Курс лекций по математической физике для радиофизиков

Смирнов Иван Паисьевич

16 Июня 2002

Содержание

I ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ **1**

1 Основные понятия **3**
1.1 Экстремальные задачи 3
1.1.1 Четыре основных вопроса теории экстремальных задач 4
1.1.2 Задача математического программирования (краткая справка из курса математического анализа) 4
1.1.3 Вариационные задачи 5
1.1.4 Классический вариационный подход (метод Лагранжа) 6

2 Классические вариационные задачи **7**
2.1 Простейшая задача вариационного исчисления (**A**) 7
2.1.1 Вывод необходимых условий экстремума в задаче (**A**) классическим вариационным методом 8
2.1.2 Первые интегралы уравнения Эйлера 11
2.2 Вариационная задача на классе векторных функций (**B**) . . . 14
2.2.1 Вывод необходимых условий экстремума в задаче (**B**) вариационным методом 14
2.2.2 Интегралы векторного уравнения Эйлера 16
2.3 Вариационная задача на классе функций со старшими производными (**C**) 19
2.3.1 Вывод необходимых условий экстремума в задаче (**C**) вариационным методом 19
2.4 Вариационная задача на классе векторных функций со старшими производными (**B&C**) 20
2.5 Вариационная задача на классе функций с двумя независимыми переменными (**E**) 21
2.5.1 Вывод необходимых условий экстремума в задаче (**E**) вариационным методом 21
2.5.2 Обобщения задачи (**E**) 23
2.6 Изопериметрическая задача (**F**) 24
2.6.1 Вывод необходимых условий экстремума в изопериметрической задаче (**F**) 24
2.6.2 Обобщения задачи (**F**) 27
2.7 Задача Лагранжа (**G**) 28
2.8 Задача Лагранжа в понтрягинской форме 29

3 Неклассические вариационные задачи **33**
3.1 Задача Понтрягина – оптимального управления (**H**) 33

4 Вариационные задачи со свободными границами **43**
4.1 Задача ($\mathbf{I}_1$) 43
4.2 Задача ($\mathbf{I}_2$) 46
4.3 Задача ($\mathbf{I}_3$) 48

5 Достаточные условия C^1−локального экстремума **53**

6 Гамильтонов формализм **59**

II ДИФФЕРЕНЦИАЛЪНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ **61**

7 Вводные замечания **63**

8 Уравнения в частных производных первого порядка **65**
8.1 Классификация уравнений 65
8.2 Методы решения квазилинейных уравнений первого порядка . 65

9 Уравнения в частных производных второго порядка **69**
9.1 Каноническая форма записи квазилинейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными 69
9.2 Классификация квазилинейных уравнений второго порядка с $n > 2$ независимыми переменными 74

10 Корректность постановки задач математической физики **77**
10.1 Задача математической физики 77
10.2 Основные типы начально-краевых задач 77

11 Методы решения задач математической физики **81**
11.1 Методы решения задач для уравнений гиперболического типа 81
11.1.1 Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа 81
11.1.2 Метод бегущих волн 83
11.1.3 Метод фундаментальных решений 94
11.1.4 Метод интегральных преобразований 104
11.1.5 Метод разделения переменных Фурье — метод стоячих волн 110
11.2 Методы решения задач для уравнений параболического типа 136
11.2.1 Физические задачи, приводящие к уравнениям параболического типа 136
11.2.2 Корректность постановки задач для уравнений параболического типа 138
11.2.3 Метод интегральных преобразований 142
11.2.4 Метод Фурье разделения переменных 145
11.3 Методы решения задач для уравнений эллиптического типа . 151
11.3.1 Примеры физических задач, приводящих к уравнениям эллиптического типа 151
11.3.2 Корректность постановки краевых задач для уравнений эллиптического типа 152

11.3.3 Методы решения задач для уравнений эллиптического типа . . . 156
11.3.4 Метод функций Грина . . . 156
11.3.5 Метод разделения переменных Фурье . . . 160
11.3.6 Метод потенциалов . . . 164

III ИНТЕГРАЛЪНЫЕ УРАВНЕНИЯ 175

12 Классификация линейных интегральных уравнений 177

13 Уравнения Фредгольма второго рода 179
13.1 Уравнения с вырожденным ядром . . . 179
13.2 Существование решения уравнений второго рода . . . 181
13.3 Существование решения уравнения Вольтерра . . . 183
13.4 Численные методы решения интегральных уравнений . . . 185
13.5 Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений второго рода . . . 185

14 Спектральная теория уравнений Фредгольма с симметричными ядрами 187
14.0.1 Свойства собственных чисел и собственных функций интегральных уравнений с симметричными ядрами . . 187

15 Задача Штурма-Лиувилля и интегральные уравнения 191
15.1 Функция Грина краевой задачи . . . 191
15.1.1 Свойства функции Грина . . . 191

IV ПРИЛОЖЕНИЯ 195

Вопросы к экзаменам 197
.1 Вопросы к коллоквиуму по вариационному исчислению . . . 197
.2 Вопросы к экзамену по методам математической физики . . . 198
.2.1 Дифференциальные уравнения . . . 198
.2.2 Интегральные уравнения . . . 199

Аннотация

Это развёрнутый конспект лекций по курсу математической физики, который я читал на радиофизическом факультете ННГУ в 1990-1999 гг. Курс состоит из трёх глав: вариационное исчисление, дифференциальные уравнения математической физики (уравнения в частных производных) и интегральные уравнения. При его составлении я пытался сохранить тематику, стиль и уровень строгости, традиционные для радиофизического факультета и сложившиеся при проф. Сигалове А.Г. и проф. Морозове С.Ф., которые долгие годы читали данный курс на факультете. Наибольшей ревизии с моей стороны был подвергнут раздел "вариационное исчисление" , что связано с бурным развитием теории экстремальных задач, происшедшим в последние годы. В основу изложения данного раздела положен классический вариационный подход Лагранжа и правило множителей Лагранжа как

универсальный способ снятия дополнительных ограничений, позволяющие с единой позиции излагать как классические вариационные задачи, так и современные задачи оптимального управления.

Курс читается для студентов дневного отделения 2-го года обучения в течение 2-х семестров (3-его и 4-ого) по 1-ой лекции и 1-му (0.5 - в 4-ом семестре) практическому занятию в неделю. В 3-м семестре проводится коллоквиум по вариационному исчислению, в 4-ом - экзамен по остальным разделам курса. В 3-ем семестре проводится также зачёт по практике. Текст лекций набран на LaTeX-е в редакторе *Scientific Word* и свободно распространяется в форматах PostScript (для GSView) и Pdf (для Acrobat Reader). Я благодарен всем, указавшим на опечатки и неточности в данном тексте, которых, возможно, осталось ещё немало. Следует отметить, что данный конспект не может служить полноценной заменой личного конспекта студента, поскольку некоторые детали изложения в нем опущены. В то же время он может быть полезен студентам при подготовке к экзаменам по данному курсу, позволяя им восстановить недостающие или непонятые ими разделы курса. В конце курса приведены списки вопросов к экзамену и коллоквиуму по вариационному исчислению, а также программа проведения практических занятий по всему курсу.

Часть I

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 1

Основные понятия

1.1 Экстремальные задачи

Определение 1. *Функционалом на множестве допустимых элементов* $D = \{d\}$ *называется любая вещественнозначная функция от* d *:*

$$f : D \to \mathbf{R}$$

Примеры:

a) $D = \{1, 2, ..., 125\}$ — множество студентов в аудитории;
$f(d) =$ номер зачётной книжки студента d;

b) $D = \mathbf{R}$, $f(d) = \cos d$;

c) $D = \mathbf{R}^n,\ d = (d_1, ..., d_n),\ f(d) = \|d\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^2}$;

d) $D = C[a, b],\ d \equiv y(\cdot)$ — непрерывная функция от $x \in [a, b]$,
$f(d) = \|d\|_{C[a,b]} = \max\{|y(x)|, x \in [a, b]\}$ — норма функции в данном нормированном пространстве.

Определение 2. *Пусть* f *— функционал на множестве допустимых элементов* D*. Экстремальной задачей*

$$f \to \max_D$$

называется задача отыскания элементов $d^* \in D$ *(решений экстремальной задачи), для которых*

$$f(d^*) \geq f(d) \ \ \forall d \in D.$$

Множество всех решений обозначается $\arg\max_D f$.[1]

В зависимости от свойств множества допустимых элементов экстремальные задачи могут называться по-разному.

Примеры:

[1] Заметим, что с теоретической точки зрения достаточно ограничиться рассмотрением задачи на максимум, т.к. любая задача на минимум сводится к эквивалентной задаче на максимум для функционала с противоположным знаком.

- D — конечное или счётное множество — задача *дискретного математического программирования*;
- $D \subset \mathbf{R}^n$ — задача *математического программирования* (*линейного, нелинейного* — в зависимости от соответствующего свойства функционала);
- D — множество функций непрерывного аргумента — *вариационная задача* (*задача оптимального управления, задача динамического программирования* — в зависимости от специфики постановки).

1.1.1 Четыре основных вопроса теории экстремальных задач

$$f \to \max_D \tag{1.1}$$

- *Существование* решений задачи (1.1);
- *Единственность* решения;
- *Необходимые условия экстремума*:

$$\left\{d^* \in \arg\max_D f\right\} \to \{\text{НУЭ}\}\,;$$

- *Достаточные условия экстремума*:

$$\{\text{ДУЭ}\} \to \left\{d^* \in \arg\max_D f\right\}$$

1.1.2 Задача математического программирования (краткая справка из курса математического анализа)

Задача математического программирования

$$f \to \max_{D \subset \mathbf{R}^n} \tag{1.2}$$

изучается традиционно в курсах математического анализа. Напомним основные известные нам результаты.

- Существование решения.

  Теорема (*К.Вейерштрасс*). Пусть D — компактное[2] множество и f — непрерывная функция на D. Тогда задача (1.2) имеет решение.

- Единственность.

  Теорема. *Если f — выпуклая функция на выпуклом множестве[3] D, то решение задачи (1.2) может быть только одно.*

---

[2] Замкнутое ограниченное.

[3] Множество D в линейном пространстве называется выпуклым, если оно вместе с каждыми своими двумя точками содержит и весь отрезок их соединяющий. Функция $f : D \to R$ считается выпуклой, если $\forall d_1, d_2 \in D$ и $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$f\left(\alpha d_1 + (1-\alpha)\, d_2\right) \leqslant \alpha f\left(d_1\right) + (1-\alpha)\, f\left(d_2\right).$$

- Необходимые условия экстремума.

  Теорема 1. *Пусть D — открытое множество, $x^* \in \arg\max_D f$, и существуют дифференциалы $df(x^*)$, $d^2f(x^*)$. Тогда*

$$df(x^*) = 0 \text{ (теорема Ферма)},$$

$$d^2f(x^*) \le 0.$$

  (второй дифференциал является неположительно определённой квадратичной формой приращений dx независимых переменных).

  Теорема 2 (*Правило множителей Лагранжа*). *Пусть*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_m(x) = 0\}.$$

  Если $x^* \in \arg\max_D f$, и существуют дифференциалы $df(x^*)$, $dg_k(x^*)$, $k = \overline{1,m}$, то найдутся не все равные нулю числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_m^*$ (множители Лагранжа) такие, что для функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(x,\lambda) \equiv \lambda_0 f(x) + \lambda_1 g_1(x) + ... + \lambda_m g_m(x)$$

  выполнены условия

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x^*,\lambda^*) = 0, & i = \overline{1,n} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k}(x^*,\lambda^*) \equiv g_k(x^*) = 0, & k = \overline{1,m} \end{cases}$$

- Достаточные условия.

  Теорема. *Пусть D — открытое множество и в точке $x^* \in D$*

$$df(x^*) = 0,$$
$$d^2f(x^*) < 0$$

  ($d^2f(x^*)$ — отрицательно определенная квадратичная форма). Тогда x^* — точка локального максимума функции f на множестве D.

1.1.3 Вариационные задачи

$$f \to \max_D \tag{1.3}$$

Здесь D — в общем случае произвольное множество функций непрерывного аргумента.

Существуют два основных приема исследования (получения необходимых условий экстремума) подобных задач:

- *Классический вариационный подход* (Эйлер, Лагранж и др.) — сведение задачи с помощью искусственных приёмов к исследованию некоторых вспомогательных задач математического программирования.

- *Современный функциональный подход* (Гильберт, Нейман и др.) — обобщение концепции производной на пространства бесконечной размерности (Гато, Фреше и др.) и формулирование необходимых условий в терминах этих обобщений.

1.1.4 Классический вариационный подход (метод Лагранжа)

Метод Лагранжа получения необходимых условий экстремума в вариационных задачах связан с построением т.н. *допустимой варианты экстремального элемента.*

Пусть d^* — решение экстремальной задачи (1.3). Рассмотрим произвольное семейство $\{d_\varepsilon,\, \varepsilon \in \mathbb{R}^n\}$ (*допустимую варианту элемента* d^*), удовлетворяющее условиям:

1. $d_\varepsilon \in D\ \forall\varepsilon,\, |\varepsilon| < \varepsilon_0,\ \varepsilon_0$ — некоторое положительное число;
2. $d_0 = d^*$.

Рассмотрим функцию $\varphi(\varepsilon) \equiv f(d_\varepsilon)$. Это уже функция конечномерного вектора $\varepsilon \in \mathbf{R}^k$. Очевидно, что

$$\left\{d^* \in \arg\max_D f\right\} \Rightarrow \left\{0 \in \arg\max_{|\varepsilon|<\varepsilon_0} \varphi\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} d\varphi(0) = 0 \\ d^2\varphi(0) \le 0 \end{array}\right.$$

(действительно, $\varphi(0) = f(d^*) \ge f(d_\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$). Выражая полученные условия в терминах функционала f, получаем необходимые условия экстремума для исходной задачи (1.3).

Примечание. Если ε — скалярная величина, то первая производная

$$\varphi'(0) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(d_\varepsilon) - f(d^*)}{\varepsilon} \equiv \delta f$$

называется *первой вариацией* функционала f на допустимой варианте $\{d_\varepsilon,\, \varepsilon \in \mathbf{R}\}$, вторая производная $\varphi''(0) \equiv \delta^2 f$ — *второй вариацией* и т.д. Ясно, что вид вариации, а также *сила* соответствующих необходимых условий экстремума (т.е. их потенциальные возможности по выделению возможных решений задачи из множества допустимых элементов) определяются конструкцией допустимой варианты. Поэтому изобретение новой конструкции варианты позволяет исследовать новые ранее неисследованные классы вариационных задач. Из наиболее известных конструкций отметим *классическую* (Лагранж), *игольчатую* (Вейерштрасс), *импульсную* (Макшейн) *варианты.*

Глава 2

Классические вариационные задачи

2.1 Простейшая задача вариационного исчисления (A)

$$f(d) \equiv J(y(\cdot)) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\, dx \to \max_D,$$

$$D = \left\{ \begin{array}{c} d \equiv y(x) : x \in [x_0, x_1],\ y(\cdot) \in C^2[x_0, x_1], \\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \end{array} \right\}.$$

Здесь x_0, x_1, y_0, y_1 — заданные величины, $F(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^3(\mathbf{R}^3)$ — заданная функция (*интегрант* или *лагранжиан* функционала).

Примеры.

- *Принцип Ферма*: волна в неоднородной среде выбирает для своего распространения тот путь между двумя точками среды, на который ей потребуется минимальное время — интеграл

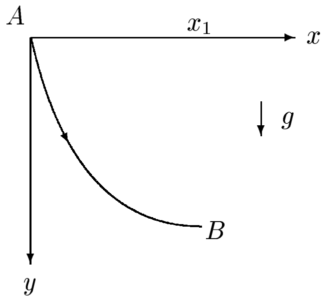
$$T = \int dt = \int\limits_{\widehat{AB}} \frac{ds}{v}$$

принимает своё минимальное значение при его вычислении вдоль траектории распространения волны, соединяющей две заданные точки среды A и B, в сравнении с его значениями на любых других кривых $\widehat{AB}$. В частном случае двумерной среды $(v = v(x, y))$

$$T = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v(x, y(x))}\, dx \to \min.$$

- *Брахистохрона* ("Новая задача, к решению которой приглашаются математики" . И.Бернулли, 1696)

Найти уравнение дуги $\widehat{AB}$, по которой бусинка скатывается под действием силы тяжести за минимальное время (трение отсутствует)



Подобной задачей занимался ещё Галилей. Ему принадлежит доказательство, что при движении по дуге окружности время достижения меньше, чем при движении по хорде. Полное решение задачи дали (помимо самого И.Бернулли) Лейбниц, Я.Бернулли и "один аноним из Англии " (И.Ньютон). Интересно отметить, что все решения были различны и породили впоследствии направления в вариационном исчислении.

Для вариационной постановки задачи найдем скорость бусинки при прохождении горизонта h. Из закона сохранения механической энергии имеем

$$\frac{mv^2}{2} = mgh = mgy \Rightarrow v = \sqrt{2gy},$$

$$T = \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx \to \min. \tag{2.1}$$

2.1.1 Вывод необходимых условий экстремума в задаче (A) классическим вариационным методом

Пусть $y^*(\cdot)$ — решение задачи **(A)**, $\eta(\cdot)$ — произвольная функция класса $C^2[x_0, x_1]$, для которой $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Построим классическую варианту экстремального элемента $y^*(\cdot)$:

$$y_\varepsilon(x) \equiv y^*(x) + \varepsilon\eta(x), \ \varepsilon \in \mathbf{R}.$$

Очевидно, что $y_\varepsilon(\cdot) \in D \ \forall\varepsilon$ и $y_0(\cdot) = y^*(\cdot)$, поэтому данная варианта является допустимой.

Пусть

$$\varphi(\varepsilon) \equiv J(y_\varepsilon) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))\, dx =$$
$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y^*(x) + \varepsilon\eta(x), y^{*\prime}(x) + \varepsilon\eta'(x))\, dx.$$

Необходимые условия экстремума первого и второго порядков имеют вид

$$\delta J \equiv \varphi'(0) = 0, \quad \delta^2 J \equiv \varphi''(0) \leq 0.$$

Вычислим указанные производные функции φ. Дифференцируя интеграл[1] по параметру ε, имеем

$$\begin{gathered}\varphi'(\varepsilon)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)dx,\\ \varphi''(\varepsilon)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\eta^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\eta\eta'+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\eta'^2\right)dx.\end{gathered}\tag{2.2}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y'}\eta' dx&=\frac{\partial F}{\partial y'}\underbrace{\eta\big|_{x_0}^{x_1}}_{0}-\int\limits_{x_0}^{x_1}\eta\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\,dx=\\ &=-\int\limits_{x_0}^{x_1}\eta\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{x_0}^{x_1}2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\eta\eta'\,dx&=\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\frac{d}{dx}\eta^2\,dx=\\ =\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\underbrace{\eta^2\big|_{x_0}^{x_1}}_{0}&-\int\limits_{x_0}^{x_1}\eta^2\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\,dx=\\ &=-\int\limits_{x_0}^{x_1}\eta^2\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\,dx\end{aligned}$$

Подставляя данные выражения в (2.2) и полагая $\varepsilon=0$, получаем необходимые условия экстремума в виде следующих двух интегральных соотношений[2]: *для любой функции $\eta(\cdot)\in C^2[x_0,x_1]$ с нулевыми граничными условиями $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$ справедливы равенства*

$$\varphi'(0)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\,dx=0,\tag{2.3}$$

$$\varphi''(0)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\right)\eta^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\left(\eta'\right)^2\right]dx\le 0.\tag{2.4}$$

Для получения из этих интегральных условий более простых, дифференциальных, докажем сперва следующие два вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *(Основная лемма вариационного исчисления — Лемма Лагранжа)*

Пусть $\psi(x)$ — непрерывная функция на замкнутом отрезке $[x_0,x_1]$, и для любой пробной функции $\eta(\cdot)\in C^2[x_0,x_1]$, которая удовлетворяет граничным условиям $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$, имеет место равенство

---

[1] Дифференцирование по параметру под знаком интеграла в данном случае допустимо — см. свойства интеграла Римана. Во всех полученных выражениях значения всех частных производных функции F берутся в текущей точке $(x,y^*(x)+\varepsilon\eta(x),y^{*\prime}(x)+\varepsilon\eta'(x))$.

[2] Отметим, что здесь и далее все содержащие интегрант F выражения вычисляются в текущих точках $\left(x,y^*(x),y^{*'}(x)\right)$, например,

$$\frac{\partial F}{\partial y}\equiv\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,y^*(x),y^{*'}(x)\right)$$

и т.д.

$$\int_{x_0}^{x_1} \psi(x)\,\eta(x)\,dx = 0.$$

Тогда

$$\psi(x) = 0 \ \forall x \in [x_0, x_1].$$

Доказательство. Допустим, что $\psi(\xi) > 0$ в некоторой точке $\xi \in [x_0, x_1]$. Пусть точка $\xi \in (x_0, x_1)$[3]. Тогда вследствие непрерывности функции $\psi(\cdot)$ существует окрестность точки ξ, для определённости $\Delta \equiv (\xi - \delta, \xi + \delta)$, $\delta > 0$, в которой везде $\psi(x) > 0$. Рассмотрим пробную функцию $\eta(\cdot)$ следующего вида

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \Delta \\ (x - \xi + \delta)^4 (x - \xi - \delta)^4, & x \in \Delta \end{cases}.$$

Очевидно, что

$$\int_{x_0}^{x_1} \psi(x)\,\eta(x)\,dx = \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \psi(x)\,\eta(x)\,dx > 0.$$

Но это противоречит условию леммы. Следовательно исходное предположение неверно и $\psi(x) = 0 \ \forall x \in [x_0, x_1]$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $A(x), B(x)$ — непрерывные на замкнутом отрезке $[x_0, x_1]$ функции, и для любой пробной функции $\eta(\cdot) \in C^2[x_0, x_1]$ с $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ справедливо неравенство*

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(A(x)\,\eta^2(x) + B(x)\,\eta'^2(x)\right) dx \le 0.$$

Тогда

$$B(x) \le 0 \ \forall x \in [x_0, x_1]$$

(без доказательства).

Замечание. В данных леммах можно было считать $\eta(\cdot) \in C^n[x_0, x_1]$, $1 \le n \le \infty$. Докажите это.

Применяя доказанные леммы к (2.3),(2.4), получаем следующее утверждение.

Теорема (*необходимые условия экстремума в задаче* **(A)**).

*Если $y^*(\cdot)$ — решение задачи (**A**), то для всех $x \in [x_0, x_1]$*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)) = 0 \qquad (2.5)$$

(*уравнение Эйлера*) *и*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)) \le 0$$

(*условие Лежандра*).

[3] Случай граничных точек следует рассмотреть отдельно.

Определения.

1. Всякое решение $y(\cdot) \in C^2[x_0, x_1]$ уравнения Эйлера (2.5)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

называется *экстремалью* (этого уравнения, а также функционала J и лагранжиана F).

2. Добавляя к уравнению Эйлера граничные условия для экстремали, получаем т.н. *краевую задачу Эйлера*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \\ y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1. \end{cases}$$

Замечание. Уравнение Эйлера представляет собой квазилинейное (т.е. линейное по старшей производной) обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Действительно, взяв входящую в левую часть полную производную $\frac{d}{dx}$, получаем уравнение в развёрнутом виде

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0.$$

Как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные: $y(x) = \Phi(x, C_1, C_2)$. Для их определения у нас есть два граничных условия:

$$\begin{cases} \Phi(x_0, C_1, C_2) = y_0 \\ \Phi(x_1, C_1, C_2) = y_1 \end{cases}.$$

Эта нелинейная алгебраическая система имеет в достаточно общем случае единственное решение C_1^*, C_2^* , следовательно, при этом краевая задача Эйлера позволяет предельно сузить множество подозреваемых на экстремум функций до одного единственного элемента $y^*(x) = \Phi(x, C_1^*, C_2^*)$. Отметим, что подобное свойство необходимых условий экстремума называется их *полнотой*.

2.1.2 Первые интегралы уравнения Эйлера

Имеется несколько достаточно общих случаев, когда удаётся легко понизить порядок уравнения Эйлера. Вот они:

- $F \equiv F(x, y)$

  Так как при этом $F'_{y'} \equiv 0$, то уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0.$$

  Это не дифференциальное, а алгебраическое уравнение. Множество решений подобных уравнений обычно слишком бедно[4], чтобы можно

[4] Общее решение не содержит произвольных постоянных.

было рассчитывать на нахождение в нём функции с графиком, проходящим через две заданные точки на плоскости. Следовательно, краевая задача Эйлера (а с ней и вариационная задача) в данном случае, как правило, решений не имеет.

- $F \equiv F(x, y')$

Здесь мы имеем $F'_y \equiv 0$, следовательно, уравнение Эйлера имеет форму

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y) = 0.$$

После интегрирования получаем его первый интеграл

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y) = C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Этот первый интеграл (по традиции и в соответствии с тем значением, которое он имеет в механике) называется *интегралом импульса.*

- $F \equiv F(y, y')$

Докажем, что в этом случае мы имеем следующий *интеграл энергии*:

$$F - y'F'_{y'} = C_2.$$

В самом деле, если $y(x)$ — экстремаль, то вычисляя на ней полную производную функции $F - y'F'_{y'}$, получаем

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\left(F - y'F'_{y'}\right) &= F'_y y' + F'_{y'}y'' - y''F'_{y'} - y'F''_{y'y}y' - y'F''_{y'y'}y'' = \\ &= y'\left(F'_y - F''_{y'y}y' - F''_{y'y'}y''\right) = y'\underbrace{\left(F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right)}_{\equiv 0} \equiv 0. \end{aligned}$$

- $F \equiv M(x, y) + y'N(x, y)$ — случай линейного (по отношению к производной y') интегранта.

Здесь мы имеем

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial F}{\partial y} - \tfrac{d}{dx}\tfrac{\partial F}{\partial y'} &\equiv \tfrac{\partial M}{\partial y} + y'\tfrac{\partial N}{\partial y} - y'\tfrac{\partial N}{\partial y} - \tfrac{\partial N}{\partial x} \equiv \\ &\equiv \tfrac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \tfrac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 0, \end{aligned}$$

и, следовательно, уравнение Эйлера, как и в первом случае, вырождается в алгебраическое уравнение. Рассмотрим следующие два логически возможные варианта:

1)
$$M'_y - N'_x \equiv 0. \tag{2.6}$$

Здесь уравнение Эйлера фактически имеет вид

$$0 \equiv 0,$$

и поэтому любая функция $y(\cdot) \in C^2[x_0, x_1]$ является его экстремалью. Более того, для любой такой функции, удовлетворяющей ещё и граничным условиям, функционал имеет одно и то же значение. Действительно, условие (2.6) является достаточным для того, чтобы дифференциальная форма $Mdx + Ndy$ была полным дифференциалом некоторой функции двух переменных $\Phi(x, y)$: $d\Phi(x, y) \equiv Mdx + Ndy$. Поэтому величина функционала не зависит от пробной функции, а определяется лишь ее граничными значениями:

$$J(y(\cdot)) = \int\limits_{x_0}^{x_1} (\Phi(x, y(x)))' \, dx = \Phi(x, y(x))|_{x_0}^{x_1} = \\ = \Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_0, y_0).$$

Мы можем, следовательно, сказать, что любая такая функция является решением вариационной задачи (или, что последняя является *вырожденной*).

1.

$$M_y^{'} - N_x^{'} \not\equiv 0.$$

В этом случае уравнение Эйлера не вырождается в тривиальное, однако, множество экстремалей является маломощным. Следовательно, вариационная задача, как правило, решений не имеет.

Пример (брахистохрона — см. (2.1)).
Для интегранта

$$F \equiv \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}}$$

уравнение Эйлера имеет интеграл энергии

$$F - y' F_{y'}^{'} = \frac{1}{\sqrt{y\left(1 + (y')^2\right)}} = \hat{C}$$

(в оптике данный интеграл известен как *закон Снеллиуса*[5] : $\frac{\cos\alpha}{v} = \text{const}$, где α — *угол скольжения* траектории по отношению к горизонту). Следовательно,

$$y\left(1 + (y')^2\right) = C.$$

Это — обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешённое относительно производной. Для его интегрирования введём параметр

$$y' = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Тогда

$$y = \frac{C}{1+(y')^2} = C\sin^2\frac{t}{2} = \\ = \frac{C}{2}(1 - \cos t),$$

[5] Именно на этом основано решение задачи о брахистохроне, которое дал Я.Бернулли. Заметим, что он не вывел данное соотношение как следствие уравнения Эйлера, а напротив, взял его за исходное, исходя из оптико-механической аналогии задачи.

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C}{2}(1 - \cos t)\, dt.$$

В итоге мы получаем решение уравнения в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = C_1 (t - \sin t) + C_2 \\ y = C_1 (1 - \cos t) \end{cases}$$

(*циклоида*[6]).

Для начальной точки $x(0) = y(0) = 0$, например, получаем следующее семейство экстремалей

$$\begin{cases} x = C (t - \sin t) \\ y = C (1 - \cos t) \end{cases}.$$

Условие Лежандра в данной задаче имеет вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, y') \equiv \frac{1}{\sqrt{y}\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}} > 0$$

и выполнено на любой экстремали. Из него, впрочем, вытекает, что экстремум может быть только минимумом.

2.2 Вариационная задача на классе векторных функций (B)

Здесь множество допустимых функций[7] имеет вид

$$D = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{y}(x) \equiv \{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\} : \mathbf{y}(\cdot) \in \mathbf{C}^2[x_0, x_1], \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,\ \mathbf{y}(x_1) = \mathbf{y}_1 \end{array} \right\},$$

а функционал на нём —

$$J(\mathbf{y}(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x))\, dx \to \max,$$

где $F(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^3\left(\mathbf{R}^{2n+1}\right)$.

2.2.1 Вывод необходимых условий экстремума в задаче (B) вариационным методом

Пусть $\mathbf{y}^*(\cdot)$ — решение задачи, $\boldsymbol{\eta}(\cdot) \equiv \{\eta_1(\cdot), ..., \eta_n(\cdot)\} \in \mathbf{C}^2[x_0, x_1]$ — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая граничным условиям $\boldsymbol{\eta}(x_0) = \boldsymbol{\eta}(x_1) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\}$ — произвольный вектор в $\mathbf{R}^n$.

[6]Траектория гнилого яблока, прилипшего к колесу кареты И.Бернулли, катящемуся (о колесе) без проскальзывания по булыжной (?) мостовой Базеля ...

[7]Пространство $\mathbf{C}^2[x_0, x_1]$ по определению состоит из вектор-функций, компоненты которых принадлежат $C^2[x_0, x_1]$.

