant x'N(t)\,x$.

Переходя в этих неравенствах к пределам при $t \to \tau_1$, установим их выполнение и при $t = \tau_1$. Поэтому

$$\max_{\tau_1 \leqslant t \leqslant 1} \|\Lambda(t)\| \leqslant \max_{\tau_1 \leqslant t \leqslant 1} \|N(t)\| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|N(t)\| < \infty. \tag{7.16}$$

Сделаем также оценку нормы матрицы $Q^{(j)}$. Имеем в силу неотрицательной определенности матрицы Λ на $[\tau_1,1]$

$$r\left(D_b + \sum_{j=1}^{m} E^{(j)\prime}\Lambda E^{(j)}\right) \geqslant r(D_b).$$

Поэтому равномерно на $[\tau_1,1]$

$$\left\|\left(D_b + \sum_{j=1}^{m} E^{(j)\prime}\Lambda E^{(j)}\right)^{-1}\right\| \leqslant \max_{\tau_1 \leqslant t \leqslant 1}\left\|D_b^{-1}(t)\right\| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1}\left\|D_b^{-1}(t)\right\| = N_1 < \infty \tag{7.17}$$

Используя полученные оценки, построим продолжение решения уравнения (7.7). Так как

$$\left\| D_b(t) + \sum_{j=1}^{m} E^{(j)\prime}(t)\, \Lambda(\tau_1)\, E^{(j)}(t) \right\| \geqslant \| D_b(t) \|,$$

то правая часть этого уравнения ограничена и удовлетворяет условия Липшица по Λ равномерно относительно t на множестве $[0,1] \times S_2$, где $S_2 = \{\Lambda : \|\Lambda - \Lambda(\tau_1)\| < 1/(2\alpha)\}$. Следовательно, существует решение этого уравнения проходящее через точку $(\tau_1, \Lambda(\tau_1))$, определенное на некотором интервале (τ_1, τ'), $\tau_1 \in (\tau_1, \tau')$ и совпадающее при $t \in [\tau_1, \tau')$ с ранее построенным решением. При этом либо $\tau_2 = 0$, либо $\tau_2 > 0$ и $\Lambda(\tau_2) \equiv \lim\limits_{t \to \tau_2} \Lambda(t) \in \partial S_2$.

Аналогично изложенному выше показывается, что при любом $t_0 \in (\tau_2, 1)$ управление (7.6) является оптимальным. Но это позволяет продолжить решение уравнения (7.7) далее на некоторый интервал (τ_3, τ_2) и т.д.

Покажем, что на некотором этапе $\tau_n = 0$. Имеем на любом отрезке $[\tau_k, \tau_{k-1}]$ в силу (7.17),(7.16) из (7.7)

$$\begin{gathered} \left\| \tfrac{d}{dt} \Lambda \right\| \leqslant \left(2\|A\| + \sum_{j=1}^{m} \left\| R^{(j)} \right\|^2 \right) \|\Lambda\| + \\ + \left(\|\Gamma\| + N_1 \sum_{i,j=1}^{m} \left\| R^{(j)} \right\| \left\| E^{(j)\prime} E^{(j)} \right\| \left\| R^{(j)} \right\| \right) \|\Lambda\|^2 + \|C\| \leqslant N_2 < \infty. \end{gathered}$$

Так как постоянная N_2 и радиус шара S_k не зависят от номера продолжения k, то величина шага $\tau_{k-1} - \tau_k$ равномерно ограничена снизу. Это доказывает наше утверждение.

2. Для доказательства утверждения (а) теоремы покажем, что при любом $t_0 \in [0,1)$ задачи (7.4),(7.5) имеют единственные решения, а определяемое ими управление (7.3) принадлежит классу $U_1(t_0)$ и удовлетворяет соотношению принципа минимума (7.8).

Проверка последнего свойства управления (7.3) может быть выполнена по той же схеме, что и в случае (б). Доказательство существования и единственности в классе абсолютно непрерывных матричных функций решения задачи Коши (7.4) трудностей не вызывает вследствие линейности этой задачи. Как и в п. (б), можно показать, что матрица $\Lambda_1(t)$ неотрицательно определена при любом t. Для того чтобы доказать существование и единственность решения краевой задачи (7.5), рассмотрим следующие три задачи Коши:

$$
\begin{gathered}
\tfrac{d}{dt}Y + A'Y + YA - Y\Gamma Y + C + \\
+ \sum_{i,j=1}^{m} R^{(j)\prime} S^{(i,j)}\left(t, \Lambda_1\left(t\right)\right) R^{(j)} = 0,\ Y\left(1\right) = 0; \\
\tfrac{d}{dt}\xi + \left(A' - Y\Gamma\right)\xi + Yf + \\
+ \sum_{i,j=1}^{m} R^{(j)\prime} S^{(i,j)}\left(t, \Lambda_1\left(t\right)\right) g^{(j)} = 0,\ \xi\left(1\right) = 0; \\
\tfrac{d}{dt}m_1 = \left(A - \Gamma Y\right) m_1 + \Gamma\xi + f,\ m\left(t_0\right) = \mathbf{M}\eta_0
\end{gathered}
\tag{7.18}
$$

Решение первой из этих задач для матричного уравнения Риккати, а с ним и решения двух оставшихся существуют и единственны в классах абсолютно непрерывных функций [3,8]. Но, как легко проверить непосредственной подстановкой, пара функций $m \equiv m_1$ и $p \equiv -Ym + \xi$ есть решение краевой задачи (7.5). Сверх того, если (m, p) — некоторое решение этой задачи, то непосредственно проверяется, что функция $\xi_1 \equiv p + Ym$ является решением второй из задач (7.18) и, значит, совпадает с ξ. Подставляя при этом $p \equiv \xi_1 - Ym$ во второе из уравнений (7.5), получаем $m \equiv m_1$, $p \equiv \xi - Ym$, что показывает единственность решения задачи (7.5). Теорема 1 доказана.

Литература

[1] Летов А.М. Аналитическое конструктирование регуляторов, I-IV. – Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, №4, с. 436-441; №5, с. 561-568; №6, с. 661-665; 1961, т. 22№4, с. 425-435.

[2] Куржанский А.Б. Об аналитическом конструировании регулятора в системе с помехой, зависящей от управления. – Дифференц. уравнения, 1965, т. 1, №2, с. 204-213.

[3] Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. – М.: Советское радио, 1976. – 184 с.

[4] Wonham W.M. On the separation theorem of stochastic control. – SIAM J. Control, 1968, vol. 6, N1, p. 312-326.

[5] Bismut J.-M. Controle des systemes linearies quadratiques: applications l'integrale stochastique. – Lect. Notes Math., 1978, N649, p. 180-264.

[6] Bismut J.-M. Linear-quadratic optimal stochastic control with random coefficients. – SIAM J. Control and Optimiz., 1976, vol. 14, N3, p. 419-444.

[7] Смирнов И.П. Об оптимальном управлении динамической системой со случайными параметрами при неполной информации. – ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 621-628 (Глава 3 настоящего сборника).

[8] Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М: Мир, 1978. – 318 с.

[9] Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. – Киев: Наукова думка, 1977. – 251 с.

[10] Морозов С.Ф., Смирнов И.П. Об одной задаче оптимального управления стохастическим процессом. – Дифференц. уравнения, 1979, т.15, №5, с. 943-944 (Глава 2 настоящего сборника).

[11] Bismut J.-M. Conjugate convex functions in optimal stochastic control. – J. Math. Anal. and Appl., 1973, vol. 44, N2, p. 384-404.

[12] Морозов С.Ф., Смирнов И.П. Принципы минмума в задачах оптимального управления случайными процессами. – ПММ, 1978, т. 42, вып. 2, с. 233-244 (Глава 1 настоящего сборника).

[13] Морозов С.Ф., Смирнов И.П. Структура операторов стохастического интегрирования на пространствах суммируемых случайных функций. – М., 1980. – 28 с. Деп. в ВИНИТИ, №397 – 80. (Глава 4 настоящего сборника).

[14] Садовяк А.М., Царьков Е.Ф. Аналог формулы Коши для стохастических дифференциальных уравнений. – Теория вероятностей и ее применения, 1973, т. 18, вып. 2, с. 415-417.

[15] Ланкастер Л. С. Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.

Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию 3 декабря 1980 г.

Глава 8.

Стохастический принцип максимума в линейной задаче управления разрывным процессом

УДК 519.2

Как показано в работе [1], принцип максимума Л.С.Понтрягина для общей нелинейной задачи управления управления коэффициентом диффузии стохастического дифференциального уравнения Ито справедлив лишь в его локальной форме. Однако, если задача линейна по фазовым переменным, то для нее удается получить необходимое условие оптимальности и в форме поточечного стохастического принципа максимума [2].

Аналогичные утверждения справедливы и в отношении задачи управления пуассоновским членом стохастического дифференциального уравнения без последействия. В настоящей работе результаты работ [1, 3] применяются для установления поточечного принципа максимума для линейного случая этой задачи.

1. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство; $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in [0,1]\}$ — поток полных по мере $\mathbf{P}$ σ-подалгебр $\mathfrak{F}$; $w\left(t\right), \nu\left(t, A\right)$ — m-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами и пуассоновская случайная мера с параметром $\Pi\left(A\right) t$ (Π — σ-конечная мера на σ-алгебр $\mathfrak{B}^l$

[1]С.Ф. Морозов, И.П. Смирнов. Стохастический принцип максимума в линейной задаче управления разрывным процессом, Межвузовский сборник *"Дифференциальные и интегральные уравнения"*, вып. 6, 1982, стр. 121 - 125.

борелевских множеств евклидова пространства R^l) соответственно, подчиненные (см. [4]) потоку $\{\mathfrak{F}_t\}$; $\tilde{\nu}(t,A) = \nu(t,A) - \Pi(A)\,t$. Пусть $\mathfrak{BF}$ — σ-алгебра прогрессивно измеримых относительно потока $\{\mathfrak{F}_t\}$ множеств из $[0,1]\times\Omega$, $\overline{\mathfrak{BF}}$ — ее пополнение по мере $\mathrm{mes}\times\mathbf{P}$, где mes — мера Лебега; $\mathbf{M}$ — знак математического ожидания по мере $\mathbf{P}$; $|\cdot|$ — евклидова норма в R^n.

Введем следующие пространства $\overline{\mathfrak{BF}}$-измеримых функций $f:[0,1]\times\Omega\to R^m$: L_q^n, $q\in[1,\infty)$ — банахово пространство с нормой $\left\{\mathbf{M}\int_0^1 |f(t)|^q\,dt\right\}^{1/q}$; H_q^n, $q\in[1,\infty)$ — пространство (классов неотличимых) функций с $\mathbf{P}$-п.н. непрерывными справа и имеющими конечные пределы слева траекториями с нормой $\left\{\mathbf{M}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t)|^q\right\}^{1/q}$. Пусть, кроме того, $L_q^n(\Pi)$, $q\in[1,\infty)$ — банахово пространство $\overline{\mathfrak{BF}}\times\mathfrak{B}^l$-измеримых функций $\varphi:[0,1]\times\Omega\times R^l\to R^n$ с нормой

$$\left\{\mathbf{M}\int\limits_0^1\left[\int|\varphi|^q\,d\Pi+\left(\int|\varphi|^2\,d\Pi\right)^{q/2}\right]dt\right\}^{1/q}.$$

Заметим, что всякий функционал из $\left(L_q^n\right)^*$ или $\left(L_q^n(\Pi)\right)^*$ допускает однозначное интегральное представление с некоторой весовой функцией; с этой функцией он в дальнейшем будет отождествляться.

2. Рассмотрим оптимизационную задачу:

$$g_0(u) = G_0(\xi_u) + \mathbf{M}\int\limits_0^1 F_0(t,u(t))\,dt\to\min,\ u\in U, \tag{8.1}$$

где ξ_u — решение (в смысле [4]) управляемой системы стохастических дифференциальных уравнений

$$d\xi = (A_1(t)\,\xi + A(t,u))\,dt + \sum_{j=1}^m\left(B_1^{(j)}(t)\,\xi + B^{(j)}(t,u)\right)dw_j(t) + \\ + \int(\Gamma_1(t,y)\,\xi+\Gamma(t,u,y))\,\tilde{\nu}(dt,dy),\ \xi(0)=\xi_0\in R^n, \tag{8.2}$$

отвечающее допустимому управлению $u\in U$. Предполагается, что $G_0\in\left(H_p^n\right)^*$, где p — натуральное четное число; функция F_0 и компоненты всех матриц и векторов в (8.2) измеримы по совокупности своих аргументов (в евклидовыых пространствах берутся борелевские σ-алгебры) и -измеримы по (t,ω). Предполагается также, что $\Gamma(\cdot,u,\cdot)\in L_p^n(\Pi)$ при каждом $u \in R^k$, и существует неслучайная ингтегрируемая по Лебегу функция $f(t)$ такая, что при всех (t,ω)

$$\|A_1(t)\|^p + \max_j \left\|B_1^{(j)}(t)\right\|^p + \left(\int \|\Gamma_1(t,y)\|^2 \, d\Pi\right)^{p/2} + \int \|\Gamma_1(t,y)\|^p \, d\Pi \leqslant f(t),$$

где $\|\beta\| = \max\limits_{i,k} |\beta_{ik}|$.

Пусть $\{\mathfrak{G}_t\}$ — заданный поток полных по мере $\mathbf{P}$ σ-алгебр $\mathfrak{G}_t \subset \mathfrak{F}_t$; $V_t(\omega) : [0,1] \times \Omega \to 2^{R^k}$ — многозначное отображение с $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{G}} \times \mathfrak{B}^k$-измеримым графиком V. Класс допустимых управлений U определим как множество всех $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{G}}$-измеримых селекторов [3] отображения $V_t(\omega)$, для которых $A(t,u(t))$, $B^{(j)}(t,u(t)) \in L_p^n$, $\Gamma(t,u(t),y) \in L_p^n(\Pi)$, $F_0(t,u(t)) \in L_1^1$.

3. Положим для $f \in L_p^n$, $\varphi \in L_p^n(\Pi)$, $\psi \in H_p^n$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(t) &= \int_0^t f(s)\, ds,\ \mathcal{I}_j(f)(t) = \int_0^t f(s)\, dw_j(s), \\ \mathcal{P}(\varphi)(t) &= \int_0^t \int \varphi(s,y)\, \tilde{\nu}(ds,dy),\ \xi = R\psi, \end{aligned}$$

где стохастические интегралы понимаются в смысле [4], а ξ — решение стохастического уравнения

$$\xi(t) = \psi(t) + \int_0^t A_1 \xi \, ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t B_1^{(j)} \xi \, dw_j(s) + \int_0^t \int \Gamma_1 \xi \tilde{\nu}(ds,dy).$$

Доказательства нижеследующих лемм легко вытекают из определений.

Лемма 1. *В условиях п. 2 линейные операторы* $\mathcal{L} : L_p^n \to H_p^n$, $\mathcal{I}_j : L_p^n \to H_p^n$, $\mathcal{P} : L_p^n(\Pi) \to H_p^n$, $R : H_p^n \to H_p^n$ *ограничены.*

Учитывая лемму 1 и замечание из п. 1 относительно интегрального представления линейных функционалов, введем функции

$$\theta = \mathcal{L}^* R^* G_0, \varkappa_{(j)} = \mathcal{I}_j^* R^* G_0, \alpha = \mathcal{P}^* R^* G_0,$$

а также функцию

$$h(t,u) = \theta'(t) A(t,u) + \sum_{j=1}^m \varkappa_{(j)}'(t) B^{(j)}(t,u) + \int \alpha'(t,y) \Gamma(t,u,y)\, d\Pi + F_0(t,u),$$

где штрих означает транспонирование.

Лемма 2. *Любому $u \in U$ отвечает единственное решение системы (8.1)*

$$\xi_u = R\left(\mathcal{L}\left(A\left(u\right)\right) + \sum_{j=1}^{m} \mathcal{I}_j\left(B^{(j)}\left(u\right)\right) + \mathcal{P}\left(\Gamma\left(u\right)\right)\right) \in H_p^n;$$

при этом

$$-\infty < g_0\left(u\right) = \mathbf{M}\int_0^1 h\left(t, u\left(t\right)\right)\, dt < \infty.$$

4. Теорема 1. *Пусть выполнены условия п. 2, $u^0 \in U$ и, кроме того, выполнено следующее условие (a): существуют последовательность многозначных отображений $V_t^i\left(\omega\right)$ с $\mathfrak{BG} \times \mathfrak{B}^k$-измеримыми графиками V^i и последовательность $\mathfrak{BF}$-измеримых интегрируемых функций такие, что*

$$V^i \subset V^{i+1},\ V = \bigcup_{i\geqslant 1} V^i,\ u_t^0 \in V_t^i\left(\omega\right)\ \ (\,\mathrm{mes}\times\mathbf{P}\text{-п.в.})$$

$$\begin{gathered}\sup_{u\in V_t^i(\omega)}\Big\{\left|A\left(t,\omega,u\right) - A\left(t,\omega,u_t^0\left(\omega\right)\right)\right|^p + \max_j\left|B^{(j)}\left(t,\omega,u\right) - B^{(j)}\left(t,\omega,u_t^0\left(\omega\right)\right)\right| + \\ + \int\left|\Gamma\left(t,\omega,u,y\right) - \Gamma\left(t,\omega,u_t^0\left(\omega\right),y\right)\right|^p\, d\Pi + \\ + \left(\int\left|\Gamma\left(t,\omega,u,y\right) - \Gamma\left(t,\omega,u_t^0\left(\omega\right),y\right)\right|^2\, d\Pi\right)^{p/2} + \\ + \left|F_0\left(t,\omega,u\right) - F_0\left(t,\omega,u_t^0\left(\omega\right)\right)\right| + \left|h\left(t,\omega,u\right) - h\left(t,\omega,u_t^0\left(\omega\right)\right)\right|\Big\} \leqslant \gamma^i\left(t,\omega\right).\end{gathered} \tag{8.3}$$

Тогда для оптимальности допустимого управления u^0 необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{mes}\times\mathbf{P}$-п.в.

$$\min_{u\in V_t(\omega)} H\left(t,\omega,u\right) = 0, \tag{8.4}$$

где H — регулярное условное математическое ожидание функции $h\left(t,\omega,u\right) - h\left(t,\omega,u_t^0\left(\omega\right)\right)$ на множестве V относительно потока $\{\mathfrak{G}_t\}$ [1].

Доказательство. В условиях теоремы регулярное условное математическое ожидание H существует (см. [1, 3]). Имеем при $u \in U$

$$g_0\left(u\right) = \mathbf{M}\int_0^1 h\left(t, u\left(t\right)\right)\, dt = \mathbf{M}\int_0^1 H\left(t, u\left(t\right)\right)\, dt + g_0\left(u^0\right).$$

Отсюда видно, что для оптимальности управления u^0 необходимо и достаточно, чтобы при любом $u \in U$ было

$$\mathbf{M}\int_0^1 H\left(t, u\left(t\right)\right)\, dt \geqslant 0 \tag{8.5}$$

Но при выполнении (8.4) имеем $H\left(t, u\left(t\right)\right) \geqslant 0$ для любого $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{G}}$-измеримого селектора отображения $V_t\left(\omega\right)$ и, тем более, для $u \in U$. Следовательно, (8.5) в этом случае имеет место, т.е. u^0 оптимально.

Обозначим далее через U_i множество всех $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{G}}$-измеримых селекторов отображения $V_t^i\left(\omega\right)$. Из (8.3) легко видеть, что $U_i \subset U$. Пусть управление u^0 оптимально. Покажем, что из (8.5) следует, что при каждом $u \in U_i$

$$H\left(t, u\left(t\right)\right) \geqslant 0 \text{ (mes} \times \mathbf{P}\text{-п.в.)}. \tag{8.6}$$

В самом деле, если для некоторого $u_1 \in U_i$ мера $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{G}}$-измеримого множества C, на котором (8.6) неверно, строго положительна, то полагая $u = u_1 1_C + \left(1 - 1_C\right) u^0$, где 1_C — индикатор множества C, и интегрируя неравенство $H\left(t, u\left(t\right)\right) \leqslant 0$, получим противоречие с (8.5).

Применяя к (8.6) предложение 1 из работы [3], имеем

$$\inf_{u \in V_t^i(\omega)} H\left(t, \omega, u\right) \geqslant 0 \text{ (mes} \times \mathbf{P}\text{-п.в.)}.$$

Для того чтобы получить отсюда (8.4), остается заметить, что

$$\inf_{u \in V_t(\omega)} H\left(t, \omega, u\right) = \inf_{i \geqslant 1} \inf_{u \in V_t^i(\omega)} H\left(t, \omega, u\right) \geqslant 0 = H\left(t, \omega, u_t^0\left(\omega\right)\right).$$

Теорема доказана.

5. Пусть задан конечный набор аналогичных (8.1) функционалов

$$g_i\left(u\right) = G_i\left(\xi_u\right) + \mathbf{M}\int_0^1 F_i\left(t, u\left(t\right)\right)\, dt,\ i = \overline{1, m_2}.$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала g_0 на множестве U^* тех $u \in U$, для которых

$$F_i\left(t, u\left(t\right)\right) \in L_1^1,\ i = \overline{1, m_2};\ g_i\left(u\right) \leqslant 0,\ i = \overline{1, m_1};\ g_i\left(u\right) = 0,\ i = \overline{m_1 + 1, m_2}.$$

Пусть

$$\begin{aligned}\theta^{i} &= \mathcal{L}^{*}R^{*}G_{i},\ \varkappa^{i}_{(j)}=\mathcal{I}^{*}_{j}R^{*}G_{i},\ \alpha^{i}=\mathcal{P}^{*}R^{*}G_{i},\\ h_{i} &= \theta^{i\prime}(t)\,A+\sum_{j=1}^{m}\varkappa^{i\prime}_{(j)}B^{(j)}+\int\alpha^{i\prime}\Gamma\,d\Pi+F_{i}.\end{aligned}$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия п. 2* $u^0 \in U^*$ *и выполнено условие (а), где произведены замены* $|F_0(t,u)-F_0(t,u)|$ *на* $\sum_{i=0}^{m_2}|F_i(t,u)-F_i(t,u_t^0)|$ *и* $|h(t,u)-h(t,u_t^0)|$ *на* $\sum_{i=0}^{m_2}|h_i(t,u)-h_i(t,u_t^0)|$.

Тогда для оптимальности управленией u^0 *необходимо, а при дополнительном требовании* $\lambda_0>0$ *и достаточно, существования ненулевого* $\lambda\in R^{m_2+1}$ *такого, что*

$$\begin{gathered}\lambda_i\geqslant 0,\ i=\overline{0,m_1};\ \lambda_i g_i\left(u^0\right)=0, i=\overline{0,m_2};\\ \min_{u\in V_t(\omega)}H_1(t,\omega,u)=0\ (\mathrm{mes}\times\mathbf{P}\text{-п.в.}),\end{gathered}$$

где H_1 *— регулярное условное математическое ожидание функции*

$$\sum_{i=0}^{m_2}\lambda_i\left(h_i(t,\omega,u)-h_i\left(t,\omega,u_t^0(\omega)\right)\right)$$

на множестве V *относительно потока* $\{\mathfrak{G}_t\}$.

Доказательство теоремы может быть выполнено, например, по схеме, предлагаемой в § 4.3 работы [5].

6. Замечания. Если $\mathfrak{G}_t\equiv\mathfrak{F}_t$, то требуемые в условии (a) последовательности можно построить так:

$$\gamma^i(t,\omega)\equiv i,\ V^i=\{(t,\omega,u):\ \psi(t,\omega,u)\leqslant i\},$$

где ψ — функция, стоящая в (8.3) слева в фигурных скобках.

Накладывая дополнительно ограничения на данные задачи (например, требуя, чтобы $f\leqslant\mathrm{const}$ и все $G_i\in(L_2^n)^*$, можно построить для набора функций $\left(\theta^i,\chi^i_{(j)},\alpha^i\right)$ некоторую сопряженную задачу в стохастических дифференциалах, обобщающую известную задачу Бисмута [6].

Литература

[1] Аркин В.И., Саксонов М.Т. – ДАН СССР, 244, 1 (1979).

[2] Кабанов Ю.М. – В сб.: Вероятностные модели и управление экономическими процессами. М., ЦЭМИ, 1978.

[3] Аркин В.И., Саксонов М.Т. Там же.

[4] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, Наукова думка, 1968.

[5] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., Наука, 1979.

[6] Bismut J.-M. J. Math. Anal. Appl., 44 (1973), 384.

Глава 9.

Необходимые условия оптимальности в линейно квадратичной задаче управления коэффициентом сноса стохастического дифференциального уравнения для процессов с разрывами

УДК 517.948

9.1. Введение

В докладе рассматривается задача программного управления решением стохастического дифференциального уравнения для процессов с разрывами, когда уравнение – линейно, а функционал качества – квадратично

[1]И.П. Смирнов. Необходимые условия оптимальности в линейно-квадратичной задаче управления коэффициентом сноса стохастического дифференциального уравнения для процессов с разрывами, Горький, 1984. *Деп. в ВИНИТИ*, 1985, №1333 - 85 Деп. (Из материалов итоговой научной конференции радиофизического факультета Горьковского университета за 1983 г.)

зависит от фазового вектора. Управляющий параметр общим нелинейным образом входит в коэффициент сноса и интегрант функционала.

Для указанной задачи выписывается необходимое условие оптимальности в форме стохастического принципа максимума, которое затем сводится к детерминированной кваевой задаче принципа максимума Л.С. Понтрягина.

9.2. Постановка задачи

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство; $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in [0,1]\}$ — поток полных по мере $\mathbf{P}$ σ-подалгебр $\mathfrak{F}$; $w\ =, \{w_1, \ldots, w_d\}, \nu\,(t, A)$ — независимые между собой d-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами и пуассоновская случайная мера с параметром $\Pi\,(A)\,t$ (Π — σ-конечная мера на σ-алгебр $\mathfrak{B}^l$ борелевских множеств евклидова пространства R^l) соответственно, подчиненные (см. [1]) потоку $\{\mathfrak{F}_t\}$; $\tilde{\nu}\,(t, A) = \nu\,(t, A) - \Pi\,(A)\,t$.

Пусть далее L_2 — пространство n-мерных случайных функций $\varphi\,(t, \omega)$, прогрессивно измеримых относительно потока $\{\mathfrak{F}_t\}$, с нормой $\left(\mathbf{M} \int_0^1 |\varphi|^2\, dt\right)^{1/2}$, $L_2\,(\Pi)$ — пространство n-мерных функций $\psi\,(t, \omega, y)$, измеримых по совокупности переменных, прогрессивно измеримых по (t, ω), с нормой

$$\left(\mathbf{M} \int\limits_0^1 \int |\psi\,(t, \omega, y)|^2\, \Pi\,(dy)\, dt\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$M \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} \eta_u' C \eta_u + F\,(t, u\,(t))\right)\, dt \to \min,\ u \in \mathcal{U}, \tag{9.1}$$

$$d\eta = (A\eta + f\,(t, u))\ dt + \left(B^{(j)}\eta + B_1^{(j)}\right) dw_j + \tag{9.2}$$

$$+ \int (\Gamma\eta + \Gamma_1)\ \tilde{\nu}\,(dt, dy)\,,\ \eta\,(0) = \eta_0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где η_u — сильное решение (9.2), отвечающее допустимому управлению $u \in \mathcal{U}$; штрих означает транспонирование, знак суммирования по повторяющимся индексам опущен.

Класс допустимых управлений состоит из всех m-мерных борелевских функций $u\,(t)$, принимающих свои значения в заданном множестве $U \subset R^m$.

В (9.1), (9.2) матрицы $A(t), B^{(j)}(t), \Gamma(t,y), C(t)$ имеют порядок $n\times n$; их компоненты — детерминированные борелевские по совокупности своих переменных $t\in[0,1], y\in R^l$ функции. Компоненты вектор-функций $f(t,u)$, $B_1^{(j)}(t)$, $\Gamma_1(t,y)$, $F(t,u)$ измеримы по совокупности своих переменных $t\in[0,1]$, $y\in R^l$, $u\in R^m$ и непрерывны по u. Кроме того,

$$|\det(I+\Gamma)|>0,\ M|\eta_0|^4<\infty,$$

$$\int\limits_0^1 dt\left\{\sup_{u\in U}\left(|f(t,u)|^4+|F(t,u)|\right)+|A(t)|^4+\sum_{j=1}^d\left(\left|B^{(j)}\right|^8+\left|B_1^{(j)}\right|^4\right)+\right.$$
$$\left.+\int\left(|\Gamma|^4+|g|^4\right)\Pi(dy)+\left(\int(|\Gamma|+|g|)\,\Pi(dy)\right)^4\right\},$$

где $g\equiv\Gamma(I+\Gamma)^{-1}$, I — единичная матрица порядка $n\times n$, $|\cdot|$ — евклидова матричная норма.

9.3. Стохастический принцип максимума

Из полученных в [2] результатов вытекает следующее необходимое условие оптимальности в задаче (9.1), (9.2).

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения п. 9.2, $u^0\in\mathcal{U}$ — оптимальное управление. Тогда для почти всех t*

$$H\left(t,u^0(t)\right)=\max_{u\in U}H(t,u).$$

Здесь $-H(t,u)\equiv\mathbf{M}\theta'(t)f(t,u)+F(t,u)$, "стохастический множитель Лагранжа" θ принадлежит пространству L_2 и удовлетворяет тождеству

$$d\theta=-\left(A'\theta+B^{(j)\prime}\varkappa_{(j)}+\int\Gamma\alpha\Pi(dy)+C'\eta\right)dt+d\tilde{\mu},\ \theta(1)=0, \tag{9.3}$$

в котором $\eta\equiv\eta_{u^0}$, $\tilde{\mu}$ — квадратично интегрируемый мартингал, функции $\varkappa_{(j)}\in L_2$, $\alpha\in L_2(\Pi)$ для почти всех (t,ω,y) удовлетворяют соотношениям

$$\varkappa_{(j)}(t,\omega)=\lambda_{(j)}(t,t,\omega),\ \alpha(t,\omega,y)=\mu(t,t,\omega,y), \tag{9.4}$$

$$\theta(t,\omega)=\theta_1(t,\omega)+\int\limits_0^t\lambda_{(j)}(t,\tau,\omega)\,dw_{(j)}(\tau)+\int\limits_0^t\int\mu(t,\tau,\omega,y)\,\tilde{\nu}(d\tau,dy)$$

где последняя сумма есть разложение θ по взаимно ортогональным подпространствам L_2 (см. [3]), функции $\lambda_{(j)}(t,\tau,\omega)\,,\mu(t,\tau,\omega,y)$ непрерывны по $t\geqslant\tau$.

9.4. Краевая задача принципа максимума

Введем функции $m(t)\equiv\mathbf{M}\eta(t)\,,\ \chi(t)\equiv\mathbf{M}\theta(t)$ и получим необходимое условие оптимальности в виде краевой задачи принципа максимума Л.С.Потрягина для этих функций.

Воспользуемся для этого следующим представлением функции в данной задаче (см. [2]-[4]):

$$\theta(t)=\Phi^{-1}(t)\,M\left\{\int\limits_t^1\Phi'(s)\,C(s)\,\eta(s)\;ds\right|\mathfrak{F}_t\left.\vphantom{\int\limits_t^1}\right\},\tag{9.5}$$

где Φ — решение матричного уравнения

$$d\Phi=A\Phi\,dt+B^{(j)}\Phi\,dw_{(j)}+\int\Gamma\Phi\tilde{\nu}\,(\,dt,dy)\,,\ \Phi(0)=I.$$

Введем матрицу $\Lambda(t)$, являющуюся решением задачи Коши

$$\Lambda+A'\Lambda+\Lambda A+B^{(j)\prime}\Lambda B^{(j)}+\int\Gamma'\Lambda\Gamma\,\Pi(dy)+C=0,\ \Lambda(1)=0\tag{9.6}$$

Используя (9.5) и (9.6), нетрудно показать (см. [4, 5]), что

$$\theta(t)=\Lambda(t)\,\eta(t)+Z(t)\,,\tag{9.7}$$

где $Z(t)$ — некоторая детерминированная функция.

Из (9.7) и (9.4) теперь находим

$$\begin{aligned}\varkappa_{(j)}(t)&=\Lambda(t)\left(B^{(j)}(t)\,\eta(t)+B_1^{(j)}(t)\right),\\ \alpha(t,y)&=\Lambda(t)\left(\Gamma(t,y)\,\eta(t)+\Gamma_1(t,y)\right).\end{aligned}\tag{9.8}$$

Подставляя (9.8) в (9.3) и усредняя по ω, получаем краевую задачу для вектор-функции (m,χ). Дополняя ее соотношением принципа максимума для гамильтониана $-H(t,u)=\chi'(t)\,f(t,u)+F(t,u)$, получаем в итоге следующее необходимое условие оптимальности.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия п. 9.2, $u^0 \in \mathcal{U}$– оптимальное управление. Тогда u^0 является решением следующей краевой задачи принуипа максимума:*

$$\begin{cases} \dot{m} = Am + f\left(t, u\left(t\right)\right), & m\left(0\right) = \mathbf{M}\eta_0, \\ \dot{\chi} = -A'\chi - L'm - L_1, & \chi\left(1\right) = 0, \\ H\left(t, u^0\left(t\right)\right) = \max\limits_{u \in U} H\left(t, u\right), & \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L\left(t\right) &\equiv B^{(j)\prime}\left(t\right)\Lambda'\left(t\right)B^{(j)}\left(t\right) + \int \Gamma\left(t, y\right)\Lambda'\left(t\right)\Gamma\left(t, y\right)\,\Pi\left(dy\right) + C\left(t\right), \\ L_1\left(t\right) &\equiv B^{(j)\prime}\left(t\right)\Lambda'\left(t\right)B_1^{(j)}\left(t\right) + \int \Gamma\left(t, y\right)\Lambda'\left(t\right)\Gamma_1\left(t, y\right)\,\Pi\left(dy\right) + C\left(t\right), \end{aligned}$$

— решение задачи (9.6).

9.5. Замечания

Нетрудно видеть, что решение линейной задачи (9.6) для матрицы Λ существует в условиях п. 9.2 и единственно в классе абсолютно-непрерывных матричных функций. При этом, если матрица $C\left(t\right)$ является симметрической, то и $\Lambda\left(t\right)$ – симметрическая при всех t.

В [4] исследован случай $f\left(t, u\right) \equiv K\left(t\right)u$, $F\left(t, u\right) \equiv u'D\left(t\right)u$. При этом решение задачи (9.1)-(9.2) доведено до нахождения в явном виде оптимальной управляющей функции.

Литература

[1] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, “Наукова думка”, 1968.

[2] Смирнов И.П. Исследование вариационными методами задач оптимизации стохастических интегральных уравнений для процессов с разрывами. Кандидатская диссертация. Горький, 1981.

[3] Морозов С.Ф., Смирнов И.П. Деп. в ВИНИТИ, №397-80 Деп.

[4] Смирнов И.П. Деп. в ВИНИТИ, №1836-81 Деп.

[5] Смирнов И.П. Дифференциальные уравнения, т. 18, №4, 1982.

Представлена в Оргкомитет конференции 30 января 1984 г.

Глава 10.

О задаче Коши для уравнения Ито

УДК 517.948

10.1. Введение

Хорошо известна та роль, которую играет в теории оптимального управления так называемая “сопряженная задача”. Ее решением служит множитель Лагранжа, отвечающий ограничению в форме уравнений движения управляемого объекта. Структура сопряженной задачи определяется как структурой уравнений движения, так и свойствами ограничивающих и минимизируемых функционалов.

В теории оптимального управления процессами Ито известны несколько подходов к построению сопряженной задачи [1]-[5]. Заметим, что при любом из этих подходов либо сопряженное уравнение не является уравнением Ито [2]-[4], либо постановка задачи Коши для сопряженного уравнения Ито носит обобщенный характер [1, 5]. В настоящем докладе приводится пример, иллюстрирующий необоснованность попыток построения сопряженной задачи в виде задачи Коши для уравнения Ито с условием в конечной точке временно̀го интервала [6].

[1]И.П. Смирнов. *О задаче Коши для уравнения Ито*, Горький, 1984. Деп. в ВИНИТИ, 1986, №7038 - В86 Деп. (Из материалов итоговой научной конференции радиофизического факультета Горьковского университета за 1984 г.)

10.2. Постановка задачи

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $\{\mathfrak{F}_t,\, t \geqslant 0\}$— поток полных по вероятности $\mathbf{P}$ σ-подалгебр $\mathfrak{F}$, $w(t)$ — стандартный винеровский процесс, согласованный с потоком $\{\mathfrak{F}_t\}$ и имеющий при $s > t$ не зависящие от $\mathfrak{F}_t$ приращения $w(s) - w(t)$. Рассмотрим следующую задачу Коши для одномерного дифференциального уравнения Ито

$$\begin{cases} d\eta = (\alpha(t) + \beta(t)\,\eta)\; dt + (\gamma(t) + \delta(t)\,\eta)\; dw, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \eta(1) = 0, \end{cases} \tag{10.1}$$

коэффициенты которого — $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t)$ — детерминированные измеримые ограниченные функции. Решение уравнения Ито понимается в сильном смысле [7]: решением считается всякий, согласованный с потоком $\{\mathfrak{F}_t\}$ случайный процесс $\eta(t)$, имеющий при $t \in [0,1]$ стохастический дифференциал Ито и удовлетворяющий при $t \in [0,1]$ с вероятностью 1 условиям (10.1).

10.3. Формулировка результата

Целью доклада является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *В условиях п. 10.2 решением задачи (10.1) может быть лишь та функция $\eta(t,\omega)$, для которой при почти всех $t \in [0,1]$ почти наверное $\gamma(t) + \delta(t)\,\eta(t,\omega) = 0$.*

Для существования решения этой задачи необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты уравнения удовлетворяли следующему условию

$$\gamma(t)\,\psi(t) + \delta(t) \int\limits_t^1 \psi(s)\,\alpha(s)\; ds = 0, \tag{10.2}$$

$$\psi(t) \equiv \exp\left(-\int_0^t \beta(s)\; ds\right)$$

для почти всех t. При выполнении условия (10.2) единственное решение задачи (10.1) имеет вид

$$\eta(t,\omega) = \frac{1}{\psi(t)} \int\limits_t^1 \psi(s)\,\alpha(s)\; ds. \tag{10.3}$$

10.4. Доказательство теоремы

Пусть $\eta(t,\omega)$ — решение задачи (10.1). Тогда для некоторой $\mathfrak{F}_0$-измеримой случайной величины $\eta_0(\omega)$

$$\eta(t,\omega)=\Phi^{-1}(t,\omega)\left\{\eta_0+\int\limits_0^t \Phi(s,\omega)\varphi(s)\;ds+\int\limits_0^t \Phi(s,\omega)\gamma(s)\;dw(s,\omega)\right\}, \tag{10.4}$$

где

$$\varphi(s)\equiv\alpha(s)-\gamma(s)\delta(s),$$
$$\Phi(t,\omega)\equiv\exp\left\{\int\limits_0^t\left(\frac{1}{2}\delta^2(s)-\beta(s)\right)ds-\int\limits_0^t\delta(s)\;dw(s,\omega)\right\}.$$

Вводя обозначения

$$\xi(t,\omega)\equiv\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\delta^2(s)\;ds-\int\limits_0^t\delta(s)\;dw(s,\omega)\right\},$$
$$f(t)\equiv\exp\left\{\int\limits_0^t\left(\delta^2(s)-\beta(s)\right)\;ds\right\}$$

имеем представление для функции $\Phi:\Phi(t,\omega)=\xi(t,\omega)f(t)$, где $\xi(t,\omega)$ — мартингал относительно потока $\{\mathfrak{F}_t\}$.