Определим варианту экстремальной функции $\mathbf{y}^*(\cdot)$ следующим образом[8]:

$$\mathbf{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) \equiv \mathbf{y}^*(x) + \boldsymbol{\varepsilon}\flat\boldsymbol{\eta}(x) \equiv$$
$$\equiv \{y_1^*(x) + \varepsilon_1\eta_1(x), ..., y_n^*(x) + \varepsilon_n\eta_n(x)\}.$$

Легко проверить[9] допустимость данной варианты. Пусть

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv J(\mathbf{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\cdot)) =$$
$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} F\big(x, y_1^*(x) + \varepsilon_1\eta_1(x), ..., y_n^*(x) + \varepsilon_n\eta_n(x), ...$$
$$, y_1^{*'}(x) + \varepsilon_1\eta_1'(x), ..., y_n^{*'}(x) + \varepsilon_n\eta_n'(x)\big)\, dx.$$

Необходимое условие в задаче

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) \to \max_{|\varepsilon|<\varepsilon_0}$$

для подозреваемой точки $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ имеет вид

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_k}(\mathbf{0}) = \int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_k'}\right)\eta_k(x)\, dx = 0,\ k = \overline{1, n}.$$

Применяя лемму 1, выводим отсюда необходимое условие экстремума в форме *системы уравнений Эйлера*:

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_k'} = 0,\ k = \overline{1, n},$$

или в форме *векторного уравнения Эйлера*

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} F - \frac{d}{dx}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}'} F = \mathbf{0}. \tag{2.7}$$

Стоит отметить, что в справедливости данных необходимых условий экстремума можно было убедиться и проще, исходя из результатов полученных для предыдущей вариационной задачи. В самом деле, фиксируя любые $n-1$ компоненты функции $y^*(\cdot)$, мы приходим, по-существу, к задаче нахождения последней n-ой компоненты, доставляющей экстремум функционалу. Но это уже задача класса (A) и следовательно, необходимым условием экстремума в ней является выполнение уравнения Эйлера по данной компоненте.

---

[8]Векторная операция $\flat$ фактически определяется выражением в фигурных скобках. Наверное, эту операцию можно выразить через известные векторные операции. Попытайтесь ...

[9]Проверьте!

2.2.2 Интегралы векторного уравнения Эйлера

- Если функция F не зависит от переменной y_k, уравнение Эйлера (2.7) имеет *интеграл импульса*[10]

$$\frac{\partial F}{\partial y'_k} = C_k.$$

- Если функция F не зависит явно от переменной x, уравнение имеет *интеграл энергии*

$$-H \equiv F - \left\langle \mathbf{y}', \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}'} F \right\rangle = \\ = F - \sum_{k=1}^{n} y_k^{'} F'_{y_k} = C.$$

Примеры.

- *Принцип Гамильтона.*

  Пусть состояние механической системы в момент времени t однозначно определяется заданием k величин $q_1, q_2, ..., q_k$ — *обобщёнными координатами* системы с k степенями свободы.

  Принцип наименьшего действия: *на заданном интервале времени $t \in [t_0, t_1]$ механическая система эволюционирует вдоль экстремалей функционала действия*

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{L}\left(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\right) dt,$$

  где $\mathrm{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ — *лагранжиан (функция Лагранжа) системы*, $\dot{\mathbf{q}}(t) \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{q}(t)$.

  Из сформулированного *принципа наименьшего действия*[11] вытекают следующие *уравнения движения* механической системы

$$\frac{\partial\, \mathrm{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\, \mathrm{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0, \ i = \overline{1, k}$$

  (уравнения Лагранжа — основные уравнения классической механики*).*

  1. *Движение свободной материальной точки.*

     Принимая во внимание изотропность и однородность пространства и однородность времени, имеем здесь $\mathbf{q} \equiv \mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{v}$, $\mathrm{L} \equiv \mathrm{L}\left(\mathbf{v}^2\right)$. Следовательно, уравнения Лагранжа дают

$$\frac{\partial\, \mathrm{L}}{\partial v_i} = \mathrm{const} \Rightarrow \mathbf{v} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$$

     — *первый закон Ньютона.*

[10] Точнее, закон сохранения соответствующей k-ой компоненты импульса.

[11] Основной постулат теоретической физики.

2. *Замкнутая система из N материальных точек.*
   Здесь $\mathbf{q} \equiv \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N\}$, $\dot{\mathbf{q}} \equiv \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_N\}$,

$$\mathrm{L} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i |\mathbf{v}_i|^2}{2} - \mathrm{U}(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N)$$

   где U — *потенциальная энергия* взаимодействия точек между собой. Уравнения Лагранжа имеют вид

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}_i} \mathrm{U}$$

   — *второй закон Ньютона.*

- *Траектории волн в неоднородной среде (приближение геометрической оптики).*

Согласно принципу Ферма "траектория волны"[12] $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$, $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ в трёхмерной неоднородной среде доставляет минимум функционалу времени распространения

$$T = \int\limits_{\widehat{AB}} \frac{ds}{c(\mathbf{r})} = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{|\dot{\mathbf{r}}(\tau)|}{c(\mathbf{r}(\tau))}\, d\tau = \\ = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\sqrt{\dot{x}^2(\tau)+\dot{y}^2(\tau)+\dot{z}^2(\tau)}}{c(x(\tau),y(\tau),z(\tau))}\, d\tau,$$

где $c(\mathbf{r})$ — скорость волны в точке $\mathbf{r}$. Выписывая соответствующие уравнения Эйлера для данного функционала, получаем следующие основные уравнения геометрической оптики — *лучевые уравнения*

$$\begin{cases} n_x^{'} |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| - \frac{d}{d\tau} n \frac{\dot{x}}{|\dot{\mathbf{r}}(\tau)|} = 0, \\ n_y^{'} |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| - \frac{d}{d\tau} n \frac{\dot{y}}{|\dot{\mathbf{r}}(\tau)|} = 0, \\ n_z^{'} |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| - \frac{d}{d\tau} n \frac{\dot{z}}{|\dot{\mathbf{r}}(\tau)|} = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

где $n(\mathbf{r}) \equiv c_0 / c(\mathbf{r})$ — *показатель преломления.*

1. *Однородная среда $n(\mathbf{r}) \equiv n_0$.*
   В этом случае из (2.8) получаем

$$\begin{cases} \frac{\dot{x}}{|\dot{\mathbf{r}}(\tau)|} = \tilde{c}_1, \\ \frac{\dot{y}}{|\dot{\mathbf{r}}(\tau)|} = \tilde{c}_2, \\ \frac{\dot{z}}{|\dot{\mathbf{r}}(\tau)|} = \tilde{c}_3, \end{cases}$$

   поэтому, решая данную систему как алгебраическую относительно производных, получаем после интегрирования

$$\dot{x} = c_1,\ \dot{y} = c_2,\ \dot{z} = c_3 \Rightarrow \\ x(\tau) = c_1\tau + d_1,\ y(\tau) = c_2\tau + d_2,\ z(\tau) = c_3\tau + d_3$$

   — прямая в пространстве.

[12] Не будем уточнять, что это такое — см. физические курсы.

2. *Стратифицированная среда* $n(\mathbf{r}) \equiv n(z)$.
Здесь мы имеем прежде всего

$$\begin{cases} n\frac{\dot{x}}{|\dot{\mathbf{r}}(\tau)|} = \tilde{c}_1, \\ n\frac{\dot{y}}{|\dot{\mathbf{r}}(\tau)|} = \tilde{c}_2, \end{cases}$$

поэтому величины $\dot{x}$ и $\dot{y}$ пропорциональны и вся траектория лежит в вертикальной плоскости $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Без потери общности можно считать её плоскостью $y = 0$. Возьмём теперь в качестве параметра $\tau \equiv x$. Функционал времени запишется тогда в виде

$$T = \int\limits_{x_0}^{x_1} n(z(x)) \sqrt{1 + (z'(x))^2}\, dx.$$

Поскольку лагранжиан данного функционала не зависит явно от x, уравнение Эйлера имеет интеграл энергии

$$n\sqrt{1 + z'^2} - z'n\frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2}} = c_1.$$

Следовательно, уравнение траектории —

$$n(z) = c_1\sqrt{1 + z'^2}, \tag{2.9}$$

или — в геометрических терминах —

$$n(z)\cos\theta = c_1,$$

где θ — угол между траекторией луча и осью x (*угол скольжения* луча) — *закон преломления (Снеллиуса)*.
В ряде случаев уравнение (2.9) удаётся проинтегрировать в элементарных функциях.

(a) Для линейного профиля $c(z) \equiv az + b$ уравнение

$$(az + b)\sqrt{1 + z'^2} = c_2$$

может быть проинтегрировано с помощью подстановки $z' = \operatorname{tg} t$ и имеет решение

$$\begin{cases} z(t) = -\frac{b}{a} + c_3\cos t, \\ x(t) = -c_3\sin t + c_4 \end{cases}$$

— дуга окружности $\left(z + \frac{b}{a}\right)^2 + (x - c_4)^2 = c_3^2$.

(b) В случае $n^2(z) \equiv az + b$ уравнение

$$az + b = c_1^2\left(1 + z'^2\right)$$

может быть проинтегрировано методом разделения переменных и имеет интеграл

$$az + b = c_1^2 + a^2(c_2 \pm c_1 x)^2$$

— дуги квадратичных парабол.

(c) При $n(z) \equiv az+b$ уравнение

$$az+b=c_1\sqrt{1+z'^2}$$

интегрируется подстановкой $z'=\operatorname{sh} t$:

$$\begin{cases} z=\frac{c_1 \operatorname{ch} t-b}{a} \\ x=\frac{c_1}{a}t+c_2 \end{cases}$$

— дуга цепной линии

$$z=\frac{1}{a}\left(c_1 \operatorname{ch}\left(\frac{a(x-c_2)}{c_1}\right)-b\right).$$

2.3 Вариационная задача на классе функций со старшими производными (C)

Здесь множество допустимых функций описывается следующим образом

$$D=\left\{\begin{array}{c} y(x): x\in[x_0,x_1],\ y(\cdot)\in C^{2k}[x_0,x_1], \\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(k-1)}(x_0)=y_0^{(k-1)}, \\ y(x_1)=y_1,\ y'(x_1)=y_1',\ \ldots, y^{(k-1)}(x_1)=y_1^{(k-1)}, \end{array}\right\}$$

где $x_0,x_1,y_0,y_0',\ldots,y_0^{(k-1)}$, $y_1,y_1',\ldots,y_1^{(k-1)}$ — заданные величины, а функционал имеет вид

$$J(y(\cdot))=\int\limits_{x_0}^{x_1}F\left(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(k)}(x)\right)dx\to\max_D,$$

где $F(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)\in C^{k+1}\left(\mathbf{R}^{k+1}\right)$.

2.3.1 Вывод необходимых условий экстремума в задаче (C) вариационным методом

Пусть $y^*(\cdot)\in D$ — решение задачи **(C)**, $\eta(\cdot)\in C^{2k}[x_0,x_1]$ — произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$\begin{cases} \eta(x_0)=0,\ \eta'(x_0)=0,\ldots,\ \eta^{(k-1)}(x_0)=0, \\ \eta(x_1)=0,\ \eta'(x_1)=0,\ldots,\ \eta^{(k-1)}(x_1)=0. \end{cases}$$

Определим допустимую варианту экстремального элемента $y^*(\cdot)$ выражением

$$y_\varepsilon(x)=y^*(x)+\varepsilon\eta(x),\ \varepsilon\in\mathbf{R}.$$

Пусть

$$\varphi(\varepsilon)=J(y_\varepsilon(\cdot))= \\ =\int\limits_{x_0}^{x_1}F\left(x,y_\varepsilon(x),y_\varepsilon'(x),\ldots,y_\varepsilon^{(k)}(x)\right)\,dx.$$

Для первой вариации функционала тогда получаем

$$\delta J = \varphi'(0) = \\ = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\eta^{(k)} \right) dx,$$

где все частные производные вычислены на $y^*(\cdot)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(l)}}(x) \equiv \frac{\partial F}{\partial y^{(l)}}\left(x, y^*(x), y^{*\prime}(x), \ldots, y^{*(k)}(x)\right), \ldots$$

Преобразуем выражение для первой вариации. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия для пробной функции $\eta(x)$, получаем

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\,dx = \eta\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\,dx = -\int_{x_0}^{x_1} \eta\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y''}\eta''\,dx = \eta'\frac{\partial F}{\partial y''}\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''}\,dx = \\ = -\eta\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''}\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \eta\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}\,dx,$$

$$, \ldots,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\eta^{(k)}\,dx = (-1)^k \int_{x_0}^{x_1} \eta\frac{d^k}{dx^k}\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\,dx.$$

Поэтому

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \ldots + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right) \eta\,dx = 0.$$

Применяя обобщение основной леммы вариационного исчисления (см. замечание к ней), получаем отсюда следующее *уравнение (Эйлера-) Пуассона*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \ldots + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} = \\ = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{d^l}{dx^l}\frac{\partial F}{\partial y^{(l)}} = 0$$

— необходимое условие экстремума в задаче (**C**).

2.4 Вариационная задача на классе векторных функций со старшими производными (B&C)

Если класс допустимых функций состоит из функций векторного типа:

$$D = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{y}(x) : x \in [x_0, x_1],\ \mathbf{y}(\cdot) \in \mathbf{C}^{2k}[x_0, x_1], \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,\, \mathbf{y}'(x_0) = \mathbf{y}_0',\, \ldots,\, \mathbf{y}^{(k-1)}(x_0) = \mathbf{y}_0^{(k-1)}, \\ \mathbf{y}(x_1) = \mathbf{y}_1,\, \mathbf{y}'(x_1) = \mathbf{y}_1',\, \ldots,\, \mathbf{y}^{(k-1)}(x_1) = \mathbf{y}_1^{(k-1)}, \end{array} \right\}$$

где $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0', \ldots, \mathbf{y}_0^{(k-1)}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1', \ldots, \mathbf{y}_1^{(k-1)}$ — заданные векторы с n компонентами, и функционал на D имеет вид

$$J(\mathbf{y}(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \ldots, \mathbf{y}^{(k)}(x)\right) dx \to \max_D,$$

то необходимым условием экстремума будет являться следующая *система уравнений (Эйлера-) Пуассона*

$$\sum_{l=0}^{k}(-1)^l \frac{d^l}{dx^l}\frac{\partial F}{\partial y_i^{(l)}}=0,\ i=\overline{1,n}$$

(докажите это!).

2.5 Вариационная задача на классе функций с двумя независимыми переменными (E)

Здесь множество допустимых функций

$$D=\left\{z(x,y):(x,y)\in\Omega,\ z(\cdot,\cdot)\in C^2(\Omega),\ z(x,y)|_{\partial\Omega}=\alpha(x,y)\right\},$$

где Ω — заданное подмножество $\mathbf{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $\alpha(\cdot,\cdot)$ — заданная непрерывная функция на $\partial\Omega$. Функционал задан в виде двойного интеграла

$$J(z(\cdot,\cdot))=\iint\limits_{\Omega} F\left(x,y,z(x,y),z'_x(x,y),z'_y(x,y)\right)\,dxdy\to\max_{D},$$

где $F(x,y,z,p,q)\in C^2\left(\mathbf{R}^5\right)$.

2.5.1 Вывод необходимых условий экстремума в задаче (E) вариационным методом

Пусть $z^*(\cdot,\cdot)$ — решение задачи (**E**), $\eta(x,y)\in C^2(\Omega)$ — произвольная (пробная) функция, удовлетворяющая граничному условию $\eta(x,y)|_{\partial\Omega}=0$. Варианта $z_\varepsilon(x,y)\equiv z^*(x,y)+\varepsilon\eta(x,y)$, $\varepsilon\in\mathbf{R}$, очевидно, является допустимой. Положим

$$\varphi(\varepsilon)=\iint\limits_{\Omega} F\left(x,y,z_\varepsilon(x,y),z'_{\varepsilon x}(x,y),z'_{\varepsilon y}(x,y)\right)\,dxdy.$$

Для первой вариации функционала получаем

$$\begin{gathered}\delta J=\varphi'(0)=\\=\iint\limits_{\Omega}\left(F'_z\eta+F'_p\eta'_x+F'_q\eta'_y\right)\,dxdy=0.\end{gathered}\tag{2.10}$$

Применяя формулу Грина

$$\int\limits_{\partial\Omega+}(P\,dx+Q\,dy)=\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy$$

для $P\equiv 0$, $Q\equiv F'_p\eta$ и учитывая, что на границе функция $\eta\equiv 0$, получаем

$$\begin{gathered}\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(F'_p\eta\right)\,dxdy=\iint\limits_{\Omega}F'_p\eta'_x\,dxdy+\\+\iint\limits_{\Omega}\eta\frac{\partial}{\partial x}F'_p\,dxdy=\oint\limits_{\partial\Omega+}F'_p\eta\,dy=0.\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\Omega} F'_p \eta'_x \, dxdy = -\iint\limits_{\Omega} \eta \frac{\partial}{\partial x} F'_p \, dxdy$$

и, соответственно,

$$\iint\limits_{\Omega} F'_q \eta'_y \, dxdy = -\iint\limits_{\Omega} \eta \frac{\partial}{\partial y} F'_q \, dxdy.$$

После подстановки этих формул в (2.10) получаем следующее выражение для первой вариации:

$$\delta J = \iint\limits_{\Omega} \left(F'_z - \frac{\partial}{\partial x} F'_p - \frac{\partial}{\partial y} F'_q \right) \eta \, dxdy = 0.$$

Используя соответствующее обобщение леммы 1, выводим отсюда необходимое условие экстремума для задачи ($\mathbf{E}$) в виде краевой задачи для *уравнения (Эйлера-) Остроградского*[13]*:*

$$\begin{cases} F'_z - \frac{\partial}{\partial x} F'_p - \frac{\partial}{\partial y} F'_q = 0 \\ z|_{\partial\Omega} = \alpha\,(x, y)\,. \end{cases}$$

Пример (*свободные колебания натянутого отрезка упругой струны*).

Пусть $u\,(t, x)$ — отклонение в момент времени t точки x струны ($0 \le x \le l$) от положения равновесия, $u\,(0, t) = u\,(l, t) = 0$. Для кинетической энергии движения и для потенциальной энергии упругих сил имеем соответственно

$$E = \frac{1}{2} \int\limits_0^l \rho(x) u_t'^2 \, dx,$$
$$U = \frac{1}{2} \int\limits_0^l k\,(x)\, u_x'^2 \, dx,$$

где $\rho(x)$ — плотность распределения массы струны, $k(x)$ — параметр, характеризующий упругие свойства струны.

Действительно, рассмотрим малый элемент струны длиной dx. Его масса $dm = \rho dx$, а кинетическая энергия $dE = \frac{1}{2}\rho u_t'^2$. В линейном приближении дополнительная потенциальная энергия натяжения пропорциональна относительному удлинению (почему не квадрату?) длины элемента:

$$dU = k\frac{dl - dx}{dx} = k\frac{\left(\sqrt{1 + u_x'^2} - 1\right) dx}{dx} \simeq \frac{1}{2} k u_x'^2.$$

По принципу Гамильтона уравнения движения струны представляют собой уравнения Остроградского для функционала действия

$$S = \int\limits_{t_0}^{t_1} L \, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} (E - U)\; dt =$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^l \left(\rho\,(x)\, (u'_t)^2 - k\,(x)\,(u'_x)^2 \right) \, dxdt.$$

[13]Заметим, что здесь $\frac{\partial}{\partial x}$ - "полная частная" производная по переменной x, то есть при дифференцировании по ней следует учесть все варианты вхождения переменной в дифференцируемое выражение.

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(x\right)u'_t\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\left(x\right)u'_x\right)=$$
$$=\rho\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(x\right)u'_x\right)=0.$$

Уравнение

$$\boxed{\rho\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)}$$

называется волновым уравнением. Это — одно из основных уравнений математической физики. В частном случае, когда $\rho\left(x\right)=\rho_0=\text{const}$, $k\left(x\right)=k_0=\text{const}$, оно принимает свой простейший вид

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}},$$

где $a^2\equiv\frac{k_0}{\rho_0}$. Общее решение последнего уравнения

$$u\left(t,x\right)=f\left(x-at\right)+g\left(x+at\right),$$

где $f\left(\cdot\right),g\left(\cdot\right)\in C^2\left(\mathbf{R}\right)$ — произвольные функции (профили волн). Таким образом, параметр a выступает как групповая скорость распространения волн в струне.

2.5.2 Обобщения задачи (E)

- *Случай векторных функции и аргумента* $\mathbf{z}\left(\mathbf{x}\right)$.

  В этом случае необходимые условия экстремума имеют форму *системы уравнений (Эйлера-) Остроградского*:

  $$F'_{z_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F'_{\frac{\partial z_j}{\partial x_i}}=0,\quad j=\overline{1,m}.$$

- *Случай функционала со старшими частными производными.*

  Пусть, например, функционал имеет вид

  $$\iint\limits_{\Omega}F\left(x,y,z,z'_x,z'_y,z''_{xx},z''_{xy},z''_{yy}\right)\,dxdy.$$

  Тогда необходимые условия экстремума можно получить в виде следующего *уравнения Эйлера-Пуассона-Остроградского*

  $$F'_z-\frac{\partial}{\partial x}F'_{z'_x}-\frac{\partial}{\partial y}F'_{z'_y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}F'_{z''_{xx}}+$$
  $$+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F'_{z''_{xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F'_{z''_{yy}}=0.$$

  Аналогично выводятся необходимые условия экстремума и для более общих задач подобных типов.

2.6 Изопериметрическая задача (F)

В своей простейшей постановке изопериметрическая[14] задача имеет вид

$$J\left(y\left(\cdot\right)\right)=\int\limits_{x_0}^{x_1}F\left(x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right)dx\to\max_D,$$

где

$$D=\left\{\begin{array}{c} y\left(x\right):x\in\left[x_0,x_1\right],\ y\left(\cdot\right)\in C^2\left[x_0,x_1\right],\ y\left(x_0\right)=y_0,y\left(x_1\right)=y_1, \\ g\left(y\left(\cdot\right)\right)\equiv\int\limits_{x_0}^{x_1}G\left(x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right)dx=l=\mathrm{const}, \end{array}\right\}$$

$F\left(\cdot,\cdot,\cdot\right),G\left(\cdot,\cdot,\cdot\right)\in C^3\left(\mathbf{R}^3\right)$ — заданные функции.

Пример (*задача Дидоны*): найти кривую заданной длины, окружающую область максимальной площади — в простейшей постановке

$$\left\{\begin{array}{l} \int\limits_{x_0}^{x_1}ydx\to\max, \\ y\left(x_0\right)=y_0,\ y\left(x_1\right)=y_1, \\ \int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}dx=l. \end{array}\right.$$

Согласно легенде, Дидоне (825 г. до н.э.) — спасающейся от преследований со стороны своего брата финикийской царевне — было предложено взять себе столько земли на североафриканском побережье, сколько она сможет “окружить” бычьей шкурой. Находчивая царевна разрезала шкуру на ремешки и оградила полученным шнуром значительную часть побережья, где и основала крепость Карфаген.

Сделаем грубую оценку возможностей Дидоны. Из геометрии нам известно т.н. изопериметрическое неравенство : для любой плоской замкнутой кривой

$$S\leq\frac{L^2}{4\pi},$$

где L — периметр кривой, S — площадь внутренней области. Отметим, что знак равенства достигается для окружности. Если площадь шкуры ~ 2 м^2, ширина шнура ~ 2 мм, то его длина $\sim\frac{2}{2\cdot 10^{-3}}\simeq 10^3$м. Отсюда в силу изопериметрического неравенства $S\leq\frac{10^6}{4\pi}$м^2 $\sim 10^5$м^2 $=10$ га, что вполне сопоставимо с размерами Карфагена.

2.6.1 Вывод необходимых условий экстремума в изопериметрической задаче (F)

Пусть $y^*\left(\cdot\right)\in D$ — решение задачи, $\boldsymbol{\eta}\left(\cdot\right)\equiv\left\{\eta_1\left(\cdot\right),\eta_2\left(\cdot\right)\right\}\in\mathbf{C}^2\left[x_0,x_1\right]$ — произвольная (пробная) функция, удовлетворяющая граничным условиям $\boldsymbol{\eta}\left(x_0\right)=\boldsymbol{\eta}\left(x_1\right)=\mathbf{0}$. Положим[15]

$$\begin{array}{c} y_\varepsilon\left(x\right)\equiv y^*\left(x\right)+\left\langle\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\eta}\left(x\right)\right\rangle\equiv \\ \equiv y^*\left(x\right)+\varepsilon_1\eta_1\left(x\right)+\varepsilon_2\eta_2\left(x\right). \end{array}$$

[14] От слова “периметр” .

[15] Угловыми скобками обозначено скалярное произведение векторов.

При произвольном векторе $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{R}^2$ функция $y_\varepsilon(x)$ не принадлежит множеству допустимых функций D, так как она не удовлетворяет, вообще говоря, изопериметрическому условию $g(y(\cdot)) = l = \mathrm{const}$. Пусть

$$E \equiv \{\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = l\},$$

где

$$\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \equiv \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))\, dx.$$

Для функции

$$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \equiv \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))\, dx$$

рассмотрим следующую задачу математического программирования

$$\left\{\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to \max_E\right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to \max \\ \psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = l \end{array} \right\}. \qquad (2.11)$$

Если $y^*(\cdot)$ — решение задачи $(\mathbf{F})$, то вектор $(0,0)$ является решением задачи (2.11) (докажите!). Поэтому по правилу Лагранжа (см. раздел 1.1.2) для функции

$$\mathcal{L}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_0, \lambda_1) \equiv \lambda_0 \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \lambda_1 (\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - l),$$

где $(\lambda_0)^2 + (\lambda_1)^2 > 0$, имеем в точке $(0,0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_2} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = \psi(0,0) - l = 0. \end{array} \right.$$

Но

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_{1,2}} = \int\limits_{x_2}^{x_1} \left[\lambda_0 \left(F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'}\right) + \lambda_1 \left(G'_y - \frac{d}{dx} G'_{y'}\right)\right] \eta_{1,2}(x)\, dx = \\ = \int\limits_{x_2}^{x_1} \left(L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'}\right) \eta_{1,2}(x)\, dx = 0, \end{gathered}$$

где

$$L(x, y, y') \equiv \lambda_0 F(x, y, y') + \lambda_1 G(x, y, y')$$

— *функция Лагранжа для изопериметрической задачи* $(\mathbf{F})$.

Применяя основную лемму вариационого исчисления, получаем необходимые условия экстремума в следующей форме

$$\left\{ \begin{array}{l} L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} = 0, \\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1, \\ \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x, y(x), y'(x))\, dx = l, \\ (\lambda_0)^2 + (\lambda_1)^2 > 0. \end{array} \right. \qquad (2.12)$$

Замечания

- Общее решение *уравнения Лагранжа* $L'_y - \frac{d}{dx}L'_{y'} = 0$ второго порядка имеет вид $y = \Phi(x, C_1, C_2)$. Для определения четырёх неизвестных постоянных $C_1, C_2, \lambda_0, \lambda_1$ имеем четыре условия: два граничных, изопериметрическое и условие нетривиальности вектора (λ_0, λ_1). Следовательно, набор (2.12) является полным.

- Так как вектор (λ_0, λ_1) определяется с точностью до произвольного множителя, то можно ограничиться рассмотрением следующих двух случаев:

  1. *вырожденный случай* $\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = 1$; здесь $L \equiv G$, поэтому возможные решения краевой задачи являются экстремалями функционала $g(y(\cdot))$ и не зависят от функционала $J(y(\cdot))$; подобные решения вариационной задачи возникают обычно в тех случаях, когда множество допустимых элементов вырождено (содержит "мало" элементов);
  2. *невырожденный случай* $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \lambda = ?$.

- Вследствие симметрии лагранжиана L по отношению к функциям F и G, экстремали одинаковы в следующих двух задачах

$$\left\{ \begin{array}{c} J(y(\cdot)) \to \max, \\ g(y(\cdot)) = l \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} g(y(\cdot)) \to \max, \\ J(y(\cdot)) = l_1 \end{array} \right\}.$$

  Подобные задачи называются *двойственными* по отношению друг к другу. Например, двойственными являются задача о поиске кривой заданной длины, ограничивающей фигуру максимальной площади, и задача определения фигуры заданной площади с минимальной длиной границы (в обоих случаях искомая кривая — окружность).

Пример (*решение задачи Дидоны*).
Для лагранжиана

$$L = \lambda_0 y + \lambda_1 \sqrt{1 + (y')^2}$$

уравнение Лагранжа имеет интеграл энергии

$$L - y' L'_{y'} = \lambda_0 y - \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1.$$

Рассмотрим возможные варианты:

1. $\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = 1$

$$\begin{array}{c} y' = C \Rightarrow y = y_0 + (y_1 - y_0)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \Rightarrow \\ l = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}; \end{array}$$

   Заметим, что в данном случае множество допустимых элементов состоит из одной единственной линейной функции, что связано со слишком жёстким изопериметрическим условием. На этой единственной функции, естественно, и реализуется экстремум.

2. $\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = \lambda$

$$y = C_1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

С помощью подстановки $y' = \operatorname{tg} t$ находим решение в параметрической форме

$$\begin{cases} y = C_1 - \lambda \cos t \\ x = C_2 + \lambda \sin t \end{cases},$$

или — в неявной форме —

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2$$

— уравнение дуги окружности. Константы C_1, C_2, λ могут быть определены из граничных и изопериметрического условий. Заметим, что последнее может быть выполнено лишь при условии $l \in (l_{\min}, l_{\max}]$, где постоянные $l_{\min}, l_{\max}$ определяются из граничных условий ($l_{\min} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$; $l_{\max}$ найдите самостоятельно). Следовательно, для $l \notin [l_{\min}, l_{\max}]$ задача Дидоны решения не имеет[16].

2.6.2 Обобщения задачи (F)

Пусть допустимые функции $\mathbf{y}(\cdot)$ в функционале

$$J(\mathbf{y}(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x))\, dx \to \max_D,$$

являются векторными, и имеется конечный набор изопериметрических условий:

$$D = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{y}(x) : x \in [x_0, x_1],\ \mathbf{y}(\cdot) \in \mathbf{C}^2[x_0, x_1],\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,\ \mathbf{y}(x_1) = \mathbf{y}_1, \\ g_i(\mathbf{y}(\cdot)) \equiv \int_{x_0}^{x_1} G_i(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x))\, dx = l_i,\ i = \overline{1, m}. \end{array} \right\}$$

Тогда необходимое условие экстремума в данной задаче будет иметь вид системы

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{y}} L - \frac{d}{dx} \nabla_{\mathbf{y}'} L = \mathbf{0}, \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,\ \mathbf{y}(x_1) = \mathbf{y}_1, \\ \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{G}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x))\, dx = \mathbf{l}, \\ (\lambda_0)^2 + (\lambda_1)^2 + ... + (\lambda_m)^2 > 0. \end{cases}$$

где функция Лагранжа $L \equiv \lambda_0 F + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{G} \rangle \equiv \lambda_0 F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i$.