В силу (10.1) и (10.4) имеем

$$\eta_0(\omega)+\int\limits_0^1\Phi(s)\varphi(s)\;ds+\int\limits_0^1\Phi(s)\gamma(s)\;dw(s,\omega)=0 \tag{10.5}$$

почти наверное. Применяя к обеим частям этого равенства операцию условного математического ожидания $\mathbf{M}\{\cdot|\mathfrak{F}_{t_0}\}$, получаем

$$\eta_0(\omega)+\int\limits_0^1 f(s)\varphi(s)\;ds=0. \tag{10.6}$$

Из (10.5) и (10.6) имеем далее при любом $t \in [0,1]$

$$\int_0^t \xi(s,\omega) f(s) \varphi(s)\ ds + \int_t^1 \xi(s,\omega) f(s) \varphi(s)\ ds + \tag{10.7}$$
$$+ \int_0^1 \Phi(s,\omega) \gamma(s)\ dw(s,\omega) = \int_0^1 f(s) \varphi(s)\ ds.$$

Применяя к обеим частям равенства (10.7) операцию $\mathbf{M}\{\cdot|\,\mathfrak{F}_t\}$ и вводя обозначения

$$c(t) \equiv \int_0^t f(s) \varphi(s)\ ds,\ c = c(1),$$

получаем

$$\int_0^t \xi(s,\omega) f(s) \varphi(s)\ ds + \int_0^t \Phi(s,\omega) \gamma(s)\ dw(s,\omega) = \tag{10.8}$$
$$= (1 - \xi(t,\omega)) + c(t) \xi(t,\omega).$$

Подставив (10.8) в (10.4), получим с учетом (10.6)

$$\begin{gathered} \eta(t,\omega) = \Phi^{-1}(t,\omega) \{\eta_0 + c(1 - \xi(t,\omega)) + c(t) \xi(t,\omega)\} = \\ = \Phi^{-1}(t,\omega) \xi(t,\omega) [c(t) - c] = f^{-1}(t) [c(t) - c], \\ c(t) - c = f(t) \eta(t,\omega) \end{gathered} \tag{10.9}$$

Рассмотрим два логически возможных случая:

- $c = 0$. При этом $c(t) = f(t) \eta(t,\omega)$. С другой стороны, так как

$$\left\{ \begin{array}{c} d\xi = -\delta\xi\, dw \\ \xi(0) = 1 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{c} dc = f\varphi\, dt \\ c(0) = 0 \end{array} \right.,$$

то

$$c(t) \xi(t,\omega) = c(0) \xi(0,\omega) + \int_0^t c(s)\, d\xi(s,\omega) + \int_0^t \xi(s,\omega)\, dc(s) = \tag{10.10}$$
$$= \int_0^t f(s) \varphi(s) \xi(s,\omega)\ ds - \int_0^t c(s) \delta(s) \xi(s,\omega)\ dw(s,\omega) = 0$$

и из (10.8) получаем для всех t

$$\int_0^t \xi\,(s,\omega)\,[c\,(s)\,\delta\,(s) + f\,(s)\,\gamma\,(s)\,]\,dw\,(s,\omega) = 0,$$

откуда

$$c\,(s)\,\delta\,(s) + f\,(s)\,\gamma\,(s) = f\,(s)\,[\gamma\,(s) + \delta\,(s)\,\eta\,(s,\omega)] = 0$$

почти всюду, то есть почти всюду

$$\gamma\,(s) + \delta\,(s)\,\eta\,(s,\omega) = 0. \tag{10.11}$$

- $c \neq 0$. В этом случае из (10.8), (10.10) имеем

$$c\xi\,(t,\omega) = c - \int_0^t \xi\,(s,\omega)\,[c\,(s)\,\delta\,(s) + f\,(s)\,\gamma\,(s)]\;dw\,(s)\,.$$

С другой стороны,

$$c\xi\,(t,\omega) = c - \int_0^t \xi\,(s,\omega)\,\delta\,(s)\;dw\,(s)\,.$$

В силу единственности представления процесса Ито [7] это означает, что

$$c\,(s)\,\delta\,(s) + f\,(s)\,\gamma\,(s) = c\delta\,(s)$$

почти всюду, что эквивалентно условию

$$\gamma\,(s) + \delta\,(s)\,\eta\,(s,\omega) = 0. \tag{10.12}$$

почти всюду.

Равенства (10.11), (10.12) означают выполнение первого утверждения теоремы. Из (10.1) теперь получаем для $\eta\,(t)$ задачу

$$d\eta = (\alpha + \beta\eta)\;dt,\;\eta\,(1) = 0,$$

решением которой служит, очевидно, (10.3). С учетом (10.3) формулы (10.11), (10.12) принимают вид условия (10.2), откуда вытекает его необходимость. Для доказательства достаточности этого условия заметим, что при его выполнении функция (10.3) удовлетворяет задаче (10.1), что легко проверяется непосредственной подстановкой. Теорема доказана.

10.5. Замечания

1) Нетрудно видеть, что условие (10.2) выполнено, например, в следующих случаях

   а) $\gamma \equiv \delta \equiv 0$;

   б) $\alpha \equiv \gamma \equiv 0$.

   В первом случае получается задача для обыкновенного дифференциального уравнения, во втором — уравнение Ито однородно и имеет тривиальное решение;

2) При постоянных коэффициентах уравнения решение задачи (10.1) существует тогда и только тогда, когда $|\gamma| + |\alpha\delta| = 0$.

Литература

[1] Kushner H.J. SIAM J. Control and Optimiz., 1972, vol. 10, N 3, p. 550-565

[2] Bismut J.-M. SIAM Rev. , 1978, vol. 20, N 1, p. 62-78.

[3] Смирнов И.П. Кандидатская диссертация. Горький, 1981.

[4] Аркин В.И., Саксонов М.Т. Докл. АН СССР, т. 244, №1, с. 11-15.

[5] Докучаев Н.Г. Деп. в ВИНИТИ, №4465 - 83 Деп.

[6] Казаков И.Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. - М.: Наука, 1975.

[7] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. - К.: Наукова думка, 1968.

Глава 11.

Об одной задаче быстродействия для стохастической управляемой системы

УДК 517.977.55

11.1. Введение

В работе рассматривается задача быстродействия для стохастической управляемой системы

$$\frac{d}{dt}x = A(t,\omega)\,x + B(t,\omega)\,u + f(t,\omega)\,, \qquad (11.1)$$
$$x(0,\omega) = x_0(\omega)\,,\ t \geqslant 0,\ \omega \in \Omega,$$

где x — n-мерный фазовый вектор, u — m-мерный управляющий вектор, A, B, f, x_0 — случайные матрицы порядка $n \times n, n \times m, n \times 1, n \times 1$, соответственно.

Теория управления по быстродействию детерминированными системами вида (11.1) является одним из наиболее глубоко разработанных разделов современной теории оптимального управления(см., например, [1-4]). В настоящей работе некоторые результаты этой теории распространяются на задачу о скорейшем переводе среднего значения фазового

[1]И.П. Смирнов. Об одной задаче быстродействия для стохастической управляемой системы, *Дифференциальные уравнения*, т. 22, №2, 1986, стр. 247 – 254.

вектора стозхастической системы (11.1). Полученные результаты примыкают к теории стохастического принципа максимума [5-8].

Постановка задачи производится в п. 11.2. В п. 11.3 вводятся необходимые определения и доказываются вспомогательные утверждения. Основные критерии оптимальности получены в п. 11.4. В п. 11.5 выводятся необходимые и достаточные условия полной управляемости системы (11.1). Пример применения полученных результатов к исследованию конкретных задач управления приведен в п. 11.6.

11.2. Постановка задачи

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $\{\mathfrak{F}_t,\, t \geqslant 0\}$— поток σ-подалгебр $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{BF}$ — σ-алгебра прогрессивно измеримых относительно этого потока подмножеств множества $[0, \infty) \times \Omega$. Безусловное и условиное по отношению к σ-алгебре $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{F}$ математические ожидания случайной величины $\xi\,(\omega)$, $\omega \in \Omega$, по вероятности $\mathbf{P}$ обозначим $\mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{M}\,\{\xi|\,\mathfrak{A}\}$ соответственно.

Компоненты матриц A, B, f в (11.1) являются $\mathfrak{BF}$-измеримыми по совокупности своих аргументов t, ω функциями; $x_0\,(\omega)$ — $\mathfrak{F}_0$-измеримый случайный вектор.

Пусть $\mathfrak{A}$ — заданная σ-подалгебра $\mathfrak{BF}$, $V \subset R^m$, U— множество всех $\mathfrak{A}$-измеримых функций $u\,(t, \omega)$, $t \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$, принимающих свои значения в множестве V (класс управлений). Среднее значение решения задачи (11.1), отвечающего управлению $u \in U$, обозначим $m_u\,(t) \equiv Mx_u\,(t, \omega)$.

Рассмотрим для управляемой системы (11.1) следующую задачу быстродействия: за минимальное время t_1перевести систему из начального состояния $x_0\,(t_1, \omega)$ в такое состояние $x_u\,(t_1, \omega)$, для которого $m_u\,(t_1) \in G\,(t_1)$, где $G\,(t)$— заданное, зависящее от момента времени $t \geqslant 0$ целевое множество в R^n.

11.3. Вспомогательные результаты

По аналогии с [2, 3, 9] введем следующие определения.

Определение 1. Пусть $t > \tau \geqslant 0$, $x\,(\omega)$ — $\mathfrak{F}_\tau$-измеримый случайный вектор в R^n. *Множеством достижимости* $K\,(x\,(\omega)\,, \tau, t)$ назовем множество всех векторов $l \in R^n$, обладающих свойством: существует $u \in U$, такое, что $l = m_u\,(t)$ и при этом $x_u\,(\tau, \omega) = x\,(\omega)$.

Определение 2. Управление назовем *экстремальным* на отрезке $[0, t_1]$, если вектор $m_u\,(t_1)$ принадлежит границе множества достижимости

$K(x_0(\omega), 0, t_1)$.

Определение 3. *Решением* задачи (11.1) на отрезке времени $[0, t_1]$, отвечающим управлению $u \in U$, назовем $\mathfrak{BF}$-измеримую функцию $x_u(t, \omega)$, для которой при каждом $t \in [0, t_1]$ с вероятностью 1 выполнено равенство

$$x_u(t, \omega) = x_0(\omega) + \int\limits_0^t \left(A(s, \omega) x_u(s, \omega) + B(s, \omega) u(s, \omega) + f(s, \omega)\right) ds,$$

где интеграл понимается как потраекторный в смысле Лебега.

Лемма 1. *Пусть при* $t_1 > 0$

$$P\left\{\int\limits_0^{t_1} (\|A\| + \|B\| + \|f\|)\, ds < \infty\right\} = 1, \tag{11.2}$$

где $\|\cdot\|$ — *матричная норма вида* $\|C\| = \max\limits_i \sum_j |C_{ij}|$. *Тогда любому* $u \in U$, *для которого* $\|u\| \in L_\infty([0, t_1] \times \Omega)$, *отвечает решение* x_u *задачи (11.1) на отрезке времени* $[0, t_1]$. *Для любых двух решений задачи (11.1), отвечающих этому управлению, их траектории с вероятностью 1 совпадают, абсолютно непрерывны и удовлетворяют* mes-*почти всюду* (mes — *мера Лебега на прямой) дифференциальному уравнению (11.1). При этом с вероятностью 1*

$$x_u(t, \omega) = \Phi(t, \omega) \left(x_0(\omega) + \int\limits_0^t \Phi^{-1}(s, \omega) \left(B(s, \omega) u(s, \omega) + f(s, \omega)\right) ds\right), \tag{11.3}$$

где — решение матричного интегрального уравнения

$$\Phi(t, \omega) = I + \int\limits_0^t A(s, \omega) \Phi(s, \omega)\, ds, \tag{11.4}$$

I — *единичная матрица порядка* $n \times n$.

Доказательство леммы может быть проведено методом последовательных приближений. Утверждения леммы также легко извлекаются из общих результатов работы [9].

Лемма 2. *Пусть для* $t_1 > 0$ *и* $u \in U$ *выполнены условия леммы 1 и сверх того*

$$\mathbf{M} k(0, t_1) \left\{\|x_0\| + \int\limits_0^{t_1} k(0, s) (\|B(s)\| + \|f(s)\|)\, ds\right\} < \infty \tag{11.5}$$

где $k(\tau,t,\omega) \equiv \exp\left\{\int\limits_{\tau}^{t} \|A(s,\omega)\|\, ds\right\}$. *Тогда функция* $t \to m_u(t) = \mathbf{M}x_u(t,\omega)$ *определена и непрерывна на* $[0,t_1]$.

Доказательство. Оценивая (11.4), а также уравнение для обратной матрицы $\frac{d}{dt}\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}A$ в матричной норме и применяя неравенство Гронуолла (см. [9, стр. 41]), имеем с вероятностью 1

$$\max\left\{\|\Phi(t,\omega)\|, \left\|\Phi^{-1}(t,\omega)\right\|\right\} \leqslant k(0,t,\omega) \leqslant k(0,t_1,\omega).$$

Отсюда, используя формулу (11.3) и свойства решения задачи (11.1), отмеченные в лемме 1, получаем утверждения настоящей леммы.

11.4. Условия оптимальности

Предположим, что множество V значений управляющей функции является выпуклым компактом и при всех $t_1 > 0$ данные задачи (11.5) удовлетворяют сформулированным выше условиям (11.2), (11.5).

Лемма 3. *При любых* $t > \tau \geqslant 0$ *и любом* $\mathfrak{F}_\tau$*-измеримом случайном векторе* $x(\omega)$, *удовлетворяющем условию* $M\|x(\omega)\|k(\tau,t_1) < \infty$, *множество достижимости* $K(x(\omega),\omega,t)$ *является выпуклым компактом, непрерывно в метрике Хаусдорфа зависящим от* $t \in [\tau,t_1]$.

Используя результат леммы 2, легко провести доказательство леммы 3 по схеме, применяемой в [4, стр. 78-81].

Лемма 4. *Для экстремальности управления* $u \in U$ *на отрезке* $[0,t_1]$ *необходимо и достаточно существования неслучайного вектора* $c \neq 0$ *такого, что* $\mathrm{mes}\times\mathbf{P}$*-почти всюду на* $[0,t_1]\times\Omega$

$$\Theta'(t)\,u(t,\omega) = \max_{u\in V}\Theta'(t)\,u, \tag{11.6}$$

где $\Theta = \tilde{\mathbf{M}}\{B\eta'|\mathfrak{A}\}$, $\frac{d}{dt}\eta = -A'\eta$, $\eta(t_1) = c$, $\tilde{\mathbf{M}}\{\cdot|\mathfrak{A}\}$ — *оператор условного математического ожидания по отношению к* σ*-алгебре* $\mathfrak{A}$ *на вероятностном пространстве* $\left([0,t_1]\times\Omega, \mathfrak{B}\mathfrak{F}, \frac{\mathrm{mes}}{t_1}\times\mathbf{P}\right)$, *штрих означает транспонирование.*

Доказательство. Необходимость. Пусть u — экстремальное на отрезке времени $[0,t_1]$ управление, c — внешняя нормаль опорной гиперплоскости, проведенной к $K(x_0(\omega),0,t_1)$ в граничной точке $m_u(t_1)$. Тогда для всякого $u \in U$

$$c'(m_v(t_1) - m_u(t_1)) \leqslant 0. \tag{11.7}$$

Пусть $\eta(t,\omega)\,,\ t\in[0,t_1]$ — решение задачи

$$\frac{d}{dt}\eta=-A'(t,\omega)\,\eta,\ \eta(t_1,\omega)=c.$$

Тогда с вероятностью 1

$$\begin{aligned} c'x_u(t_1,\omega) &= \eta'(t_1)\,x_u(t_1)=\eta'(0)\,x_0+\int\limits_0^{t_1}\eta'(s)\,(Bu+f)\ ds,\\ c'x_v(t_1,\omega) &= \eta'(t_1)\,x_v(t_1)=\eta'(0)\,x_0+\int\limits_0^{t_1}\eta'(s)\,(Bv+f)\ ds. \end{aligned}$$

Интегрируя эти равенства по мере $\mathbf{P}$, вычитая затем первое из второго и учитывая свойства условного математического ожидания, получаем

$$c'(m_v(t_1)-m_u(t_1))=\mathbf{M}\int\limits_0^{t_1}\eta'B\,(v-u)\ ds=\int\limits_{[0,t_1]\times\Omega}\Theta'(v-u)\ d\,(\mathrm{mes}\times\mathbf{P})\,. \tag{11.8}$$

Отсюда следует, что при любом $v\in U$ $\mathrm{mes}\times\mathbf{P}$-почти всюду

$$\Theta'(t,\omega)\,v\,(t,\omega)\leqslant\Theta'(t,\omega)\,u\,(t,\omega)\,. \tag{11.9}$$

Действительно, пусть при некотором $w\in U$ имеем $\mathrm{mes}\times\mathbf{P}\,()>0$, где $C=\{(t,\omega):\Theta'w>\Theta'u\}$. Возьмем $v=w\chi+u\,(1-\chi)$, где χ — индикаторная функция множества C. Поскольку $C\in\mathfrak{A}$, то $v\in U$ и из (11.8) получаем $c'(m_v(t_1)-m_u(t_1))>0$, что противоречит (11.7).

Из (11.9), в частности, имеем для всякого вектора $u\in V$ почти всюду $\Theta'(t,\omega)\,u\,(t,\omega)\geqslant\Theta'(t,\omega)\,u$. Пусть S — счетное всюду плотное подмножество V. Тогда почти всюду справедливо неравенство

$$\Theta'(t,\omega)\,u\,(t,\omega)\geqslant\Theta'(t,\omega)\,u.$$

при всех $u\in S$, а потому почти везде

$$\Theta'(t,\omega)\,u\,(t,\omega)\geqslant\sup_{u\in S}\Theta'(t,\omega)\,u=\sup_{u\in V}\Theta'(t,\omega)\,u.$$

Так как неравенство в противоположную сторону очевидно, то отсюда вытекает (11.6).

Достаточность. Пусть для управления $u \in U$ выполнено при некотором $c \neq 0$ условие (11.6). Допустим при этом, что вектор $m_u(t_1)$ принадлежит внутренности множества $K(x_0(\omega), 0, t_1)$. Тогда найдется управление $v \in U$, для которого $c'(m_v(t_1) - m_u(t_1)) > 0$. Но в силу (11.6) почти всюду

$$\Theta'(t,\omega)\,v(t,\omega) \leqslant \max_{u \in V} \Theta'(t,\omega)\,u = \Theta'(t,\omega)\,u(t,\omega).$$

Поэтому из (11.8) имеем неравенство $c'(m_v(t_1) - m_u(t_1)) \leqslant 0$, противоречащее неравенству, полученному выше. Следовательно, $m_u(t_1) \in \partial K$ и управление u является экстремальным на отрезке $[0, t_1]$. Лемма доказана.

Полученный в лемме 4 результат является аналогом принципа максимума Л.С.Понтрягина и предоставляет возможности для выделения экстремальных управлений в классе всех допусттимых управлений. Важность понятия экстремального управления показывает следующая

Теорема 1. *Рассмотрим задачу быстродействия из п. 11.2, предполагая, что выполняются предположения настоящего пункта, $G(t)$ — компактное, непрерывно в метрике Хаусдорфа меняющееся при $t \geqslant 0$ целевое множество. Для того чтобы управление $u \in U$, осуществляющее цель управления на отрезке $[0, t_1]$, было оптимальным, а) необходимо, чтобы оно было экстремальным на этом отрезке; при этом если множество $G(t_1)$ выпукло, то вектор c в (11.6) можно выбрать так, чтобы он удовлетворял условию трансверсальности, а именно, чтобы он был нормалью к опорной гиперплоскости, разделяющей множества $K(x_0(\omega), 0, t_1)$ и $G(t_1)$; б) достаточно, чтобы это управление было экстремальным на отрезке $[0, t_1]$ и при этом при любом $\tau \in (0, t_1)$ и любом $\mathfrak{F}_\tau$-измеримом случайном векторе $x(\omega)$, удовлетворяющем условиям $\mathbf{M}x(\omega) = m_1$, $\mathbf{M}\|x\|\,k(\tau, t_1) < \infty$, вектор m_1 принадлежал бы внутренности множества $K(x(\omega), \tau, t_1)$.*

Доказательство теоремы заключается в использовании свойств множества достижимости, отмеченных в лемме 3, и совпадает с доказательством соответствующих утверждений в [4, стр. 141].