Отсюда, переходя от скалярной функции к векторной (повышая размерность функции), можно также получить необходимое условие в изопериметрической задаче со старшими производными: следует для соответствующей функции Лагранжа выписать уравнение *Лагранжа-Пуассона*

$$L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} L'_{y''} - \ldots = 0.$$

[16] Для того чтобы задача Дидоны имела решение при любом $l \geq l_{\min}$ следует перейти к параметрическому описанию функции. И в этом случае её решениями будут дуги окружностей.

2.7 Задача Лагранжа (G)

В данной задаче функционал

$$J(\mathbf{y}(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x))\, dx \to \max_D,$$

а множество допустимых элементов

$$D = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{y}(x) : x \in [x_0, x_1],\ \mathbf{y}(\cdot) \in \mathbf{C}^2[x_0, x_1],\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \mathbf{y}(x_1) = \mathbf{y}_1, \\ \boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x)) = 0\ \forall x \in [x_0, x_1] \end{array} \right\},$$

$F(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^2\left(\mathbf{R}^{2n+1}\right)$, $\boldsymbol{\varphi}(\cdot,\cdot,\cdot) \in \mathbf{C}^2\left(\mathbf{R}^{2n+1}\right)$.

Ограничение

$$\boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x)) = 0\ \forall x \in [x_0, x_1]$$

называется *фазовым (дифференциальной связью)*. В механике фазовое ограничение называется *голономным*, если функция $\boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')$ не зависит от $\mathbf{y}'$, и *неголономным* во всех других случаях.

Теорема. *Пусть $\mathbf{y}^*(\cdot)$ — решение задачи (G). Тогда существуют постоянная λ_0 и вектор-функция $\boldsymbol{\lambda}(\cdot) \in \mathbf{C}^1[x_0, x_1]$, не равные одновременнно нулю ($|\lambda_0| + \max\limits_{x \in [x_0, x_1]} |\boldsymbol{\lambda}(x)| > 0$), такие, что функция $\mathbf{y}^*(x)$ удовлетворяет уравнению Лагранжа*

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} L - \frac{d}{dx} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}'} L = 0, \tag{2.13}$$

где

$$L(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') \equiv \lambda_0 F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') + \langle \boldsymbol{\lambda}(x), \boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') \rangle = \\ = \lambda_0 F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(x) \varphi_k(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')$$

— лагранжиан задачи.

(без доказательства).

Пример(*геодезические линии на поверхности***).**

Пусть

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

— уравнение *регулярной* ($\boldsymbol{\nabla}\varphi \neq \mathbf{0}$ во всех точках) поверхности в $\mathbf{R}^3$. Рассмотрим задачу определения кривой минимальной длины, лежащей на этой поверхности и соединяющей две её заданные точки:

$$\left\{ \begin{array}{l} J(\mathbf{r}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt \to \min, \\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1, \\ \varphi(\mathbf{r}(t)) = 0\, \forall t \in [t_0, t_1]. \end{array} \right.$$

Это типичная задача Лагранжа (с голономным ограничением). Соответствующий лагранжиан

$$L = \lambda_0 |\dot{\mathbf{r}}(t)| + \lambda_1(t) \varphi(\mathbf{r}(t)) = \\ = \lambda_0 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \lambda_1(t) \varphi(x(t), y(t), z(t)),$$

где $\mathbf{r}(t) \equiv x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ — радиус-вектор кривой. Уравнение Лагранжа имеет вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}L - \tfrac{d}{dt}\boldsymbol{\nabla}_{\dot{\mathbf{r}}}L = \\ = \lambda_1(t)\,\boldsymbol{\nabla}\varphi - \lambda_0\tfrac{d}{dt}\tfrac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} = \mathbf{0}.\end{gathered}$$

Вырожденный случай $\lambda_0 = 0$ здесь невозможен вследствие условия регулярности поверхности. Поэтому $\lambda_0 = 1$. Переходя к натуральному параметру кривой $t = s$, где s — длина кривой от начальной точки до текущей, для которого $|\dot{\mathbf{r}}(t)| \equiv 1$, получаем *уравнение геодезических линий*

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \lambda_1(t)\,\boldsymbol{\nabla}\varphi. \tag{2.14}$$

Рассмотрим в качестве примера сферическую поверхность

$$\varphi(\mathbf{r}(t)) = |\mathbf{r}(t)|^2 - R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Здесь $\boldsymbol{\nabla}\varphi \equiv 2\mathbf{r}$, поэтому дифференцируя по t, получим

$$\begin{gathered}\langle\mathbf{r}(t),\mathbf{r}(t)\rangle \equiv R^2 \Rightarrow \langle\dot{\mathbf{r}}(t),\mathbf{r}(t)\rangle \equiv 0 \Rightarrow \\ \langle\ddot{\mathbf{r}}(t),\mathbf{r}(t)\rangle + \langle\dot{\mathbf{r}}(t),\dot{\mathbf{r}}(t)\rangle \equiv 0 \Rightarrow \\ 1 + \lambda_1(t)\,\langle\boldsymbol{\nabla}\varphi,\mathbf{r}(t)\rangle = 1 + \lambda_1(t)\,2R^2 = 0 \Rightarrow \\ \lambda_1(t) \equiv -\tfrac{1}{2R^2}.\end{gathered}$$

Уравнение (2.14) тогда принимает вид

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) + \frac{1}{R^2}\mathbf{r}(t) = 0.$$

Любое его решение, удовлетворяющее условию $|\mathbf{r}(t)| \equiv R$, имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = R\left(\mathbf{e}_1\cos\frac{t}{R} + \mathbf{e}_2\sin\frac{t}{R}\right),$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — произвольные взаимно ортогональные единичные векторы. Все такие кривые являются окружностями большого диаметра на сфере. Следовательно, геодезическими линиями на сфере являются дуги окружностей большого диаметра[17]. Для любых двух точек сферы (исключение составляют диаметрально противоположные точки) существуют две такие дуги. Меньшая из них и является кривой минимальной длины, соединяющей эти точки. Для диаметрально противоположных точек геодезическими линиями являются все дуги большого диаметра, проходящие через них.

2.8 Задача Лагранжа в понтрягинской форме

Данную задачу следует рассматривать как специальную форму общей задачи Лагранжа. Здесь независимой скалярной переменной служит t (время), а компонентами вектор-функции $\mathbf{y}$ являются $x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m$. Рассмотрим функционал

$$J(\mathbf{y}(\cdot)) \equiv J(\mathbf{x}(\cdot),\mathbf{u}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))\,dt \to \max_D, \tag{2.15}$$

[17] Следовательно, меридианы являются кратчайшими путями между лежащими на них городами, а параллели нет.

где множество допустимых пар $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$ имеет вид

$$D = \left\{ \begin{array}{c} (\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) : \ t \in [t_0, t_1], \ \mathbf{x}(\cdot) \in \mathbf{C}^1[t_0, t_1], \ \mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{C}[t_0, t_1], \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \ \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1, \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \ \forall t \in [t_0, t_1]. \end{array} \right\}$$

Компоненты $x_1, x_2, ..., x_n$ интерпретируются здесь как *фазовые координаты* управляемого объекта (т.е. параметры, определяющие его состояние), $u_1, u_2, ..., u_m$ — как *управляющие параметры* (т.е. параметры, значения которых мы можем выбирать непосредственнно с целью управления объектом), $\mathbf{x}(\cdot)$ — как *траектория* управляемого объекта в фазовом пространстве, $\mathbf{u}(\cdot)$ — как *управляющая функция (управление)*.

Уравнение

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \tag{2.16}$$

являющееся дифференциальной связью в данной вариационной задаче, называется *уравнением движения*[18] управляемого объекта. Заметим, что выбрав управление $\mathbf{u}(\cdot)$ и граничные состояния $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ мы однозначно определяем траекторию $\mathbf{x}(\cdot)$ в силу уравнения (2.16), поэтому функционал $J(\mathbf{y}(\cdot))$ в действительности зависит только от управления $\mathbf{u}(\cdot)$.

Запишем необходимые условия экстремума для задачи Лагранжа (2.15). Соответствующая функция Лагранжа

$$L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \lambda_0 F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \boldsymbol{\lambda}(t), -\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \rangle,$$

поэтому мы получаем из (2.13) следующий набор необходимых условий экстремума

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\ \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} L - \frac{d}{dt} \boldsymbol{\nabla}_{\dot{\mathbf{x}}} L = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}} L = \mathbf{0}, \end{array} \right.$$

или — в покоординатной форме —

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = f_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \ i = \overline{1, n}, \\ \dot{\lambda}_k(t) = -\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial x_k}, \ k = \overline{1, n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_l} + \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial u_l} = 0, \ l = \overline{1, m}. \end{array} \right.$$

С помощью *функции Понтрягина*

$$H(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \equiv \lambda_0 F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \rangle$$

данные уравнения можно записать в более компактной и симметричной форме

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\lambda}} H, \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} H, \\ \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}} H = \mathbf{0}. \end{array} \right.$$

Пример (*Задача о мягкой посадке реактивного аппарата).*

[18] Опять же в фазовом пространстве его состояний. Не путать с движением объекта в физическом пространстве!

Пусть m — масса космического корабля (материальной точки), h — его высота над поверхностью планеты, v — вертикальная скорость. Задача заключается в посадке корабля на поверхность планеты $h = 0$ в течение заданного промежутка времени $[0, t_1]$ с нулевой скоростью $v = 0$ (мягкая посадка) и с минимальным расходом топлива (т.е. с максимальной конечной массой m).

Для указанных фазовых координат системы имеем следующую систему уравнений движения

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}h = v, \\ \frac{d}{dt}m = -ku, \\ \frac{d}{dt}(mv) = -mg + u, \\ h(0) = h_0,\ h(t_1) = 0, \\ v(0) = v_0,\ v(t_1) = 0, \\ m(0) = m_0, \end{cases}$$

где k — параметр реактивного двигателя. Функционал, подлежащий минимизации, запишем в интегральной форме

$$J(u(\cdot)) = m(t_1) = \int\limits_0^{t_1} \dot{m}dt + m_0 = \\ = \int\limits_0^{t_1} (-ku)\,dt + m_0.$$

Функция Понтрягина для этой задачи имеет вид

$$H = \lambda_0 ku + \lambda_1 v + \lambda_2(-ku) + \lambda_3\left(-g + \frac{u}{m}(1 + kv)\right),$$

а необходимые условия экстремума —

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial h} = 0, \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial m} = \lambda_3 \frac{u}{m^2}(1 + kv) \\ \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_1 - k\frac{u}{m}\lambda_3, \\ \dot{h} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = v, \\ \dot{m} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = -ku, \\ \dot{v} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = -g + \frac{u}{m}(1 + kv), \\ h(0) = h_0,\ h(t_1) = 0, \\ v(0) = v_0,\ v(t_1) = 0, \\ m(0) = m_0, \\ |\lambda_0| + \max\limits_{t\in[0,t_1]} |\boldsymbol{\lambda}(t)| > 0. \end{cases}$$

Элементарные соображения подсказывают, что данная система не должна иметь решения. В самом деле, легко придумать последовательность стратегий, осуществляющих мягкую посадку и требующих для этого всё меньше и меньше топлива. Эти стратегии заключаются в свободном падении ракеты до некоторой предельной высоты и последующем включении торможения. Так как сила торможения ничем не ограничивается, то и предельная высота может быть сколь угодно малой. Соответствующий расход топлива, как нетрудно подсчитать, может быть сколь угодно близок к некоторому предельно малому расходу, который получится при мгновенном включении бесконечной тормозящей силы в момент касания поверхности планеты. Это означает, что оптимальное управление здесь реализуется лишь в классе обобщённых функций — δ-образное управление, а в классе обычных функций оптимального управления нет.

Причина этого заключается в неаккуратной постановке задачи. Для того чтобы решение достигалось в классе обычных управлений следует ввести ограничения на величину тяги u: $|u| \leq u_{\max}$. Однако, в этом случае соответствующая вариационная задача уже не принадлежит классу задач Лагранжа и не может быть решена предлагаемыми выше методами.

Глава 3

Неклассические вариационные задачи

3.1 Задача Понтрягина – оптимального управления (Н)

Данную задачу можно рассматривать как непосредственное обобщение предыдущей задачи Лагранжа в понтрягинской форме:

$$J = J(\mathbf{u}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt \to \max_D,$$

где[1]

$$D = \left\{ \begin{array}{c} (\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)):\ t \in [t_0, t_1],\ \mathbf{x}(\cdot) \in \mathbf{KC}^1[t_0, t_1], \mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{KC}[t_0, t_1], \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1, \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\ \ \forall t \in T_{\mathbf{u}}, \\ \mathbf{u}(t) \in U\ \forall t \in [t_0, t_1]. \end{array} \right\}$$

Дополнительным по сравнению с задачей Лагранжа здесь является последнее условие[2] принадлежности значений управляющей функции заданному множеству $U \subset \mathbf{R}^m$. Заметим, что в случае открытого множества U это условие не является существенным с точки зрения вывода необходимых условий экстремума, и сами эти необходимые условия имеют в точности тот же вид, что и в задаче Лагранжа в понтрягинской форме.

Однако, если это множество не является открытым, то возникают проблемы уже при попытке построения допустимой варианты экстремальной функции $\mathbf{u}^*(\cdot)$. В самом деле, классическая конструкция типа

$$\mathbf{u}_\varepsilon(t) = \mathbf{u}^*(t) + \varepsilon\delta\mathbf{u}(t)$$

[1] $KC^1[t_0, t_1]$ — множество кусочно-гладких на отрезке функций, $KC[t_0, t_1]$ — множество кусочно-непрерывных функций; $T_{\mathbf{u}}$ — множество точек непрерывности управления $\mathbf{u}(\cdot)$.

[2] Подобное ограничение можно условно назвать понтрягинским.

здесь уже непригодна, так как, вообще говоря, $\mathbf{u}_\varepsilon(t) \notin U$. Поэтому для исследования подобных задач приходится применять более сложные конструкции допустимых вариант. Примером такой конструкции является *импульсная вариация*

$$\mathbf{u}_\varepsilon(t) = \begin{cases} \mathbf{u}^*(t), & t \in [t_0, t_1] \setminus \Delta_\varepsilon \\ \mathbf{v}, & t \in \Delta_\varepsilon \end{cases},$$

где $\Delta_\varepsilon \equiv (\tau, \tau + \varepsilon)$, $\mathbf{v}$ — заданный (произвольный!) элемент множества U, τ — заданная (произвольная!) точка интервала $[t_0, t_1]$.

Случай не открытого (в особенности, замкнутого) множества U, как оказалось, весьма часто встречается в практических задачах оптимального управления, что связано с естественными требованиями ограниченности возможностей технических устройств. Например, как уже было отмечено выше, в рассмотренной задаче о мягкой посадке следует ограничить силу тяги реактивного двигателя, что приводит к ограничению $u \in [-u_{\max}, u_{\max}]$ указанного типа. Данная задача при этом становится не только более естественно поставленной, но и приобретает решение — оптимальную стратегию посадки.

Вариационные задачи подобного неклассического типа стали предметом активного изучения в 50-е годы в связи с развитием ракетной техники. Особенно больших успехов в их изучении добилась группа советских математиков во главе с Л.С.Понтрягиным[7].

Теорема (*принцип максимума*[3] *Л.С.Понтрягина*, 1958 г.)

Если $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$ *— решение задачи (**H**), то существуют число* λ_0 *и сопряжённая функция* $\boldsymbol{\lambda}(t) \equiv \{\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_n(t)\}$, *не равные одновременно нулю* $(|\lambda_0| + \max_{t \in [t_0,t_1]} \|\boldsymbol{\lambda}(t)\| > 0)$ *такие, что*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^*(t) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\lambda}} H(t, \mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}^*(t)), \ t \in [t_0, t_1], \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} H(t, \mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}^*(t)), \ t \in [t_0, t_1], \\ H(t, \mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}^*(t)) = \max\limits_{\mathbf{u} \in U} H(t, \mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}) \ \ \forall t \in T_{\mathbf{u}}, \end{cases}$$

где

$$H(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \equiv \lambda_0 F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \boldsymbol{\lambda}, f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \rangle$$

— *функция Понтрягина.*

Замечания.

1. В случае открытого множества U из условия принципа максимума вытекает условие стационарности функции Потрягина по $\mathbf{u}$ в точке $\mathbf{u}^*(t)$:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}} H(t, \mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}^*(t)) = 0.$$

   Следовательно, данные необходимые условия экстремума являются более общими, чем необходимые условия из предыдущего раздела для задачи Лагранжа в понтрягинской форме.

[3] В своём простейшем варианте. Общий случай см. в книге [7].

2. Уравнения для множителей Лагранжа — сопряжённых функций $\boldsymbol{\lambda}(t)$ —

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} H$$

называются в теории оптимального управления *сопряжёнными уравнениями*, а условие

$$H\left(t, \mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}^*(t)\right) = \max_{\mathbf{u}\in U} H\left(t, \mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}\right)$$

называется *принципом максимума Понтрягина.*

Пример 1 (*задача быстродействия*).

Рассмотрим задачу о скорейшем переводе управляемой материальной точки в начало координат с нулевой конечной скоростью при условии, что сила, с которой можно воздействовать на точку, ограничена по модулю заданной величиной (см. рисунок).

Математическая постановка задачи такова:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = u(t), \ 0 \le t \le t_1, \\ x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \\ x(t_1) = 0, \ \dot{x}(t_1) = 0, \\ |u(t)| \le 1, \end{cases}$$

$$(-t_1) = \int_0^{t_1} (-1)\, dt \to \max.$$

Заметим, что интервал управления в данной задаче не фиксирован, как это было во всех ранее рассматриваемых вариационных задачах. Тем не менее, принцип максимума справедлив и в этом случае. При этом можно дополнительно доказать нетривиальность не только полного набора множителей Лагранжа, но и нетривиальность входящего в него набора сопряжённых функций $\lambda(t)$.

Для того чтобы применить к данной задаче принцип максимума, запишем её в канонической форме. Введём фазовые координаты $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv \dot{x}$. Тогда, используя функцию Понтрягина $H(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) = -\lambda_0 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$, получаем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = u, \\ \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1, \\ x_1(0) = x_0, \ x_2(0) = \dot{x}_0, \\ x_1(t_1) = 0, \ x_2(t_1) = 0, \end{cases}$$

$$\lambda_2(t)\, u(t) = \max_{|u|\le 1} \lambda_2(t)\, u.$$

Решением системы сопряжённых уравнений являются функции

$$\lambda_1(t) = C_1, \ \lambda_2(t) = -C_1 t + C_2,$$

где $C_{1,2}$ — произвольные постоянные (не равные одновременно нулю — для нетривиальности набора сопряжённых функций). Отсюда видно, что функция $\lambda_2(t)$ может изменить свой знак на интервале управления не более одного раза. Далее, из принципа максимума получаем для оптимального управления

$$u^*(t) = \operatorname{sign} \lambda_2(t),$$

следовательно, оно может принимать только свои граничные значения ± 1 (*релейно*) и меняет их не более одного раза (число *точек переключения* управления не более одной).

Найдём движения в фазовой плоскости, которые совершает система под воздействием постоянного управления $u^*(t) \equiv 1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 1. \end{cases}$$

Исключив t, получим $dx_1/dx_2 = x_2$, или $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + C$ — семейство парабол, получающихся из параболы $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2$ параллельным переносом вдоль оси x_1. Сама эта парабола, точнее её ветвь, расположенная в нижней полуплоскости, играет особую роль в задаче: двигаясь по ней система может попасть в начало координат, где реализуется цель управления.

Аналогично находятся движения под постоянным управлением $u^*(t) \equiv -1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -1. \end{cases}$$

Ими являются куски парабол $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + C$. Двигаясь по верхней ветви параболы, $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2$ можно также реализовать цель управления. Эта ветвь вместе с упомянутой выше ветвью параболы $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2$ образует т.н. *линию переключения* оптимального управления.

Укажем для произвольного начального состояния $x_0, \dot{x}_0$ оптимальное управление. В случае, когда соответствующая точка на фазовой плоскости находится выше линии переключения или на её верхней ветви (область G_1) следует "включить" управление $u = -1$, иначе (в области G_2) - $u = 1$.

Оптимальное движение в фазовой плоскости для начальной точки, расположенной в области G_1 происходит сперва по проходящей через эту точку параболе семейства $u = -1$ до момента пересечения данной параболой линии переключения, а далее по линии переключения до начала координат. Аналогично (с соответствующей заменой семейства парабол) выглядит оптимальное движение для начальных точек расположенных в области G_2. Если же начальная точка уже находится на одной из ветвей линии переключения, то переключений делать не нужно.

Нетрудно проверить, что это — единственный способ осуществить цель управления, удовлетворив всем необходимым условиям оптимальности. С другой стороны, можно доказать существование оптимального управления в данной задаче. Следовательно, задача полностью решена (см. рис.3.1).

Вводя функцию фазовых координат

$$\psi(x_1, x_2) \equiv \begin{cases} -1, & (x_1, x_2) \in G_1 \\ 1, & (x_1, x_2) \in G_2 \end{cases}$$

(*синтезирующую функцию*) можно осуществить автоматическое устройство, которое оптимально в указанном смысле управляет системой в любой момент времени — *синтез оптимальной системы:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \psi\left(x_1, x_2\right). \end{cases}$$

В исходных координатах оптимально функционирующая система записывается в виде

$$\ddot{x} = \psi\left(x, \dot{x}\right).$$

Пример 2 (*задача быстродействия для управляемой точки в среде с вязким сопротивлением*).

Данная задача отличается от предыдущей уравнением движения управляемого объекта:

$$\begin{cases} \ddot{x}\left(t\right) = -\beta\dot{x} + u\left(t\right),\ 0 \le t \le t_1, \\ x\left(0\right) = x_0,\ \dot{x}\left(0\right) = \dot{x}_0, \\ x\left(t_1\right) = 0,\ \dot{x}\left(t_1\right) = 0, \\ \left|u\left(t\right)\right| \le 1, \end{cases}$$

$$t_1 = \int\limits_0^{t_1} dt \to \min.$$

Вводя фазовые координаты $x_1 \equiv x,\ x_2 \equiv \dot{x}$ и используя функцию Понтрягина $H\left(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}\right) = -\lambda_0 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2\left(u - \beta x_2\right)$, получаем набор условий для определения оптимальной траектории:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = -\beta x_2 + u, \\ \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 + \beta\lambda_2, \\ x_1\left(0\right) = x_0,\ x_2\left(0\right) = \dot{x}_0, \\ x_1\left(t_1\right) = 0,\ x_2\left(t_1\right) = 0, \end{cases}$$

$$\lambda_2\left(t\right)u\left(t\right) = \max_{|u| \le 1} \lambda_2\left(t\right)u.$$

Решения сопряжённых уравнений имеют здесь вид

$$\lambda_1\left(t\right) = C,$$
$$\lambda_2\left(t\right) = C_1 e^{\beta t} + \frac{C}{\beta}.$$

При любом нетривиальном наборе констант C, C_1 функция $\lambda_2\left(t\right)$ на любом конечном отрезке времени принимает не более одного нулевого значения. Действительно, при $C_1 \neq 0$ она монотонна, а при $C_1 = 0$ постоянна и отлична от нуля. Поэтому оптимальное управление

$$u^*\left(t\right) = \operatorname{sign}\lambda_2\left(t\right) =$$
$$= \operatorname{sign}\left(C_1 e^{\beta t} - \frac{C}{\beta}\right)$$

принимает лишь значения ± 1 (релейно) и имеет не более одной точки переключения на интервале управления.

Найдём движения, которые совершает система при постоянных значениях управляющей функции $u^*\left(t\right) = \pm 1$.

При $u^*(t) \equiv 1$ уравнения движения в фазовой плоскости имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 1 - \beta x_2. \end{cases}$$

Помимо решения

$$\begin{cases} x_1 = \frac{t}{\beta} + x_0 \\ x_2(t) = \frac{1}{\beta} = \dot{x}_0, \end{cases}$$

(соответствующая интегральная кривая — луч на горизонтальной прямой $x_2 = \frac{1}{\beta}$ в фазовой плоскости), эта система имеет ещё семейство интегральных кривых

$$x_1 = -\frac{1}{\beta}\left[x_2 + \frac{1}{\beta}\ln|1 - \beta x_2|\right] + C.$$

Аналогично выглядят движения в фазовой плоскости, происходящие под управлением $u^*(t) \equiv -1$:

$$x_2 = -\frac{1}{\beta}$$

и

$$x_1 = -\frac{1}{\beta}\left[x_2 - \frac{1}{\beta}\ln|1 + \beta x_2|\right] + C.$$

Синтез оптимальных траекторий осуществлён на следующем рис.3.2.

Уравнение линии переключений

$$x_1 = -\frac{1}{\beta}\begin{cases} x_2 + \frac{1}{\beta}\ln(1 - \beta x_2), & x_2 < 0 \\ x_2 - \frac{1}{\beta}\ln(1 + \beta x_2), & x_2 > 0. \end{cases}$$

Пример 3 (*решение задачи о мягкой посадке ракеты*).

Вернёмся к рассмотренной в предыдущем разделе задаче о мягкой посадке космического аппарата на поверхность планеты

$$\begin{cases} \dot{h} = v, \\ \dot{m} = -ku, \\ \dot{v} = -g + m^{-1}u, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases},$$

$$m(0) = m_0,\ h(0) = h_0, v(0) = v_0,$$
$$h(1) = 0,\ v(1) = 0,$$

$$-m(1) = \int_0^1 ku\,dt - m_0 \to \max,$$

накладывая естественные дополнительные ограничения на величину тяги[4]: $0 \le u \le u_0$.

Составив функцию Понтрягина

$$H = \lambda_0 ku + \lambda_1 v - \lambda_2 ku + \lambda_3\left(um^{-1} - g\right),$$

[4] А также (для упрощения задачи) пренебрегая в третьем уравнении изменением массы.

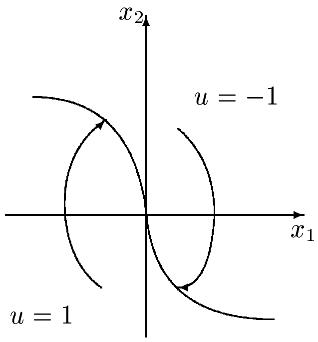


Рис. 3.1: Оптимальные траектории в задаче о скорейшей остановке материальной точки

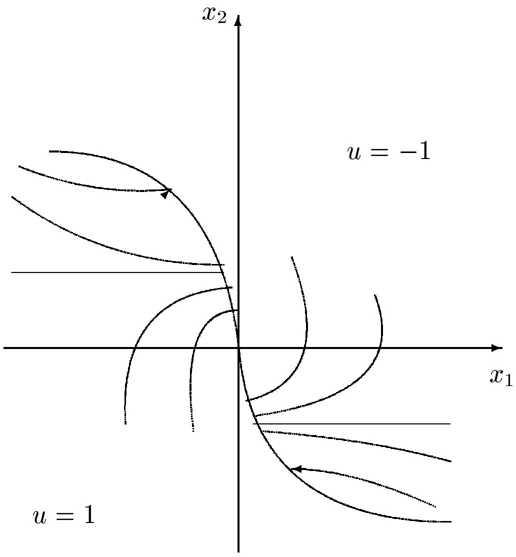


Рис. 3.2: Оптимальные траектории в случае вязкой среды

получаем сопряжённые уравнения

$$\begin{cases} \dot\lambda_1 = -\frac{\partial H}{\partial h} = 0, \\ \dot\lambda_2 = -\frac{\partial H}{\partial m} = \lambda_3 u m^{-2}, \\ \dot\lambda_3 = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\lambda_1(t) = -C_1, \\ &\dot\lambda_2 = (C_1 t + C_3)\, u(t)\, m^{-1}(t), \\ &\lambda_3(t) = C_1 t + C_3. \end{aligned}$$

Далее, из принципа максимума

$$(\lambda_0 k u - \lambda_2 k u + \lambda_3 u/m) \to \max_{0\le u\le u_0}$$

получаем

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \psi(t) < 0 \\ u_0, & \psi(t) > 0 \end{cases},$$

где $\psi(t) \equiv \lambda_0 k (1 - \lambda_2(t)) + \lambda_3(t)/m(t)$.

Найдём движения управляемой системы, происходящие при постоянном управлении $u(t) = 0$, $0 \le t \le \tau$. Имеем в этом случае следующие уравнения движения системы

$$\begin{cases} \dot h = v, \\ \dot m = 0, \\ \dot v = -g, \end{cases}$$

откуда получаем для $0 \le t \le \tau$

$$\begin{cases} m(t) = m_0, \\ v(t) = -gt + v_0, \\ h(t) = h_0 + v_0 t - gt^2/2. \end{cases}$$

Движения ракеты при $u(t) \equiv u_0, t \ge \tau$ описываются уравнениями

$$\begin{cases} \dot h = v, \\ \dot m = -k u_0, \\ \dot v = -g + m^{-1} u_0, \end{cases}$$

решения которых

$$\begin{cases} m(t) = m(\tau) - k u_0 (t-\tau), \\ v(t) = v(\tau) - g(t-\tau) - \frac{\ln \frac{(m(\tau) - k u_0 (t-\tau))}{m(\tau)}}{k}, \\ h(t) = \left(v(\tau) + \frac{\ln m(\tau)}{k}\right)(t-\tau) - g(t-\tau)^2/2 + h(\tau) + \frac{m(\tau)\ln m(\tau)/e}{k^2 u_0} + \\ + \frac{(m(\tau) - k u_0 (t-\tau)) - (m(\tau) - k u_0 (t-\tau)) \ln (m(\tau) - k u_0 (t-\tau))}{k^2 u_0}. \end{cases}$$

Исключая время

$$t - \tau = \frac{m(\tau) - m}{k u_0},$$

получим уравнение траектории в фазовой плоскости переменных (h, v) в параметрической форме:

$$\begin{cases} v = v(\tau) - \frac{g(m(\tau) - m)}{k u_0} - \frac{\ln \frac{m}{m(\tau)}}{k}, \\ h = \left(v(\tau) + \frac{\ln m(\tau)}{k}\right)\left(\frac{m(\tau) - m}{k u_0}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{m(\tau) - m}{k u_0}\right)^2 + h(\tau) + \\ + \frac{m(\tau)\ln m(\tau)/e - m \ln m/e}{k^2 u_0}, \ m \le m(\tau) \end{cases}$$

Из условия $h(1) = v(1) = 0, m(1) \geq 0$ определяем те моменты переключения τ, при которых мягкая посадка возможна при максимальном торможении u_0

$$\begin{cases} v(\tau) + \frac{\ln m(\tau)}{k} - g(1-\tau) - \frac{\ln(m(\tau)-ku_0(1-\tau))}{k} = 0, \\ \left(v(\tau) + \frac{\ln m(\tau)}{k}\right)(1-\tau) - g(1-\tau)^2/2 + h(\tau) + \frac{m(\tau)\ln m(\tau)/e}{k^2 u_0} + \\ + \frac{(m(\tau)-ku_0(1-\tau))-(m(\tau)-ku_0(1-\tau))\ln(m(\tau)-ku_0(1-\tau))}{k^2 u_0} = 0. \end{cases}$$

Глава 4

Вариационные задачи со свободными границами

В этом разделе мы вновь рассматриваем классические вариационные задачи, однако, теперь уже не предполагаем, что допустимые функции определены на фиксированных отрезках, а допускаем возможность варьирования их областей определения. В этом случае значения функционала могут и непосредственно зависеть от значений функции на границах области определения. Следовательно, мы приходим к следующему естественному обобщению классического интегрального функционала

$$J\left(y\left(\cdot\right)\right)=\int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x,y\left(x\right),y^{'}\left(x\right)\right)dx+f\left(x_0,y\left(x_0\right),x_1,y\left(x_1\right)\right)\to\max_{D}$$

(*функционал Больца*). Здесь $F\left(\cdot,\cdot,\cdot\right)\in C^3\left(\mathbf{R}^3\right)$, $f\left(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot\right)\in C^3\left(\mathbf{R}^4\right)$.