Аналогично (см. [4, стр. 138]) доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы 1 существует управление $v \in U$, реализующее цель управления на отрезке $[0, t_1]$. Тогда существует оптимальное управление u, переводящее систему из состояния $x_0(\omega)$ в состояние $x_u(t_1^*, \omega)$ с $m_u(t_1^*) \in G(t_1^*)$ за минимально возможное время $t_1^* \leqslant t_1$.*

11.5. Условия полной управляемости

В настоящем параграфе изучаются условия, при которых возможен перевод системы (11.1) из начального состояния $x_0(\omega)$ в состояние с произвольно заданным средним значением фазового вектора m_1

Рассмотрим тот частный случай, когда матрицы A и B от времени t не зависят, $f \equiv 0$, $V = R^n$, а σ-алгебра $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{G}$, где $\mathfrak{B}$ — борелевская σ-алгебра в R^1, $\mathfrak{G}$ — полная по вероятности $\mathbf{P}$ σ-подалгебра $\mathfrak{F}$.

Назовем в этом случае систему (11.1) вполне управляемой из состояния $x_0(\omega)$, если $K(x_0(\omega), 0, t) = R^n$ при любом $t > 0$.

Для того чтобы сформулировать условия полной управляемости, введем $(n \times nk)$-матрицы $K_k, k = 1, 2, \dots,$ следующего вида:

$$K_1 = B,\ K_k = \left[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{k-1}B\right],\ k > 1.$$

В детерминированной задаче (см. [4, стр. 91]) критерием полной управляемости системы (11.1) служит условие максимальности ранга матрицы $K_n : \operatorname{rank} K_n = n$. Обобщением этого результата на рассматриваемую здесь задачу является следующая

Теорема 3. *Пусть для любого* $t > 0$

$$\mathbf{M}\left(\|x_0\| + \|B\|\right)\exp\left(\|A\|\,t\right) < \infty \tag{11.10}$$

Тогда для полной управляемости системы (11.1) *из состояния* $x_0(\omega)$

а) *достаточно, чтобы при некотором* $k \geqslant 1$ *и некоторой σ-алгебре* $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}$

$$\mathbf{P}\left\{\operatorname{rank}\mathbf{M}\left\{K_k|\,\mathfrak{G}_1\right\} = n\right\} > 0; \tag{11.11}$$

б) *необходимо, чтобы при любом ненулевом векторе* $c \in R^n$

$$\mathbf{P}\left\{c'\mathbf{M}\left\{K_k|\,\mathfrak{G}_2\right\} \neq 0\right\} > 0, \tag{11.12}$$

где $\mathfrak{G}_2 = \sigma(\mathfrak{G}, \sigma(A))$ — *минимальная σ-алгебра, содержащая* $\mathfrak{G}$, *относительно которой измеримы все компоненты матрицы* A.

Здесь операция взятия условного математического ожидания матрицы понимается как покомпонентная.

Доказательство. Достаточность. Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5. *В условиях теоремы матричный случайный процесс* $\mathbf{M}\{\exp(At)|\,\mathfrak{G}_1\}$ *на любом отрезке времени* $[0,t_0]$ *обладает модификацией* $\xi(t,\omega)$, *у которой с вероятностью 1 траектории любое число раз дифференцируемы на этом отрезке (в граничных точках производные понимаются как односторонние). При этом*

$$\left.\frac{d^p}{dt^p}\xi\right|_{t=0} = \mathbf{M}\{A^pB|\,\mathfrak{G}_1\},\ p=0,1,2,\ldots \tag{11.13}$$

Доказательство леммы. Используя (11.10) и неравенство Йенсена, имеем для любого t с вероятностью 1

$$\mathbf{M}\{\exp(At)\,B|\,\mathfrak{G}_1\} = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{M}\left\{A^kB\right|\mathfrak{G}_1\}\frac{t^k}{k!}. \tag{11.14}$$

Рассмотрим матричный случайный процесс $\xi(t,\omega)$, определяемый правой частью равенства (11.14). Фиксируем $t_0>0$ и множество Ω_0 полной вероятности, такие, что при $\omega\in\Omega_0$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{M}\left\{A^kB\right|\mathfrak{G}_1\}\frac{t_0^k}{k!}$$

абсолютно сходится. При тех же ω ряд $\xi(t,\omega)$ сходится абсолютно и равномерно по t на всем отрезке $[0,t_0]$. Кроме того, из (11.10) следует, что при $\omega\in\Omega_1\subset\Omega_0$, $P(\Omega_1)=1$ на $[0,t_0]$ равномерно сходятся ряды, полученные дифференцированием по t любое число раз. Поэтому для $\omega\in\Omega_1$ траектории процесса ξ имеют производные любого порядка при $t\in[0,t_0]$, что и утверждалось. Формула (11.13) проверяется непосредственно. Лемма доказана.

Для доказательства достаточности условия (11.11) рассмотрим теперь множество векторов $Q_l\subset R^n$ вида

$$Q_l = \left\{m : m = \mathbf{M}\int_0^t \exp(A(t-s))\,Bu(s)\,ds,\ u\in U,\ |u(t,\omega)|\leqslant l\right\}$$

В соответствии с леммой 3 Q_l — выпуклый компакт. Ясно также, что Q_l центрально симметричен и содержит нулевой вектор. Допустим, что размерность Q_l меньше n. Тогда существует ненулевой вектор , ортогональный Q_l : $c'm=0\ \forall m\in Q_l$. В частности, для любого $\mathfrak{B}\times\mathfrak{G}_1$-измеримого управления u

$$0 = c'\mathbf{M}\int\limits_0^t \exp\left(A\left(t-s\right)\right)Bu\left(s\right)\,ds =$$
$$= c'\mathbf{M}\int\limits_0^t \mathbf{M}\left\{\exp\left(A\left(t-s\right)\right)Bu\left(s\right)\middle|\,\mathfrak{G}_1\right\}\,ds = \mathbf{M}\int\limits_0^t c'\xi\left(s\right)u\left(s\right)\,ds.$$

Отсюда следует, что mes $\times\mathbf{P}$-почти всюду $c'\xi\left(s,\omega\right) = 0$ или в силу непрерывности процесса ξ с вероятностью 1 $c'\xi\left(s,\omega\right) = 0$ при всех $s \in [0,t]$. Дифференцируя это равенство в точке $s = 0$, имеем, учитывая (11.13), $M\left\{c'A^pB\middle|\,\mathfrak{G}_1\right\} = 0$, $p = 0,1,\ldots,k$.

Но это противоречит (11.11), следовательно, размерность Q_l равна n. Переходя далее к пределу при $l \to \infty$, получаем

$$K\left(x_0\left(\omega\right),0,t\right) = \lim_{l\to\infty}\left\{Q_l + \mathbf{M}\exp\left(At\right)x_0\right\} = R^n,$$

что и требовалось установить.

Необходимость. По теореме Гамильтона–Кэли матрица $A\left(\omega\right)$ с вероятностью 1 удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$A^n = \lambda_1A^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1}A + \lambda_n. \tag{11.15}$$

Здесь $\lambda_i = \lambda_i\left(\omega\right)$ — некоторые $\sigma\left(A\right)$-измеримые случайные величины.

Предположим, что при некотором $c \neq 0$ условие (11.12) неверно, т.е. с вероятностью 1 $c'\mathbf{M}\left\{K_n\middle|\,\mathfrak{G}_2\right\} = 0$. Тогда, используя (11.15), получаем

$$c'\mathbf{M}\left\{A^nB\middle|\,\mathfrak{G}_2\right\} = \lambda_1c'\mathbf{M}\left\{A^{n-1}B\middle|\,\mathfrak{G}_2\right\} + \ldots + \lambda_nc'\mathbf{M}\left\{B\middle|\,\mathfrak{G}_2\right\} = 0,$$

и далее по индукции при всех $k = 1,2,\ldots$ имеем $c'\mathbf{M}\left\{A^{n+k}B\middle|\,\mathfrak{G}_2\right\} = 0$ с вероятностью 1. Отсюда, учитывая (11.14), имеем

$$c'\mathbf{M}\left\{\exp\left(At\right)B|\right\} = 0. \tag{11.16}$$

Покажем, что в этих условиях из начального состояния $x_0\left(\omega\right)$ нельзя перейти в состояние с произвольно заданным вектором среднего значения $m_u\left(t_1\right)$, т.е. система не является вполне управляемой. Действительно, из (11.16) получаем

$$c'm_u\left(t_1\right) = \mathbf{M}\int\limits_0^{t_1} c'\exp\left(A\left(t_1-s\right)\right)Bu\left(s\right)\,ds + c'\mathbf{M}\exp\left(At_1\right)x_0 =$$
$$= \mathbf{M}\int\limits_0^{t_1} c'\mathbf{M}\left\{\exp\left(A\left(t_1-s\right)\right)B\middle|\,\mathfrak{G}_2\right\}u\left(s\right)\,ds + c'\mathbf{M}\exp\left(At_1\right)x_0 =$$
$$= c'\mathbf{M}\exp\left(At_1\right)x_0.$$

Поскольку $m_u(t_1)$ может быть любым вектором, то это возможно лишь при $c = 0$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия (11.12). Теорема доказана.

11.6. Пример

Рассмотрим управляемую систему

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2,\ x_1(0) = x_{10};\ \frac{d}{dt}x_2 = \xi u,\ x_2(0) = x_{20},\ t \geqslant 0, \tag{11.17}$$

где ξ — случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, $\mathbf{M}|\xi| < \infty$, $x_0 = \mathrm{col}(x_{10}, x_{20})$ — неслучайный начальный вектор. Предположим, что управляющая функция $u(t,\omega)$ принимает свои значения в множестве $V \subset R^1$ и измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{B} \times \mathfrak{G}$, где $\mathfrak{G}$ — σ-подалгебра $\mathfrak{F}$.

Получим критерий полной управляемости системы (11.17) из состояния x_0, считая $V = R^1$. Используем для этого теорему 3. Имеем здесь $\mathfrak{G}_2 = \sigma(\mathfrak{G}, \sigma(A)) = \mathfrak{G}$. Поэтому, согласно п. б) теоремы 3, для полной управляемости системы необходимо, чтобы $\mathbf{P}\left\{\tilde{\xi} c \neq 0\right\} > 0$ при любом векторе $c \neq 0$, где $\tilde{\xi} = \mathbf{M}\{\xi|\,\mathfrak{G}\}$. Очевидно, что это эквивалентно условию

$$\mathbf{P}\left\{\tilde{\xi} \neq 0\right\} > 0. \tag{11.18}$$

Покажем, что данное условие также и достаточно для полной управляемости системы. Возьмем для этого в (11.11) $k = 2$, $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}$. Тогда

$$\mathbf{M}\{K_2|\,\mathfrak{G}\} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\xi} \\ \tilde{\xi} & 0 \end{bmatrix}$$

и при выполнении условия (11.18) ранг этой матрицы максимален с положительной вероятностью.

Отметим важный частный случай программного управления $\mathfrak{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, в котором (11.18) принимает следующую простую форму: $\mathbf{M}\xi \neq 0$.

Применим теперь результаты теорем 1,2 для нахождения оптимального управления в задаче о скорейшем переводе системы (11.17) из начального состояния x_0 в состояние с нулевым средним значением фазового вектора $m_u(t_1)$.

Пусть $V = [-1, 1]$. Решая сопряженную задачу и выписывая соотношение принципа максимума (11.6), получаем, что всякое экстремальное управление u удовлетворяет почти всюду равенству

$$\tilde{\xi}(\omega)\, u(t,\omega) = \tilde{\xi}(\omega) \operatorname{sign}\left\{\tilde{\xi}(\omega)\left(c_1(t_1 - t) + c_2\right)\right\},$$

где $c = \operatorname{col}(c_1, c_2)$ — ненулевой неслучайный вектор.

Это означает, что движение в плоскости математических ожиданий (m_1, m_2) происходит по параболам следующих двух семейств: $2bm_1 = \pm m_2^2 + \text{const}$, где $b = \mathbf{M}\left|\tilde{\xi}\right|$. Из любого начального состояния $m_0 = \mathbf{M}x_0$ можно, двигаясь по параболам этих семейств, попасть в начало координат за конечное время. Поэтому по теореме 2 оптимальное управление существует, а по теореме 1 оно является экстремальным. Ясно, что это управление соответствует движению с минимальным числом переключений с одной параболы на другую. В итоге получаем следующую картину оптимальных движений:

$$u(t,\omega) = \begin{cases} \operatorname{sign}\tilde{\xi}(\omega), & m_u(t) \in O_2, \\ -\operatorname{sign}\tilde{\xi}(\omega), & m_u(t) \in O_2, \end{cases}$$

где множество O_2 лежит “ниже” линии переключений $2bm_1 + m_2^2 \operatorname{sign} m_2 = 0$ и содержит ее нижнюю ветвь, O_1— дополнение множества O_2.

Заметим, что при $\mathbf{P}\left\{\tilde{\xi} = 0\right\} > 0$ оптимальное управление не является единственным, однако все оптимальные управления порождают одно и то же движение в плоскости (m_1, m_2).

Интересно сравнить между собой оптимальные времена движения при различных наблюдаемых данных, характеризуемых σ-алгеброй $\mathfrak{G}$. Нетрудно, например, показать, что $x_0 = \operatorname{col}(x_{10}, 0)$

$$t_{\min}^2 = 8\frac{|x_{10}|}{\mathbf{M}\left|\tilde{\xi}\right|}. \tag{11.19}$$

Так как при $\mathfrak{G}^1 \subset \mathfrak{G}^2$

$$|\mathbf{M}\xi| \leqslant \mathbf{M}\left|\mathbf{M}\left\{\xi \,|\, \mathfrak{G}^1\right\}\right| \leqslant \mathbf{M}\left|\mathbf{M}\left\{\xi \,|\, \mathfrak{G}^2\right\}\right| \leqslant \mathbf{M}|\xi|,$$

то из (11.19) непосредственно видно, что оптимальное время убывает при возрастании объема наблюдаемых данных.

Литература

[1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 396 с.

[2] Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969. – 408 с.

[3] Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

[4] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. – 1972. – 576 с.

[5] Kushner H. J. – SIAM J. Control and Optimiz., 1972, vol. 10, N 3, p.13-26.

[6] Bismut J.-M. – J. Math. Anal. and Appl., 1973, vol. 44, N 2, p. 384-404.

[7] Аркин В.И., Саксонов М.Т. Необходимые условия оптимальности в задачах управления стохастическими дифференциальными уравнениями. – Докл. АН СССР, 1979, т. 244, №1, с. 11-15.

[8] Смирнов И.П. Исследование вариационными методами задач оптимизации стохастических интегральных уравнений для процессов с разрывами: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Горький, 1981. – 19 с.

[9] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 357 с.

Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию 2 ноября 1983 г.

Глава 12.

Об управлении вероятностью входа системы в заданную область

УДК 531.36 + 62 - 50

12.1. Введение

В работе рассматривается задача оптимального управления процессом, являющимся решением стохастического дифференциального уравнения

$$d\eta = (A(t)\,\eta + B(t)\,u + f(t))\;dt + \sum_{j=1}^{k} \sigma_j(t)\;dw_j + \int \alpha(t,z)\,\tilde{\nu}(dt,dz)$$

$$\eta(0) = \eta_0,\; 0 \leqslant t \leqslant 1,\; f_0(u) = \mathbf{P}\{\eta_u(1) \in Q\} \to \max, \tag{12.1}$$

где η — фазовый вектор; u — управляющий вектор; Q — заданное неслучайное множество в фазовом пространстве.

Особенностью данной задачи в рамках теории управляемых стохастических систем (см., например, [1, 2, 3]) является разрывной характер функционала качества управления f_0. Полученные в работе результаты примыкают к предыдущим исследованиям автора по теории стохастического принципа максимума [4, 5, 6].

Постановка задачи приводится в п. 12.2. В п. 12.3 собраны некоторые вспомогательные результаты. Теоремы существования оптимального управления устанавливаются в п. 12.4. В п. 12.5 выводятся необходи-

[1]И.П. Смирнов. Об управлении вероятностью входа системы в заданную область, *Дифференциальные уравнения*, т. 26, №10, 1990, стр. 1753 - 1758.

мые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Примеры применения полученных результатов приводятся в п. 12.6

12.2. Постановка задачи

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in [0,1]\}$ — поток σ-подалгебр $\mathfrak{F}$; $w(t)\,,\ \nu(t,C)$ — k-мерный винеровский процесс и не зависящая от него пуассоновская случайная мера с параметром $\Pi(C)\,t$ (Π — σ-конечная мера в R^l) соответственно, стандартно согласованные с потоком $\{\mathfrak{F}_t\}$[7]; $\tilde{\nu}(t,C) \equiv \nu(t,C) - \Pi(C)\,t$; $|\cdot|$ — евклидова норма; mes — мера Лебега в R^n.

Решение системы дифференциальных уравнений (12.1) понимается в сильном смысле [7]. Параметры этой системы $A(t)\,,\ B(t)$ — детерминированные матрицы порядка $n \times n$, $n \times m$ соответственно с измеримыми суммируемыми по мере Лебега на отрезке $[0,1]$ компонентами; компоненты матрицы $B(t)$ квадратично суммируемы. Вектор-функции $f(t,\omega)\,,$ $\sigma_j(t,\omega)\,,\ \alpha(t,\omega,z)$ прогрессивно измеримы по (t,ω) относительно потока $\{\mathfrak{F}_t\}$ и удовлетворяют ограничению

$$\mathbf{M}\int\limits_0^1 \left\{ |f(t,\omega)|^2 + \sum_{j=1}^{k} |\sigma_j(t,\omega)|^2 + \int\limits_{R^l} |\alpha(t,\omega,z)|^2\, \Pi(dz) \right\} dt < \infty,$$

где M — математическое ожидание по вероятности $\mathbf{P}$. Начальный вектор η_0 в (12.1) $\mathfrak{F}_0$-измерим и интегрируем с квадратом $\mathbf{M}\,|\eta_0|^2 < \infty$; Q — борелевское множество в R^n.

В класс допустимых управлений $\mathfrak{U}$ включим всякую борелевскую вектор-функцию $u(t)\,,\ t \in [0,1]\,,$ принимающую свои значения в заданном множестве $V \subset R^m$. Любому допустимому управлению $u \in L_2^m[0,1]$ отвечает конечное значенние целевого функционала $f_0(u) \in [0,1]$. Задача оптимального управления системой (12.1) ставится как задача отыскания допустимого управления u^0, доставляющего максимальное значение функционалу $f_0:\ f_0(u^0) = \max\limits_{u \in \mathfrak{U}} f_0(u)\,.$

12.3. Вспомогательные результаты

Рассмотрим связанную с (12.1) вспомогательную детерминированную управляемую систему

$$\frac{d}{dt}x = A(t)\,x + B(t)\,u,\ x(0) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{12.2}$$

По аналогии с [3] введем множество достижимости для управляемой системы (12.2) $K = \{x \in R^n : x = x_u(1),\ u \in \mathfrak{U}\}$, где x_u — решение системы (12.2), отвечающее управлению $u \in \mathfrak{U}$.

Лемма 1[3]. *Пусть множество значений управляющего вектора V компактно в R^m. Тогда множество достижимости K — выпуклый компакт.*

Лемма 2. *Решение η_u системы (12.1), отвечающее допустимому управлению $u \in L_2^m[0,1]$, может быть записано в виде следующей интегральной формулы Коши:*

$$\eta_u(t) = \Phi(t)\left\{\eta_0 + \int\limits_0^t \Phi^{-1}(Bu + f)\ d\tau + \sum_{j=1}^{k}\int\limits_0^t \Phi^{-1}\sigma_j\,dw_j + \right. \tag{12.3}$$

$$\left. + \int\limits_0^t\int\limits_{R^l} \Phi^{-1}\alpha\,\tilde{\nu}(d\tau, dz)\right\},$$

где Φ — фундаментальная матрица решений линейной системы

$$\frac{d}{dt}\Phi = A(t)\,\Phi,\ \Phi(0) = 1,$$

Φ^{-1}— обратная ей матрица.

Доказательство леммы легко вытекает из общих результатов работы [7] по существованию и единственности решений стохастических дифференциальных уравнений.

Учитывая (12.3), представим вектор $\eta_u(1)$ в виде

$$\eta_u(1) = x_u + \zeta, \tag{12.4}$$

где $x_u \equiv x_u(1) \in K$ — вектор решения управляемой системы (12.2),

$$x_u(1) = \Phi(1)\int\limits_0^1 \Phi^{-1}(\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\ d\tau,$$

$$\zeta = \Phi(1)\left\{\eta_0 + \int\limits_0^1 \Phi^{-1}f\,d\tau + \sum_{j=1}^{k}\int\limits_0^1 \Phi^{-1}\sigma_j\,dw_j + \int\limits_0^1\int \Phi^{-1}\alpha\,\tilde{\nu}(d\tau, dz)\right\}.$$

Используя (12.4), получим интегральное представление для функционала задачи (12.1):

$$f_0(u) = \mathbf{P}(\eta_u(1) \in Q) = \mathbf{P}(x_u + \zeta \in Q) = \\ = \mathbf{P}(\zeta \in Q - x_u) = \int\limits_{Q-x_u} dF_\zeta(y) \equiv G(x_u). \tag{12.5}$$

Здесь $F_\zeta(y) = \mathbf{P}(\cap_{i=1}^n (\zeta_i < y_i))$— функция распределения случайного вектора ζ; $Q - x_u = \{y: \ y = q - x_u, \ q \in Q\}$. Интеграл в (12.5) понимается в смысле Лебега-Стилтьеса [8].

Рассмотрим в связи с (12.5) функцию

$$G(x) = \int\limits_{Q-x} dF(y), \tag{12.6}$$

где F — функция распределения в R^n, Q — борелевское множество. В общем случае G не является даже непрерывной функцией [8]. Она непрерывна, например, когда F абсолютно непрерывна по мере Лебега. В доказываемой ниже лемме 3 устанавливаются условия, при которых функция оказывается дифференцируемой по направлениям, и выводится формула для производной данной функции по произвольному направлению.

Для того чтобы сформулировать эту лемму, введем ряд обозначений. Пусть Q — выпуклое ограниченное множество в R^n, $n > 1$, S — единичная сфера в R^n. Для каждого $s \in S$ пусть π_s — ортогональная проекция Q на гиперплоскость, проходящую перпендикулярно вектору s через начало координат. Произвольная точка $q \in Q$ однозначно представляется в виде $q = z + \xi s$, где $z \in \pi_s$, $\xi \in \pi_{s,z} \equiv [\xi_1(s,z), \xi_2(s,z)]$; $\gamma_{s,z} \equiv z + \xi_1 s$, $\Gamma_{s,z} \equiv z + \xi_1 s$ — граничные точки сечения множества Q прямой, проходящей через точку q в направлении вектора s (указанную и более общие конструкции подобного рода см. в [9]).

Лемма 3. *Пусть $G(x)$ — функция, определяемая формулой (12.6), где Q — выпуклое ограниченное множество в R^n, $n > 1$, F — функция распределения в R^n, имеющая непрерывную плотность f по мере Лебега. Тогда в любой точке $x^* \in R^n$ функция дифференцируема по любому направлению $s \in S$ и*

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \int\limits_{\pi_s} \left(f\left(\gamma_{s,z} - x^*\right) - f\left(\Gamma_{s,z} - x^*\right)\right) dz. \tag{12.7}$$

Доказательство. Производя замены переменных интегрирования, имеем по теореме Фубини

$$G(x^*) = \int\limits_{Q-x^*} f(x)\, dx = \int\limits_{Q} f(x-x^*)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\pi_s} dz \int\limits_{\pi_{s,z}} f(x-x^*)\, d\xi = \int\limits_{\pi_s} dz \int\limits_{\xi_1(s,z)}^{\xi_2(s,z)} f(z-x^*+\xi s)\, d\xi.$$

Аналогично

$$G(x^*+ts) = \int\limits_{\pi_s} dz \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(z-x^*-ts+\xi s)\, d\xi = \int\limits_{\pi_s} dz \int\limits_{\xi_1-t}^{\xi_2-t} f(z-x^*+\xi s)\, d\xi.$$

Поэтому по теореме о среднем для интегралов Римана

$$\frac{1}{t}\left(G(x^*+ts) - G(x^*)\right) = \frac{1}{t}\int\limits_{\pi_s} dz \left(\int\limits_{\xi_1-t}^{\xi_1} f\, d\xi - \int\limits_{\xi_2-t}^{\xi_2} f d\xi\right) =$$

$$= \int\limits_{\pi_s} dz \left(f\left(z+\tilde{\xi}_t s - x^*\right) - f\left(z+\breve{\xi}_t s - x^*\right)\right),$$

где “средние точки” $\tilde{\xi}_t(t,s) \to \xi_1(s,z)$, $\breve{\xi}_t(t,s) \to \xi_2(s,z)$ при $t \to +0$ для любого z.

Переходя в этом равенстве к пределу при $t \to +0$ и учитывая непрерывность функции f, получим (12.7). Лемма доказана.

12.4. Теоремы существования оптимального управления

Теорема 1. *Пусть множество допустимых управлений $\mathfrak{U}$. слабо компактно в $L_2^m[0,1]$ и для любого x из множества достижимости K*

$$\mathbf{P}\{\zeta \in \partial Q - x\} = 0, \tag{12.8}$$

где ∂Q — граница множества Q; ζ — случайный вектор, определяемый (12.4). Тогда задача оптимального управления (12.1) имеет решение.

Доказательство. Пусть $\{u_l\}$ — произвольная максимизирующая функционал f_0 последовательность допустимых управлений: $f_0(u_l) \underset{l\to\infty}{\to} \sup\limits_{\mathfrak{U}} f_0(u)$. Без ограничения общности можно считать, что $\{u_l\}$ слабо сходится к некоторому $u^0 \in \mathfrak{U}$. Но тогда $x_{u_l}(1) \to x_{u^0}(1)$, а следовательно, $\eta_l \to \eta_0$ по вероятности и $\eta_l \to \eta^0$ слабо по распределению [8], где $\eta_l \equiv \eta_{u_l}(1)$, $\eta^0 \equiv \eta_{u^0}(1)$. Из последнего замечания вытекает [8], что для всякого множества Q', обладающего свойством $\mathbf{P}\{\eta^0 \in \partial Q'\} = 0$,

$$\int\limits_{Q'} dF_{\eta_l} \underset{l\to\infty}{\to} \int\limits_{Q'} dF_{\eta^0}.$$

Из (12.8) тогда имеем

$$f_0(u_l) = \int\limits_{Q} dF_{\eta_l} \underset{l\to\infty}{\to} \int\limits_{Q} dF_{\eta^0} = f_0\left(u^0\right) = \sup_{\mathfrak{U}} f_0(u),$$

что и требовалось установить. Теорема доказана.

Условия теоремы относительно класса допустимых управлений выполнено, например, в случае, когда V — выпуклый компакт. Если случайный вектор ζ непрерывен, т.е. распределение F_ζ абсолютно непрерывно по мере Лебега, то для выполнения (12.8) при произвольном x достаточно потребовать, чтобы $\mathrm{mes}(\partial\Omega) = 0$.

Впрочем, в случае непрерывного вектора ζ функционал $f_0(u) = G(x_u)$ представляет собой непрерывную функцию переменного x_u на множестве достижимости K. Поэтому для существования оптимального управления здесь достаточно потребовать компактности множества K. Последнее же обеспечивается условиями леммы 1.

Теорема 2. *Пусть случайный вектор ζ непрерывен, а множество достижимости управляемой системы (12.2) K компактно. Тогда задача оптимального управления (12.1) имеет решение.*

12.5. Необходимые условия оптимальности

В этом пункте будут выписаны условия, которым с необходимостью удовлетворяет оптимальное управление $u^0 \in L_2^m[0,1]$ в том случае, когда множество достижимости K — выпуклый компакт.

Логически возможны следующие два варианта расположения вектора $x^0 \equiv x_{u^0}(1)$.

1) $x^0 \in \partial K$. Данный вариант означает, что u^0 — экстремальное на отрезке $t \in [0,1]$ управление для системы (12.2). Согласно [3] это

равносильно выполнению условия принципа максимума Потрягина для управления u^0. Предполагая дополнительно дифференцируемость функции G, определяемой (12.5), по направлению s из конуса $\mathfrak{L}(x^0)$ внутренних направлений выпуклого компакта K в граничной его точке x^0, получаем для соответствующей производной условие $\partial G/\partial s \leqslant 0$.

2) x^0 — внутренняя точка K. В этом случае из существования производных функции G в точке x^0 по взаимно противоположным направлениям s и $-s$ следует: $\partial G/\partial s = 0$.

Учитывая результат леммы 3, сформулируем сказанное выше в виде теоремы.

Теорема 3. *Пусть K — выпуклый компакт, Q — выпуклое ограниченное множество, случайный вектор ζ имеет непрерывную плотность $f_\zeta(x)$ распределения по мере Лебега. Если u^0 — оптимальное управление, то либо существует нетривиальное решение системы $\frac{d}{dt}\Theta = -\Theta A(t)$ (вектор-строка) такое, что для почти всех $t \in [0,1]$*

$$\Theta(t)\, B(t)\, u^0(t) = \max_{u \in V} \Theta(t)\, B(t)\, u,$$

при этом $x^0 \equiv x_{u^0}(1) \in \partial K$ и для любого $s \in \mathfrak{L}(x^0)$

$$\int\limits_{\pi_s} f_\zeta\left(\gamma_{s,z} - x^0\right) dz \leqslant \int\limits_{\pi_s} f_\zeta\left(\Gamma_{s,z} - x^0\right) dz, \tag{12.9}$$

либо при каждом $s \in S$

$$\int\limits_{\pi_s} f_\zeta\left(\gamma_{s,z} - x^0\right) dz = \int\limits_{\pi_s} f_\zeta\left(\Gamma_{s,z} - x^0\right) dz. \tag{12.10}$$

Замечание. Теорема сформулирована в предположении, что размерность фазового пространства системы (12.1) $n > 1$. При $n = 1$ в ее формулировке следует заменить соответствующие интегралы в (12.9) и (12.10) на значения плотности $f_\zeta(\gamma_s - x^0), f_\zeta(\Gamma_s - x^0)$, где $s = \pm 1$, $Q = (\gamma_1, \Gamma_1) = \left(\Gamma_{-1}, \gamma_{-1}\right)$.

12.6. Примеры

Приведем ряд примеров, иллюстрирующих полученные в работе результаты. Пример 1 показывает, что в теореме 1 от условия (12.8) в общем случае отказаться нельзя. В примерах 2,3 на основе теоремы 3 определяются подозрительные на оптимальность управления.

Пример 1.

$$
\begin{gathered}
d\eta = u\,dt,\ \eta\left(0\right) = \eta_0,\\
V = \left[-1, 1\right],\ Q = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right),\\
F_{\eta_0}\left(x\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\left(x + \frac{1}{2}\right), & x \leqslant -\frac{1}{2},\\ 1, & x > \frac{1}{2}. \end{cases}
\end{gathered}
$$

Имеем здесь

$$
\begin{gathered}
\eta\left(1\right) = \eta_0 + \int\limits_0^1 u\,dt \equiv \zeta + x_u,\\
\zeta \equiv \eta_0,\ x_u \in K = \left[0, 1\right],\ \partial Q = \left\{-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\},\\
f_0\left(u\right) = \mathbf{P}\left\{\eta\left(1\right) \in Q\right\} = F_{\eta_0}\left(\tfrac{1}{2} - x_u\right) - F_{\eta_0}\left(-\tfrac{1}{2} - x_u + 0\right) \equiv G\left(x_u\right).
\end{gathered}
$$

Легко видеть, что в данной задаче выполнены все условия теоремы 1, за исключением условия (12.8): для $x_1 = 0 \in K$ имеем $\mathbf{P}\left\{\zeta \in \partial Q - x_1\right\} = \mathbf{P}\left\{\eta_0 = -\frac{1}{2}\right\} \neq 0$. При этом

$$
G\left(x\right) < \sup_{x \in K} G\left(x\right) = \frac{1}{2} \forall x,
$$

так что оптимального управления не существует.

Пример 2. $d\eta = u\,dt$, $\eta\left(0\right) = \eta_0$, $V = \left[-1, 1\right]$, $Q = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Пусть случайная величина $\zeta \equiv \eta_0$ распределена в R^1 с непрерывной плотностью $f\left(x\right)$. Тогда оптимальное управление существует по теореме 1 (а также и по теореме 2). По теореме 3 подозрительными на оптимальность являются следующие управления:

а) $u_1^0 \equiv 1$, $x^0 = 1$, $f\left(\gamma_{-1} - x^0\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) \leqslant f\left(-\frac{3}{2}\right) = f\left(\Gamma_{-1} - x^0\right)$;

б) $u_2^0 \equiv -1$, $x^0 = -1$, $f\left(\gamma_1 - x^0\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\Gamma_1 - x^0\right)$;

в) u_3^0, $x^0 \in \left(1, -1\right)$, $f\left(x^0 - \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2} - x^0\right)$; const

Пусть $f\left(x\right) \equiv \exp\left(-\left(x - \alpha\right)^2/2\right)/\sqrt{2\pi}$. Тогда, как легко проверить, при $\alpha \leqslant -1$ оптимальным является управление u_1^0, при $\alpha \geqslant 1$ — управление u_2^0, при $\left|\alpha\right| < 1$ — любое управление, для которого $\left(x^0 + \frac{1}{2} + \alpha\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - x^0 - \alpha\right)^2$, т.е. $x^0 = -\alpha$. Последнее выполняется, например, для $u_3^0 \equiv -\alpha$.

Пример 3.

$$\begin{gathered} d\eta_1 = \eta_2\, dt + \sigma_1\, dw_1,\ \eta_1(0) = 0, \\ d\eta_2 = u\, dt + \sigma_2\, dw_2,\ \eta_2(0) = 0, \\ V = [0,1]\,,\ Q = \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}. \end{gathered}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\zeta_1 = \sigma_1 w_1(1) + \sigma_2 \int\limits_0^1 (1-t)\ dw_2(t)\,, \\ &\zeta_2 = \sigma_2 w_2(1)\,. \end{aligned}$$

Полагая для упрощения выкладок $\sigma_1 = \sigma_2^2 = 2/3$, получаем $f_\zeta(x_1, x_2) = \mathrm{const} \cdot \exp\left(x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2\right)$. По теореме 2 оптимальное управление существует. Выписывая для него при произвольном $s = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ необходимое условие (12.10) имеем, учитывая, что в силу симметрии задачи $x_1^0 = x_2^0$,

$$\begin{gathered} \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{sh}\left(x_1^0 \varphi(z)\right) \exp\left(-\psi(z)\right)\ dz = 0, \\ \varphi(z) \equiv z\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right) + \sqrt{1-z^2}\left(\cos\alpha - \sin\alpha\right), \\ \psi(z) \equiv z\sqrt{1-z^2}\cos 2\alpha + \left(z^2 - \tfrac{1}{2}\right)\sin 2\alpha. \end{gathered}$$

В частности, при $\alpha = -\pi/4$ получаем

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{sh}\left(x_1^0 \sqrt{2\left(1-z^2\right)}\right) \exp\left(z^2\right)\ dz = 0,$$

откуда $x_1^0 = x_2^0 = 0$.

Следовательно, подозрительными на оптимальность в данной задаче являются наряду с экстремальными управлениями ($|u(t)| \equiv 1,\ u(t)$ имеет на отрезке $[0,1]$ не более одной точки переключения) любые управления (например, тождественно равное нулю), переводящие вспомогательную систему (12.2) в начало координат.

Литература

[1] Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М., 1978.

[2] Юдин Д.Б. Задачи и методы стохастического программирования. М., 1979.

[3] Ли Э., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М., 1972.

[4] Смирнов И.П. Исследование вариационными методами задач оптимизации стохастических интегральных уравнгений для процессов с разрывами: Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. Горький, 1981.

[5] Смирнов И.П. // Дифференц. уравнения, 1982. Т. 18, №4, С. 607–614 (Глава 7 настоящего сборника)

[6] Смирнов И.П. // Дифференц. уравнения, 1986. Т. 22, №2, С. 247–254 (Глава 11 настоящего сборника)

[7] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, 1968.

[8] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М., 1977.

[9] Владимиров В.С. // Тр. Мат. ин-та. 1961. Т.61.

Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Поступило в редакцию 20 апреля 1988 г.

Глава 13.

Необходимые условия оптимальности в задаче о входе управляемого случайного процесса в заданную область

УДК 517.977.55

13.1. Введение

Рассматривается задача оптимального управления решением системы стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\begin{aligned} d\eta &= \left(A\left(t\right)\eta + B\left(t,u\right)\right)\,dt + \left(D\left(t\right)\eta + g\left(t\right)\right)\,dw, \\ \eta\left(0\right) &= \eta_0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ \varphi_0\left(u\right) = \mathbf{P}\left\{\eta_u\left(1\right) \in Q\right\} \to \max, \end{aligned} \tag{13.1}$$

где η — фазовый вектор; u — управляющий вектор; η_0 — случайный начальный вектор; Q — случайное целевое множество в фазовом пространстве.

Цель работы — получить необходимые условия оптимальности процесса (13.1) в форме принуипа максимума Понтрягина. Отметим, что традиционные методы исследования [1] к данной задаче непосредственно

[1]И.П. Смирнов. Необходимые условия оптимальности в задаче о входе управляемого случайного процесса в заданную область, *Дифференциальные уравнения*, т. 26, №11, 1990, стр. 1943 – 1949.

неприменимы в связи с отсутствием обычных для них свойств гладкости функционала φ_0 по фазовым переменным. Здесь указанная трудность преодолевается построением эквивалентной (13.1) вспомогательной задачи с гладким функционалом качества. Работа продолжает исследования автора [2, 3].

В п. 13.2 производится постановка задачи. Вспомогательная задача оптимального управления с гладким функционалом строится в п. 13.3. Необходимые условия оптимальности выводятся в п. 13.4. Различным формам сопряженной задачи посвящен п. 13.5.

13.2. Постановка задачи

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $w(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ — стандартный винеровский процесс на нем, $\{\mathfrak{F}_t\}$ — порождаемый процессом поток σ-подалгебр $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{BF}$ — σ-алгебра прогрессивно измеримых относительно потока $\{\mathfrak{F}_t\}$ подмножеств произведения $[0,1] \times \Omega$. Всюду далее $\mathbf{M}$ — знак математического ожидания по мере $\mathbf{P}$, $|\cdot|$ — евклидова норма вектора или матрицы, штрихом обозначается операция транспонирования вектора или матрицы, $\mathfrak{B}^n$ — борелевская σ-алгебра в R^n, mes — мера Лебега на $\mathfrak{B}^n$.