Рассмотрим несколько вариантов задач со свободными границами для различных множеств допустимых функций D.

4.1 Задача ($\mathbf{I}_1$)

В данной задаче множество допустимых функций состоит из элементов следующего вида

$$D=\left\{y\left(x\right):x\in\left[x_0,x_1\right],\ y\left(\cdot\right)\in C^2\left[x_0,x_1\right],\ y\left(x_0\right)=y_0\right\},$$

где x_0,x_1,y_0 — заданные числа. Значение функций в точке x_1 никак не ограничивается, что соответствует множеству кривых, изображённых на рисунке 4.1

Для получения необходимых условий экстремума построим допустимую варианту экстремального элемента $y^*\left(\cdot\right)$. Пусть $\eta\left(\cdot\right)$ — произвольная функция класса $C^2\left[x_0,x_1\right]$, удовлетворяющая условию $\eta\left(x_0\right)=0$. Положим $y_\varepsilon\left(x\right)=y^*\left(x\right)+\varepsilon\eta\left(x\right)$, $x\in\left[x_0,x_1\right]$, $\varepsilon\in\mathbf{R}$. Пусть

$$\varphi\left(\varepsilon\right)\equiv J\left(y_\varepsilon\left(\cdot\right)\right)=\int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x,y_\varepsilon\left(x\right),y_\varepsilon^{'}\left(x\right)\right)\,dx+f\left(y_\varepsilon\left(x_1\right)\right).$$

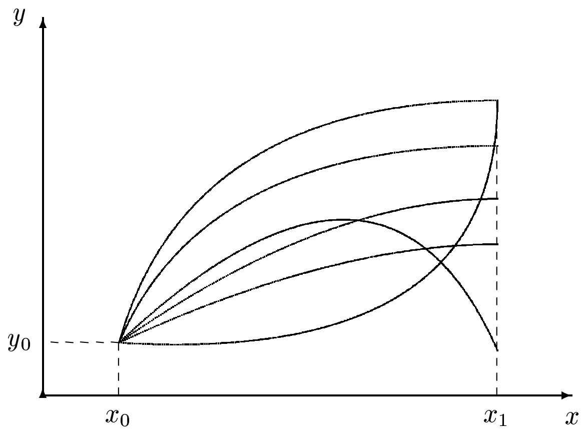


Рис. 4.1: Пучок допустимых кривых в задаче I_1

Вычисляя производную $\varphi'(\varepsilon)$ и учитывая граничные свойства функции $\eta(\cdot)$, находим первую вариацию функционала

$$\begin{aligned} \delta J \equiv \varphi'(0) &= \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\tfrac{\partial F}{\partial y}\eta + \tfrac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right) dx + \tfrac{\partial f}{\partial y_1}\eta(x_1) = \\ &= \tfrac{\partial F}{\partial y'}\eta \,\Big|_{x_0}^{x_1} + \tfrac{\partial f}{\partial y_1}\eta(x_1) + \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\tfrac{\partial F}{\partial y} - \tfrac{d}{dx}\tfrac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \, dx = \\ &= \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\tfrac{\partial F}{\partial y} - \tfrac{d}{dx}\tfrac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \, dx + \left(\tfrac{\partial f}{\partial y_1} + \tfrac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x_1) = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $\eta(\cdot)$ — произвольная функция, удовлетворяющая вышеперечисленным требованиям. В частности, если $\eta(x_1) = 0$, то

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \, dx = 0,$$

и тогда по основной лемме вариационного исчисления для функции $y^*(\cdot)$ выполняется условие

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \; \forall x \in [x_0, x_1]$$

— *уравнение Эйлера.* С другой стороны, из (4.1) имеем тогда

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x_1) = 0$$

при произвольном граничном значении $\eta(x_1)$. Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(y(x_1)) + \frac{\partial F}{\partial y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) = 0$$

— *условие трансверсальности*[1] .

[1] Transversus - “поперек лежащий, идущий” .

Таким образом, необходимым условием экстремума в данной задаче выступает *краевая задача для уравнения Эйлера* следующего вида

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_1} = 0, \end{cases}$$

в которой условие трансверсальности играет роль недостающего граничного условия (*естественное граничное условие*) .

Пример. Вариант задачи о брахистохроне (см. раздел 2.1): *найти кривую наискорейшего спуска колечка из начального положения* $x_0 = y_0 = 0$ *на вертикальную прямую* $x = x_1$.

Решение. Экстремалями функционала

$$\int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{y}},$$

удовлетворяющими левому граничному условию, являются циклоиды

$$\begin{cases} x = C\,(t - \sin t) \\ y = C\,(1 - \cos t) \end{cases}.$$

Постоянную C определяем из условия трансверсальности на правом конце

$$F'_{y'}\big|_{x=x_1} = \left.\frac{y'}{\sqrt{y\,(1+y'^2)}}\right|_{x=x_1} = 0,$$

которое в данном случае принимает вид условия ортогональности циклоиды к прямой $x = x_1$ в точке пересечения: $y'(x_1) = 0$. Следовательно, точка пересечения соответствует вершине циклоиды, т.е. значению параметра $t = \pi$. Отсюда $x_1 = C\pi$, и уравнение единственной циклоиды, на которой может достигаться экстремум, имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{x_1}{\pi}\,(t - \sin t) \\ y = \frac{x_1}{\pi}\,(1 - \cos t) \end{cases}.$$

Замечание. Естественных граничных условий — условий трансверсальности всегда "возникает" столько, сколько необходимо для полноты необходимых условий экстремума.

Например, в задаче со второй производной

$$J\,(y\,(\cdot)) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, y\,(x)\,, y'\,(x)\,, y''\,(x)\right)\,dx + f\,(y\,(x_1)) \to \max_D,$$
$$D = \left\{ \begin{array}{c} y\,(x) : x \in [x_0, x_1]\,,\ y\,(\cdot) \in C^4\,[x_0, x_1]\,, \\ y\,(x_0) = y_0,\ y'\,(x_0) = y'_0 \end{array} \right\}$$

первая вариация функционала имеет вид

$$\delta J \equiv \varphi'\,(0) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta\,dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta\,(x_1) + \frac{\partial F}{\partial y''}\eta'\,(x_1)\,.$$

Вместо двух недостающих условий на правом конце интервала получаем здесь два условия трансверсальности[2] :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''}\Big|_{x=x_1} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y''}\Big|_{x=x_1} = 0. \end{cases}$$

Пример. Рассмотрим задачу о стационарном прогибе упругой нагруженной балки, жёстко "заделанной" на левом конце[3]. Полная потенциальная энергия системы складывается из энергии упругих сил[4] и потенциальной энергии поля силы тяжести:

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_0^l k\left(u''_{xx}\right)^2\, dx + mgu\left(l\right),$$

где m — масса груза на правом конце балки (массой самой балки пренебрегаем), g — ускорение силы тяжести, k — постоянная, характеризующая упругие свойства материала, из которого изготовлена балка, $u\left(x\right)$ — отклонение точки x балки в вертикальной плоскости от положения равновесия $u = 0$.

Минимизируя этот функционал на множестве функций из $C^4\left[0, l\right]$, удовлетворяющих граничным условиям жёсткого закрепления $u\left(0\right) = u'\left(0\right) = 0$, получаем краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}\left(ku''_{xx}\right) = 0, \\ u\left(0\right) = u'\left(0\right) = 0, \\ u''_{xx}\left(l\right) = 0, \\ mg - ku'''\left(l\right) = 0, \end{cases}$$

решением которой является функция

$$u\left(x\right) = \frac{mg}{6k}x^2\left(x - 3l\right).$$

В частности, максимальный прогиб балки на её конце $u\left(l\right) = -\frac{mg}{2k}l^3$ быстро нарастает с удлинением балки[5].

4.2 Задача (I_2)

В этой задаче множество допустимых функций состоит из элементов следующего вида

$$D = \left\{ \begin{array}{c} y\left(x\right) : x \in \left[x_0, x_1\right],\ y\left(\cdot\right) \in C^2\left[x_0, x_1\right], \\ y\left(x_0\right) = y_0,\ x_1 \in \left(a, b\right) \end{array} \right\},$$

[2]Сперва берём произвольную пробную функцию $\eta\left(x\right)$, удовлетворяющую дополнительным граничным условиям

$$\eta\left(x_1\right) = \eta'\left(x_1\right) = 0,$$

и выводим уравнение Пуассона. Затем получаем условия трансверсальности, учитывая произвольность значений $\eta\left(x_1\right)$, $\eta'\left(x_1\right)$ в выражении для вариации функционала.

[3]Это означает, что балка не смещена в точке выхода из стены и выходит из неё под прямым углом.

[4]См. теорию упругости.

[5]Тем, кто уцелел, прыгая в воду с самодельных мостков, это хорошо известно ...

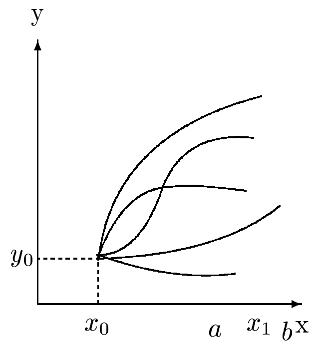


Рис. 4.2: Пучок допустимых кривых в задаче I_2

где $x_0, y_0, x_0 < a < b$ — заданные числа. Таким образом, интервал определения функции и её значение в правой граничной точке x_1 не заданы однозначно, а лишь удовлетворяют указанным ограничениям, что соответствует множеству кривых, изображённых на рис. 4.2

Пусть $y^*(\cdot) : [x_0, x_1^*] \to \mathbf{R}$ — решение данной задачи[6]. Пусть далее $\eta(\cdot) \in C^2[x_0, b)$, $\eta(x_0) = 0$. Положим

$$y_\varepsilon(x) = y^*(x) + \varepsilon\eta(x), \ x \in [x_0, x_1^* + \varepsilon], \ |\varepsilon| < \varepsilon_0, \ \varepsilon_0 > 0.$$

Легко проверить допустимость данной варианты экстремального элемента. Пусть

$$\varphi(\varepsilon) \equiv J(y_\varepsilon(\cdot)) = \int\limits_{x_0}^{x_1^*+\varepsilon} F\left(x, y_\varepsilon(x), y_\varepsilon'(x)\right) dx + f\left(x_1^* + \varepsilon, y_\varepsilon(x_1^* + \varepsilon)\right) \equiv$$
$$\equiv J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon).$$

Найдём производные этих функций. Имеем

$$\frac{d}{d\varepsilon} J_1(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \int\limits_{x_0}^{x_1^*+\varepsilon} F\left(x, y_\varepsilon(x), y_\varepsilon'(x)\right) dx =$$
$$= F\left(x_1^* + \varepsilon, y_\varepsilon(x_1^* + \varepsilon), y_\varepsilon'(x_1^* + \varepsilon)\right) + \int\limits_{x_0}^{x_1^*+\varepsilon} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right) dx =$$
$$= \int\limits_{x_0}^{x_1^*+\varepsilon} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\, dx + \left(F + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right)_{x = x_1^* + \varepsilon},$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} J_2(\varepsilon) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1}(y' + \eta + \varepsilon\eta')\right)_{x = x_1^* + \varepsilon}.$$

В итоге первая вариация функционала принимает вид

$$\delta J \equiv \varphi'(0) = J_1'(0) + J_2'(0) = \left(F + \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1}y'\right)_{x = x_1^*} +$$
$$+\eta\left(\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\right)_{x = x_1^*} + \int\limits_{x_0}^{x_1^*} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\, dx = 0. \tag{4.2}$$

[6] Заметим, что в данном случае в понятие решения входит не только сама функция, но и её интервал определения $[x_0, x_1^*]$.

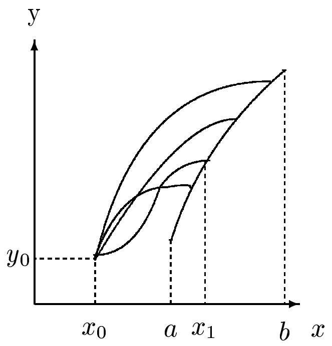


Рис. 4.3: Пучок допустимых кривых в задаче I_3

Выбрав $\eta(x) \equiv 0$, получим отсюда первое условие трансверсальности

$$\left(F + \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1} y'\right)_{x=x_1^*} = 0.$$

Далее, взяв произвольную функцию $\eta(\cdot)$, для которой $\eta(x_1^*) = 0$, получим из (4.2) с помощью основной леммы вариационного исчисления уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \; x \in [x_0, x_1^*].$$

Наконец, полагая $\eta(x_1^*) \neq 0$, имеем из (4.2) второе условие трансверсальности

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\right)_{x=x_1^*} = 0.$$

4.3 Задача ($\mathbf{I}_3$)

Пусть множество допустимых функций состоит из элементов следующего вида

$$D = \left\{ \begin{array}{c} y(x) : x \in [x_0, x_1], \; y(\cdot) \in C^2[x_0, x_1], \\ y(x_0) = y_0, \; x_1 \in (a, b), \; y(x_1) = g(x_1) \end{array} \right\},$$

где $x_0, y_0, x_0 < a < b$ — заданные числа, $g(x)$ — заданная функция. По сравнению с предыдущей задачей правый конец графика экстремали обладает меньшей свободой: теперь он должен скользить по заданной кривой $\{(x, g(x)), x \in (a, b)\}$ в плоскости (x, y) (см. рис. 4.3).

Пусть $y^*(\cdot) : [x_0, x_1^*] \to \mathbf{R}$ — решение[7] задачи ($\mathbf{I}_3$). Пусть далее $\eta(\cdot) \in C^2[x_0, b)$, $\eta(x_0) = 0$, $\eta(x_1^*) \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$\omega_\eta(\varepsilon) \equiv \frac{g(x_1^* + \varepsilon) - y^*(x_1^* + \varepsilon)}{\eta(x_1^* + \varepsilon)}, \; |\varepsilon| \leq \varepsilon_0,$$

[7]См. предыдущую сноску.

где ε_0 — достаточно малое положительное число. Легко видеть, что

$$\begin{gathered}\omega_\eta(0)=0,\\ \omega_\eta'(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}=\left.\frac{(g'-y')\eta-\eta'(g-y)}{\eta^2}\right|_{\varepsilon=0}=\\ =\frac{g'(x_1^*)-y^{*\prime}(x_1^*)}{\eta(x_1^*)}=\omega_\eta'(0).\end{gathered}$$

Положим

$$y_\varepsilon(x)=y^*(x)+\omega_\eta(\varepsilon)\,\eta(x),\ x\in[x_0,x_1^*+\varepsilon],\ |\varepsilon|\le\varepsilon_0. \tag{4.3}$$

Нетрудно проверить, что данная варианта является допустимой. Пусть, как всегда[8],

$$\begin{gathered}\varphi(\varepsilon)\equiv J(y_\varepsilon(\cdot))=\\ =\underbrace{\int\limits_{x_0}^{x_1+\varepsilon}F(x,y_\varepsilon,y_\varepsilon')\,dx}_{J_1(\varepsilon)}+\underbrace{f(x_1+\varepsilon,y_\varepsilon(x_1+\varepsilon))}_{J_2(\varepsilon)}.\end{gathered}$$

Найдём производную этой функции. Имеем последовательно

$$\begin{gathered}\frac{dJ_1}{d\varepsilon}=F|_{x_1+\varepsilon}+\int\limits_{x_0}^{x_1+\varepsilon}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy_\varepsilon}{d\varepsilon}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy_\varepsilon'}{d\varepsilon}\right)dx=\\ =F|_{x_1+\varepsilon}+\int\limits_{x_0}^{x_1+\varepsilon}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta\omega_\eta'+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\omega_\eta'\right)dx=\\ =F|_{x_1}+\eta\omega_\eta'\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x_0}^{x_1+\varepsilon}+\omega_\eta'(\varepsilon)\int\limits_{x_0}^{x_1+\varepsilon}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\,dx,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{dJ_1}{d\varepsilon}(0)=\left[F+(g'-y')\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x=x_1}+\\ +\omega_\eta'(0)\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\,dx,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{dJ_2}{d\varepsilon}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{dy_\varepsilon(x_1+\varepsilon)}{d\varepsilon}\Rightarrow\\ \frac{dJ_2}{d\varepsilon}(0)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial y_1}\left(y'+\eta\omega_\eta'+\eta'\omega_\eta\right)\right]_{\varepsilon=0}=\\ =\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial y_1}g'\right]_{x=x_1}.\end{gathered}$$

В итоге получаем следующее выражение для первой вариации функционала

$$\begin{gathered}\delta J=\left[F+(g'-y')\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial y_1}g'\right]_{x=x_1}+\\ +\omega_\eta'(0)\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\,dx=0.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Непосредственно положить в (4.4) $\eta(x)\equiv 0$ для получения следующего условия трансверсальности

$$\left[F+(g'-y')\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial y_1}g'\right]_{x=x_1}=0 \tag{4.5}$$

[8]Далее для упрощения записи символ "$*$" в обозначении решения задачи опускается.

мы не имеем права, так как сама варианта (4.3) строилась в предположении о нетривиальности пробной функции $\eta(\cdot)$. Поэтому поступим следующим образом. Предполагая известными координаты правого конца графика решения данной вариационной задачи, мы можем произвести сравнение этого решения лишь с допустимыми функциями, удовлетворяющими точно таким же граничным условиям. Решение соответствующей простейшей вариационной задачи с необходимостью удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

что означает выполнение данного уравнения и для решения задачи этого раздела. Поэтому в выражении для вариации (4.4) интеграл в действительности равен нулю, откуда и получаем условие (4.5).

Пример. Для функционалов вида

$$J(y(\cdot)) \equiv \int\limits_{x_0}^{x_1} F_1(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

условие трансверсальности (4.5) записывается как *условие ортогональности* кривых $y = y(x)$ и $y = g(x)$ в точке пересечения:

$$g'y'|_{x=x_1} = -1.$$

В частности, кратчайшее расстояние от заданной точки до заданной кривой реализуется на выходящей из точки прямой, которая ортогональна кривой в точке пересечения ($F_1 \equiv 1$).

Задача[9]**.** *Найти брахистохрону, соединяющую в вертикальной плоскости заданную точку $x_0 = y_0 = 0$ с произвольной точкой прямой $y = -x + 1$.*

Замечание к задачам (I). Если свободным является не правый, а левый конец кривой, то условие трансверсальности, очевидно, следует выписывать именно для него. При этом условие трансверсальности на левом конце кривой получается из соответствующего условия на правом конце сменой знака во всех выражениях, в которые входит функция F:

$$\begin{gathered} F \to -F, \\ \tfrac{\partial F}{\partial y'} \to -\tfrac{\partial F}{\partial y'} \end{gathered}$$

и т.д.

Например, в задаче ($\mathbf{I}_3$) со свободным левым концом условие трансверсальности на этом конце имеет вид

$$\left[-F - (g' - y')\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial y_0} g'\right]_{x=x_0} = 0.$$

[9]Для самостоятельного решения. Постановку задачи о брахистохроне см. в разделе (2.1).

Ответ: циклоида с уравнением

$$\begin{cases} x = \frac{2}{4-\pi}(t - \sin t) \\ y = \frac{2}{4-\pi}(1 - \cos t) \end{cases}.$$

В общем случае условие трансверсальности для конца интервала $x = x_k$, $k = \overline{0,1}$ в задаче $(\mathbf{I}_3)$ можно, следовательно, записать так:

$$\left[(-1)^{k+1}\left\{F + (g' - y')\frac{\partial F}{\partial y'}\right\} + \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial y_k}g'\right]_{x=x_k} = 0.$$

Если свободны оба конца кривой, то на каждом следует выписать соответствующие условия трансверсальности.

Глава 5

Достаточные условия C^1–локального экстремума

В данном разделе выводятся достаточные условия экстремума для простейшей задачи вариационного исчисления (задача (**A**) — см. раздел 2.1)

$$J(y(\cdot)) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\, dx \to \max_D, \tag{5.1}$$

$$D = \left\{ \begin{array}{c} y(x) : x \in [x_0, x_1],\ y(\cdot) \in C^2[x_0, x_1], \\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \end{array} \right\}.$$

Определение 1. *Функционал $J(y(\cdot))$ достигает на элементе $y^*(\cdot) \in D$ C^1*–***локального максимума***, если найдётся число $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$J(y^*(\cdot)) \geq J(y(\cdot))$$

для всякой $y(\cdot) \in D$, для которой[1]

$$\|y^*(\cdot) - y(\cdot)\|_{C^1[x_0,x_1]} \leq \varepsilon.$$

Необходимым условием C^1–локального экстремума является выполнение для $y^*(\cdot)$ краевой задачи Эйлера. Однако, на решении этой задачи[2] экстремум может и не достигаться. Продемонстрируем это следующим примером:

$$J(y(\cdot)) = \int\limits_0^{3\pi/2} \left(y^2 - y'^2\right) dx \to \max,$$
$$y(0) = y(3\pi/2) = 0.$$

Здесь единственным решением краевой задачи Эйлера

$$y'' + y = 0,\ y(0) = y(3\pi/2) = 0$$

[1] $\|f\|_{C^1[x_0,x_1]} \equiv \max\limits_{x \in [x_0,x_1]} |f(x)| + \max\limits_{x \in [x_0,x_1]} |f'(x)|$ — норма в пространстве $C^1[x_0, x_1]$.

[2] То есть, на экстремали, удовлетворяющей краевым условиям.

является тривиальная функция $y^*(x) \equiv 0$. На ней вдобавок выполнено необходимое условие Лежандра

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \equiv -2 < 0,$$

из которого следует также, что возможный экстремум — максимум.

Однако, на допустимых функциях вида $y_\varepsilon(x) \equiv \varepsilon \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$, $\varepsilon > 0$, принадлежащих C^1 −окрестности радиуса $\frac{5}{3}\varepsilon$ функции $y^*(\cdot)$, мы имеем

$$J(y_\varepsilon(\cdot)) = \frac{5}{12}\pi\varepsilon^2 > 0 = J(y^*(\cdot)),$$

из чего вытекает, что на $y^*(\cdot)$ локальный максимум не достигается. Таким образом, выполнение краевой задачи Эйлера (даже вместе с условием Лежандра) не является достаточным условием экстремума.

Рассмотрим приращение функционала в C^1-окрестности экстремального элемента. По формуле Тейлора

$$\triangle J = J(y^* + \varepsilon\eta) - J(y^*) = \varepsilon\delta J + \frac{\varepsilon^2}{2!}\delta^2 J + o\left(\varepsilon^2\right), \tag{5.2}$$

где $\eta(\cdot)$ — произвольная фиксированная функция класса $C^2[x_0, x_1]$ с нулевыми граничными значениями.

Необходимыми условиями локального максимума являются

$$\delta J = 0,\ \delta^2 J \le 0\ \forall\eta(\cdot).$$

Из разложения (5.2) видно, что в случае $\delta J = 0$ достаточным условием локального максимума может служить условие отрицательности второй вариации на произвольном нетривиальном приращении $\varepsilon\eta$:

$$\delta^2 J < 0\ \forall\eta(\cdot) \not\equiv 0.$$

Выражение для второй вариации было получено в разделе 2.1:

$$\delta^2 J = \int\limits_{x_0}^{x_1} \Omega(x, \eta(x), \eta'(x))\, dx =$$
$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[P(x)\eta^2(x) + 2Q(x)\eta(x)\eta'(x) + R(x)\eta'^2(x)\right] dx,$$

где

$$\begin{aligned} P(x) &\equiv F''_{y^2}(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)), \\ Q(x) &\equiv F''_{yy'}(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)), \\ R(x) &\equiv F''_{y'^2}(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)). \end{aligned}$$

Введём ряд новых определений.

Определение 2. *Вторичной экстремальной задачей (по отношению к исходной задаче* (5.1)*) называется задача*

$$\begin{gathered} \int\limits_{x_0}^{x_1} \Omega(x, \eta(x), \eta'(x))\, dx \to \max_{D_0}, \\ D_0 \equiv \left\{\eta(x) : x \in [x_0, x_1],\ \eta(\cdot) \in C^1[x_0, x_1],\ \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0\right\} \end{gathered} \tag{5.3}$$

Определение 3. *Уравнение Эйлера для вторичной экстремальной задачи* (5.3)

$$\Omega'_{\eta} - \frac{d}{dx}\Omega'_{\eta'} = 0 \tag{5.4}$$

называется уравнением Якоби исходной задачи (5.1).

Определение 4. *Точка* $\bar{x} \in (x_0, x_1]$ *называется сопряжённой точке* x_0 *на экстремали* $y^*(\cdot)$, *если* $\eta(\bar{x}) = 0$, *где* $\eta(x)$ — *ненулевое решение уравнения Якоби, удовлетворяющее условию* $\eta(x_0) = 0$.

Рассмотрим уравнение Якоби (5.4) более подробно. Имеем

$$\begin{aligned} \Omega'_{\eta} &\equiv 2P\eta + 2Q\eta', \\ \Omega'_{\eta'} &\equiv 2Q\eta + 2R\eta'. \end{aligned}$$

Следовательно, для достаточно гладкой функции $F(x, y, y')$ уравнение Якоби представляет собой однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$R(x)\eta'' + S(x)\eta' + T(x)\eta = 0,$$

где функции $S(\cdot), T(\cdot)$ выражаются через $P(\cdot), Q(\cdot), R(\cdot)$.

Общее решение этого линейного уравнения второго порядка, как известно, можно записать в виде линейной комбинации

$$\eta(x) = C_1\varphi(x) + C_2\psi(x),$$

где $\{\varphi, \psi\}$ — произвольный линейно независимый набор его решений (фундаментальная система решений). Рассмотрим семейство решений уравнения Якоби, обращающихся в ноль в начальной точке интервала x_0:

$$\eta(x_0) = C_1\varphi(x_0) + C_2\psi(x_0) = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} \Rightarrow$$

$$\eta(x) = C_1\left(\varphi(x) - \psi(x)\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\right) \equiv C_1\alpha(x) \tag{5.5}$$

Если в некоторой точке $\bar{x}$ какое-либо нетривиальное решение семейства (5.5) обращается в ноль, то и все прочие решения семейства в данной точке обращаются в ноль. Поэтому проверку обращения в ноль можно проводить на произвольном решении, входящем в это семейство, скажем, для определённости, на решении $\eta_0(x)$, которое удовлетворяет условию $\eta'_0(x_0) = 1$.

Определение 5. *Экстремаль* $y^*(\cdot)$ *удовлетворяет*
условию Лежандра, если

$$R(x) \equiv F''_{y'^2}(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)) \le 0 \;\forall x \in [x_0, x_1];$$

б) *усиленному условию Лежандра, если*

$$R(x) \equiv F''_{y'^2}(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)) < 0 \;\forall x \in [x_0, x_1];$$

в) *условию Якоби, если в интервале* (x_0, x_1) *экстремаль не имеет сопряжённых точек;*

г) *усиленному условию Якоби, если в полуинтервале* $(x_0, x_1]$ *экстремаль не имеет сопряжённых точек*[3].

Теорема 1 (*аналитическая формулировка необходимых и достаточных условий экстремума*).

Для того чтобы экстремаль $y^*(\cdot)$ *доставляла функционалу* C^1-*локальный экстремум*

1) необходимо, *чтобы она удовлетворяла условиям Лежандра и Якоби;*

2) достаточно, *чтобы она удовлетворяла усиленным условиям Лежандра и Якоби.*

Доказательство. Необходимость условия Лежандра[4] установлена в разделе 2.1. Покажем, что усиленные условия Лежандра и Якоби (в совокупности) обеспечивают отрицательность второй вариации функционала на любом нетривиальном приращении, что в силу сделанных выше замечаний и доказывает теорему. Рассмотрим для произвольной ограниченной дифференцируемой функции $w(x)$ интеграл

$$\begin{gathered}\int_{x_0}^{x_1}\left(w'(x)\,\eta^2 + 2w(x)\,\eta\eta'\right)\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\left(w\eta^2\right)'\,dx = \\ = w\eta^2\Big|_{x_0}^{x_1} = 0\ \forall\eta(\cdot)\in D_0.\end{gathered}\tag{5.6}$$

При выполнении усиленного условия Лежандра ($R < 0$) вторая вариация после добавления к ней левой части (5.6) может быть записана в виде

$$\begin{gathered}\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1}\left[\left(P(x)+w'(x)\right)\eta^2 + 2\left(Q(x)+w(x)\right)\eta\eta' + R(x)\,\eta'^2\right]\,dx = \\ = \int_{x_0}^{x_1}\left[R\left(\eta' + \tfrac{Q+w}{R}\eta\right)^2 + \left(P + w' - \tfrac{(Q+w)^2}{R}\right)\eta^2\right]\,dx\end{gathered}$$

Выберем функцию $w(x)$ так, чтобы подынтегральная функция с точностью до множителя была полным квадратом. Достаточно положить для этого

$$R\left(P+w'\right) - \left(Q+w\right)^2 \equiv 0.\tag{5.7}$$

Тогда

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} R\left(\eta' + \frac{Q+w}{R}\eta\right)^2\,dx.$$

Следовательно, знак второй вариации будет определяться только знаком функции $R(x)$, и потому вариация отрицательна на любом нетривиальном приращении $\varepsilon\eta$. Однако, для возможности указанного преобразования вариации необходимо и достаточно, чтобы уравнение (5.7) имело ограниченное решение. Заменой

---

[3] Заметим, что в этом случае уравнение Якоби имеет решение, которое не обращается в ноль ни в одной точке отрезка $[x_0, x_1]$.

[4] Доказательство необходимости условия Якоби опускаем (см., например, [3]).

$$w = -Q - R\frac{u'}{u}$$

оно приводится к уравнению Якоби (5.4) для функции u. Если это уравнение имеет ненулевое при $x_0 \leq x \leq x_1$ решение (а это именно так, если выполнено усиленное условие Якоби), то и (5.7) имеет ограниченное решение. Теорема доказана.

Достаточные условия экстремума можно сформулировать и иначе, привлекая понятие *центрального поля экстремалей.* А именно, семейство экстремалей $y(x,\lambda)$ образует центральное поле на отрезке $x \in [x_0, \tilde{x}]$, если входящие в него экстремали на данном интервале не имеют иных точек пересечения кроме точки (x_0, y_0).