Обозначим $H \equiv L_2^n(\Omega)$ гильбертово пространство случайных векторов с нормой $\|\varphi\| = \sqrt{\mathbf{M}\,|\varphi|^2}$. Введем следующие пространства $\mathfrak{BF}$-измеримых векторных случайных функций $\xi(t,\omega)$: L_p^n, N_p^n, $p \geqslant 1$ — банаховы пространства с нормами

$$\|\xi\|_p = \left(\mathbf{M}\int_0^1 |\xi(t)|^p\, dt\right)^{1/p},$$

$$\|\xi\|_{N_p} = \left(\mathbf{M}\left(\int_0^1 |\xi(t)|^2\, dt\right)^{p/2}\right)^{1/p},$$

соответственно; CH_p^n — нормированное пространство непрерывных по t с вероятностью 1 функций с нормой $|\xi|_p = \left(\mathbf{M}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |\xi(t)|^p\right)^{1/p}$.

Решение системы уравнений Ито (13.1) понимается в сильном смысле [4]. Задающие систему квадратные порядка $n\times n$ матрицы $A(t,\omega)$, $D(t,\omega)$ имеют ограниченные $\mathfrak{BF}$-измеримые компоненты; компоненты вектор-функции $g(t,\omega)$ $\mathfrak{BF}$-измеримы и с вероятностью 1 квадратично суммируемы по t. Компоненты вектор-функции $B(t,u)$ измеримы по совокупности переменных $t \in [0,1]$, $u \in R^n$ относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}^{m+1}$, непрерывны по u при любом фиксированном t и ограничены.

Начальный вектор $\eta_0 \in H$ не зависит от процесса $w(t)$ и имеет непрерывную ограниченную в R^n плотность $f_0(x)$ по мере Лебега. Случайное многозначное отображение $\omega \to Q(\omega) \subset R^n$ $\mathfrak{F}_1$-измеримо; его значения, а также полный образ $Q(\Omega)$ ограничены и выпуклы.

Класс допустимых управлений $\tilde{\mathcal{U}}$ включает в себя все борелевские функции $u(t)$ со значениями в заданном ограниченном множестве $U \subset R^m$. Любому допустимому управлению $u \in \tilde{\mathcal{U}}$ отвечает единственное непрерывное решение η_u системы (13.1), а соответствующее значение функционала $\varphi_0(u) = \mathbf{P}\{\eta_u(1) \in Q\} \in [0,1]$ [4]. Задача оптимального управления процессом (13.1) ставится как задача отыскания такого управления $u^0 \in \tilde{\mathcal{U}}$, для которого $\varphi_0(u^0) = \max\limits_{u \in \tilde{\mathcal{U}}} \varphi_0(u)$.

13.3. Вспомогательная задача

Используя формулу Коши [5] для решения линейной системы стохастических дифференциальных уравнений Ито, представим вектор решения системы (13.1) в момент времени $t = 1$ в виде

$$\eta_u(1) = \Psi\eta_0 + x_u. \tag{13.2}$$

Здесь $\Psi \equiv \Psi(1,\omega)$; $\Psi(t,\omega)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы

$$d\Psi = A(t)\,\Psi\,dt + D(t)\,\Psi\,dw,\ \Psi(0) = I,$$

I — единичная матрица порядка $n \times n$. Заметим, что матрица $\Psi(t,\omega)$ невырождена при каждом t почти наверное; в условиях п. 13.2 функции $\Psi(t,\omega)$, $\Phi(t,\omega) \equiv \Psi^{-1}(t,\omega)$ принадлежат $\cap_{p \geqslant 2} CH_p^{n^2}$[2, 4, 5]. Случайный вектор $x_u \equiv x_u(1,\omega)$, где $x_u(t,\omega)$ — решение вспомогательной управляемой стохастической системы

$$dx = (A(t)\,x + B(t,u))\,dt + (D(t)\,x + g(t))\,dw,\ x(0) = 0. \tag{13.3}$$

Используя формулу (13.2) и учитывая невырожденность матрицы Ψ, выразим значение функционала через вектор x_u:

$$\begin{aligned} \varphi_0(u) &= \mathbf{P}\{\eta_u(1) \in Q\} = \mathbf{P}\{\Psi\eta_0 + x_u \in Q\} = \\ &= \mathbf{P}\{\eta_0 \in \Phi(Q - x_u)\} \equiv \mathbf{P}\{\eta_0 \in Q_u\}. \end{aligned} \tag{13.4}$$

Здесь $\Phi \equiv \Phi(1,\omega)$; $Q_u(\omega) = \{y : y = \Phi(\omega)(y_1 - x_u(\omega)),\ y_1 \in Q(\omega)\}$. Многозначное отображение $\omega \to Q_u(\omega)$ $\mathfrak{F}_1$-измеримо и потому не зависит от случайного вектора η_0. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\eta_0 \in Q_u\} = \mathbf{MP}\{\eta_0 \in Q_u | \mathfrak{F}_1\} = \mathbf{M} \int\limits_{Q_u(\omega)} f_0(x)\ dx.$$

Вводя функцию $G : \Omega \times R^n \to R^1$ вида

$$G(\omega, x) = \int\limits_{\Phi(\omega)(Q(\omega)-x)} f_0(y)\ dy = \alpha(\omega) \int\limits_{Q(\omega)-x} f_0(\Phi(\omega)\tau)\ d\tau, \tag{13.5}$$

где $\alpha(\omega) \equiv \det \Phi(\omega)$, получим из (13.4) следующее представление для функционала задачи (13.1):

$$\varphi_0(u) = g_0(x_u(1)) = \mathbf{M}G(\omega, x_u(1, \omega)). \tag{13.6}$$

В доказываемой ниже лемме 1 исследуются свойства определяемой посредством (13.5) функции $G(\omega, x)$ и порождаемого ею функционала (13.6). Введем предварительно ряд обозначений, заимствованных из [6]. Пусть Q — выпуклое ограниченное множество в R^n, S — единичная сфера в R^n с центром в начале координат. Для $s \in S$ обозначим π_s ортогональную проекцию множества Q на проходящую через начало координат гиперплоскость, перпендикулярную вектору s. Пусть, далее, $\pi_{s,z} \equiv [\xi_1(s,z), \xi_2(s,z)]$ — замыкание проекции на ось, выходящую из начала координат в направлении вектора s, сечения множества Q прямой, параллельной вектору s, проходящей через точку $z \in \pi_s$; $\gamma_{s,z} \equiv z + \xi_1 s$, $\Gamma_{s,z} \equiv z + \xi_2 s$ — граничные точки этого сечения.

Лемма 1. *Определяемая (13.5) функция $G(\omega, x)$ отображает множество $\Omega \times R^n$ в отрезок $[0, 1]$, измерима по совокупности переменных относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{B}$, при всех ω из множества полной вероятности в Ω непрерывно дифференцируема по x в R^n. Производная этой функции по направлению s имеет вид*

$$\frac{\partial G}{\partial s}(\omega, x) = \alpha(\omega) \int\limits_{\pi_s(\omega)} \left(f_0\left(\Phi(\omega)\left(\gamma_{s,z} - x\right)\right) - f_0\left(\Phi(\omega)\left(\Gamma_{s,z} - x\right)\right)\right) dz. \tag{13.7}$$

Порождаемый функцией функционал $\chi(\cdot) \to g_0(\chi(\cdot)) = \mathbf{M}G(\omega, \chi(\omega))$ дифференцируем по Фреше на H. Производная Фреше $Dg_0 \in H^*$ функционала в точке $\chi \in H$ определяется выражением

$$Dg_0(h) = \mathbf{M}\nabla G'(\omega, \chi(\omega))\, h(\omega),\ h \in H,$$

где ∇G — градиент функции $G(\omega, x)$ по переменной x.

Доказательство. Из условия нормировки для плотности распределения вероятностей f_0 имеем

$$0 \leqslant G(\omega, x) = \int\limits_{\Phi(\omega)(Q(\omega)-x)} f_0(\tau)\ d\tau \leqslant \int\limits_{R^n} f_0(\tau)\ d\tau = 1,$$

что доказывает первое утверждение леммы. Измеримость функции $G(\omega, x)$ вытекает из теоремы Фубини. Производная (13.7) вычисляется аналогично [3]. Из непрерывности и ограниченности функции $f_0(\tau)$ следует непрерывность градиента $\nabla G(\omega, x)$ по x в R^n. Наконец, используя ограниченность плотности f_0 и множества $Q(\Omega)$ в R^n, имеем из (13.7) оценку $|\nabla G(\omega, x)| \leqslant C\alpha(\omega)$ при каждом x почти наверное. Здесь C — постоянное число. Поскольку в условиях п. 13.2 $\mathbf{M}\alpha^2 < \infty$ [2, 4], то из этой оценки в силу известных теорем о дифференцировании нелинейных функционалов [7] следует последнее утверждение леммы. Лемма доказана.

Учитывая (13.6), можно теперь перейти от задачи (13.1) к эквивалентной ей вспомогательной задаче оптимального управления для процесса (13.3)

$$\begin{aligned} dx &= (A(t)x + B(t,u))\ dt + (D(t)x) + g(t)\ dw, \\ x(0) &= 0,\ \varphi_0(u) = g_0(x_u) = \mathbf{M}G(\omega, x_u(1,\omega)) \to \max \end{aligned} \tag{13.8}$$

с дифференцируемым по x_u в H функционалом g_0.

13.4. Необходимые условия оптимальности

Для получения необходимых условий оптимальности в задаче (13.8) в форме принципа максимума Понтрягина применим методику работы [2].

Введем на пространстве L_2^n операторы

$$\mathcal{L}(f) = \int\limits_0^t f(\tau, \omega)\ d\tau,\ \mathcal{I}(f) = \int\limits_0^t f(\tau, \omega)\ dw(\tau),$$

и оператор $\mathcal{R}$ на CH_2^n, связанный с решением стохастического интегрального уравнения

$$\xi(t) = \psi(t) + \int\limits_0^t A(\tau)\ \xi(\tau)\ d\tau + \int\limits_0^t D(\tau)\,\xi(\tau)\ dw(\tau)$$

соотношением $\xi(1) = \mathcal{R}(\psi)$.

Лемма 2. *Линейные операторы*

$$\begin{gathered} \mathcal{L} : L_2^n \to L_2^n, \\ \mathcal{I} : L_2^n \to L_2^n, \\ \mathcal{R} : CH_2^n \to H \end{gathered}$$

непрерывны. Оператор $\mathcal{R}$ допускает также продолжение по непрерывности до ограниченного линейного оператора $R : L_2^n \to H$.

Доказательство леммы легко выполняется с использованием известных свойств стохастического интеграла [1, 2, 4].

Пусть u^0 — оптимальное в задаче (13.8) управление, $x_{u^0}(t)$ — отвечающее ему оптимальное решение системы (13.3). Используя введенные операторы, запишем приращение решения $\Delta_u x(1) \equiv x_u(1) - x_{u^0}(1)$, где u — произвольное допустимое управление, в операторной форме

$$\begin{gathered} x_u(1) = R(\mathcal{L}(B(t, u(t))) + \mathcal{I}(g)), \ \Delta_u x(1) = R(\mathcal{L}(\Delta_u B(t))), \\ \Delta_u B(t) \equiv B(t, u(t)) - B(t, u^0(t)). \end{gathered}$$

Учитывая дифференцируемость функционала g_0 в точке $x^0 \equiv x_{u^0}(1) \in H$, получаем в окрестности этой точки

$$\begin{gathered} \Delta_u \varphi_0 \equiv \varphi_0(u) - \varphi_0(u^0) = g_0(x_u(1)) - g_0(x^0) = \\ = Dg_0(\Delta_u x(1)) + o(\Delta_u x(1)), \end{gathered}$$

где Dg_0 — производная Фреше функционала g_0 в точке x^0, $o(\varphi) / \|\varphi\| \to 0$ при $\|\varphi\| \to 0$.

Применяя теорему Рисса о представлении непрерывного линейного функционала на L_2^n, имеем

$$\begin{aligned} Dg_0(\Delta_u x(1)) &= Dg_0(R(\mathcal{L}(\Delta_u B))) = \mathfrak{L}^* R^* Dg_0(\Delta_u B) = \\ &= \mathbf{M} \int\limits_0^1 \Theta'(t) \Delta_u B(t)\, dt = \int\limits_0^1 \big(\mathcal{H}(t, u(t)) - \mathcal{H}\big(t, u^0(t)\big)\big)\, dt, \end{aligned}$$

где $\Theta = \mathfrak{L}^* R^* Dg_0 \in L_2^n$, $\mathcal{H}(t, u) \equiv \mathbf{M}\Theta'(t) B(t, u)$. В результате приращение функционала записывается в форме

$$\Delta_u \varphi_0 = \int\limits_0^1 \big(\mathcal{H}(t, u(t)) - \mathcal{H}\big(t, u^0(t)\big)\big)\, dt + o(\Delta_u x(1)). \qquad (13.9)$$

В следующей лемме формулируется некоторый абстрактный вариант принципа максимума Понтрягина.

Лемма 3. *Пусть* $(T, \mathfrak{T}, \mu)$ *— вероятностное пространство с неатомической мерой* μ *на* σ*-алгебре* $\mathfrak{T}$*;* $\mathcal{H}(\tau, u)$ *—* $\tau \in T$, $u \in U \subset R^n$*—* $\mathfrak{T} \times \mathfrak{B}^n$*-измеримая числовая функция. Обозначим через* $\tilde{\mathcal{U}}$ *множество всех* $\mathfrak{T}$*-измеримых функций* $u : T \to U$*, для которых* $\left|\int_T \mathcal{H}(\tau, u(\tau))\, d\mu\right| < \infty$*. Для заданного* $u^0 \in \tilde{\mathcal{U}}$ *пусть*

$$
\begin{gathered}
h(\tau, u) \equiv \mathcal{H}(\tau, u) - \mathcal{H}\left(\tau, u^0(\tau)\right), \\
\rho\left(u, u^0\right) \equiv \left\{\tau : u(\tau) \neq u^0(\tau)\right\}.
\end{gathered}
$$

Тогда из предположения, что при всех $u \in \tilde{\mathcal{U}}$

$$
\int_T h(\tau, u(\tau))\, d\mu + o(\rho) \leqslant 0, \tag{13.10}
$$

где $o(\rho)/\rho \to 0$ *при* $\rho \to 0$*, вытекает, что при любом* $u \in \tilde{\mathcal{U}}$

$$
\int_T h(\tau, u(\tau))\, d\mu \leqslant 0, \tag{13.11}
$$

а также μ*-п.в. на* T

$$
h(\tau, u(\tau)) \leqslant 0. \tag{13.12}
$$

Если прелположить дополнительно, что постоянные функции $u(\tau) \in \tilde{\mathcal{U}}$ *и функция* $\mathcal{H}(\tau, u)$ *непрерывна по* u *для* μ*-п.в.* τ*, то при* μ*-п.в.* $\tau \in T$

$$
\mathcal{H}\left(\tau, u^0(\tau)\right) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(\tau, u). \tag{13.13}
$$

Доказательство. Допустим существование функции $u^* \in \tilde{\mathcal{U}}$, для которой неравенство (13.11) неверно:

$$
\int_T h(\tau, u^*(\tau))\, d\mu \equiv \int_T h^*\, d\mu > 0.
$$

По теореме А.А. Ляпунова о векторных мерах [8] существует неатомическая σ-подалгебра $\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}$ такая, что для $A \in \mathfrak{T}_1$

$$
\int_A h^*\, d\mu = \mu(A) \int_T h^*\, d\mu.
$$

Положим при заданном $A \in \mathfrak{T}_1$

$$
\begin{cases}
v(\tau) = u^*(\tau), & \tau \in A, \\
v(\tau) = u^0(\tau), & \tau \in T \setminus A.
\end{cases}
$$

Тогда

$$\int_T h(\tau, v(\tau))\, d\mu = \int_A h^*\, d\mu = \mu(A) \int_T h^*\, d\mu.$$

Далее $\rho(v, u^0) = \mu\{\tau : v(\tau) \neq u^0(\tau)\} \leqslant \mu(A)$, и в силу (13.10)

$$\int_T h(\tau, v(\tau))\, d\mu + o(\rho) = \mu(A) \int_T h^*\, d\mu + o(\rho) =$$

$$= \left(\int_T h^*\, d\mu + \frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\rho}{\mu(A)} \right) \mu(A) \leqslant 0.$$

Но при достаточно малом значении $\mu(A)$ это неравенство, очевидно, не может быть выполнено. Полученное противоречие доказывает (13.11). Покажем, что из (13.11) следует (13.12). Пусть

$$\mu(\tau : h(\tau, w(\tau)) > 0) \equiv \mu(E) > 0$$

для некоторого $w \in \tilde{\mathcal{U}}$. Положим

$$\begin{cases} u(\tau) = w(\tau), & \tau \in E, \\ u(\tau) = u^0(\tau), & \tau \in T \setminus E. \end{cases}$$

Тогда $u \in \tilde{\mathcal{U}}$ и

$$\int_T h(\tau, u(\tau))\, d\mu = \int_E h(\tau, w(\tau))\, d\mu > 0,$$

что противоречит (13.11). Следовательно, для любого $w \in \tilde{\mathcal{U}}$

$$\mu\{\tau : h(\tau, w(\tau)) > 0\} = 0,$$

что доказывает (13.12). Полагая в этом неравенстве $u(\tau) \equiv c$, где c принадлежит всюду плотному в U подмножеству C, имеем с учетом непрерывности функции $\mathcal{H}(\tau, u)$ по u

$$\mathcal{H}\left(\tau, u^0(\tau)\right) \geqslant \sup_{c \in C} \mathcal{H}(\tau, c) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(\tau, u)$$

для μ-п.в. $\tau \in T$. Так как неравенство с обращенным знаком очевидно, то (13.13) доказано. Лемма доказана.

Применим лемму 3 для вывода необходимых условий оптимальности в задаче (13.8). Пусть $T \equiv [0,1]$, $\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{B}^1$, $\mu \equiv \text{mes}$, $\mathcal{H}(\tau, u) \equiv \mathbf{M}\Theta'(t)\, B(t,u)$. Покажем, что

$$\|\Delta x_u(1)\| = O(\rho), \tag{13.14}$$

где $\rho = \text{mes}\{t : u(t) \neq u^0(t)\}$. Имеем с учетом замечания из п. 13.3 о свойствах фундаментальных матриц $\Psi(t,\omega), \Phi(t,\omega)$

$$\begin{aligned}
\|\Delta x_u(1)\|^2 &= \mathbf{M}\,|\Delta x_u(1)|^2 = \mathbf{M}\left|\Psi \int_0^1 \Phi(\tau)\,\Delta_u B(\tau)\; d\tau\right|^2 \leqslant \\
&\leqslant \mathbf{M}\,|\Psi|^2 \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\Phi(t)|^2 \left|\int_0^1 |\Delta_u B(\tau)|\, d\tau\right|^2, \\
\|\Delta x_u(1)\| &\leqslant |\Psi(t)|_4\, |\Phi(t)|_4 \left|\int_0^1 |\Delta_u B(\tau)|\, d\tau\right| \leqslant C\rho,
\end{aligned}$$

что доказывает (13.14). В силу (13.9) это означает выполнение условия (13.10) леммы 3. Проверка прочих условий этой леммы не составляет труда.

Применяя к (13.9) лемму 3, получаем следующий результат.

Теорема. *Если $u^0(t)$ — оптимальное в задаче (13.1) ((13.8)) управление, а $\eta_0(t)$ — отвечающее ему оптимальное решение системы (13.1), то* mes-*п.в. на* $[0,1]$

$$\mathcal{H}\left(t, u^0(t)\right) = \max_{u\in U} \mathcal{H}(t,u).$$

Здесь

$$\mathcal{H}(t,u) \equiv \mathbf{M}\Theta'(t)\, B(t,u)\,,\ \Theta = \mathcal{L}^* R^* D g_0\left[\eta^0(1) - \Phi\eta_0\right],$$

$Dg_0[z_0]$ *— производная Фреше функционала (13.6) в точке* $z_0 \in H$.

13.5. Сопряженная задача

В этом пункте обсуждаются возможные формы представления сопряженной функции $\Theta(t)$. Используя формулу Коши для решения линейной системы стохастических дифференциальных уравнений, легко выразить $\Theta(t)$ через фундаментальную матрицу $\Psi(t)$ (лемма 4). Данный подход предложен в работах Кушнера [9]. С другой стороны, для $\Theta(t)$ можно построить некоторую "сопряженную задачу" в стохастических дифференциалах (лемма 5). Подобный подход впервые был развит в работах Бисмута [10]. Отметим также оригинальный способ трактовки сопряженной задачи, предложенный Н.Г.Докучаевым в [11].

Лемма 4. *Пусть $z \in H$, $\Theta = \mathfrak{L}^* R^* z$. Тогда $\Theta \in CH_2^n$ и для любого $t \in [0,1]$ с вероятностью 1*

$$\Theta(t) = \Phi'(t)\, M\left\{\Psi' z \middle| \mathfrak{F}_t\right\}. \tag{13.15}$$

Доказательство. Пусть . Используя формулу Коши, имеем для скалярных произведений в и

$$\begin{aligned}(\Theta,\varphi) &= (\mathfrak{L}^* R^* z,\varphi) = (z, R(\mathfrak{L}(\varphi))) = \\ &= \left(z, \Psi\int_0^1 \Phi(t)\,\varphi(t)\;dt\right) = M\int_0^1 \Phi(t)\, M\left\{\Psi' z\middle|\mathfrak{F}_t\right\}\varphi(t)\;dt,\end{aligned}$$

где условные математические ожидания выбирались так, чтобы соответствующая случайная функция была $\mathfrak{BF}$-измерима [2, 4]. Отсюда в силу произвольности выбора φ получаем (13.15).

Лемма 5. *Пусть случайный вектор z измерим относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}_1$ и $M\left|\Psi' z\right|^4 < \infty$. Тогда функция $\Theta \equiv \mathfrak{L}^* R^* z \in CH_2^n$ имеет при всех $t \in [0,1]$ стохастический дифференциал и удовлетворяет следующей "сопряженной задаче":*

$$d\Theta = -\left(A'\Theta + D'\varkappa\right)\,dt + \varkappa\, dw,\ \Theta(1) = z, \tag{13.16}$$

где $\varkappa \in L_2^n$. Более того, любая функция $\tilde{\Theta} \in CH_2^n$, удовлетворяющая задаче (13.16) при некотором $\tilde{\varkappa} \in L_2^n$, совпадает в CH_2^n с Θ.

Доказательство. Согласно известному результату Ито-Кларка о представлении функционалов от винеровского процесса,

$$\Psi' z = \mathbf{M}\Psi' z + \int_0^1 \chi\, dw,$$

где $\chi \in N_4^2$ [2, 4]. Подставляя это равенство в (13.15) и дифференцируя полученное тождество, имеем после несложных преобразований (13.16), где

$$\varkappa(t) \equiv \Phi'(t)\,\chi(t) - D'(t)\,\Theta(t) \in L_2^n.$$

Далее, если функция $\tilde{\Theta}$ из CH_2^n удовлетворяет (13.16) с некоторой $\tilde{\varkappa} \in L_2^n$, то для разностей $\Theta_1 \equiv \Theta - \tilde{\Theta}$, $\varkappa_1 \equiv \varkappa - \tilde{\varkappa}$ имеем тождество в стохастических дифференциалах

$$d\Theta_1 = -\left(A'\Theta_1 + D'\varkappa_1\right) dt + \varkappa_1 dw, \; \Theta(1) = 0. \tag{13.17}$$

Покажем, что отсюда следует, что $\Theta_1 = 0$ в CH_2^n. Пусть $\varphi \in L_2$, а $\xi \in CH_2^n$ — решение уравнения

$$d\xi = (A\xi + \varphi)\, dt + D\xi\, dw, \; \xi(0) = 0.$$

Применяя формулу Ито дифференцирования произведения, имеем

$$d\Theta_1'\xi = \Theta_1'\varphi\, dt + \left(\varkappa_1'\xi + \Theta_1' D\xi\right) dw,$$

но $\varkappa_1'\xi + \Theta_1' D\xi \in N_1^1$, поэтому, учитывая граничные условия, получаем отсюда

$$\mathbf{M} \int_0^1 \Theta_1'\varphi\, dt = 0.$$

Так как φ — произвольный элемент из L_2^n, то $\Theta_1 = 0$ в L_2^n. Из (13.17) поэтому вытекает, что для почти всех $t \in [0,1]$ почти наверное

$$\Theta_1(0) - \int_0^t D\varkappa_1\, ds + \int_0^t \varkappa_1 dw = 0.$$

Так как левая часть этого равенства имеет с вероятностью 1 непрерывные траектории, то это равенство справедливо поячти наверное при любом $t \in [0,1]$. Но тогда $\Theta_1(0) = 0$ почти наверное и по теореме о единственности представления процессов Ито [4] $\varkappa_1 = 0$ в L_2^n. Возвращаясь к (13.1), получаем $\Theta_1 = 0$ в CH_2^n, что и требовалось доказать. Лемма доказана.

В заключение пункта отметим, что вектор $z = Dg_0\left[\eta^0(1) - \Phi\eta_0\right]$ из теоремы 1 удовлетворяет условиям лемм 4,5. Поэтому для сопряженной функции Θ из этой теоремы справедлива формула (13.15), и имеет место сопряженная задача (13.16).

Литература

[1] Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М., 1978.

[2] Смирнов И.П. Исследование вариационными методами задач оптимизации стохастических интегральных уравнгений для процессов с разрывами: Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. Горький, 1981.

[3] Смирнов И.П. // Дифференц. уравнения. 1990, т.26, №10, с. 1753-1758 (Глава 12 настоящего сборника)

[4] Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. М., 1975, Т.3.

[5] Садовяк А.М., Царьков Е.Ф. // Теория вероятностей и ее применения. 1973, Т. 18, вып. 2. С. 415-417.

[6] Владимиров B.C. // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1961. Т. 61.

[7] Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.

[8] Ляпунов А.А. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1940. Т. 4, №6. С. 465-478.

[9] Kushner H.J. // SIAM J. Control and Opimiz. 1972. Vol. 10, N 3. p. 550-565.

[10] Bismut J.-M. // J. Math. Anal. Appl. 1973. Vol. 44, N 2. p. 364-404.

[11] Докучаев Н.Г. Оптимальное программное управление стохастическим процессом, обрывающимся на границе области. Л., 1983. Деп. в ВИНИТИ 26.08.83, №4705 -83 Деп.

Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию 29 мая 1989 г.

Глава 14.

Об одном подходе к решению сопряженной задачи Бисмута

УДК 531.36 + 62 - 50

На примере задачи оптимального управления

$$d\eta_\alpha = f_\alpha(t,\eta,u)\,dt + \sigma_{\alpha l}(t,\eta,u)\,dw_l,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$
$$\mathbf{M}\left\{\int_0^1 F(t,\eta,u)\,dt + \varphi(\eta(1))\right\} \to \max$$

иллюстрируется один подход к решению сопряженной задачи.

Пусть $u^0(t)$ — оптимальное управление и $S(t,x)$ — решение задачи Коши для уравнения в частных производных

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S_k}{\partial t} &= \frac{\partial S_k}{\partial x_\alpha} f_\alpha^0 + \frac{\partial f_\alpha^0}{\partial x_k} S_\alpha + \frac{\partial \sigma_{\alpha l}}{\partial x_k}\sigma_{il}^0 \frac{\partial S_\alpha}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sigma_{il}^0\sigma_{jl}^0 \frac{\partial^2 S_k}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial F^0}{\partial x_k}, \\ S_k(1,x) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x),\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ x \in R^n, \end{aligned}$$

где $f^0 \equiv f(t,x,u^0(t))$, $\sigma^0 \equiv \sigma(t,x,u^0(t))$, $F^0 \equiv F(t,x,u^0(t))$.

Тогда для решения сопряженной задачи Бисмута [1]

$$d\Theta_k = -\left(\frac{\partial f_\alpha^0}{\partial x_k}\Theta_k + \frac{\partial \sigma_{\alpha l}^0}{\partial x_k}\varkappa_{\alpha l} + \frac{\partial F^0}{\partial x_k}\right)dt + \varkappa_{kl}\,dw_l,\ \Theta_k(1) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\eta(1))$$

[1] И.П. Смирнов. Об одном подходе к решению сопряженной задачи Бисмута, *Тезисы докладов XVI всесоюзной школы по теории операторов в функциональных пространствах*, Нижний Новгород, 1991, с. 214.

верно представление

$$\Theta_k(t) = S_k\left(t, \eta^0(t)\right), \ \varkappa_{kl}(t) = \frac{\partial S_k}{\partial x_i}\,\sigma^0_{il}\ \left(t, \eta^0(t), u^0(t)\right), \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Литература

[1] Bismut J.-M. - J. Math. Anal. Appl., 1973, v.44, N2, p.384.

Глава 15.

Задача оптимального управления системой со случайным процессом при управлении

УДК 531.36 + 62 - 50

Рассматривается упраяемый процесс, описываемый линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой действие управляющего параметра подавляется случайным параметром специального вида. В задаче оптимального управления по критерию максимизации вероятности попадания процесса в конечный момент времени в заданную область получены условия существования наилучшего управления и необходимые условия оптимальности в форме приницпа максимума Л.С.Потрягина. Изучаются различные формы представления функционала задачи и условия его дифференцируемости. Библиогр. 6 назв.

15.1. Введение

Рассматривается задача оптимального управления вида

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\,\mathbf{x} + \xi(t)\,B(t)\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t), \ 0 \le t \le 1, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \tag{15.1}$$

[1]Краткое сообщение "Optimal control of the linear system with the noise at control parameter" опубликовано в трудах международной конференции "Математические алгоритмы" , Нижний Новгород, 1994 (совместно с Зориным А.Ю.)

$$\varphi(\mathbf{u}(\cdot)) = \mathbf{P}(\mathbf{x}_u(1) \in \mathbf{Q}) \to \max_{\mathbf{u}(\cdot)\in\mathcal{U}},$$

где $\mathbf{x}$ - фазовый, $\mathbf{u}$ - управляющий векторы; $\mathbf{Q}$ - неслучайное целевое множество в фазовом пространстве; $\xi(t)$ - скалярный случайный процесс.

В работе, продолжающей исследования [1, 2], получены теорема существования оптимального управления и необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. В п. 15.2 производится постановка задачи. В п. 15.3 последняя преобразуется к эквивалентной детерминированной задаче управления. Существование оптимального управления устанавливается в п. 15.4. В п. 15.5 получены условия дифференцируемости функционала задачи. Вывод необходимых и достаточных условий экстремума производится в п. 15.6.

15.2. Постановка задачи

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ - полное вероятностное пространство, $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $|\cdot|$ - евклидова норма вектора (матрицы), штрих - операция транспонирования вектора (матрицы).

Определяющие систему (15.1) детерминированные матрицы $A(t)$, $B(t)$, $f(t)$ порядков $n \times n$, $n \times m$, $n \times 1$, соответственно, имеют суммируемые по мере Лебега на отрезке $[0, 1]$ компоненты; компоненты матрицы $B(t)$ суммируемы с квадратом; $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{Q}$ - соответственно неслучайные начальный вектор и измеримое целевое множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Случайный процесс $\xi(t, \omega)$ определяется следующим образом. Пусть

$$\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1\}$$

и $\{\xi_1(\omega), \ldots, \xi_N(\omega)\}$ - заданные конечные наборы точек отрезка $[0, 1]$ и случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, соответственно. Положим

$$\xi(t, \omega) = \xi_i(\omega)\ ,\ t \in [t_{i-1}, t_i)\,,\ i = \overline{1, N}.$$

Класс допустимых управлений $\mathcal{U}$ состоит из всех измеримых детерминированных функций $u(t)$, $t \in [0, 1]$, принимающих свои значения в заданном множестве $\mathbf{V} \subset \mathbb{R}^n$. Заметим, что каждому допустимому управлению $\mathbf{u}(\cdot) \in L_2^m[0, 1]$ отвечает единственное абсолютно непрерывное с вероятностью 1 решение задачи Коши (15.1) [3, с. 35]; соответствующее значение целевого функционала $\varphi(\mathbf{u}(\cdot)) \in [0, 1]$. Задача оптимального управления процессом (15.1) ставится как задача отыскания допустимого управления $\mathbf{u}^0(\cdot) \in \mathcal{U}$, доставляющего максимальное значение функционалу

$$\varphi\left(\mathbf{u}^0(\cdot)\right) = \max_{\mathbf{u}(\cdot)\in\mathcal{U}} \varphi(\mathbf{u}(\cdot)).$$

15.3. Вспомогательная задача

Используя представление решения линейной системы дифференциальных уравнений (15.1) через фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ ($\Phi(0) = I$ - единичной матрице) решений однородной системы, сведём исходную задачу к вспомогательной детерминированной задаче оптимального управления. Имеем

$$\begin{gathered}
\mathbf{x}_u(1) = \Phi(1)\left\{\mathbf{x}_0 + \int_0^1 \Phi^{-1}(s)\left(\xi(s) B(s)\mathbf{u}(s) + \mathbf{f}(s)\right) ds\right\} = \\
= \hat{\mathbf{x}}_0 + \Phi(1)\sum_{I=1}^{N} \xi_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi^{-1}(s) B(s)\mathbf{u}(s)\,ds = \\
= \hat{\mathbf{x}}_0 + \sum_{I=1}^{N} \xi_i \mathbf{z}_u^{(i)}, \\
\hat{\mathbf{x}}_0 \equiv \Phi(1)\left\{\mathbf{x}_0 + \int_0^1 \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds\right\}, \\
\mathbf{z}_u^{(i)} \equiv \Phi(1)\int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi^{-1}(s) B(s)\mathbf{u}(s)\,ds.
\end{gathered} \tag{15.2}$$

Как легко видеть,

$$\mathbf{z}_u^{(i)} = \Psi_i \mathbf{y}(t_i) - \Psi_{i-1}\mathbf{y}(t_{i-1}), \tag{15.3}$$

где $\Psi_i \equiv \Phi(1)\Phi^{-1}(t_i), i = \overline{1, N}$, $\mathbf{y}_u(t)$ - решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{y} = A(t)\mathbf{y} + B(t)\mathbf{u},\ t \in (0,1) \\ \mathbf{y}(0) = 0. \end{cases}$$

Вводя функции N векторных переменных

$$\begin{gathered}
g(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_N) = \mathbf{P}\left(\sum_{I=1}^{N} \xi_i \mathbf{z}_i \in \hat{\mathbf{Q}}\right), \\
G(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_N) = \mathbf{P}\left(\sum_{I=1}^{N} \chi_i \Psi_i \mathbf{y}_i \in \hat{\mathbf{Q}}\right),
\end{gathered} \tag{15.4}$$

где $\hat{\mathbf{Q}} \equiv \mathbf{Q} - \mathbf{x}_0$, $\chi_i \equiv \xi_i - \xi_{i+1}$, $i = \overline{1, N-1}$, $\chi_N = \xi_N$, получаем с учётом (15.2), (15.3) следующее представление для функционала качества

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u}(\cdot)) &= \mathbf{P}(\mathbf{x}_u(1) \in \mathbf{Q}) = \\ &= \mathbf{P}\left(\hat{\mathbf{x}}_0 + \sum_{I=1}^{N} \xi_i \mathbf{z}_u^{(i)} \in \mathbf{Q}\right) = \\ = g\left(\mathbf{z}_u^{(1)}, \ldots, \mathbf{z}_u^{(N)}\right) &= G(\mathbf{y}_u(t_1), \ldots, \mathbf{y}_u(t_N)). \end{aligned} \tag{15.5}$$

Очевидно, что исходная задача оптимального управления (15.1) эквивалентна следующей детерминированной задаче:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{y} = A(t)\,\mathbf{y} + B(t)\,\mathbf{u},\ t \in (0,1), \\ \mathbf{y}(0) = 0, \end{cases}$$

$$\varphi(\mathbf{u}(\cdot)) = G(\mathbf{y}_u(t_1), \ldots, \mathbf{y}_u(t_N)) \to \max_{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}}.$$

15.4. Теорема существования

Пусть $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ - произвольный набор векторов в $\mathbb{R}^n$. Образуем из него вектор $\mathbf{Y}$ пространства $\mathbb{R}^M$, $M \equiv n \cdot N$ по правилу $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_N\} = \{y_1^1, \ldots, y_1^n, y_2^1, \ldots, y_N^n\}$. Рассмотрим функции $S : \Omega \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^n$ и $h : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^1$ вида

$$\begin{aligned} S(\omega, \mathbf{Y}) &= \sum_{I=1}^{N} \chi_i(\omega)\,\Psi_i \mathbf{y}_i, \\ h(\mathbf{y}) &= \mathbf{P}\left\{\omega : S(\omega, \mathbf{Y}) \in \hat{\mathbf{Q}}\right\}. \end{aligned}$$

Лемма 1. *Если множество $\hat{\mathbf{Q}}$ замкнуто в $\mathbb{R}^n$, то функция $h(\cdot)$ полунепрерывна сверху в $\mathbb{R}^M$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Y}^* \in \mathbb{R}^M$, $\mathbf{Y}_k \to \mathbf{Y}^*, k \to \infty$. Рассмотрим случайные события

$$\begin{aligned} A_k &= \left\{\omega : S(\omega, \mathbf{Y}_k) \in \hat{\mathbf{Q}}\right\}, \\ A^* &= \left\{\omega : S(\omega, \mathbf{Y}^*) \in \hat{\mathbf{Q}}\right\}, \\ B &= \limsup_{k \to \infty} A_k = \bigcap_{k \ge 1} \bigcup_{j \ge k} A_j. \end{aligned}$$

Если $\omega \in B$, то найдётся последовательность $k_m \to \infty$ такая, что $\omega \in A_{k_m}$, т.е. $S(\omega, \mathbf{Y}_{k_m}) \in \hat{\mathbf{Q}}$. Переходя здесь к пределу при $m \to \infty$, с учетом непрерывности функции $S(\omega, \cdot)$ и замкнутости множества $\hat{\mathbf{Q}}$ получаем $S(\omega, \mathbf{Y}^*) \in \hat{\mathbf{Q}}$, поэтому $\omega \in A^*$. Следовательно, $B \subset A^*$, $\mathbf{P}(B) \le \mathbf{P}(A)$. С другой стороны, по свойству вероятностной меры [4, с.34]

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right) \ge \limsup_{k\to\infty} \mathbf{P}(A_k).$$

В итоге имеем

$$h(\mathbf{Y}^*) = \mathbf{P}(A^*) \ge \mathbf{P}(B) \ge \limsup_{k\to\infty} \mathbf{P}(A_k) = \\ = \limsup_{k\to\infty} h(\mathbf{Y}_k),$$

что доказывает лемму.

Теорема 1. *Пусть множество допустимых управлений $\mathcal{U}$ слабо компактно в $L_2^m[0,1]$, а целевое множество $\mathbf{Q}$ замкнуто в $\mathbb{R}^n$. Тогда задача оптимального управления* (15.1) *имеет решение.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{u}_l(\cdot)\}$ - максимизирующая последовательность ($\varphi(\mathbf{u}_l(\cdot)) \to \sup \varphi(\mathbf{u}(\cdot)) \le 1$), слабо сходящаяся к $\mathbf{u}^0(\cdot) \in \mathcal{U}$. Легко показать, что $\mathbf{y}_{u_l}(t_k) \to \mathbf{y}_{u^0}(t_k)$, $k = \overline{1, N}$. По лемме 1 имеем

$$\varphi(\mathbf{u}^0(\cdot)) = G(\mathbf{y}_{u^0}(t_1), \ldots, \mathbf{y}_{u^0}(t_N)) \ge \\ \ge \limsup_{l\to\infty} G(\mathbf{y}_{u_l}(t_1), \ldots, \mathbf{y}_{u_l}(t_N)) = \\ = \lim_{l\to\infty} \varphi(\mathbf{u}_l(\cdot)) = \sup_{\mathbf{u}(\cdot)\in\mathcal{U}} \varphi(\mathbf{u}(\cdot)).$$

Отсюда следует оптимальность управления. Теорема доказана.