Теорема 2 (*геометрическая формулировка достаточных условий экстремума*).

Для того чтобы удовлетворяющая усиленному условию Лежандра экстремаль $y^*(\cdot)$ доставляла функционалу C^1−локальный экстремум достаточно, чтобы её можно было включить в центральное поле экстремалей на отрезке $[x_0, x_1]$.

(без доказательства)

Примеры.

1. Вернёмся к рассмотренному в начале данного раздела примеру в несколько более широкой постановке:

$$\begin{cases} J(y) = \int\limits_0^{x_1} \left(y^2 - y'^2\right) dx \to \max, \\ y(0) = y(x_1) = 0. \end{cases}$$

Здесь x_1 — произвольное, но фиксированное число. Из уравнения Эйлера, которое здесь имеет вид $y''+y=0$, находим семейство экстремалей, удовлетворяющих левому граничному условию: $y(x) = C_1 \sin x$. Так как $F''_{y'^2} \equiv -2 < 0$, то для любой экстремали выполнено усиленное условие Лежандра. Из уравнение Якоби $\eta'' + \eta = 0$ находим функцию $\eta_0(x) \equiv \sin x$. Следовательно, ближайшей к $x_0 = 0$ сопряжённой точкой является точка $\bar{x} = \pi$.

Рассмотрим варианты возможных значений x_1.

(a) Пусть $x_1 < \pi$. Тогда единственной экстремалью, удовлетворяющей обеим граничным условиям, является $y^*(x) \equiv 0$. Для этой экстремали выполнено усиленное условие Якоби, так как ближайшая на ней сопряжённая точка π не попадает в полуинтервал $(0, x_1]$. Следовательно, на ней достигается C^1-локальный экстремум. Это следует также и из того, что данная экстремаль включена в центральное поле экстремалей $y(x,\lambda) = \lambda \sin x$.

(b) Пусть $x_1 = \pi$. В этом случае экстремалей, удовлетворяющих обеим граничным условиям, бесконечно много: $y^*(x) = C \sin x$.

Все они удовлетворяют условию Якоби (но не усиленному!). Значение функционала на любой из них одинаково

$$J\left(C\sin\left(x\right)\right) = C^2 \int\limits_0^{\pi} \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\, dx = 0.$$

Таким образом, вопрос о достижении на данных экстремалях C^1-локального экстремума остаётся открытым, и требуется дополнительное исследование.

(c) Пусть $x_1 > \pi$. В этом случае краевым условиям удовлетворяет нулевая экстремаль $y^*\left(x\right) \equiv 0$ (для $x_1 = k\pi$ даже любая из пучка $C\sin x$). Однако, на ней не выполнено необходимое условие Якоби: в интервале $\left(0, x_1\right)$ есть сопряжённая точка π. Следовательно, на данной экстремали локальный экстремум не достигается (ср. с примером, разобранным в начале раздела, где $x_1 = \frac{3\pi}{2}$).

2. Покажем, что циклоида (см. раздел 2.1) действительно является брахистохроной (по-крайней мере среди C^1-близких кривых). Усиленное условие Лагранжа в данной задаче выполняется для любой функции:

$$F''_{y'^2} = \frac{1}{\sqrt{y}\left(1 + y'^2\right)^{3/2}} > 0.$$

Сама же циклоида

$$\begin{cases} x^*\left(t\right) = C^*\left(t - \sin t\right) \\ y^*\left(t\right) = C^*\left(1 - \cos t\right) \end{cases},$$

приходящая в заданную точку, очевидно, может быть вложена в центральное поле экстремалей вида

$$\begin{cases} x\left(t\right) = \left(1 + \lambda\right) C^*\left(t - \sin t\right) \\ y\left(t\right) = \left(1 + \lambda\right) C^*\left(1 - \cos t\right) \end{cases}, \ |\lambda| < \lambda_0.$$

Глава 6

Гамильтонов формализм

Рассмотрим опять простейшую задачу вариационного исчисления (2.1).

Вводя новую переменную (*импульс*) $p \equiv F'_{y'}(x, y, y')$ и новую функцию (*Гамильтона*)

$$H(x, y, p) = py' - F(x, y, y')$$

можно записать уравнение Эйлера (2.5) второго порядка в виде (*канонической*) гамильтоновой системы из двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y} \end{cases} \tag{6.1}$$

Для доказательства этого выразим y' из уравнения $p = F'_{y'}(x, y, y')$ локально[1] в виде $y' = \phi(x, y, p)$ и запишем тождество

$$H(x, y, p) \equiv p\phi(x, y, p) - F(x, y, \phi(x, y, p)).$$

Отсюда получаем для любого решения уравнения Эйлера (экстремали)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= \phi(x, y, p) + \underbrace{\left(p\frac{\partial \phi}{\partial p} - F'_{y'}\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)}_{\equiv 0} = y', \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \underbrace{\left(p\frac{\partial \phi}{\partial y} - F'_{y'}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)}_{\equiv 0} - \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{d}{dx}F'_{y'} = -p'. \end{aligned}$$

Заметим также, что

$$\frac{\partial H}{\partial x} = p\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} - F'_{y'}\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Интегралы уравнения Эйлера в новых переменных записываются особенно просто:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &\equiv -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{p=const (закон сохранения импульса)}} \\ \frac{\partial F}{\partial x} &\equiv -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{H=const (закон сохранения энергии)}} \end{aligned}$$

[1] Как известно из курса математического анализа, для этого достаточно, чтобы $F''_{y'^2} \neq 0$.

Рассмотрим *действие*

$$S(x,y) = \int_{x_0}^{x} F(x, y(x), y'(x))\, dx$$

на экстремалях $y = y(x)$ центрального поля $y(x_0) = y_0$ как функцию конечной точки графика экстремали $(x, y = y(x))$.

Вычисление частных производных данной функции по x и y эквивалентно решению задач типа I_3 с ограничением вида $g(y(x_1)) = y = \mathrm{const}$ и I_1, соответственно. Следовательно, частные производные совпадают с первыми вариациями функционала в указанных задачах

$$S'_x = F + (g' - y')\, \tfrac{\partial F}{\partial y'} + \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}_{\equiv 0} \eta\, dx = F - y'\tfrac{\partial F}{\partial y'} = -H(x,y,p),$$

$$S'_y = \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}_{\equiv 0} \eta\, dx + \tfrac{\partial F}{\partial y'} = \tfrac{\partial F}{\partial y'} = p \ \ (\text{при } \eta(x_1) = 1).$$

Исключая из этих двух уравнений p, получаем следующее *уравнение Гамильтона-Якоби* в частных производных для действия $S(x,y)$:

$$S'_x + H\left(x, y, S'_y\right) = 0.$$

Часть II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Глава 7

Вводные замечания

Соотношение

$$F\left(x, u, Du, D^2u, \ldots, D^m u\right) = 0, \tag{7.1}$$

где $F(\cdot, \cdots, \cdot)$ — заданная функция многих переменных, $u = u(x)$ — неизвестная функция $n > 1$ переменных $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \subset R^n$, $D, D^2, \ldots, D^m, m \geq 1$ — операторы дифференцирования соответствующих порядков, называется *уравнением в частных производных.* Порядок старшей производной, входящей в уравнение (7.1), называется *порядком уравнения. Решением уравнения*[1] называется всякая функция $u(x)$, которая в области Ω имеет все необходимые производные и которая при подстановке в (7.1) обращает это соотношение в тождество в области $x \in \Omega$.

Если попытаться высказать некоторые общие суждения относительно уравнений в частных производных, то можно отметить следующее:

- теория таких уравнений очень сложна[2], даже если ограничиться только линейными уравнениями; уже само понятие решения уравнения в частных производных допускает различные толкования и подходы;

- редко, когда уравнения в частных производных удаётся решить "в общем виде" ; при этом множество их решений обычно "велико" : если общее решение алгебраического уравнения n-го порядка состоит из n чисел, решение обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка включает n произвольных постоянных, то решение уравнения в частных производных n-го порядка может включать до n произвольных функций[3];

[1] *Классическим.* Помимо классических существуют также обширные классы т.н. *обобщённых решений* уравнений в частных производных (см., например, [13]).

[2] "Отсюда следует, что уравнения в частных производных значительно сложнее обыкновенных ..."

В.И.Арнольд (из выступлений ...)

[3] Ещё одна интересная цепочка: решение обыкновенного дифференциального уравнения в ряде случаев сводится к решению алгебраического уравнения (характеристического); решение уравнения в частных производных — к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений характеристик)...

- к *уравнениям математической физики* традиционно относят линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка; при более широком толковании данного термина к уравнениям математической физики относят также некоторые классы интегродифференциальных уравнений (*уравнения переноса* и др.).

Глава 8

Уравнения в частных производных первого порядка

8.1 Классификация уравнений

Общий вид уравнения в частных производных первого порядка для функции $n > 1$ переменных $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \equiv (x_1, \ldots, x_n)$

$$F(\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\nabla} u) \equiv F\left(x_1, \ldots, x_n, u, u'_{x_1}, \ldots, u'_{x_n}\right) = 0.$$

Линейное по производным уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(\mathbf{x}, u)$$

называется *квазилинейным*, уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(\mathbf{x}, u)$$

— *полулинейным*, наконец, уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(\mathbf{x})$$

— *линейным.*

8.2 Методы решения квазилинейных уравнений первого порядка

Пусть коэффициенты квазилинейного уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(\mathbf{x}, u) \tag{8.1}$$

— функции $a_i(\mathbf{x}, u)$, $b(\mathbf{x}, u)$ — непрерывны по совокупности переменных в некоторой открытой области, и в каждой её точке хотя бы одна из функций $a_i(\mathbf{x}, u)$ отлична от нуля: $\sum_{i=1}^n a_i^2(\mathbf{x}, u) > 0$.

Пусть $\mathbf{a} \equiv (a_1, \ldots, a_n)$, $\|\mathbf{a}\| \equiv \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$, $\mathbf{e} \equiv \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$. Тогда производная по направлению вектора $\mathbf{e}$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} e_i = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} a_i,$$

и потому уравнение (8.1) можно записать также в следующей форме

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = \frac{b}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$u'_x + u'_y = 0 \ \ (n = 2).$$

Здесь $\mathbf{a} \equiv (1, 1)$, $b \equiv 0$, $\mathbf{e} \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Вводя новые независимые переменные $t_1 \equiv (x+y)/\sqrt{2}$, $t_2 \equiv (x-y)/\sqrt{2}$ и функцию $v(t_1, t_2) \equiv u(x, y)$, запишем уравнение в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial v}{\partial t_1} = 0,$$

что позволяет легко выписать его решение:

$$u = v = f(t_2) = f(x - y),$$

где $f(\cdot)$ — произвольная функция класса $C^1(\mathbf{R})$.

Определение. *Если $u(\mathbf{x})$ — решение уравнения (8.1), то поверхность с уравнением $u = u(\mathbf{x})$ в пространстве переменных $(u, \mathbf{x})$ называется интегральной поверхностью (8.1). Система уравнений*

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{d\tau} = a_i(\mathbf{x}, u) \\ \frac{du}{d\tau} = b(\mathbf{x}, u) \end{cases} \tag{8.2}$$

называется характеристической системой для (8.1). Её решения — кривые в пространстве переменных $(u, \mathbf{x})$ — называются характеристиками (8.1).

Замечание. Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (8.2) можно также записать в следующей симметричной форме

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b}.$$

Теорема. *Любая интегральная поверхность (8.1) образована некоторым семейством характеристик этого уравнения.*

(без доказательства)

Пример. Для рассмотренного выше уравнения $u'_x + u'_y = 0$ характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{0}.$$

Характеристиками являются прямые

$$x - y = C_1,\, u = C_2.$$

Пусть $f(\cdot) \in C^1(\mathbf{R})$ — произвольная функция. Интегральная поверхность

$$u(x, y) = f(x - y)$$

образована семейством характеристик, проходящих через кривую $u = f(t_2)$ в плоскости $x + y = 0$.

Глава 9

Уравнения в частных производных второго порядка

Как следует из определения, общий вид уравнения в частных производных второго порядка для функции $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n > 1$

$$F\left(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), Du(\mathbf{x}), D^2 u(\mathbf{x})\right) = 0.$$

Здесь значки D, D^2 условно обозначают произвольные дифференциальные операторы первого и второго порядков, соответственно.

Соответственно, общий вид уравнения второго порядка в частных производных с двумя независимыми переменными

$$F\left(x, y, u, u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}\right) = 0.$$

9.1 Каноническая форма записи квазилинейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

Квазилинейным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$A(x,y)\, u''_{x^2} + 2B(x,y)\, u''_{xy} + C(x,y)\, u''_{y^2} + f(x,y,u,\boldsymbol{\nabla} u) = 0, \qquad (9.1)$$

где $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$ — непрерывные в области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ функции, причём в любой точке области хотя бы одна из них отлична от нуля:

$$A^2(x,y) + B^2(x,y) + C^2(x,y) > 0 \;\forall (x,y) \in \Omega.$$

Произведём обратимую замену переменных в уравнении (9.1)

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y), \\ v(\xi,\eta) = u(x,y) \end{cases}, \quad J \equiv \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0 \,\forall (x,y),$$

где $\xi(\cdot,\cdot), \eta(\cdot,\cdot) \in C^2(\Omega)$. После пересчёта производных и алгебраических преобразований получаем следующее уравнение для функции v:

$$\bar{A}(\xi,\eta)\, v''_{\xi^2} + 2\bar{B}(\xi,\eta)\, v''_{\xi\eta} + \bar{C}(\xi,\eta)\, v''_{\eta^2} + g(\xi,\eta,v,\nabla v) = 0, \qquad (9.2)$$

где

$$\begin{gathered}\bar{A}(\xi,\eta) \equiv A(x,y)\left(\xi'_x\right)^2 + 2B(x,y)\,\xi'_x\xi'_y + C(x,y)\left(\xi'_y\right)^2, \\ \bar{B}(\xi,\eta) \equiv A(x,y)\,\xi'_x\eta'_x + B(x,y)\left(\xi'_x\eta'_y + \eta'_x\xi'_y\right) + C(x,y)\,\xi'_y\eta'_y, \\ \bar{C}(\xi,\eta) \equiv A(x,y)\left(\eta'_x\right)^2 + 2B(x,y)\,\eta'_x\eta'_y + C(x,y)\left(\eta'_y\right)^2.\end{gathered}$$

Заметим также, что $\bar{\triangle} = \triangle J^2$, где

$$\bar{\triangle} \equiv -\begin{vmatrix}\bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C}\end{vmatrix} = \bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C},$$

$$\Delta \equiv -\begin{vmatrix}A & B \\ B & C\end{vmatrix} = B^2 - AC.$$

Определение. *Кривая в плоскости* (x,y), *описываемая уравнением* $\varphi(x,y) = C$, *где* $\varphi(x,y)$ *— решение характеристического уравнения*

$$A(x,y)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B(x,y)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C(x,y)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0, \qquad (9.3)$$

причём $\nabla\varphi \neq 0$ *во всех точках кривой, называется характеристической линией (характеристикой) уравнения* (9.1).

Классификация типа квазилинейного уравнения в заданной точке области (x_0, y_0) производится по знаку *детерминанта* $\triangle(x_0, y_0)$.

- Гиперболический случай:

$$\triangle \equiv B^2 - AC > 0. \qquad (9.4)$$

Если в данной точке $A = C = 0$, то в силу условия (9.4) $B \neq 0$ (в данной точке и её окрестности). Поэтому после деления на коэффициент B уравнение (9.1) примет вид

$$u''_{xy} = f_1\left(x,y,u,u'_x,u'_y\right)$$

— *первая каноническая форма* записи уравнения гиперболического типа.

Если же один из коэффициентов при повторных производных, A, для определённости, не равен нулю, то характеристическое уравнение (9.3) можно преобразовать к виду

$$A\left(A\left(\varphi'_x\right)^2 + 2B\varphi'_x\varphi'_y + C\left(\varphi'_y\right)^2\right) = \left(A\varphi'_x + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\varphi'_y\right)\cdot$$
$$\cdot\left(A\varphi'_x + \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right)\varphi'_y\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(A\varphi'_x + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\varphi'_y\right) = 0 \\ \left(A\varphi'_x + \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right)\varphi'_y\right) = 0\end{array}\right. .$$

Пусть φ_1, φ_2 — решения этих уравнений, соответственно (две характеристики, проходящие через точку гиперболического типа). Их можно взять так, чтобы $J \equiv D(\varphi_1, \varphi_2)/D(x,y) \neq 0$.[1] Возьмём в качестве новых независимых переменных

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi_1(x,y), \\ \eta &= \varphi_2(x,y). \end{aligned}$$

При подобном выборе имеем $\bar{A} = \bar{C} = 0$. Далее, так как при этом

$$\bar{\triangle} = \bar{B}^2 = \triangle J^2 > 0,$$

то $\bar{B} \neq 0$ и после деления (9.2) на $\bar{B}$, приводим это уравнение к первой канонической форме

$$\boxed{v''_{\xi\eta} = g_1(\xi, \eta, v, \nabla v)}.$$

Дополнительная замена переменных

$$\begin{cases} \xi = \alpha + \beta, \\ \eta = \alpha - \beta, \\ w(\alpha, \beta) \equiv v(\xi, \eta) \end{cases}$$

приводит последнее уравнение ко *второй канонической форме* записи уравнения гиперболического типа

$$\boxed{w''_{\alpha^2} - w''_{\beta^2} = g_2(\alpha, \beta, w, \nabla w)}.$$

- Параболический случай:

$$\triangle = B^2 - AC = 0. \tag{9.5}$$

Если $A = 0$, то в силу (9.5) и $B = 0$, поэтому $C \neq 0$. После деления на C уравнение приобретает вид

$$u''_{y^2} = f_2\left(x, y, u, u'_x, u'_y\right)$$

— *каноническая форма записи уравнения параболического типа.* Допустим, что $A \neq 0$, а соотношение (9.5) выполняется в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Тогда в силу тождества

$$A\left(A(\varphi'_x)^2 + 2B\varphi'_x\varphi'_y + C\left(\varphi'_y\right)^2\right) \equiv \left(A\varphi'_x + B\varphi'_y\right)^2$$

характеристическое уравнение (9.3) равносильно уравнению

$$A\varphi'_x + B\varphi'_y = 0.$$

Пусть $\varphi_1(x,y)$ — решение данного уравнения (единственная действительная характеристика, проходящая через точку (x_0, y_0)), $\nabla\varphi_1 \neq 0$.

[1] Иными словами

$$\frac{\varphi'_{1x}}{\varphi'_{1y}} = -\frac{B + \sqrt{\triangle}}{A} \neq -\frac{B - \sqrt{\triangle}}{A} = \frac{\varphi'_{2x}}{\varphi'_{2y}},$$

что равносильно условию $\triangle \neq 0$. Геометрически это означает, что характеристики не касаются друг друга в точке (x_0, y_0).

Предполагая, что $\varphi'_{1y} \neq 0$, возьмём в качестве новых независимых переменных[2]

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x,y), \\ \eta = x \end{cases}.$$

Тогда

$$\begin{gathered} \bar{A} = 0, \\ \bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C} = \left(B^2 - AC\right) J^2 = 0 \Rightarrow \bar{B} = 0, \\ \bar{C} = A\left(\eta'_x\right)^2 = A \neq 0. \end{gathered}$$

После деления (9.2) на $\bar{C}$, приводим это уравнение к канонической форме

$$\boxed{v''_{\eta^2} = g_3\left(\xi, \eta, v, v'_\xi, v'_\eta\right)}.$$

- Эллиптический случай:

$$\triangle \equiv B^2 - AC < 0. \tag{9.6}$$

В этом случае вещественные характеристики отсутствуют. Из аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что характеристическое уравнение (9.3) имеет пару комплексно сопряжённых, аналитических в окрестности рассматриваемой точки решений

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y) &\equiv \xi(x,y) + i\eta(x,y), \\ \varphi_2(x,y) &\equiv \xi(x,y) - i\eta(x,y). \end{aligned}$$

Подставляя первое решение в уравнение (9.3), получаем после тождественных преобразований

$$\begin{gathered} A\left(\xi'_x + i\eta'_x\right)^2 + 2B\left(\xi'_x + i\eta'_x\right)\left(\xi'_y + i\eta'_y\right) + C\left(\xi'_y + i\eta'_y\right)^2 = \\ = \left[A\left(\xi'_x\right)^2 + 2B\xi'_x\xi'_y + C\left(\xi'_y\right)^2\right] - \left[A\left(\eta'_x\right)^2 + 2B\eta'_x\eta'_y + C\left(\eta'_y\right)^2\right] + \\ +2i\left[A\xi'_x\eta'_x + B\left(\xi'_x\eta'_y + \eta'_x\xi'_y\right) + C\xi'_y\eta'_y\right] = 0. \end{gathered}$$

Отсюда следует, что после выбора в качестве новых независимых переменных

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x,y), \\ \eta &= \eta(x,y) \end{aligned}$$

мы получим

$$\begin{gathered} \bar{B} = 0,\ \bar{A} = \bar{C}, \\ \bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C} = -\bar{A}^2 = \left(B^2 - AC\right) J^2 \neq 0 \Rightarrow \bar{A} \neq 0, \end{gathered}$$

а уравнение (9.2) после деления на $\bar{A}$ приведётся к *канонической форме записи уравнения эллиптического типа*

$$\boxed{v''_{\xi^2} + v''_{\eta^2} = g_4\left(\xi, \eta, v, v'_\xi, v'_\eta\right)}$$

[2]Имеем при этом

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = -\varphi'_{1y} \neq 0.$$

Замечания.

1. В силу равенства
$$\bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C} = \left(B^2 - AC\right) J^2$$
тип уравнения в данной точке не меняется при невырожденном преобразовании.

2. Если тип уравнения изменяется от точки к точке, то говорят, что уравнение в данной области имеет *смешанный тип.*

3. Нахождение характеристик может быть сведено к решению обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Именно, справедлива следующая

   Лемма. *Рассмотрим уравнения*
$$A\left(z'_x\right)^2 + 2Bz'_x z'_y + C\left(z'_y\right)^2 = 0, \tag{9.7}$$
$$A\left(dy\right)^2 - 2Bdxdy + C\left(dx\right)^2 = 0. \tag{9.8}$$
   Функция $z = \varphi\left(x, y\right)$ является решением уравнения (9.7) тогда и только тогда, когда $\varphi\left(x, y\right) = C$ — первый интеграл уравнения (9.8).

4. Классифицировать тип уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными в точке можно было и в соответствии с общей схемой, изложенной далее. При этом уравнению (9.1) ставится в соответствие квадратичная форма
$$Q\left(\lambda_1, \lambda_2\right) \equiv A\left(x, y\right)\lambda_1^2 + 2B\left(x, y\right)\lambda_1\lambda_2 + C\left(x, y\right)\lambda_2^2,$$
которая невырожденным преобразованием приводится к каноническому виду, не содержащему произведения $\lambda_1\lambda_2$:
$$\tilde{Q}\left(\mu_1, \mu_2\right) = \alpha_1\mu_1^2 + \alpha_2\mu_2^2,$$
где $\alpha_i \in \{0, \pm 1\}$. Если коэффициенты α_i имеют разные знаки, то тип уравнения в данной точке гиперболический; одинаковые знаки — эллиптический; наконец, если один из коэффициентов равен нулю, тип уравнения параболический.

Пример. Рассмотрим следующее *уравнение Трикоми*, находящее важные применения в газовой динамике:
$$yu''_{x^2} + u''_{y^2} = 0.$$

Для этого уравнения имеем
$$A \equiv y,\ B \equiv 0,\ C \equiv 1,$$
$$\triangle = B^2 - AC = -y.$$

Отсюда следует, что уравнение является гиперболическим (дозвуковой режим истечения газов) в точках нижней полуплоскости $y < 0$, параболическим на прямой $y = 0$ и эллиптическим (сверхзвуковой режим истечения газов) в верхней полуплоскости[3].

[3] Для соответствующей квадратичной формы имеем
$$Q\left(\lambda_1, \lambda_2\right) = y\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \begin{cases} \left(\sqrt{y}\lambda_1\right)^2 + \lambda_2^2, & y > 0 \\ -\left(\sqrt{|y|}\lambda_1\right)^2 + \lambda_2^2, & y < 0 \end{cases}.$$

Характеристическое уравнение для уравнения Трикоми —

$$y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0,$$

а эквивалентное ему обыкновенное дифференциальное уравнение —

$$y\,(dy)^2+(dx)^2=0.$$

В нижней полуплоскости решения последнего уравнения — характеристики уравнения Трикоми — имеют вид

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3}\,(-y)^{3/2}+C_1, \\ x=-\frac{2}{3}\,(-y)^{3/2}+C_2, \end{array}\right.$$

а само уравнение Трикоми после замен

$$\left\{\begin{array}{l} \xi=x+\frac{2}{3}\sqrt{-y^3}, \\ \eta=x-\frac{2}{3}\sqrt{-y^3} \end{array}\right.$$

приводится к каноническому виду

$$v''_{\xi\eta}=\frac{v'_\eta-v'_\xi}{6\,(\xi-\eta)}.$$

В верхней полуплоскости решениями характеристического уравнения являются функции $\varphi_{1,2}\,(x,y)=\frac{3}{2}x\pm i\sqrt{y^3}$. Заменой

$$\left\{\begin{array}{l} \xi=\frac{3}{2}x, \\ \eta=-\sqrt{y^3} \end{array}\right.$$

сводим уравнение Трикоми к каноническому виду

$$v''_{\xi^2}+v''_{\eta^2}=-\frac{1}{3\eta}\frac{\partial v}{\partial\eta}.$$

9.2 Классификация квазилинейных уравнений второго порядка с $n>2$ независимыми переменными

В самом общем виде подобные уравнения можно записать следующим образом

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\,(\mathbf{x})\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+f\,(\mathbf{x},u,\boldsymbol{\nabla}u)=0.$$

Здесь $\mathbf{x}\equiv(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega\subset\mathbf{R}^n$. Предполагается, что в каждой точке области Ω хотя бы один из коэффициентов при старших производных отличен от нуля:

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}^2\,(\mathbf{x})>0\;\forall\mathbf{x}\in\Omega.$$

Для определения типа уравнения в заданной точке $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ составим для него квадратичную форму n переменных

$$Q(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(\mathbf{x}_0)\lambda_i\lambda_j \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\lambda_i\lambda_j.$$

Как доказывается в теории квадратичных форм, существует невырожденное линейное преобразование переменных

$$\boldsymbol{\mu} = \Im\boldsymbol{\lambda},\ \det\Im \neq 0$$

такое, что в новых переменных $\boldsymbol{\mu}$ форма имеет свой канонический вид:

$$\tilde{Q}(\boldsymbol{\mu}) \equiv Q\left(\Im^{-1}\boldsymbol{\mu}\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\mu_i^2, \tag{9.9}$$

где $\beta_i \in \{0, \pm 1\}$. По этой канонической форме и определяется тип уравнения в точке $\mathbf{x}_0$.

- **Эллиптический тип**: все коэффициенты отличны от нуля и совпадают по знаку: либо $\beta_i = 1\,\forall i = \overline{1,n}$, либо $\beta_i = -1\,\forall i = \overline{1,n}$.

  Форма (9.9) в этом случае принимает один из видов

  $$\tilde{Q}(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2,$$
  $$\tilde{Q}(\boldsymbol{\mu}) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2,$$

  а уравнение некоторым преобразованием переменных приводится к виду

  $$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_n^2} + g(\boldsymbol{\xi}, v, \boldsymbol{\nabla} v) = 0.$$

- **Параболический тип**: некоторые коэффициенты (не все!) равны нулю. Пусть для определённости $\beta_j = 0\,\forall j > k$, где $k \in \overline{1, n-1}$.

  Квадратичная форма в этом случае приводится к виду

  $$\tilde{Q}(\boldsymbol{\mu}) = \pm\mu_1^2 \pm \mu_2^2 \pm \ldots \pm \mu_k^2,$$

  где знаки могут чередоваться в любой последовательности, а уравнение — к виду

  $$\pm\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} \pm \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^2} \pm \ldots \pm \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k^2} + g(\xi, v, \nabla v) = 0.$$

  Если форма $\tilde{Q}(\boldsymbol{\mu})$ имеет одно из следующих представлений

  $$\tilde{Q}(\boldsymbol{\mu}) = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_k^2,$$
  $$\tilde{Q}(\boldsymbol{\mu}) = -\left(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_k^2\right),$$

  то тип уравнения может быть уточнён как **эллиптико-параболический**, в противном случае — как **гиперболо-параболический**.

- **Гиперболический тип**: один из коэффициентов отличен от всех других по знаку: пусть для определённости $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_n = -1$.

  В данном случае
$$\tilde{Q}\,(\boldsymbol{\mu}) = \mu_1^2 - \mu_2^2 - \ldots - \mu_n^2,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_n^2} + g\,(\boldsymbol{\xi}, v, \boldsymbol{\nabla} v) = 0.$$

- **Ультрагиперболический тип**: $n > 3$ и существует $k \in \overline{2, n-2}$ такое, что k из коэффициентов β_i равны 1, а все прочие равны -1. Пусть для определенности $\mu_1 = \ldots = \mu_k = 1$. Тогда

$$\tilde{Q}\,(\boldsymbol{\mu}) = \mu_1^2 + \ldots + \mu_k^2 - \mu_{k+1}^2 - \ldots - \mu_n^2,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_{k+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_n^2} + g\,(\boldsymbol{\xi}, v, \boldsymbol{\nabla} v) = 0.$$

Глава 10

Корректность постановки задач математической физики

10.1 Задача математической физики

Под *задачей математической физики в широком смысле* понимают совокупность условий, однозначно определяющих эволюцию некоторого физического процесса в заданной пространственной области.

Пусть состояние процесса задаётся функцией $u(\mathbf{r},t)$, где $\mathbf{r} \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$, $t \in [0,T]$. *Задача математической физики в узком смысле* это набор, состоящий из

1. *дифференциального уравнения* (в частных производных), описывающего механизм протекания процесса в области Ω;
2. *начального условия*, задающего исходное состояние процесса в момент времени $t = 0$;
3. *краевого (граничного) условия на* $\partial\Omega$, определяющего влияние окружающей среды на протекание процесса.

10.2 Основные типы начально-краевых задач

- *Задача Коши*

  Дифференциальное уравнение (обычно гиперболического или параболического типов) решается во всём пространстве: $\Omega \equiv \mathbf{R}^3$. Соответственно, граничное условие отсутствует, известно лишь начальное состояние процесса.

- *Краевая задача*

  Процесс стационарен, то есть не зависит от времени. Дифференциальное уравнение (обычно эллиптического типа) решается в некоторой области пространства, на границе которой ставится краевое условие.

- *Смешанная (начально-краевая) задача.*

  Процесс нестационарен, известно его начальное состояние. Уравнение (обычно гиперболического или параболического типов) решается в заданной области пространства, на границе которой ставится краевое условие.

Определение. *Задача математической физики считается корректно поставленной в классе корректности $\mathcal{K}$, если*

а) *она имеет решение $u(\mathbf{r}, t) \in \mathcal{K}$;*

б) *решение единственно в $\mathcal{K}$;*

в) *решение непрерывно (в смысле метрики на множестве $\mathcal{K}$) зависит от параметров задачи (коэффициенты уравнения, начальные и граничные условия, область решения и пр.)*

В том случае, когда эволюция процесса описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, ответы на вопросы корректности постановки задачи носят достаточно общий характер и вытекают из известных теорем существования, единственности и непрерывной зависимости решений подобных уравнений. В случае уравнений в частных производных исследование данных вопросов значительно усложняется. Приведём один классический пример Адамара, иллюстрирующий данное высказывание.

Пример. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в полуплоскости $\Omega \equiv \{(x, y) : x > 0\}$

$$\begin{cases} \triangle u \equiv u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u(0, y) = 0, & |y| < \infty \\ u'_x(0, y) = \frac{1}{k} \sin ky, & |y| < \infty. \end{cases} \tag{10.1}$$

Здесь k — натуральное число — параметр задачи.

Нетрудно проверить непосредственной подстановкой, что решением данной задачи (причем, единственным, что доказать уже труднее — см. раздел 11.3.2) является функция

$$u_k(x, y) = \frac{\operatorname{sh} kx}{k^2} \sin ky.$$

Рассмотрим также задачу

$$\begin{cases} \triangle u \equiv u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u(0, y) = 0, & |y| < \infty \\ u'_x(0, y) = 0, & |y| < \infty, \end{cases} \tag{10.2}$$

единственным решением которой является тождественно равная нулю функция $u_0(x, y) \equiv 0$.

Задачу (10.1) можно рассматривать как малое “возмущение” задачи (10.2). Действительно, для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно взять такое достаточно большое k, что

$$\max_y \left| \frac{1}{k} \sin ky - 0 \right| < \varepsilon.$$

Сравним теперь решения соответствующих задач. Если $y \neq \frac{\pi m}{k}, m \in Z$ и $x \neq 0$, то

$$|u_k(x,y) - u_0(x,y)| = |u_k(x,y)| \underset{k\to\infty}{\to} \infty.$$

Таким образом, хотя краевые условия этих двух задач при $k \to \infty$ неоганиченно сближаются в равномерной метрике, сами решения сколь угодно сильно в этой метрике различаются.

Следует отметить, что весьма широкий класс практических задач[1] при их "наивной" постановке приводит к некорректно поставленным задачам математической физики. Этим объясняется тот большой интерес, который вызывают методы решения некорректных задач (см., например, книги [23]; *Некорректные задачи естествознания,* М.: МГУ, 1987 и др.)

[1] Задачи обработки и интерпретации данных физических экспериментов, т.н. *обратные задачи.*

Глава 11

Методы решения задач математической физики

11.1 Методы решения задач для уравнений гиперболического типа

11.1.1 Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа

Прежде чем приступать к изучению методов решения задач для уравнений гиперболического типа приведем примеры физических задач, в которых подобные уравнения возникают. Как правило, это задачи колебательного, волнового характера. Обычно они ставятся как задачи Коши или начально-краевые задачи.

- Поперечные колебания отрезка струны — см. раздел 2.5.
- Продольные колебания отрезка упругого стержня

  Пусть функция $u(x,t)$ описывает смещение в момент времени t сечения однородного упругого стержня относительно своего несмещённого положения x. Тогда по теореме Лагранжа о конечных приращениях относительное удлинение малого отрезка $[x, x+\triangle x]$ равно

$$\frac{[\triangle x + u(x+\triangle x, t) - u(x,t)] - \triangle x}{\triangle x} = u'_x(x+\theta\triangle x, t),$$

  где $\theta \in [0,1]$. Переходя к пределу при $\triangle x \to 0$, находим относительное удлинение бесконечно-малого кусочка стержня. По закону Гука натяжение стержня в данном сечении будет по модулю равно $|ESu'_x(x,t)|$, где S — площадь поперечного сечения стержня, E — модуль Юнга на единицу поперечного сечения. Мысленно разделим стержень сечением x на две части. Нетрудно сообразить, что проекция на ось x упругой силы, с которой правая часть стержня действует на левую, равна $ESu'_x(x,t)$. Запишем теперь уравнение второго закона Ньютона для малого отрезка стержня $[x, x+\triangle x]$ (в проекции на ось x)

$$\rho S\triangle x u''_{t^2}(x+\theta_1\triangle x, t) = ES\left(u'_x(x+\triangle x, t) - u'_x(x,t)\right),$$

где ρ — плотность массы. После деления обеих частей на $\triangle x$ и перехода к пределу при $\triangle x \to 0$ получаем следующее волновое уравнение для функции $u\left(x,t\right)$:

$$u''_{t^2} = a^2 u''_{x^2},\ a^2 \equiv \frac{E}{\rho}$$

- Распространение звука в однородной упругой среде — выводится в курсе *механики сплошных сред.*

- Распространение звука в океаническом волноводе

- Электрические колебания в телеграфной (длинной) линии

Длинной линией в широком понимании этого термина может быть названа любая электрическая схема, характерные размеры которой сопоставимы с длинами распространяющихся в ней электромагнитных волн. Как и любые другие электромагнитные явления, процессы распространения волн в длинной линии могут быть описаны уравнениями Максвелла. Уравнения Кирхгоффа, успешно описывающие низкочастотные электрические схемы, к длинным линиям можно применять лишь локально, то есть на малых их участках[1].

Рассмотрим вариант длинной линии, представляющий собой однородный проводник, вытянутый вдоль оси x над поверхностью земли нулевого потенциала. Будем характеризовать его следующими погонными, т.е. приходящимися на единицу длины, электрическими параметрами: активным сопротивлением R, индуктивностью L, ёмкостью относительно земли C и активной утечкой G.

Запишем уравнения Кирхгоффа для падения напряжения на участке линии от x до $x+\triangle x$ и баланса тока в узле $x+\triangle x$:

$$\begin{array}{c} v\left(x\right) - v\left(x+\triangle x\right) = i\left(x\right) R\triangle x + L\triangle x\frac{\partial i}{\partial t}, \\ i\left(x\right) = i\left(x+\triangle x\right) + G\triangle x v\left(x+\triangle x\right) + C\triangle x\frac{\partial v}{\partial t}. \end{array}$$

После деления уравнений на $\triangle x$ и перехода к пределу при $\triangle x \to 0$, получаем пару телеграфных уравнений первого порядка

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_x + Ri + Li'_t = 0, \\ i'_x + Gv + Cv'_t = 0. \end{array} \right. \tag{11.1}$$

Дифференцируя первое уравнение по x, а второе по t, и исключая из уравнений функцию $i\left(x,t\right)$ и её производные, получаем уравнение гиперболического типа для функции $v\left(x,t\right)$:

$$v''_{t^2} = a^2 v''_{x^2} - 2\mu v'_t - \varkappa v, \tag{11.2}$$

где

$$\begin{array}{c} a^2 \equiv \frac{1}{LC}, \\ \mu = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right), \\ \varkappa = \frac{GR}{LC}. \end{array}$$

Точно такое же уравнение получается и для функции i. Уравнение (11.2) можно свести к более простому заменой $u\left(x,t\right) = \exp\left(\mu t\right)\, v\left(x,t\right)$. А именно, после подобной замены получаем

[1] Обсуждение данного вопроса см. в книге [19].

$$u''_{t^2} = a^2 u''_{x^2} + b^2 u,$$

где

$$b \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right).$$

Особенно простой вид это уравнение принимает при $b = 0$, то есть при $RC = LG$:

$$u''_{t^2} = a^2 u''_{x^2}.$$

В этом случае телеграфная линия называется линией без искажений. Заметим, что "улучшая" линию повышением изоляции, то есть уменьшением утечки G, мы рискуем нарушить условие отсутствия искажений $RC = LG$. Выход — в искусственном увеличении погонной индуктивности[2] L.

Для получения граничного условия на конце телеграфной линии $x = 0$ следует записать уравнение Кирхгоффа для сосредоточенного элемента, стоящего на этом конце. Приведем некоторые варианты.

1. заземленный конец: $v(0,t) = 0$;
2. изолированный конец: $i(0,t) = 0 \Leftrightarrow v'_x(0,t) = 0$;
3. активное сопротивление R_0 на конце: $-v(0,t) = R_0 i(0,t)$;
4. емкость C_0 на конце: $-C_0 v'_t(0,t) = i(0,t)$.

11.1.2 Метод бегущих волн

В основе данного метода решения разнообразных задач математической физики лежит представление общего решения простейшего волнового уравнения в некотором специальном виде, который допускает простое физическое истолкование в терминах бегущих волн. После этого для решения конкретной задачи остается лишь подобрать профили волн так, чтобы удовлетворить всем оставшимся условиям задачи. Последнее обычно приводит к некоторым алгебраическим процедурам или решению некоторых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, так как сами профили являются функциями одной переменной.

Рассмотрим волновое уравнение

$$u''_{t^2} = a^2 u''_{x^2}.$$

Дифференциальные уравнения характеристик для него

$$a^2 (dt)^2 - (dx)^2 = 0,$$

откуда получаем уравнения характеристических линий

$$x = \pm at + c. \tag{11.3}$$

[2]Исторически так и случилось. Только на телеграфных линиях компании "Bell System" в 1949 году стояло около 20 млн. катушек индуктивной поддержки.

Делая в соответствии с теоретическими рекомендациями замену переменных вида

$$\begin{cases} \xi = x - at, \\ \eta = x + at, \\ v(\xi, \eta) = u(x, t) \end{cases},$$

приводим данное гиперболическое уравнение к первой канонической форме

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Поэтому

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial}{\partial \xi} \tfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \tfrac{\partial v}{\partial \eta} = g_1(\eta) \Rightarrow \\ v = \int g_1(\eta)\, d\eta = g(\eta) + f(\xi) \Rightarrow \\ u(x, t) = f(x - at) + g(x + at), \end{gathered} \tag{11.4}$$

где $f(\cdot), g(\cdot) \in C^2\left(R^1\right)$. Полученное общее решение уравнения (11.4) имеет простой физический смысл: это сумма волн, бегущих с постоянными скоростями $\pm a$ вдоль оси x. Отметим, что форма волн не изменяется в процессе эволюции (среда без дисперсии).

Рассмотрим ряд задач для простейшего волнового уравнения, или уравнений, сводимых к нему.

Решение задачи Коши для волнового уравнения методом бегущих волн

Рассмотрим задачу о поперечных малых колебаниях неограниченной однородной струны

$$\begin{cases} u''_{t^2} = a^2 u''_{x^2}, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty, \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{11.5}$$

Будем искать её решение в виде суммы бегущих волн с неизвестными профилями

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at). \tag{11.6}$$

Выберём профили волн так, чтобы удовлетворить начальным условиям:

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) + g(x) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty \\ u'_t(x, 0) = a\left(g'(x) - f'(x)\right) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

После интегрирования второго тождества по x получаем

$$\begin{gathered} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ g(x) - f(x) = \tfrac{1}{a} \int \psi(x)\, dx = \tfrac{1}{a} \int\limits_0^x \psi(z)\, dz + C, \end{gathered}$$

откуда сложением находим

$$\begin{gathered} g(x) = \tfrac{\varphi(x)}{2} + \tfrac{1}{2a} \int\limits_0^x \psi(z)\, dz + \tfrac{C}{2}, \\ f(x) = \varphi(x) - g(x) = \tfrac{\varphi(x)}{2} - \tfrac{1}{2a} \int\limits_0^x \psi(z)\, dz - \tfrac{C}{2}. \end{gathered}$$

В итоге решение задачи Коши можно записать в виде следующей *формулы Даламбера*:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x-at) + g(x+at) = \\ &= \tfrac{\varphi(x-at)}{2} - \tfrac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at} \psi(z)\,dz - \tfrac{C}{2} + \\ &+ \tfrac{\varphi(x+at)}{2} + \tfrac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at} \psi(z)\,dz + \tfrac{C}{2} = \\ &= \tfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \tfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Выделим следующие частные случаи общей задачи Коши.

- Колебания вследствие начального отклонения от положения равновесия: $\psi(x) \equiv 0$.

  В этом случае формула (11.7) даёт

  $$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} = \\ &= \tfrac{\varphi(x-at)}{2} + \tfrac{\varphi(x+at)}{2}. \end{aligned}$$

  Это решение можно интерпретировать следующим образом: начальное отклонение $\varphi(x)$ разбивается на две полуволны $\varphi(x)/2$, которые бегут в противоположных направлениях оси x с одинаковыми скоростями a. Профиль струны в каждый момент времени получается суммированием текущих состояний этих бегущих волн.

- Колебания в отсутствие начального отклонения от положения равновесия вследствие начальной скорости (ударное возбуждение колебаний): $\varphi(x) \equiv 0$.

  При этом

  $$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz = \\ &= E(x+at) - E(x-at), \end{aligned}$$

  где

  $$E(x) \equiv \frac{1}{2a}\int\limits_{x^*}^{x} \psi(z)\,dz,$$

  x^* — произвольная фиксированная точка[3] оси. Следовательно, в данном случае профиль струны формируется волнами $\pm E(x)$, бегущими в противоположных направлениях оси со скоростями, по модулю равными a.

Сделаем некоторые общие выводы из формулы Даламбера.

1. Для произвольных начальных условий $\varphi(\cdot) \in C^2(R^1)$, $\psi(\cdot) \in C^1(R^1)$ классическое решение $u(x,t) \in C^2(R^2)$ задачи Коши (11.5) существует.

[3]Обычно $x^* = 0$; если соответствующий несобственный интеграл сходится, то удобно также брать $x^* = -\infty$.

2. Оно единственно и даётся формулой Даламбера (11.7).

3. Оно непрерывно в следующем смысле зависит от параметров задачи[4]:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall T > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon, T) > 0 :$$
$$\max_x |\varphi - \tilde{\varphi}| + \max_x \left| \psi - \tilde{\psi} \right| < \delta \Rightarrow \max_{x, |t| \leq T} |u - \tilde{u}| < \varepsilon.$$

4. Поскольку сама формула Даламбера имеет смысл для значительно более широких классов функций φ, ψ, чем те, что указаны выше[5], можно говорить об обобщённых решениях задачи Коши. Именно, *обобщённым решением* задачи (11.5), отвечающим произвольным начальным условиям φ, ψ, для которых формула (11.7) имеет смысл, называется функция, определяемая данной формулой. При этом данная функция может не иметь необходимых для подстановки в волновое уравнение производных, или эти производные следует определять как обобщённые и т.д. и т.п.

5. Рассмотрим плоскость с декартовыми координатами (x, t) — *фазовую плоскость* рассматриваемой задачи. Для произвольной точки (x_0, t_0), лежащей в верхней полуплоскости, рассмотрим *характеристический треугольник*, образованный с осью x *характеристиками* волнового уравнения — прямыми (11.3), проходящими через вершину трегольника — точку (x_0, t_0). Пусть

$$x_1 = x_0 - at_0,$$
$$x_2 = x_0 + at_0$$

- точки пересечения характеристик с осью x — вершины основания характеристического треугольника (см. рисунок).

По формуле Даламбера решение задачи Коши можно представить в виде

$$u(x_0, t_0) = \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_1}^{x_2} \psi(z) \, dz.$$

Таким образом, для нахождения решения задачи Коши в произвольной точке фазовой плоскости достаточно сложить полусумму начальных отклонений в вершинах основания характеристического треугольника с интегралом по основанию от начальной скорости, делённым на $2a$. Внутри характеристического треугольника колебания струны определяются исключительно начальными данными на основании характеристического треугольника. Это следствие фундаментального свойства волновых процессов, распространяющихся в пространстве с конечной скоростью.

[4]Всё это говорит о корректности постановки задачи Коши в указанных классах функций.

[5]Например, функция φ может быть вообще любой функцией одного переменного.

Задача Коши для неоднородного волнового уравнения.

$$\begin{cases} u''_{t^2} = a^2 u''_{x^2} + f(x,t), & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty, \\ u'_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{11.8}$$

Учитывая линейность задачи, будем искать её решение в виде суммы $u = v + w$, где функции v, w являются решениями задач

$$\begin{cases} v''_{t^2} = a^2 v''_{x^2}, \\ v(x,0) = \varphi(x), \\ v'_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \quad \begin{cases} w''_{t^2} = a^2 w''_{x^2} + f(x,t), \\ w(x,0) = 0, \\ w'_t(x,0) = 0, \end{cases},$$

соответственно.

Решение первой задачи получено выше. Решение второй будем искать в интегральной форме

$$w(x,t) = \int_0^t \Phi(x,t,\tau)\, d\tau, \tag{11.9}$$

где

$$\begin{cases} \Phi''_{t^2} = a^2 \Phi''_{x^2}, & -\infty < x < \infty, t \geq \tau > 0, \\ \Phi(x,t,\tau)\,|_{t=\tau} = 0, & -\infty < x < \infty, \\ \Phi'_t(x,t,\tau)\,|_{t=\tau} = f(x,\tau), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Решение последней задачи даётся, очевидно, формулой Даламбера:

$$\Phi(x,t,\tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)\, dz.$$

Проверим, что функция (11.9) действительно является решением соответствующей начальной задачи. Имеем

$$\begin{gathered} w'_t(x,t) = \Phi(x,t,t) + \int_0^t \Phi'_t\, d\tau = \int_0^t \Phi'_t\, d\tau, \\ w''_{t^2} = \Phi'_t(x,t,t) + \int_0^t \Phi''_{t^2}\, d\tau = f(x,t) + a^2 \int_0^t \Phi''_{x^2}\, d\tau = \\ = f(x,t) + a^2 w''_{x^2}, \\ w(x,0) = \int_0^0 \Phi(x,t,\tau)\, d\tau = 0, \\ w'_t(x,0) = \int_0^0 \Phi'_t(x,t,\tau)\, d\tau = 0, \end{gathered}$$

что и требовалось проверить.

В итоге решение рассматриваемой задачи можно записать в форме *расширенной формулы Даламбера*

$$\begin{gathered} u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\, dz + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)\, dz d\tau. \end{gathered} \tag{11.10}$$

[5]

Заметим, что данную формулу можно записать и в более компактном виде. А именно,

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi_\varphi(x,t,0) + \Phi_\psi(x,t,0) + \int\limits_0^t \Phi_f(x,t,\tau)\,d\tau, \tag{11.11}$$

где $\Phi_\alpha(x,t,\tau)$, $\alpha = \overline{\varphi,\psi,f}$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi_\alpha = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_\alpha, & -\infty < x < \infty, t \geq \tau \geq 0, \\ \Phi_\alpha(x,t,\tau)\,|_{t=\tau} = 0, & -\infty < x < \infty, \\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi_\alpha(x,t,\tau)\,|_{t=\tau} = \alpha(x,\tau), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{11.12}$$

В отличие от (11.10) формула (11.11) "работает" в случае пространственной переменной x любой размерности. При $n > 1$ задача (11.12) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi_\alpha = a^2\triangle\Phi_\alpha, & x \in R^n, t \geq \tau \geq 0, \\ \Phi_\alpha(x,t,\tau)\,|_{t=\tau} = 0, & x \in R^n, \\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi_\alpha(x,t,\tau)\,|_{t=\tau} = \alpha(x,\tau), & x \in R^n. \end{cases}$$

Её решения зависят от размерности пространства n. Приведём их для $n = \overline{1,3}$:

$$\Phi_\alpha(x,t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2a}\int\limits_{|x-z|\leq a(t-\tau)} \alpha(z,\tau)\,dz, & n=1 \\ \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{|z-x|\leq a(t-\tau)} \frac{\alpha(z_1,z_2,\tau)\,dz_1\,dz_2}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(z_1-x_1)^2-(z_2-x_2)^2}}, & n=2 \\ \frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{|z-x|=a(t-\tau)} \frac{\alpha(z,\tau)}{|z-x|}\,dS_z, & n=3 \end{cases}$$

Заметим, что в последнем варианте (при $n = 3$) в отличие от двух предыдущих интегрирование ведется лишь по поверхности шара радиуса $a(t-\tau)$, а не по его внутренности. Это приводит к тому, что волны в трёхмерном пространстве обладают следующим свойством *отсутствия последействия*: если волна возникает вследствие локализованного в пространстве и времени возмущения, то в произвольной точке x пространства она локализована во времени (наличие переднего и заднего фронтов волны)[6].

Отметим также, что формулу Даламбера ($n = 1$) и *формулу Пуассона* ($n = 2$) можно вывести из *формулы Кирхгофа* ($n = 3$) как частные случаи, когда функция $\alpha(z_1,z_2,z_3,\tau)$ не зависит от соответствующих координат z_i (*метод спуска*)[7].

---

[6] Вопрос: почему в одно- и двумерном случаях последействие имеет место?

[7] Задача на "пятёрку" на экзамене. См., например, [13].

Задача Коши для системы телеграфных уравнений (линия без искажений)

Рассмотрим теперь задачу Коши для системы телеграфных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} v'_x + Ri + Li'_t = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ i'_x + Gv + Cv'_t = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbf{R} \\ i(x,0) = i_0(x). & x \in \mathbf{R} \end{cases} \tag{11.13}$$

Как было показано выше в разделе 11.1.1, после исключения из системы дифференциальных уравнений функции тока $i(x,t)$ для напряжения $v(x,t)$ получается гиперболическое уравнение, которое в свою очередь упрощается после замены $u(x,t) = \exp(\mu t)\ v(x,t)$ до уравнения

$$u''_{t^2} = a^2 u''_{x^2} + b^2 u,$$

где

$$\begin{array}{l} b \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right), \\ \mu \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right). \end{array}$$

При $b = 0$[8] это уравнение принимает вид простейшего волнового

$$u''_{t^2} = a^2 u''_{x^2}.$$

общее решение которого (см. формулу (11.4) имеет вид

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at).$$

Следовательно, общее выражение для напряжения

$$\begin{array}{c} v(x,t) = \exp(-\mu t)\ u(x,t) = \\ = \exp(-\mu t)\left(f(x-at) + g(x+at)\right). \end{array}$$

Для нахождения общего выражения для тока имеем из второго уравнения системы

$$\begin{array}{c} i'_x(x,t) = -Gv - Cv'_t = \\ = -Gv(x,t) + C\mu v(x,t) + \\ +aC\exp(-\mu t)\left(f'(x-at) - g'(x+at)\right) = \\ = \sqrt{\frac{C}{L}}\exp(-\mu t)\left(f'(x-at) - g'(x+at)\right). \end{array}$$

После интегрирования по x получаем отсюда

$$\begin{array}{c} i(x,t) = \sqrt{\frac{C}{L}}\exp(-\mu t)\left(f(x-at) - g(x+at)\right) + c_1(t) = \\ = \sqrt{\frac{C}{L}}\exp(-\mu t)\left(f(x-at) - g(x+at) + c_2(t)\right), \end{array}$$

[8] Заметим, что при этом

$$\begin{array}{c} \mu = \frac{R}{L} = \frac{G}{C}, \\ aC = \frac{C}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{C}{L}}, \\ R = \mu L,\ G = \mu C,\ aL\sqrt{\frac{C}{L}} = 1 \end{array}$$

где $c_1(t)$ — “постоянная” интегрирования — произвольная функция времени, $c_2(t) \equiv \sqrt{\frac{L}{C}} \exp(\mu t)\, c_1(t)$.

В действительности функция $c_2(t)$ постоянна. В этом можно убедиться подставляя найденные решения в первое из телеграфных уравнений:

$$\begin{gathered}
v'_x + Ri + Li'_t = \\
= \exp(-\mu t)\left(f'(x-at) + g'(x+at)\right) + \\
+R\sqrt{\tfrac{C}{L}} \exp(-\mu t)\left(f(x-at) - g(x+at) + c_2(t)\right) - \\
-\mu L\sqrt{\tfrac{C}{L}} \exp(-\mu t)\left(f(x-at) - g(x+at) + c_2(t)\right) - \\
-aL\sqrt{\tfrac{C}{L}} \exp(-\mu t)\left(f'(x-at) + g'(x+at) + c'_2(t)\right) = \\
= -\exp(-\mu t)\, c'_2(t) = 0.
\end{gathered}$$

Вводя вместо произвольных профилей волн f, g новые

$$\begin{array}{l}
\tilde{f} \equiv f + \frac{c_2}{2}, \\
\tilde{g} \equiv f - \frac{c_2}{2}
\end{array}$$

и опуская затем тильду, находим окончательное представление *общего решения системы телеграфных уравнений для линии без искажений*

$$\left\{ \begin{array}{l}
v(x,t) = \exp(-\mu t)\left(f(x-at) + g(x+at)\right) \\
i(x,t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \exp(-\mu t)\left(f(x-at) - g(x+at)\right)
\end{array} \right. \tag{11.14}$$

Используем (11.14) для решения поставленной выше задачи Коши. Достаточно подобрать профили волн f, g так, чтобы выполнялись начальные условия

$$\left\{ \begin{array}{l}
f(x) + g(x) \equiv v_0(x), \\
\sqrt{\frac{C}{L}}\left(f(x) - g(x)\right) \equiv i_0(x).
\end{array} \right.$$

Для этого следует взять

$$\left\{ \begin{array}{l}
f(x) \equiv \frac{v_0(x) + \sqrt{\frac{L}{C}} i_0(x)}{2}, \\
g(x) \equiv \frac{v_0(x) - \sqrt{\frac{L}{C}} i_0(x)}{2}.
\end{array} \right.$$

Задача о распространении краевого режима.

Рассмотрим смешанную задачу для однородного волнового уравнения

$$\left\{ \begin{array}{ll}
u''_{t^2} = a^2 u''_{x^2}, & 0 < x < +\infty,\ t > 0, \\
u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < +\infty, \\
u'_t(x,0) = \psi(x), & 0 < x < +\infty, \\
u(0,t) = \mu(t), & t \geq 0.
\end{array} \right.$$

Ищем её решение в виде суммы $u = v + w$, где

$$\underset{(v)}{\left\{ \begin{array}{l}
v''_{t^2} = a^2 v''_{x^2}, \\
v(x,0) = \varphi(x), \\
v'_t(x,0) = \psi(x), \\
v(0,t) = 0.
\end{array} \right.} \qquad
\underset{(w)}{\left\{ \begin{array}{l}
w''_{t^2} = a^2 w''_{x^2}, \\
w(x,0) = 0, \\
w'_t(x,0) = 0, \\
w(0,t) = \mu(t).
\end{array} \right.}$$

Решим сперва задачу (v). Для этого построим вспомогательную задачу Коши

$$\begin{cases} \bar v''_{t^2} = a^2 \bar v''_{x^2}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ \bar v(x,0) = \bar\varphi(x), & -\infty < x < \infty \\ \bar v'_t(x,0) = \bar\psi(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

где $\bar\varphi(x), \bar\psi(x)$ — *нечётные* продолжения соответствующих функций с положительной полуоси x на всю ось, то есть функции, удовлетворяющие условиям

$$\bar\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ -\varphi(-x) & x \le 0 \end{cases}, \qquad \bar\psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ -\psi(-x), & x \le 0 \end{cases}.$$

Решение вспомогательной задачи Коши даётся формулой Даламбера

$$\bar v(x,t) = \frac{\bar\varphi(x-at) + \bar\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \bar\psi(z)\,dz.$$

Покажем, что эта функция, если её рассматривать лишь для $x \ge 0$ (сужение функции $\bar v(x,t)$), даёт решение задачи (v). Достаточно проверить лишь выполнение граничного условия; все остальные условия выполнены на всей прямой x и, в частности, при $x > 0$. Имеем

$$\bar v(0,t) = \frac{\bar\varphi(-at) + \bar\varphi(+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at} \bar\psi(z)\,dz = 0$$

в силу нечётности функций $\bar\varphi, \bar\psi$.

Замечание. Пусть $\psi(x) \equiv 0$. Записывая функцию $\bar\varphi(x)$ в виде

$$\bar\varphi(x) \equiv \varphi(x)\chi(x) - \varphi(-x)\chi(-x),$$

где

$$\chi(x) \equiv \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{11.15}$$

— *функция Хевисайда* (индикатор положительной полуоси), получаем решение задачи (v) в виде

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \tfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at)\chi(x+at) + \varphi(x-at)\chi(x-at) - \right. \\ &\left. -\varphi(at-x)\chi(at-x) - \varphi(-x-at)\chi(-x-at)\right] = \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\chi(x-at) - \varphi(at-x)\chi(at-x)\right]. \end{aligned}$$

Эта формула допускает простую физическую интерпретацию. Первое слагаемое это волна, набегающая на границу $x = 0$ с положительного направления оси x. Второе и третье слагаемые это волны, бегущие в положительном направлении оси, причём вторая (*прямая*) отлична от нуля в данной точке x лишь при $0 \le t \le x/a$, а третья (*отражённая* от начала координат и потому сменившая знак на противоположный — *инвертированная*) - лишь при $t \ge x/a$.

Докажем, что найдённое решение задачи (v) единственно. Пусть существуют два её решения: v_1 и v_2. Для их разности $r(x,t)$ получаем

$$\begin{cases} r''_{t^2} = a^2 r''_{x^2}, & 0 < x < +\infty,\, t > 0, \\ r(x,0) = 0, & 0 < x < +\infty, \\ r'_t(x,0) = 0, & 0 < x < +\infty, \\ r(0,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Так как все решения волнового уравнения даются формулой (11.6), то

$$\begin{array}{ll} r(x,0) = f(x) + g(x) = 0, & x \geq 0, \\ r'_t(x,0) = a\left(g'(x) - f'(x)\right) = 0, & x \geq 0, \\ r(0,t) = f(-at) + g(at) = 0, & t \geq 0, \end{array}$$

откуда

$$\begin{array}{ll} f(x) + g(x) = 0, & x \geq 0, \\ g(x) - f(x) = C_1, & x \geq 0, \\ f(-x) + g(x) = 0, & x \geq 0. \end{array}$$

Из первых двух тождеств получаем

$$\begin{cases} f(x) \equiv -C_2, \\ g(x) \equiv C_2 \end{cases}$$

при $x \geq 0$, а затем из последнего тождества —

$$f(x) \equiv -g(-x) = -C_2,\ x \leq 0.$$

Таким образом,

$$r(x,t) = f(x - at) + g(x + at) \equiv C_2 - C_2 \equiv 0,$$

так как входящие в формулу функции определены выше как равные C_2 постоянные в соответствующих областях изменения аргументов. Полученное тождество доказывает единственность решения задачи (v).