Другие подходы к доказательству существования оптимального управления для близких задач рассматривались в [1].

15.5. Условия дифференцируемости функций g, G

При выводе необходимых условий оптимальности важную роль играют свойства дифференцируемости функционала задачи по фазовым переменным. Изучению указанных свойств для определяемых (15.4) функций g, G посвящен данный раздел. При этом ограничимся случаем абсолютно непрерывного по мере Лебега случайного вектора $\xi \equiv \{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ с совместной плотностью распределения компонент f. Введем ряд обозначений. Пусть $\mathbf{Z} \equiv \{\mathbf{z}_1^*, \ldots, \mathbf{z}_N^*\} - \mathrm{R}^n$,

$$\sum \equiv \left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N : (r_1\mathbf{z}_1^* + \ldots + r_N\mathbf{z}_N^*) \in \mathbf{Q}\right\}.$$

При $N > n$ множество $\sum$ неограничено в $\mathbb{R}^N$ даже при ограниченном $\mathbf{Q} \subset\mathbb{R}^n$. Пусть π_j - проекция множества $\sum$ на гиперплоскость $r_j = 0$. Легко показать, что для выпуклого $\mathbf{Q}$ прямая, проходящая параллельно оси r_j через произвольную точку $\mathbf{p}_j \in \pi_j$, пересекается с множеством $\sum$ по интервалу $r_j \in \left(r_j^{(1)}, r_j^{(2)}\right)$, причем функции $r_j = r_j^{(1,2)}\left(\mathbf{p}_j\right)$ ограничены при ограниченном $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{z}_j^* \neq 0$.

Рассмотрим при фиксированном $k \in \overline{1, N}$ функцию

$$h_k\left(\mathbf{z}_k\right) = g\left(\mathbf{z}_1^*, \ldots, \mathbf{z}_k^*, \mathbf{z}_k, \mathbf{z}_{k+1}^*, \ldots, \mathbf{z}_N^*\right), \ \mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 2. *Пусть $j, k \in \overline{1, N}$, вектор $\mathbf{z}_j^* \neq 0$, плотность вероятности $f\left(r_1, \ldots, r_N\right)$ дифференцируема по r_j и функция $\Phi_{kj}(\mathbf{r}) \equiv \partial\left(r_k f\right)/\partial r_j$ суммируема в $\mathbb{R}^N$. Тогда функция $h_k(\cdot)$ дифференцируема в точке $\mathbf{z}_k^*$ в направлении вектора $\mathbf{z}_j^*$. Соответствующая производная по направлению*

$$\frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{z}_j^*} = \frac{d}{d\varepsilon} h_k\left(\mathbf{z}_k^* + \varepsilon \mathbf{z}_j^*\right)\Big|_{\varepsilon=0} = -\int\limits_{\Sigma} \Phi_{kj}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}. \tag{15.6}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} h_k\left(\mathbf{z}_k^* + \varepsilon \mathbf{z}_j^*\right) = \mathbf{P}\left\{\left(\xi_1 \mathbf{z}_1^* + \ldots + \xi_k \mathbf{z}_k^* + \ldots + \xi_N \mathbf{z}_N^*\right) \in \mathbf{Q}\right\} = \\ = \int\limits_{\Sigma} f_\eta(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}, \end{aligned} \tag{15.7}$$

где f_η - совместная плотность распределения компонент вектора

$$\eta \equiv \begin{cases} \eta_i = \xi_i, & i \neq j \\ \eta_j = \xi_j + \varepsilon \xi_k, & i = j \end{cases},$$

$$f_\eta(\mathbf{r}) \equiv F(\varepsilon, \mathbf{r}) = \begin{cases} f\left(r_1, \ldots, r_{j-1}, r_j - \varepsilon r_k, \ldots, r_N\right), & j \neq k \\ \frac{1}{(1+\varepsilon)} f\left(r_1, \ldots, r_{j-1}, \frac{r_j}{(1+\varepsilon)}, \ldots, r_N\right), & j = k. \end{cases}$$

Легко видеть

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \mathbf{r}) = \begin{cases} -r_k \frac{\partial f}{\partial r_j}\left(r_1, \ldots, r_j - \varepsilon r_k, \ldots, r_N\right), & j \neq k \\ \frac{-1}{(1+\varepsilon)^2} \frac{\partial}{\partial r_j}\left[r_j f\left(r_1, \ldots, \frac{r_j}{(1+\varepsilon)}, \ldots, r_N\right)\right], & j = k. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(\varepsilon) \equiv \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \mathbf{r})\, d\mathbf{r} = -\int\limits_{\Sigma_\varepsilon} \Phi_{kj}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r},$$

где $\sum_\varepsilon \equiv P_\varepsilon \sum$, P_ε - линейный оператор преобразования в $\mathbb{R}^N$, $P_\varepsilon \equiv \|p_{il}\|$, $p_{il} = \delta_{il} - \alpha(\varepsilon)\,\delta_{ij}\delta_{lk}$, $\alpha(\varepsilon) = \varepsilon$ и $\alpha(\varepsilon) = \varepsilon/(1+\varepsilon)$ при $k = j$, δ_{ij} - символ Кронекера. Имеем

$$|\Psi(\varepsilon)| \le \int\limits_{R^N} |\Phi_{kj}(\mathbf{r})|\, d\mathbf{r},$$

поэтому функция $\Psi(\varepsilon)$ суммируема в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Покажем её непрерывность в этой точке. Пусть

$$\begin{array}{ll} K_R \equiv \{\mathbf{r} : |\mathbf{r}| > R\}, & \bar{K}_R \equiv \mathbb{R}^N \backslash K_R, \\ \sum_{\varepsilon,R} \equiv \sum_\varepsilon \cap K_R, & \sum'_{\varepsilon,R} \equiv \sum_\varepsilon \cap \bar{K}_R, \\ \sum_{0,R} \equiv \sum \cap K_R, & \sum'_{0,R} \equiv \sum \cap \bar{K}_R. \end{array}$$

Так как функция $\Phi_{kj}(\mathbf{r})$ суммируема в $\mathbb{R}^N$, то для любого $\delta > 0$ найдется такое R, что

$$\int\limits_E |\Phi_{kj}(\mathbf{r})|\, d\mathbf{r} < \frac{\delta}{3}$$

для всякого измеримого множества $E \subset K_R$. Оценим при данном $R > 0$ модуль разности

$$|\Psi(\varepsilon) - \Psi(0)| = \left| \int\limits_{\sum_\varepsilon} \Phi_{kj}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} - \int\limits_{\sum} \Phi_{kj}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{\sum_{\varepsilon,R}} \Phi_{kj}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \right| + \left| \int\limits_{\sum_{0,R}} \Phi_{kj}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \right| + \left| \int\limits_{\sum'_{\varepsilon,R}} \Phi_{kj}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} - \int\limits_{\sum'_{0,R}} \Phi_{kj}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \right|.$$

Сумма первых двух членов не превосходит $2\delta/3$. Так как мера Лебега симметрической разности ограниченных множеств $\sum'_{\varepsilon,R}$ и $\sum'_{0,R}$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, то последний член суммы меньше $\delta/3$ при всех достаточно малых ε. В итоге для таких ε имеем $|\Psi(\varepsilon) - \Psi(0)| < \delta$, что доказывает непрерывность $\Psi(\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$. Установленных свойств $\Psi(\varepsilon)$ достаточно для возможности дифференцирования по параметру ε интеграла (15.7) в точке $\varepsilon = 0$ [5, с. 132]:

$$\frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{z}_j^*} = \int\limits_{\sum} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(0, \mathbf{r})\, d\mathbf{r} = -\int\limits_{\sum} \Phi_{kj}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}.$$

Лемма доказана.

Для выпуклого $\mathbf{Q}$ из (15.6) получаем

$$\frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{z}_j^*} = \int\limits_{\pi_j} (r_k f) \left.\right|_{r_j = r_j^{(2)}(\mathbf{p}_j)}^{r_j = r_j^{(1)}(\mathbf{p}_j)} d\mathbf{p}_j,$$

где при бесконечном значении предела $r_j^{(1,2)}$ следует считать соответствующее значение подстановки нулевым. Используя данное представление производной, можно было доказать лемму 2 при более слабых предположениях относительно функции f, не требующих существования частных производных.

Теорема 2. *Пусть $N \geq n$, $k \in \overline{1,N}$, векторы $\{\mathbf{z}_1^*, \ldots, \mathbf{z}_n^*\} \subset \mathbf{Z}$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$, плотность f дифференцируема по r_j и функции $\Phi_{kj}(\mathbf{r}) \equiv \partial (r_k f) / \partial r_j$ суммируемы в $\mathbb{R}^N$. Тогда функция $h_k(\mathbf{z}_k)$ дифференцируема в точке $\mathbf{z}_k^*$. Её градиент в этой точке*

$$\nabla h_k(\mathbf{z}_k^*) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{z}_j^*} \left(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}^i\right) \mathbf{z}_i^*, \qquad (15.8)$$

где $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$- взаимный для $\{\mathbf{z}_1^*, \ldots, \mathbf{z}_n^*\}$ базис.

Доказательство. Если дифференцируемость доказана, то разлагая градиент по базису $\{\mathbf{e}^i\}$, а каждый из векторов $\mathbf{e}^j$ - по базису $\{\mathbf{z}_i^*\}$ [6, с.229], получаем

$$\nabla h_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\nabla h_k, \mathbf{z}_j^*\right) \mathbf{e}^j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{z}_j^*} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}^i\right) \mathbf{z}_i^*,$$

что и приводит к формуле (15.8).

Для доказательства дифференцируемости функции h_k достаточно проверить непрерывность производных $\frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{z}_j^*}(\mathbf{z}_k)$ в точке $\mathbf{z}_k^*$. Разложив произвольное приращение $\Delta\mathbf{z}_k$ по базису $\{\mathbf{z}_i^*\}$, $\Delta\mathbf{z}_k = \Delta_1 \mathbf{z}_1^* + \ldots + \Delta_n \mathbf{z}_n^*$, $\Delta_i \equiv (\Delta\mathbf{z}_k, \mathbf{e}^i)$, получим аналогично (15.7)

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial h_k}{\partial \mathbf{z}_j^*}(\mathbf{z}_k^* + \Delta\mathbf{z}_k) = -\int\limits_{\sum} \tfrac{\partial}{\partial r_j}(r_k f)\, d\mathbf{r} = \\ = \tfrac{1}{(1+\Delta_k)} \int\limits_{\sum_\Delta} \Phi_{kj}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \Psi(\Delta_k),\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}f_\Delta(\mathbf{r}) = \tfrac{1}{(1+\Delta_k)} f\left(\mathbf{r}_1 - \tfrac{\Delta_1}{(1+\Delta_k)}\mathbf{r}_k, \ldots, \mathbf{r}_n - \tfrac{\Delta_n}{(1+\Delta_k)}\mathbf{r}_k,\right. \\ \left.\mathbf{r}_{n+1}, \ldots, \mathbf{r}_N\right); \ \textstyle\sum_\Delta \equiv P_\Delta \sum; \ \underline{P_\Delta} \equiv \|p_{il}\|; \\ p_{il} \equiv \begin{cases} \delta_{il} - \frac{\Delta_1}{(1+\Delta_k)}\delta_{lk}, & i = \overline{1,n} \\ \delta_{il}, & i = \overline{n+1,N} \end{cases}.\end{gathered}$$

Так же, как при доказательстве леммы 2 устанавливается, что $\Psi(\Delta_k) \to \Psi(0)$ при, $\Delta \mathbf{z}_k \to 0$, что доказывает непрерывность производных. Теорема доказана.

Очевидно, что в формулировке теоремы можно заменить $\{\mathbf{z}_i^*\}$ на любой другой набор векторов из $\mathbf{Z}$, образующий базис в $\mathbb{R}^n$. Если размерность линейной оболочки $\mathfrak{L}$ системы векторов $\mathbf{Z}$ меньше размерности фазового пространства n, то при принятых в теореме требованиях к плотности f можно гарантировать дифференцируемость функции h_kлишь по подпространству $\mathfrak{L}$. При этом легко строятся примеры (см. ниже), когда отсутствие таких свойств множества $\mathbf{Q}$ как телесность, строгая выпуклость, гладкость границы приводят к тому, что функция получается не дифференцируемой или даже разрывной в точке .

Пример 1.

$$n = 3;\ N = 2;\ \mathbf{Q} = \left\{x_1 = 0, (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 \le 1\right\};$$
$$\mathbf{z}_1^* = (0,0,1);\ \mathbf{z}_2^* = (0,1,0).$$

Пример 2.

$$n = 2;\ N = 1;\ \mathbf{Q} = \{x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 2\},\ \mathbf{z}^* = (0,1).$$

Пример 3.

$$n = 2;\ N = 1;\ \mathbf{Q} = \left\{(x_1 - 7)^2 + x_2^2 \le 25\right.$$
$$\left.(x_2 - 7)^2 + x_1^2 \le 25\right\},\ \mathbf{z}^* = (1,1).$$

Теорема 3. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема в $\mathbb{R}^N$, $\mathbf{Q}$ - шар в $\mathbb{R}^n$. Для любого набора векторов $\mathbf{Z}$, не принадлежащего проходящей через начало координат, касательной поверхности шара гиперплоскости, функции $h_k(\mathbf{z}_k)$, $k = \overline{1,N}$ дифференцируемы в точках $\mathbf{z}_k^* \in \mathbf{Z}$.*

Теорема доказывается непосредственным вычислением, опирающимся на аналитическое описание множества $\mathbf{Q}$. Эаметим, что для набора, лежащего в касательной плоскости, значение функционала равно нулю. Оно может быть максимальным лишь в вырожденных задачах (см. п.15.6). Таким образом, условия теоремы вполне естественны в рассматриваемой в п.15.1 задаче оптимального управления.

15.6. Условия оптимальности

Обозначим $\mathbf{Z}(\mathbf{u}(\cdot)) \equiv \left\{\mathbf{z}_u^{(i)}, i = \overline{1,N}\right\}$ набор векторов в $\mathbb{R}^n$, определяемый формулами (15.2) для управления $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$. Назовем задачу (15.1) а) *невырожденной*, если функционал $\varphi(\cdot)$ не постоянен на $\mathcal{U}$; б) *регулярной* на управлении $\mathbf{u}^*(\cdot)\in\mathcal{U}$, если при всех $k=\overline{1,N}$ функции $h_k(\mathbf{z}_k)$, определяемые для набора векторов $\mathbf{Z}(\mathbf{u}^*(\cdot))$, дифференцируемы в соответствующих точках $\mathbf{z}_{u^*}^{(k)}$ (см. п.15.5).

Лемма 3. *Если $\hat{\mathbf{x}}_0\in\mathbf{Q}$, то для оптимальности $\mathbf{u}^0(\cdot)\in\mathcal{U}$ достаточно, чтобы набор векторов $\mathbf{Z}(\mathbf{u}^0(\cdot))$ был нулевым. С другой стороны, если задача невырождена и $\hat{\mathbf{x}}_0\notin\mathbf{Q}$, то для оптимальности $\mathbf{u}^0(\cdot)$ необходимо, чтобы набор $\mathbf{Z}(\mathbf{u}^0(\cdot))$ был ненулевым.*

Доказательство. При $\mathbf{z}_{u^0}^{(i)}=0, i=\overline{1,N}$ из (15.5) получаем $\varphi(\mathbf{u}^0(\cdot))=P\{\hat{\mathbf{x}}_0\in\mathbf{Q}\}$. Значение данной вероятности равно $1=\sup\varphi(\mathbf{u}(\cdot))$ при $\hat{\mathbf{x}}_0\in\mathbf{Q}$ и равно $0=\inf\varphi(\mathbf{u}(\cdot))<\sup\varphi(\mathbf{u}(\cdot))$ при $\hat{\mathbf{x}}_0\notin\mathbf{Q}$. Отсюда вытекают оба утверждения леммы.

Теорема 4. *Пусть $\mathbf{u}^0(\cdot)$ - оптимальное допустимое управление, и задача (15.1) регулярна на $\mathbf{u}^0(\cdot)$. Тогда для почти всех $t\in[0,1]$*

$$\big(\theta(t),B(t)\,\mathbf{u}^0(t)\big)=\max_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}}(\theta(t),B(t)\,\mathbf{v}),\tag{15.9}$$

где сопряжённая функция

$$\theta(t)=\sum_{k=1}^{N}\chi_k(t)\,\theta_k(t),$$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\theta_k=-A'(t)\,\theta_k\\ \theta_k(1)=\nabla h_k\left(\mathbf{z}_{u^0}^{(k)}\right),\end{cases}$$

$\chi_k(t)$ - индикатор множества $[t_{k-1},t_k)$, $k=\overline{1,N}$.

Доказательство. Пусть $\tau\in(t_{k-1},t_k)$, $0<\varepsilon<t_k-\tau$

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t)=\begin{cases}\mathbf{v}\in\mathbf{V}, & t\in(\tau,\tau+\varepsilon)\\ \mathbf{u}^0(t), & t\notin(\tau,\tau+\varepsilon)\end{cases}.$$

Учитывая, что при подобном варьировании управления в группе векторов $\mathbf{Z}(\mathbf{u}^0(\cdot))$ изменяется только вектор $\mathbf{z}_{u^0}^{(k)}$, имеем

$$\varphi(\mathbf{u}^\varepsilon(\cdot))-\varphi(\mathbf{u}^0(\cdot))=h_k\left(\mathbf{z}_{u^\varepsilon}^{(k)}\right)-h_k\left(\mathbf{z}_{u^0}^{(k)}\right)=$$
$$=\left(\nabla h_k\left(\mathbf{z}_{u^0}^{(k)}\right),\Delta_\varepsilon\mathbf{z}^{(k)}\right)+o\left(\left|\Delta_\varepsilon\mathbf{z}^{(k)}\right|\right),$$

$$\Delta_\varepsilon\mathbf{z}^{(k)}\equiv\mathbf{z}_{u^\varepsilon}^{(k)}-\mathbf{z}_{u^0}^{(k)}=$$
$$=\Phi(1)\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon}\Phi^{-1}(s)\,B(s)\,(\mathbf{v}-\mathbf{u}^0(s))\,ds.$$

Отсюда по теореме Лебега о дифференцировании интеграла получаем при почти всех $\tau \in (t_{k-1}, t_k)$

$$\begin{gathered}\delta\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0}\tfrac{\varphi(\mathbf{u}^{\varepsilon}(\cdot))-\varphi\left(\mathbf{u}^{0}(\cdot)\right)}{\varepsilon} = \\ = \left(\nabla h_k\left(\mathbf{z}_{u^0}^{(k)}\right), \Phi(1)\,\Phi^{-1}(\tau)\,B(\tau)\left(\mathbf{v} - \mathbf{u}^0(\tau)\right)\right) = \\ = \left(\theta(\tau), B(\tau)\left(\mathbf{v} - \mathbf{u}^0(\tau)\right)\right).\end{gathered}$$

Так как вариация $\delta\varphi \le 0$ в силу оптимальности управления $\mathbf{u}^0(\cdot)$, то отсюда следует (15.9). Теорема доказана.

Литература

[1] Смирнов И.П. // Дифференц. уравнения. 1990, т.26, №10, с. 1753-1758 (Глава 12 настоящего сборника)

[2] Смирнов И.П. // Дифференц. уравнения. 1990, т.26, №11, с. 1943-1949 (Глава 13 настоящего сборника)

[3] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, 1968.

[4] Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. Москва, 1969.

[5] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. Москва, 1966.

[6] Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра. Москва, 1984.

ННГУ им. Н.И. Лобачевского