Перейдём к решению задачи (w). Представляя решение уравнения в виде суммы бегущих волн

$$w(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$$

и подставляя это решение в начальные и краевые условия задачи, получаем систему уравнений для определения неизвестных профилей волн

$$\begin{cases} w(x,0) = f(x) + g(x) = 0, & x \geq 0, \\ w_t(x,0) = a\left(g'(x) - f'(x)\right) = 0, & x \geq 0, \\ w(0,t) = f(-at) + g(at) = \mu(t), & t \geq 0 \end{cases}.$$

Решением этой системы являются функции

$$\begin{cases} f(x) = \chi(-x)\,\mu\left(-\frac{x}{a}\right) - C, & x \in (-\infty, \infty), \\ g(x) = C, & x \geq 0, \end{cases}$$

где C — произвольная постоянная, $\chi(x)$ — функция Хевисайда (11.15). Следовательно, решение задачи (w) имеет вид

$$w(x,t) = \chi\left(t - \frac{x}{a}\right)\mu\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Очевидно,что данное решение следует интерпретировать как "распространение краевого режима" в положительном направлении оси x.

Колебания отрезка струны.

Рассмотрим следующую смешанную задачу для однородного волнового уравнения

$$\begin{cases} u''_{t^2} = a^2 u''_{x^2}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < l, \\ u'_t(x,0) = \psi(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

моделирующую процесс малых колебаний отрезка струны $0 < x < l$ с закреплёнными конечными точками.

Для её решения построим вспомогательную задачу Коши. Пусть $\bar{\varphi}(x)$ — продолжение функции $\varphi(x)$ с интервала $(0,l)$ на всю действительную ось, удовлетворяющее следующим условиям

$$\begin{array}{c} \bar{\varphi}(0+x) \equiv -\bar{\varphi}(0-x), \\ \bar{\varphi}(l+x) \equiv -\bar{\varphi}(l-x) \end{array}$$

(нечётность относительно обеих граничных точек, иными словами, симметрия графика функции относительно этих точек). Аналогично определим продолжение $\bar{\psi}$ функции ψ с интервала $(0,l)$ на всю ось. Заметим, что полученные функции периодичны с периодом $2l$. Действительно,

$$\begin{array}{c} \bar{\varphi}(2l+x) \equiv -\bar{\varphi}(l+l+x) \equiv \\ \equiv -\bar{\varphi}(l-l-x) \equiv -\bar{\varphi}(-x) \equiv \bar{\varphi}(x). \end{array}$$

Нетрудно видеть[9], что

$$\begin{array}{c} \bar{\varphi}(x) \equiv \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\varphi(x-2kl)\chi_l(x-2kl) - \varphi(2kl-x)\chi_l(2kl-x)\right] \equiv \\ \equiv \varphi(x)\chi_l(x) - \varphi(-x)\chi_l(-x) + \varphi(x-2l)\chi_l(x-2l) - \ldots, \end{array} \tag{11.16}$$

где $\chi_l(x)$ — индикаторная функция интервала $(0,l)$.

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу Коши

$$\begin{cases} \bar{u}''_{t^2} = a^2 \bar{u}''_{x^2}, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ \bar{u}(x,0) = \bar{\varphi}(x), & -\infty < x < \infty, \\ \bar{u}'_t(x,0) = \bar{\psi}(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

решение которой даёт формула Даламбера

$$\bar{u}(x,t) = \frac{\bar{\varphi}(x-at) + \bar{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \bar{\psi}(z)\, dz. \tag{11.17}$$

Убедимся в том, что это решение, если рассматривать его лишь для $t > 0$, $x \in [0,l]$, даёт решение исходной смешанной задачи. Очевидно, достаточно проверить лишь выполнение граничных условий. Имеем

$$\begin{array}{c} \bar{u}(0,t) = \frac{\bar{\varphi}(-at)+\bar{\varphi}(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{-at}^{at} \bar{\psi}(z)\, dz \equiv 0, \\ \bar{u}(l,t) = \frac{\bar{\varphi}(l-at)+\bar{\varphi}(l+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{l-at}^{l+at} \bar{\psi}(z)\, dz \equiv 0 \end{array}$$

---

[9] При каждом x среди членов данного формального ряда лишь один отличен от нуля. Заметим, что для корректности данной записи следует считать, что функция $\varphi(x)$ первоначально продолжена каким-либо образом (например нулём) на всю ось.

в силу определения функций $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$. Единственность решения смешанной задачи можно доказать тем же способом, что и в предыдущей задаче.

Замечания.

1. Используя ряд (11.16), запишем полученное решение в виде

$$\begin{gathered}\bar{u}\,(l,t) = \tfrac{\varphi(x-at)\chi_l(x-at)}{2} + \tfrac{\varphi(x+at)\chi_l(x+at)}{2} - \\ -\tfrac{\varphi(-x+at)\chi_l(-x+at)}{2} - \tfrac{\varphi(-x+at)\chi_l(-x+at)}{2} + \dots\end{gathered}$$

   Члены формального ряда в правой части формулы можно интерпретировать как бегущие в прямом и обратном направлениях волны, испытывающие последовательные отражения от закреплённых концов отрезка. При этом при каждом отражении волна меняет свой знак.

2. Решение (11.17) допускает и другую, более естественную в данном случае интерпретацию. Разложим периодические нечётные функции $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ в ряды Фурье, сходящиеся к ним на всей прямой:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}\,(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \tfrac{\pi n x}{l}, \\ \bar{\psi}\,(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \tfrac{\pi n x}{l},\end{aligned}$$

   где

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \tfrac{2}{l} \int_0^l \varphi\,(x) \sin \tfrac{\pi n x}{l}\, dx, \\ \psi_n &= \tfrac{2}{l} \int_0^l \psi\,(x) \sin \tfrac{\pi n x}{l}\, dx.\end{aligned}$$

   После подстановки этих рядов в (11.17) и несложных формальных преобразований получаем

$$\begin{gathered}u\,(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \tfrac{\left(\sin \frac{\pi n (x-at)}{l} + \sin \frac{\pi n (x+at)}{l}\right)}{2} + \\ + \tfrac{1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \int\limits_{x-at}^{x+at} \sin \tfrac{\pi n z}{l}\, dz = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \omega_n t + \tfrac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \psi_n\right) \sin \tfrac{\pi n x}{l},\end{gathered}$$

   где $\omega_n \equiv \frac{\pi n a}{l}$.

   Каждая из функций под знаком данного ряда может быть истолкована как стоячая волна с профилем $\sin \frac{\pi n x}{l}$ и собственной частотой ω_n. Следовательно, решение смешанной задачи о колебаниях отрезка струны можно представить и как бесконечную сумму стоячих волн.

11.1.3 Метод фундаментальных решений

В основе данного метода лежит представление о точечном мгновенном источнике волн и принципе суперпозиции, справедливом для линейных систем. Исходя из последнего волна, порождаемая сложным источником может рассматриваться как сумма (интеграл) элементарных волн, порождаемых совокупностью элементарных источников.

Математическим обоснованием метода служит теория обобщённых функций[10], краткое введение в которую излагается далее. Дополнительные сведения по обобщённым функциям можно получить, например, в книгах [13, 14, 17, 18].

Введение в теорию обобщенных функций

Определение[11]**.** *Пространством основных (пробных) функций K называется множество всех бесконечно-дифференцируемых функций с ограниченными носителями*[12]:

$$K = \{\varphi(x) : x \in \mathbf{R}, \varphi(\cdot) \in C^{\infty}(\mathbf{R}), \operatorname{Supp} \varphi \subset [A, B] \subset \mathbf{R}\}.$$

(здесь *отрезок $[A, B]$ зависит от функции φ).*

Определение. *Пространством обобщённых функций (о.ф.) K' (над пространством основных функций K) называется множество всех линейных непрерывных функционалов на K*:

1. $f : K \to \mathbf{R}$;
2. $(f, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1(f, \varphi_1) + c_2(f, \varphi_2)\ \forall \varphi_{1,2} \in K$;
3. $(f, \varphi_n) \to 0$ при $\varphi_n \xrightarrow{K} 0$.[13]

Примеры.

1. Пусть $\hat{f}(x)$ — локально интегрируемая[14] в $\mathbf{R}$ функция. Положим

$$(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Такие обобщённые функции называются *регулярными*. Все прочие — *сингулярными*.

2. *Главное значение*[15] *от* $\frac{1}{x}$:

$$\left(\mathcal{P}\tfrac{1}{x}, \varphi\right) = \operatorname{Vp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{\varphi(x)}{x}\,dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \tfrac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \tfrac{\varphi(x)}{x}\,dx\right).$$

[10] В зарубежной литературе чаще используется термин “распределения” .

[11] Здесь мы излагаем случай обобщённых функций (о.ф.) одной действительной переменной. Однако, большинство вводимых определений и утверждений без труда может быть обобщено и на случай о.ф. многих действительных переменных.

[12] *Носителем* функции $\operatorname{Supp} \varphi$ называется замыкание множества тех точек оси, в которых функция $\varphi(x)$ отлична от нуля.

[13] Предварительно следует, конечно, точно определить тип сходимости последовательности в пространстве K. Именно, последовательность $\varphi_n \xrightarrow{K} 0$, если сама эта функция и её производные любого порядка сходятся к нулю равномерно на любом отрезке оси.

[14] То есть интегрируемая по Риману на любом конечном отрезке.

[15] Заметим, что функция $\frac{1}{x}$ не является локально интегрируемой и соответствующие интегралы существуют для неё лишь в смысле главного значения.

3. *Дельта-функция Дирака*:

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0).$$

Подобные функции использовались в прикладных исследованиях давно, ещё до Дирака. Рассмотрим, например, обычные для физики рассуждения, приводящие к понятию плотности массы материальной точки. Рассмотрим единичную массу, “размазанную” в ε-окрестности точки ноль (в трёхмерном пространстве). При $\varepsilon \to +0$ плотность массы $\rho_\varepsilon(\mathbf{x})$ оказывается равной нулю во всём пространстве за исключением точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, где она “уходит” на бесконечность. При этом интеграл по всему пространству от “предельной функции” должен оставаться равным единице — полной массе вещества. Далее, для любой непрерывной функции $\varphi(\mathbf{x})$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^3} \rho_\varepsilon(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\;d\mathbf{x} = \varphi(\boldsymbol{\xi}_\varepsilon)\int\limits_{\mathbf{R}^3} \rho_\varepsilon(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \\ = \varphi(\boldsymbol{\xi}_\varepsilon) \to \varphi(\mathbf{0}),\; \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, плотность материальной точки следовало бы определить как функцию $\rho(\mathbf{x})$, обладающую следующими свойствами

$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} +\infty, & \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \end{cases},$$
$$\int\limits_{\mathbf{R}^3} \rho(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\;d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{0})\;\forall\varphi(\cdot).$$

Нетрудно, однако, показать, что интеграл Римана для такой функции не существует (а Лебега — равен нулю). Это означает, что построенную плотность точечной массы нельзя рассматривать как “обычную функцию” .

4. *Смещённая дельта-функция*:

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0).$$

5. *Производная дельта-функции*:

$$(\delta', \varphi) = -\varphi'(0).$$

Разумеется, не всякий функционал над пространством основных функций K является обобщённой функцией. Приведём примеры таких функционалов.

Примеры.

1. Все нелинейные функционалы. Например, $(f, \varphi) = \max\limits_x |\varphi(x)|$.

2. Линейные разрывные функционалы. Существование подобных функционалов можно доказать, однако конструктивные примеры очень сложны (см.[17]).

Большинство элементарных функций локально интегрируемы в $\mathbf{R}$ и потому порождают регулярные обобщённые функции. Однако, не все обобщённые функции являются регулярными.

Лемма. *Дельта-функция — сингулярна.*

Доказательство. От противного. Пусть найдется локально интегрируемая в $\mathbf{R}$ функция $\tilde{f}(x)$ такая, что

$$(\delta, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0)\ \ \forall \varphi \in K.$$

Возьмем, в частности, пробную функцию

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \varepsilon \\ \exp\left(-\frac{1}{1-(x/\varepsilon)^2}\right), & |x| < \varepsilon \end{cases}.$$

Для неё

$$\begin{gathered} |(\delta, \varphi_\varepsilon)| = |\varphi_\varepsilon(0)| = \tfrac{1}{e} = \\ = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x)\, \varphi_\varepsilon(x)\, dx \right| = \left| \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \tilde{f}(x) \exp\left(-\tfrac{1}{1-(x/\varepsilon)^2}\right) dx \right| \leq \\ \leq \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left|\tilde{f}(x)\right| dx \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0. \end{gathered}$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Операции над обобщёнными функциями

- Обобщённые функции f_1 и f_2 *совпадают на множестве* E, если

  $$(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi)\ \ \forall \varphi \in K,\ \mathrm{Supp}\, \varphi \subset E$$

  В частности, обобщённые функции просто *совпадают*, если они совпадают на всём множестве $\mathbf{R}$, то есть

  $$(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi)\ \ \forall \varphi \in K.$$

- Для любых обобщённых функций $f_{1,2}$ и любых чисел $\alpha_{1,2}$ *линейная комбинация* $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ определяется как обобщённая функция вида

  $$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi) = \alpha_1 (f_1, \varphi) + \alpha_2 (f_2, \varphi),\ \varphi \in K.$$

- Для любых $\alpha(\cdot) \in C^\infty(\mathbf{R})$ и $f \in K'$ их *произведение* определяется как обобщённая функция вида

  $$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha \varphi).$$

- *(Обобщённая) производная обобщённой функции* f определяется как функционал вида

  $$(f', \varphi) = -(f, \varphi').$$

Производная $k-$го порядка определяется как первая производная от производной порядка $k-1$. В итоге по индукции получаем формулу

$$\left(f^{(k)}, \varphi\right) = (-1)^k \left(f, \varphi^{(k)}\right).$$

Примеры.

- *Производная регулярной обобщённой функции, порождаемой функцией Хевисайда* (11.15).

1. Имеем

$$\begin{gathered}(\chi', \varphi) = -(\chi, \varphi') = \\ = -\int\limits_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = +\varphi(0) = (\delta, \varphi),\end{gathered}$$

следовательно, $\chi' = \delta$.[16]

2. *Производная регулярной обобщённой функции, порождаемой кусочно-гладкой функцией.*

Пусть

$$\begin{gathered}f \in C^1(-\infty, x_0) \cap C^1(x_0, +\infty), \\ f(x_0+0) - f(x_0-0) = h.\end{gathered}$$

Найдем обобщённую производную $f'_{\text{об}}$ этой функции. Обозначая через $f'_{\text{кл}}(x)$ обычную (классическую) производную данной функции (в тех точках где она существует) и вычисляя интегралы по частям, имеем

$$\begin{gathered}(f'_{\text{об}}, \varphi) = -(f, \varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\, dx = \\ = -\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\, dx - \int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\, dx = \\ = -f\varphi|_{-\infty}^{x_0-0} + \int\limits_{-\infty}^{x_0} f'_{\text{кл}}(x)\varphi(x)\, dx - f\varphi|_{x_0+0}^{+\infty} + \int\limits_{x_0}^{+\infty} f'_{\text{кл}}(x)\varphi(x)\, dx = \\ = \varphi(x_0)\left(f(x_0+0) - f(x_0-0)\right) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'_{\text{кл}}(x)\varphi(x)\, dx = \\ = \left(h\delta(x-x_0), \varphi(x)\right) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'_{\text{кл}}(x)\varphi(x)\, dx = \\ = \left(h\delta(x-x_0) + f'_{\text{кл}}(x), \varphi(x)\right).\end{gathered}$$

Отсюда получаем следующее *правило обобщённого дифференцирования кусочно-гладких функций*:

$$f'_{\text{об}}(x) = f'_{\text{кл}}(x) + h\delta(x-x_0)$$

— *обобщённая производная регулярной о.ф., порождаемой кусочно-гладкой функцией, равна сумме регулярной о.ф., порождаемой классической производной данной функции, и дельта-функции,*

[16] Интуитивно этого следовало ожидать: функция $\chi(x)$ везде постоянна, кроме точки $x = 0$, в которой скорость её изменения бесконечна.

сосредоточенной в точке скачка с весом, равным скачку. Отсюда в частности следует, что обобщённая производная регулярной о.ф., порождаемой непрерывно-дифференцируемой функцией, совпадает с регурярной о.ф., порождаемой классической производной функции (*обобщённая производная совпадает с классической* в случае существования последней).

- Результат предыдущего примера естественно обобщается на случай функций с бесконечным числом скачков. В качестве примера найдём производную "пилы": периодической (с периодом 2π) функции

$$f(x) = x,\ |x| < \pi.$$

1. Аналогично вышеизложенному находим

$$f'(x) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(x - \pi - 2\pi k).$$

2. Производные дельта-функции:

$$\begin{gathered}\left(\delta', \varphi\right) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0), \\ \cdots, \\ \left(\delta^{(k)}, \varphi\right) = (-1)^k\left(\delta, \varphi^{(k)}\right) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).\end{gathered}$$

- *Замена переменной* в обобщённой функции. По определению

$$(f(ax+b), \varphi(x)) = \left(f(x), \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right).$$

В частности,

$$\begin{gathered}(f(x+b), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x-b)), \\ (f(ax), \varphi(x)) = \left(f(x), \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right), \\ (f(-x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(-x)).\end{gathered}$$

Используя данное определение можно ввести разнообразные свойства симметрии обобщённых функций. Например, обобщённая функция называется

– *чётной*, если $f(-x) = f(x)$, то есть

$$(f(x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(-x))\ \forall\varphi \in K;$$

– *нечётной*, если $f(-x) = -f(x)$, то есть

$$(f(x), \varphi(x)) = -(f(x), \varphi(-x))\ \forall\varphi \in K;$$

– *периодической* с периодом T, если $f(x+T) = f(x)$, то есть

$$(f(x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x-T))\ \forall\varphi \in K$$

и т.д. Примером чётной о.ф. является дельта-функция , нечётной — её производная (докажите!).

- *Прямое произведение обобщённых функций* $f(x)$ и $g(y)$ независимых переменных x и y вводится как обобщённая функция двух переменных, действующая на основную функцию этих переменных по правилу

$$(f(x)\, g(y), \varphi(x,y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x,y))).$$

- *Свёртка обобщённых функций* вводится в два этапа:
  - *свёрткой обобщённой функции g с основной функцией φ* называется основная функция[17]

$$\varphi_1(x) = (g(\xi), \varphi(x+\xi));$$

  - *свёрткой обобщённых функций f и g* называется функционал $h \equiv f * g$, действующий на пробную функцию по правилу

$$(h, \varphi) = (f * g, \varphi) = (f, g * \varphi),$$

  при условии, что он принадлежит K', то есть сам является обобщённой функцией.

Пример.

Пусть f, g — регулярные о.ф. Имеем

$$g * \varphi = (g(\xi), \varphi(x+\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, \varphi(x+\xi)\, d\xi,$$
$$(f * g, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, \varphi(x+\xi)\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(y)\, \varphi(y)\, dy,$$
$$h(y) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y-x)\, f(x)\, dx.$$

Отметим, что функция $h(y)$, определяемая последней формулой, называется в теории функций *свёрткой (интегрируемых) функций g и f*. Следовательно, *свёртке регулярных обобщённых функций соответствует регулярная обобщённая функция, порождаемая свёрткой соответствующих локально интегрируемых функций.*

Свойства свёртки.

1. *Коммутативность*: если хотя бы одна из следующих свёрток существует, то
$$f * g = g * f;$$
2. *Дифференцирование свёртки*: в случае существования соответствующих свёрток
$$(f * g)' = f' * g = f * g';$$
3. *Роль дельта-функции в свёртке*:
$$f * \delta = \delta * f = f,$$
$$f * \delta' = f' * \delta = f'$$

[17] Обозначаемая $g * \varphi$.

Докажем, например, свойство 2. Пусть $\varphi_1 \equiv g * \varphi$. Тогда

$$\varphi_1' = (g * \varphi)' = (g, \varphi)' = -g' * \varphi.$$

Поэтому

$$\begin{gathered}\left((f * g)', \varphi\right) = -\left(f * g, \varphi'\right) = -\left(f, g * \varphi'\right) = \\ = \left(f, g' * \varphi\right) = \left(f * g', \varphi\right)\end{gathered}$$

и

$$(f * g)' = f * g'.$$

Применение теории обобщенных функций при решении задачи Коши для волнового уравнения.

В данном разделе все функции, зависящие от временно́й переменной t, считаются равными нулю при $t < 0$. Введём также *оператор Даламбера*[18]

$$\Box_a \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Теорема. *Регулярная обобщённая функция $u(x,t)$, порождаемая (классическим) решением задачи Коши*

$$\begin{cases} \Box_a u(x,t) = f(x,t), & x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}, \\ u_t'(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

удовлетворяет следующему уравнению в обобщённых функциях

$$\Box_a u(x,t) = \varphi(x)\,\delta'(t) + \psi(x)\,\delta(t) + f(x,t)$$

Доказательство. Пусть $\alpha(x,t)$ — произвольная пробная функция двух переменных. Имеем с учётом сделанного выше замечания о равенстве нулю функций при $t < 0$

$$\begin{gathered}(\Box_a u, \alpha) = (u, \Box_a \alpha) = \iint\limits_{R^2} \left(\alpha_{t^2}'' - a^2 \alpha_{x^2}''\right) u\, dx dt = \\ = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\alpha_{t^2}'' - a^2 \alpha_{x^2}''\right) u\, dx.\end{gathered}$$

Далее,

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{t^2}'' u\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} \alpha_{t^2}'' u\, dt = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \left[u\alpha_t'|_0^{+\infty} - u_t'\alpha|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \alpha u_{t^2}''\, dt\right] = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \left[-\varphi(x)\,\alpha_t'(x,0) + \psi(x)\,\alpha(x,0) + \int\limits_0^{+\infty} \alpha u_{t^2}''\, dt\right] = \\ = \left(\varphi(x)\,\delta'(t) + \psi(x)\,\delta(t), \alpha\right) + \iint\limits_{R^2} \alpha u_{t^2}''\, dx dt.\end{gathered}$$

[18] Значок $\Box$ называют иногда *даламбертианом* по аналогии со значком $\triangle$ - *лапласианом*.

Аналогично,

$$-a^2 \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha''_{x^2} u\, dx =$$
$$= -a^2 \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u''_{x^2} \alpha\, dx = \iint\limits_{R^2} \left(f - u''_{t^2}\right) \alpha\, dxdt =$$
$$= (f, \alpha) - \iint\limits_{R^2} \alpha u''_{t^2}\, dxdt$$

Поэтому $\forall \alpha$

$$(\Box_a u, \alpha) = \left(\varphi(x)\, \delta'(t) + \psi(x)\, \delta(t) + f(x,t), \alpha\right),$$

что и доказывает теорему.

Определение. *Пусть $f(x,t), \varphi(x), \psi(x)$ — заданные обобщённые функции своих переменных. Решением обобщённой задачи Коши*

$$\begin{cases} \Box_a u(x,t) = f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u'_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

называется о.ф. $u(x,t)$, удовлетворяющая следующему уравнению в обобщённых функциях

$$\Box_a u(x,t) = \varphi(x)\, \delta'(t) + \psi(x)\, \delta(t) + f(x,t).$$

Определение. *Фундаментальным решением волнового уравнения*

$$\Box_a u(x,t) = 0$$

называется о.ф. $G(x,t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Box_a G = \delta(x,t).$$

Замечание. Можно дать также следующие два эквивалентные[19] приведённому выше определения: *фундаментальным решением $G(x,t)$ называется решение любой из следующих двух обобщённых задач Коши*

а)

$$\begin{cases} \Box_a G(x,t) = \delta(x,t), \\ G(x,0) = 0, \\ G'_t(x,0) = 0; \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} \Box_a G(x,t) = 0, \\ G(x,0) = 0, \\ G'_t(x,0) = \delta(x). \end{cases}$$

[19] Проверьте эквивалентность, учитывая данное выше определение обобщённого решения задачи Коши!

Теорема. *Фундаментальное решение волнового уравнения имеет вид*

$$G(x,t) = \frac{1}{2a}\chi(at - |x|), \tag{11.18}$$

где $\chi(x)$ — функция Хевисайда (11.15).

Доказательство. Пусть $\alpha(x,t)$ — произвольная пробная функция двух переменных. Имеем для функции (11.18)

$$\begin{aligned}(\Box_a G, \alpha) &= (G, \Box_a \alpha) = \tfrac{1}{2a}\iint\limits_{R^2} \chi(at - |x|)\, \Box_a \alpha(x,t)\; dxdt = \\ &= \tfrac{1}{2a}\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{-at}^{at} dx\, \left(\alpha''_{t^2} - a^2 \alpha''_{x^2}\right) = \boxed{:\left\{\begin{array}{l}\xi = x - at\\ \eta = x + at\end{array}\right.} = \\ &= \tfrac{1}{4a^2}\iint\limits_{\{\eta>0,\xi<0\}} \left(-4a^2\alpha''_{\xi\eta}\right) d\xi d\eta = \alpha(0,0) = (\delta, \alpha),\end{aligned}$$

что доказывает теорему.

Теорема. *Решение уравнения*

$$\Box_a u(x,t) = F(x,t), \tag{11.19}$$

где F — заданная, u — искомая обобщённые функции, существует, единственно[20] *и имеет вид*

$$u = F * G, \tag{11.20}$$

где G — фундаментальное решение волнового уравнения.

В частности, единственное решение обобщённой задачи Коши даётся свёрткой

$$u(x,t) = G(x,t) * \left(f(x,t) + \varphi(x)\,\delta'(t) + \psi(x)\,\delta(t)\right). \tag{11.21}$$

Доказательство. Покажем, что (11.20) является решением уравнения (11.19). Имеем, используя свойства свёртки,

$$\Box_a u = \Box_a (F * G) = F * \Box_a G = F * \delta = F.$$

Покажем далее, что решение (11.20) единственно в классе тех обобщённых функций, для которых существует свёртка с $G(x,t)$. Для этого достаточно убедиться в том, что однородное уравнение

$$\Box_a u(x,t) = 0,$$

имеет в данном классе лишь нулевое решение. Но это действительно справедливо, так как

$$u = u * \delta = u * \Box_a G = \Box_a u * G = 0.$$

Второе утверждение теоремы является простым следствием первого в силу определения решения обобщённой задачи Коши.

Теорема. *Классическое решение задачи Коши даётся формулой Даламбера.*[21]

[20] См. уточнение свойства единственности в доказательстве теоремы.

[21] Ещё один вывод этой формулы - с помощью аппарата обобщённых функций.

Доказательство. По доказанным выше теоремам всякое классическое решение задачи Коши является её обобщённым решением. Поэтому оно записывается в форме (11.21). Остаётся лишь вычислить соответствующие свёртки для регулярных функционалов.

Имеем, вычисляя последовательно свёртки,

1.

$$\begin{aligned} G(x,t) * (\psi(x)\,\delta(t)) &= (G(x,t) * \delta(t)) * \psi(x) = \\ &= G(x,t) * \psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-\xi)\,G(\xi,t)\;d\xi = \\ &= \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi(at-|\xi|)\,\psi(x-\xi)\;d\xi = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)\;dz; \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} G(x,t) * \left(\varphi(x)\,\delta'(t)\right) &= (G(x,t) * \varphi(x)) * \delta'(t) = \\ &= (G(x,t) * \varphi(x))'_t = \left(\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi(z)\;dz\right)'_t = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} G(x,t) * f(x,t) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\eta\, G(\xi,\eta)\, f(x-\xi,t-\eta) = \\ &= \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{+\infty} d\eta \int\limits_{-a\eta}^{a\eta} f(x-\xi,t-\eta)\;d\xi = \\ &= \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t+\tau)} f(z,\tau)\;dz. \end{aligned}$$

После подстановки полученных выражений в формулу (11.21) для обобщённого решения получаем формулу Даламбера, что и доказывает теорему.

11.1.4 Метод интегральных преобразований

Общая идея данной группы методов заключается в замене исходной начально-краевой задачи для уравнения в частных производных начально-краевой задачей для обыкновенного дифференциального уравнения (с параметром), которому удовлетворяет образ исходного решения при интегральном преобразовании.

Введём необходимые определения. Пусть

$$\Phi \equiv \{f(x)\}$$

— некоторое множество функций (*класс оригиналов*), а

$$\bar{\Phi} \equiv \left\{\bar{f}(p)\right\}$$

— множество соответствующих им при *интегральном преобразовании*

$$\bar{f}(p) = \mathrm{A}\left[f(x)\right]$$

функций (*класс изображений*)

Общий вид *интегрального оператора*

$$\mathrm{A}\left[f\left(x\right)\right]=\int\limits_{a}^{b}K\left(p,x\right)f\left(x\right)\,dx,$$

где $-\infty\leq a<b\leq+\infty$, $K\left(p,x\right)$ — *ядро* интегрального оператора. Соответствие между оригиналом $f\left(x\right)$ и его изображением $\bar{f}\left(p\right)$ будем обозначать также формулой

$$f\left(x\right)\div\bar{f}\left(p\right).$$

Приведём примеры наиболее часто используемых в приложениях интегральных преобразований. Заметим, что выбор того или иного интегрального преобразования для решения конкретной задачи определяется спецификой этой задачи: свойствами решения, граничными условиями и т.д. (см. [20]).

Примеры.

1. *Фурье-преобразование*: $p\equiv\omega\in\mathbf{R}$, $K\left(p,x\right)\equiv\exp\left(-i\omega x\right)$,

$$\bar{f}\left(\omega\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-i\omega x\right)f\left(x\right)\,dx;$$

2. *Синус(косинус)-Фурье преобразования*: $p\equiv\omega\in\mathbf{R}$, $K_S\left(p,x\right)\equiv\sin\omega x$ $\left(K_C\left(p,x\right)\equiv\cos\omega x\right)$,

$$\bar{f}_S\left(\omega\right)=\int\limits_{0}^{+\infty}\sin\omega x\;f\left(x\right)\,dx,$$
$$\bar{f}_C\left(\omega\right)=\int\limits_{0}^{+\infty}\cos\omega x\;f\left(x\right)\,dx;$$

3. *Преобразование Лапласа*: $p\in\mathbf{C}$, $K\left(p,x\right)\equiv\exp\left(-px\right)$,

$$\bar{f}\left(p\right)=\int\limits_{0}^{+\infty}\exp\left(-px\right)f\left(x\right)\,dx;$$

4. *Преобразование Меллина*: $p\in\mathbf{C}$, $K\left(p,x\right)\equiv x^{p-1}$,

$$\bar{f}\left(p\right)=\int\limits_{0}^{+\infty}x^{p-1}f\left(x\right)\,dx;$$

5. *Преобразование Бесселя*: $p\in\mathbf{C}$, $K\left(p,x\right)\equiv K_\nu\left(px\right)$ — одна из функций Бесселя,

$$\bar{f}\left(p\right)=\int\limits_{0}^{+\infty}K_\nu\left(px\right)f\left(x\right)\,dx.$$

Преобразование Фурье

Напомним некоторые основные свойства данного интегрального преобразования[22]. В качестве класса оригиналов будем использовать здесь множество Φ_F кусочно-гладких, интегрируемых и регулярных[23] на всей прямой функций. Прямое и обратное преобразования Фурье[24] задаются соответственно формулами

$$\bar{f}(\omega) \equiv F(f(x)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega x) f(x)\, dx;$$

$$f(x) \equiv F^{-1}\left(\bar{f}(\omega)\right) = \mathrm{Vp}\, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega x)\, \bar{f}(\omega)\, d\omega.$$

Если $f(x) \div \bar{f}(\omega)$, $g(x) \div \bar{g}(\omega)$, то

1. $\alpha f(x) + \beta g(x) \div \alpha \bar{f}(\omega) + \beta \bar{g}(\omega)$ (*линейность преобразования*);
2. $f(x-\beta) \div \exp(-i\omega\beta)\, \bar{f}(\omega)$ (*формула смещения*);
3. $f(\alpha x) \div \frac{1}{\alpha} \bar{f}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$ (*преобразование подобия*);
4.
$$f'(x) \div i\omega \bar{f}(\omega),$$
$$\ldots,$$
$$f^{(n)}(x) \div (i\omega)^n\, \bar{f}(\omega)$$
(*дифференцирование оригинала*);
5.
$$\int f(x)\, dx \div \tfrac{1}{i\omega} \bar{f}(\omega),$$
$$\ldots,$$
$$\underbrace{\int \cdots \int}_{n} f(x)\, dx \div \tfrac{1}{(i\omega)^n} \bar{f}(\omega)$$
(*интегрирование оригинала*);
6. $f(x) * g(x) \div \bar{f}(\omega) \cdot \bar{g}(\omega)$ (*преобразование свёртки*).

Пример (*Решение задачи Коши для однородного волнового уравнения).*

$$\begin{cases} u''_{tt} = a^2 u''_{xx}, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty, \\ u'_t(x,0) = \psi(x) & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{11.22}$$

[22]См. соответствующие разделы курса математического анализа. Это касается и других интегральных преобразований.

[23]Функция в данном разделе называется *регулярной* в точке x, если

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

[24]"Memoire sur la propagation de la chaleur" (1811).

Для решения данной задачи применим метод интегрального преобразования Фурье по пространственной переменной x.

Предполагая, что начальные данные принадлежат классу оригиналов Φ_F, введём обозначения

$$\bar{\varphi}(\omega) \equiv F(\varphi(x)) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega x)\,\varphi(x)\,dx,$$
$$\bar{\psi}(\omega) \equiv F(\psi(x)) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega x)\,\psi(x)\,dx.$$

Можно показать[25], что решение задачи при любом фиксированном t также принадлежит классу оригиналов. Его образ обозначим

$$\bar{u}(\omega,t) \equiv F(u(x,t)) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega x)\,u(x,t)\,dx.$$

Применяя преобразование Фурье к каждой из строк системы (11.22), получаем (с учётом свойств преобразования) задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром ω

$$\begin{cases} F(u''_{tt}) = F\left(a^2 u''_{xx}\right), \\ F(u(x,0)) = F(\varphi(x)), \\ F(u'_t(x,0)) = F(\psi(x)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{u}''_{tt} = -\omega^2 a^2 \bar{u}, \\ \bar{u}(\omega,0) = \bar{\varphi}(\omega), \\ \bar{u}'_t(\omega,0) = \bar{\psi}(\omega) \end{cases}.$$

Решение этой последней задачи легко находится:

$$\bar{u}(\omega,t) = \frac{1}{2}\left[\bar{\varphi}(\omega)\,e^{-i\omega at} + \bar{\varphi}(\omega)\,e^{i\omega at}\right] + \frac{1}{2a}\left[\frac{\bar{\psi}(\omega)}{i\omega}e^{i\omega at} - \frac{\bar{\psi}(\omega)}{i\omega}e^{-i\omega at}\right]$$

Так как

$$\bar{\varphi}(\omega)\,e^{-i\omega at} = F(\varphi(x-at)),\ \bar{\varphi}(\omega)\,e^{i\omega at} = F(\varphi(x+at)),$$
$$\tfrac{\bar{\psi}(\omega)}{i\omega}e^{-i\omega at} = F(E(x-at)),\ \tfrac{\bar{\psi}(\omega)}{i\omega}e^{i\omega at} = F(E(x+at)),$$

где

$$E(x) \equiv \int_0^x \psi(z)\,dz,$$

то

$$F(u(x,t)) = F\left(\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz\right).$$

Отсюда после обратного преобразования Фурье вновь[26] получаем формулу Даламбера для решения задачи Коши. Заметим, что это решение можно записать также в виде “суммы плоских волн ”

$$u(x,t) = \mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\omega)\exp i\omega(x-at)\,d\omega +$$
$$+\,\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty} A_2(\omega)\exp i\omega(x+at)\,d\omega,$$

[25]Используя, например, ранее полученную формулу Даламбера.
[26]Уже третий раз.

где комплексные амплитуды волн

$$A_1(\omega) \equiv \tfrac{\omega a\bar{\varphi}(\omega)+i\bar{\psi}(\omega)}{4\pi\omega a},$$
$$A_2(\omega) \equiv \tfrac{\omega a\bar{\varphi}(\omega)-i\bar{\psi}(\omega)}{4\pi\omega a} = \bar{A}_1(\omega).$$

Синус- и косинус-Фурье преобразования

Класс оригиналов $\Phi_{S(C)}$ для данных преобразований состоит из всех функций $f(x)$, определённых на положительной полуоси $x \geq 0$, которые, будучи продолженными нулём на всю ось, принадлежат множеству Φ_F. Сами преобразования определяются формулами

$$\bar{f}(\omega) = S(f(x)) = \int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx,$$
$$f(x) = S^{-1}\left(\bar{f}(\omega)\right) = \tfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \bar{f}(\omega)\sin\omega x\,d\omega,$$
$$\bar{f}(\omega) = C(f(x)) = \int\limits_0^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx,$$
$$f(x) = C^{-1}\left(\bar{f}(\omega)\right) = \tfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \bar{f}(\omega)\cos\omega x\,d\omega.$$

Свойства данных преобразований близки соответствующим свойствам преобразования Фурье (см., например, [20]). Приведём лишь формулы для преобразований производных, нужные нам для решения следующей далее задачи:

$$S(f') = -\omega C(f),$$
$$C(f') = -f(+0) + \omega S(f),$$
$$S(f'') = \omega f(+0) - \omega^2 S(f),$$
$$\ldots$$

Пример (*Решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения - колебания полуограниченной струны).*

$$\left\{\begin{array}{ll} u''_{tt} = a^2 u''_{xx}, & x > 0,\, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u'_t(x,0) = \psi(x), & x > 0. \end{array}\right. \tag{11.23}$$

Вводя обозначения

$$\bar{u}(\omega,t) \equiv S(u(x,t)),$$
$$\bar{\psi}(\omega) \equiv S(\psi(x)),$$

и применяя синус-Фурье преобразование к первым трём строкам системы (11.23), получим следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{u}''_{tt} = a^2\omega u(+0,t) - a^2\omega^2\bar{u} = -a^2\omega^2\bar{u}, \\ \bar{u}(\omega,0) = 0, \\ \bar{u}'_t(\omega,0) = \bar{\psi}(\omega). \end{array}\right.$$

Её решением, очевидно, является функция

$$\bar{u}(\omega,t) = \frac{1}{a\omega}\bar{\psi}(\omega)\sin a\omega t.$$

Остаётся лишь взять обратное синус-Фурье преобразование для восстановления решения задачи:

$$u(x,t) = S^{-1}(\bar{u}(\omega,t)) = \tfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \tfrac{1}{a\omega}\bar{\psi}(\omega)\sin a\omega t\sin\omega x\,d\omega =$$
$$= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \tfrac{\bar{\psi}(\omega)}{a\omega}\left[\cos\omega(x-at) - \cos\omega(x+at)\right]d\omega =$$
$$= \tfrac{1}{2a}\tfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\bar{\psi}(\omega)\left(-\tfrac{\cos\omega z}{\omega}\right)\Big|_{z=x-at}^{z=x+at}d\omega = \tfrac{1}{2a}\tfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\bar{\psi}(\omega)\left(-\tfrac{\cos\omega z}{\omega}\right)\Big|_{z=|x-at|}^{z=x+at}d\omega =$$
$$= \tfrac{1}{2a}\tfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\bar{\psi}(\omega)\int\limits_{|x-at|}^{x+at}\sin\omega z\,dz\,d\omega = \tfrac{1}{2a}\int\limits_{|x-at|}^{x+at}\left(\tfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\bar{\psi}(\omega)\sin\omega z\,d\omega\right)dz =$$
$$= \tfrac{1}{2a}\int\limits_{|x-at|}^{x+at}\psi(z)\,dz = \tfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}(z)\,dz,$$

где $\tilde{\psi}(z)$ — нечётное продолжение функции $\psi(z)$ на всю прямую. Таким образом, помимо формул для решения задачи нами получен также следующий рецепт её решения[27]: можно продолжить начальные данные на всю прямую с учётом краевого условия (нечётным образом в данном случае — жёсткое закрепление) и воспользоваться формулой Даламбера для полученной вспомогательной задачи Коши.

Преобразование Лапласа (1782)

В класс оригиналов для преобразования Лапласа включается любая функция $f(x)$, для которой существует постоянная γ (своя для каждой функции), для которой $f(x)\exp(-\gamma x) \in \Phi_S$. Само преобразование имеет вид

$$\bar{f}(p) = L(f(x)) \equiv \int\limits_0^{+\infty} f(x)\exp(-px)\,dx,\ p\in\mathbf{C},\ \operatorname{Re}p > \gamma.$$

Обратным к нему выступает интегральное преобразование

$$f(x) = L^{-1}\left(\bar{f}(p)\right) \equiv \mathrm{Vp}\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}\bar{f}(p)\exp(px)\,dp,\ \gamma_1 > \gamma.$$

Из свойств преобразования Лапласа приведём лишь необходимые нам формулы для преобразования производных:

$$\begin{gathered} L(f') = pL(f) - f(+0), \\ L(f'') = p^2L(f) - pf(+0) - f'(+0), \\ \ldots, \\ L\left(f^{(n)}\right) = p^nL(f) - p^{n-1}f(+0) - \ldots - f^{(n-1)}(+0). \end{gathered}$$

Пример *(Решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения — колебания отрезка струны).*

$$\left\{\begin{array}{ll} u''_{tt} = a^2u''_{xx}, & 0<x<l,\ t>0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0<x<l, \\ u'_t(x,0) = \psi(x), & 0<x<l. \end{array}\right. \tag{11.24}$$

[27] См. раздел 11.1.2.

Пусть

$$\bar{u}(x,p) \equiv \overset{(t)}{L}(u(x,t)) = \int\limits_0^{+\infty} u(x,t)\exp(-pt)\ dt.$$

Применяя преобразование Лапласа по временно́й переменной t к уравнению задачи (11.24) и граничным условиям, получаем с учётом начальных данных следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} a^2\bar{u}''_{xx} - p^2\bar{u} + p\varphi(x) + \psi(x) = 0, \quad 0 < x < l \\ \bar{u}(0,p) = \bar{u}(l,p) = 0. \end{cases}$$

После её решения находим функцию $u(x,t)$ обратным преобразованием Лапласа:

$$u(x,t) = L^{-1}(\bar{u}(x,p)) \equiv \mathrm{Vp}\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \bar{u}(x,p)\exp(pt)\ dp.$$

11.1.5 Метод разделения переменных Фурье — метод стоячих волн

В основе данного метода решения различных задач математической физики лежит факт существования решений уравнения в частных производных специального вида — с разделяющимися переменными. В волновых задачах подобные решения допускают простое физическое истолкование в терминах стоячих волн. Общее решение задачи при этом пытаются найти как сумму (ряд, интеграл) стоячих волн, подбирая параметры последних.

Математическим обоснованием данной группы методов служит спектральная теория дифференциальных операторов, исторически развившаяся из теории задачи Штурма-Лиувилля. При изложении данных разделов удобно оперировать общими понятиями и терминами теории евклидовых пространств (функциональный анализ).

Минимум сведений об евклидовых пространствах.

Определение 1. *Линейное (векторное) пространство*[28] *E называется евклидовым, если в нём определено скалярное произведение, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

1. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle\ \forall x,y;$

2. $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1\langle x_1,y\rangle + \lambda_2\langle x_2,y\rangle\ \forall x_1,x_2,y \in E, \forall\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbf{R};$

3. $\langle x,x\rangle \geq 0\ \forall x;\ \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

[28] Над полем вещественных чисел.

Любое евклидово пространство становится нормированным после введения в нём нормы $\|x\| \equiv \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Определение 2. *Система*[29] *элементов* $\{e_k\}$ *евклидова пространства* E *называется*

1. *ортогональной, если* $\langle e_i, e_j\rangle = 0 \ \forall i, j : i \neq j$;
2. *нормированной, если* $\|e_i\| = 1 \ \forall i$;
3. *ортонормированной, если* $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} \ \forall i, j$;
4. *полной, если для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $f \in E$ *существует конечная линейная комбинация элементов системы* $\sum_k \alpha_k e_k$, *для которой*
$$\left\| f - \sum_k \alpha_k e_k \right\| < \varepsilon;$$
5. *линейно независимой, если для любой её конечной подсистемы* $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$
$$\sum_{k=1}^{n} c_k \tilde{e}_k = 0 \Leftrightarrow c_k = 0 \ \forall k,$$
иными словами, никакой её элемент не может быть представлен как конечная линейная комбинация других элементов.

Определение 3. *Евклидово пространство* E *называется бесконечномерным, если в нём имеется бесконечная линейно независимая система элементов.*

Определение 4. *Пусть* $\{e_k\}$ — *ортонормированная система в евклидовом пространстве* E. *Ряд*[30]
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \ c_k \equiv \langle f, e_k\rangle$$
называется (обобщённым) рядом Фурье для элемента f *по системе* $\{e_k\}$.

Ряд Фурье по заданной ортонормированной системе можно построить для любого элемента пространства. Указанное соответствие записывается в виде
$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k.$$
Это не означает, однако, что данный ряд сходится к f, или даже вообще сходится. Вместе с тем, верна следующая теорема.

Теорема 1. *Для любой ортонормированной системы* $\{e_k\}$ *и любого вектора* f *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ *сходится, и справедливо неравенство Бесселя*
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2 .$$

[29] Набор, множество, семейство, совокупность ...

[30] Или сумма - для конечной системы элементов.

Определение 5. *Ортонормированная система $\{e_k\}$ называется замкнутой, если для любого $f \in E$ справедливо* равенство Парсеваля-Стеклова:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 .$$

Теорема 2. *Пусть $\{e_k\}$ — ортонормированная система в евклидовом пространстве. Следующие три утверждения относительно неё равносильны:*

- *система замкнута;*
- *система полна;*
- *произвольный элемент пространства может быть представлен сходящимся к нему рядом Фурье по данной системе.*

Определение 6. *Замкнутая ортонормированная система элементов евклидова пространства называется* ортонормированным базисом *в этом пространстве.*

Примеры:

1. $E = R^n$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$,...,$e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$.
2. $E = CL_2\,(0, l)$ — пространство непрерывных на интервале $(0, l)$ функций со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^l \varphi\,(x)\,\psi\,(x)\; dx$$

и нормой

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_0^l \varphi^2\,(x)\; dx}.$$

Ортонормированный базис в нём образует, например, система функций $\left\{\varphi_k\,(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{\pi k x}{l}\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Общая схема метода разделения переменных (Фурье).

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения гиперболического типа

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\,\mathrm{L}\,u, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ \alpha u\,(0, t) + \beta u'_x\,(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ \gamma u\,(l, t) + \delta u'_x\,(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u\,(x, 0) = \varphi\,(x)\,, & 0 \leq x \leq l, \\ u'_t\,(x, 0) = \psi\,(x)\,, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \qquad (11.25)$$

где

$$\mathrm{L}\,u \equiv q\,(x)\,u - \frac{\partial}{\partial x}\left(p\,(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

— линейный дифференциальный оператор второго порядка, $q(x), p(x)$ — заданные функции, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — заданные, не все равные нулю числа ($|\alpha| + |\beta| \neq 0,\ |\gamma| + |\delta| \neq 0$).

Метод разделения переменных реализуем как последовательность следующих шагов.

Шаг 1. Рассмотрим однородную краевую задачу, ассоциированную с исходной задачей (11.25):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\operatorname{L} u, & 0 < x < l, t > 0, \\ \alpha u(0,t) + \beta u'_x(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ \gamma u(l,t) + \delta u'_x(l,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{11.26}$$

Найдем все нетривиальные решения этой задачи с разделёнными переменными, т.е. решения вида $u(x,t) = y(x)T(t)$ — *стоячие волны*. Подставляя подобное решение в (11.26), получаем тождества

$$\begin{cases} y(x)\ddot{T}(t) = -\operatorname{L}(y(x))T(t), & 0 < x < l, t > 0, \\ (\alpha y(0) + \beta y'(0))T(t) = 0, & t \geq 0, \\ (\gamma y(l) + \delta y'(l))T(t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая нетривиальность решения и независимость переменных x, t, имеем

$$\alpha y(0) + \beta y'(0) = 0,$$
$$\gamma y(l) + \delta y'(l) = 0,$$

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \equiv -\frac{\operatorname{L}(y(x))}{y(x)} \equiv -\lambda,$$

где λ — постоянная величина. Таким образом, функция $y(x)$ — *профиль стоячей волны* — должна быть нетривиальным решением следующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} \operatorname{L}(y(x)) = \lambda y(x), \ 0 < x < l, \\ \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \\ \gamma y(l) + \delta y'(l) = 0 \end{cases} \tag{11.27}$$

— *задачи Штурма-Лиувилля*, а функция $T(t)$ — решением дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{T}(t) + \lambda T = 0. \tag{11.28}$$

Оказывается, что при достаточно широких предположениях относительно данных задачи (11.27), она имеет бесконечное множество решений, т.е. существует бесконечный набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, при каждом из которых λ_n краевая задача (11.27) имеет хотя бы одно нетривиальное решение $y_n(x)$. Более того, оказывается , что множество нормированных функций $\{y_n(x)\}$ образует ортонормированный базис в евклидовом пространстве $CL_2(0,l)$. Найдя соответствующее этому λ_n общее решение $T_n(t)$ уравнения (11.28), получаем бесконечный набор стоячих волн $u_n(x,t) \equiv y_n(x)T_n(t)$, каждая из которых содержит в себе два свободных параметра — значения $T_n(0)$, $\dot{T}_n(0)$.

Шаг 2. В силу линейности всех уравнений краевой задачи (11.26) сумма произвольных стоячих волн также является решением этой задачи. Сумма ряда

$$u(x,t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\, T_n(t)$$

из стоячих волн также будет решением этой задачи при условии достаточно быстрой его сходимости[31]. Остаётся подобрать свободные параметры стоячих волн так, чтобы удовлетворить начальным условиям задачи (11.25):

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\, T_n(0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\, \dot{T}_n(0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l. \end{aligned} \tag{11.29}$$

Так как $\{y_n(x)\}$ образует ортонормированный базис, то для выполнения этих равенств необходимо и достаточно, чтобы значения $T_n(0), \dot{T}_n(0)$ совпадали с коэффициентами Фурье разлагаемых функций

$$\begin{aligned} T_n(0) &= \varphi_n \equiv \langle \varphi(x), y_n(x) \rangle, \\ \dot{T}_n(0) &= \psi_n \equiv \langle \psi(x), y_n(x) \rangle. \end{aligned}$$

В итоге мы получаем формальное решение задачи (11.25) в виде ряда

$$u(x,t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\, T_n(t), \tag{11.30}$$

где $T_n(t)$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} \ddot{T}(t) + \lambda_n T = 0, \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ \dot{T}_n(0) = \psi_n. \end{cases}$$

Шаг 3. Завершающим в методе разделения переменных является этап обоснования произведенных на предыдущих шагах действий. На этом этапе исследуется сходимость ряда (11.30), возможность его почленного дифференцирования и подстановки в уравнение, характер сходимости рядов (11.29) и пр. Отметим, что существуют различные подходы к понятию решения задачи. Например, если ряд (11.30) сходится к функции, не имеющей необходимых производных второго порядка, то подобная функция может быть названа *обобщённым решением задачи.* Обобщённые решения задачи также могут различаться, например, по характеру сходимости соответствующих рядов (11.30), по своим дифференциальным свойствам и т.д.

[31] Обеспечивающей возможность его двукратного дифференцирования под знаком ряда по переменным x, t.

Теория задачи Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля с граничными условиями частного вида

$$\begin{cases} \mathrm{L}\, y(x) = \lambda y(x), \ 0 < x < l, \\ y(0) = 0, \\ y(l) = 0, \end{cases} \tag{11.31}$$

(обобщения на случай однородных граничных условий более общего вида могут быть сделаны без особых осложнений).

Уточним постановку задачи Штурма-Лиувилля. Предположим, что функции $p(x), q(x)$, задающие дифференциальный оператор

$$\mathrm{L}\, y(x) \equiv q(x)\, y(x) - \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right),$$

удовлетворяют следующим, обеспечивающим эллиптичность оператора, условиям:

$$\begin{gathered} p(\cdot) \in C^1(0,l), \ q(\cdot) \in C(0,l), \\ q(x) \geq q_0 > 0, \ p(x) \geq p_0 > 0, \end{gathered}$$

где p_0, q_0 — постоянные числа. Любое комплексное число $\lambda \in \mathbf{C}$, при котором краевая задача (11.31) имеет хотя бы одно нетривиальное решение $y(\cdot) \in C^2(0,l)$, называется *собственным числом* задачи Штурма-Лиувилля. Само это решение называется *собственной функцией* задачи Штурма-Лиувилля, отвечающей данному собственному числу.

> **Задача Штурма-Лиувилля:** *найти все собственные числа и для каждого из них найти множество всех ему отвечающих собственных функций.*

Свойства решений задачи Штурма-Лиувилля.

При исследовании свойств решений задачи Штурма-Лиувилля удобно рассматривать эти решения как элементы евклидова пространства $CL_2(0,l)$. Используемые далее термины из теории евклидовых пространств (норма функции, ортогональность функций и т.д.) относятся именно к данному пространству.

Теорема 1. *Если y_k — собственные функции, отвечающие одному и тому же собственному числу λ, то произвольная их (конечная) линейная комбинация $y \equiv \sum_k C_k y_k$ либо тождественно равна нулю, либо является собственной функцией, отвечающей тому же λ.*

Доказательство. Если $y \equiv 0$, то теорема доказана. Иначе в силу линейности дифференциального оператора L,

$$\mathrm{L}\, y = \mathrm{L}\left(\sum_k C_k y_k\right) = \sum_k C_k\, \mathrm{L}(y_k) = \sum_k C_k \lambda y_k = \lambda y,$$

и, следовательно, y — собственная функция[32], что доказывает теорему.

Теорема 2. *Если y — собственная функция, то $y'(0) \neq 0$ и $y'(l) \neq 0$.*

[32]Следует еще проверить выполнение граничных условий $y(0) = y(l) = 0$ — они, очевидно, выполняются.

Доказательство. Пусть, например, $y'(0) = 0$. Преобразуя (11.31), получаем для $y(x)$

$$\begin{cases} y'' + f(x)\, y' + g(x)\, y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

где функции $f(x), g(x)$ определены через $p(x), q(x)$. Рассматривая этот набор условий как задачу Коши для линейного однородного дифференциального уравнения и учитывая единственность решения подобной задачи, получаем $y(x) \equiv 0$. Но это противоречит тому, что $y(x)$ — собственная функция. Следовательно, $y'(0) \neq 0$ и аналогично $y'(l) \neq 0$.

Теорема 3. *Собственные функции $y_{1,2}(x)$, отвечающие одному собственному числу, пропорциональны: $y_1(x) \equiv ky_2(x)$, где $k \neq 0$ — постоянная.*

Доказательство. Рассмотрим следующую линейную комбинацию этих функций: $y(x) \equiv y_1(x)\, y_2'(0) - y_2(x)\, y_1'(0)$. Для неё имеем $y'(0) = 0$. Следовательно, по предыдущей теореме $y(x)$ не является собственной функцией. Но тогда по теореме 1 $y(x) \equiv 0$, и потому

$$y_1(x) \equiv \frac{y_1'(0)}{y_2'(0)} y_2(x) \equiv ky_2(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Для любого собственного числа λ существуют две (и только две) нормированные собственные функции. Они различаются только знаком* [33].

Доказательство. Пусть $y(x)$ — собственная функция, отвечающая λ. Тогда

$$y_{1,2}(x) \equiv \pm \frac{y(x)}{\|y(x)\|}$$

— нормированные собственные функции, отвечающие λ. С другой стороны, если $y_{1,2}(x)$ — нормированные собственные функции, отвечающие λ, то по теореме 3 они пропорциональны: $y_1(x) \equiv ky_2(x)$. Поэтому

$$\begin{gathered} 1 = \|y_1\| = |k|\, \|y_2\| = |k| \Rightarrow \\ k = \pm 1,\ y_1(x) \equiv \pm y_2(x), \end{gathered}$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1. *Для любых функций $y_{1,2}(x) \in C^2(0, l)$, удовлетворяющих нулевым граничным условиям $y_{1,2}(0) = y_{1,2}(l) = 0$, имеет место равенство*

$$\langle \mathrm{L}\, y_1, y_2 \rangle = \langle y_1, \mathrm{L}\, y_2 \rangle .$$

[33] Это означает, что множество собственных функций, отвечающих одному и тому же собственному числу (собственное подпространство), образует одномерное линейное подпространство.

Доказательство. Имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l \left(\mathrm{L}\left(y_1\right) y_2-\mathrm{L}\left(y_2\right) y_1\right) dx= \\ =\int\limits_0^l\left(y_1 \tfrac{d}{dx}\left(p y_2^{\prime}\right)-y_2 \tfrac{d}{dx}\left(p y_1^{\prime}\right)\right) dx= \\ =\left.\left(y_1 p y_2^{\prime}-y_2 p y_1^{\prime}\right)\right|_{x=0}^{x=l}-\int\limits_0^l\left(y_1^{\prime} p y_2^{\prime}-y_2^{\prime} p y_1^{\prime}\right) dx=0\end{gathered}$$

в силу граничных условий для данных функций. Лемма доказана[34].

Теорема 5. *Собственные функции, отвечающие различным собственным числам, ортогональны между собой.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{L}\, y_1=\lambda_1 y_1$, $\mathrm{L}\, y_2=\lambda_2 y_2$. Тогда $\langle\mathrm{L}\, y_1, y_2\rangle = \lambda_1\langle y_1, y_2\rangle$, $\langle\mathrm{L}\, y_2, y_1\rangle=\lambda_2\langle y_1, y_2\rangle$, и по предыдущей лемме

$$\begin{gathered}0=\langle\mathrm{L}\, y_1, y_2\rangle-\langle\mathrm{L}\, y_2, y_1\rangle= \\ =\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\langle y_1, y_2\rangle .\end{gathered}$$

Поэтому при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ имеем $\langle y_1, y_2\rangle=0$, что и требовалось доказать.

Теорема 6. *Все собственные числа вещественны.*

Доказательство. Пусть, напротив, для некоторого собственного числа λ имеем $\lambda \neq \bar{\lambda}$. Применяя операцию комплексного сопряжения к обеим частям вещественного уравнения $\mathrm{L}\, y=\lambda y$, получим $\mathrm{L}\, y=\bar{\lambda} y$. Следовательно, $\bar{\lambda}$ является собственным числом, отвечающим той же собственной функции $y(x)$. Из теоремы 5 вытекает тогда равенство

$$\langle y, y\rangle=\|y\|^2=0,$$

противоречащее условию нетривиальности собственной функции. Поэтому исходное предположение неверно. Теорема доказана.

Экстремальная задача, связанная с задачей Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим экстремальную задачу, следующим образом связанную с задачей Штурма-Лиувилля: в функционале использованы функции $p(x), q(x)$, входящие в дифференциальный оператор L, а множество функций, на котором минимизируется функционал, является подмножеством области определения данного оператора —

$$\left\{\begin{gathered}J(y(\cdot))=\int\limits_0^l\left(q(x) y^2(x)+p(x) y^{\prime 2}(x)\right) dx \rightarrow \min_D, \\ D=\left\{y(x): \; y(\cdot) \in C^2(0, l),\, y(0)=y(l)=0,\right. \\ \left.\|y\|^2=\int_0^l y^2(x)\, dx=1\right\} .\end{gathered}\right\} \qquad (11.32)$$

Лемма 2. *Если $y(\cdot)$ — нормирвованная собственная функция задачи Штурма-Лиувилля, отвечающая собственному числу λ, то $J(y(\cdot))=\lambda$.*

[34] Свойство самосопряженности оператора L на соответствующем подпространстве пространства CL_2.

Доказательство. Имеем

$$\lambda = \lambda\int_0^l y^2(x)\,dx = \int_0^l \lambda y(x)\,y(x)\,dx =$$
$$= \int_0^l \mathrm{L}(y(x))\,y(x)\,dx = \int_0^l \left(qy - \tfrac{d}{dx}(py')\right)y\,dx =$$
$$= \int_0^l \left(qy^2 + py'^2\right)dx - py'y\big|_0^l = J(y(\cdot)),$$

что и утверждалось.

Теорема 7. *Экстремальная задача* (11.32) *имеет решение. Это решение* $y_1(\cdot)$ *является нормированной собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля, отвечающей минимальному из всех собственных чисел* λ_1. *Соответствующее минимальное значение функционала* $J(y_1(\cdot)) = \lambda_1$.

Доказательство. Доказательство существования решения вариационной задачи (11.32) выходит за рамки нашего курса (см., например, книгу [9]).

Выпишем необходимое условие экстремума[35] для изопериметрической задачи (11.32): существует нетривиальный набор множителей Лагранжа (λ_0, λ_1) такой, что для решения вариационной задачи y_1 выполнено тождество (уравнение Лагранжа)

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'} = 0,$$

где $H(x,y,y') \equiv \lambda_0\left(q(x)\,y^2 + p(x)\,y'^2\right) - \lambda_1 y^2$ — функция Лагранжа.

Иными словами,

$$\lambda_0\left(qy_1(x) - \frac{d}{dx}\left(py_1'(x)\right)\right) \equiv \lambda_1 y_1(x).$$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 y_1(x) \equiv 0$, что противоречит условиям нетривиальности набора множителей Лагранжа и функции $y_1(x)$. Поэтому $\lambda_0 = 1$ и, значит, $\mathrm{L}\,y_1 = \lambda_1 y_1$, т.е. $y_1(x)$ — собственная функция задачи Штурма-Лиувилля, отвечающая собственному числу λ_1. Покажем, что λ_1 — минимальное из всех собственных чисел. Пусть $y(\cdot)$ — произвольная нормированная собственная функция задачи Штурма-Лиувилля. Тогда $y(\cdot) \in D$, а для соответствующего собственного числа λ имеем в силу леммы 2 неравенство

$$\lambda = J(y(\cdot)) \geq J(y_1(\cdot)) = \lambda_1,$$

что и доказывает минимальность λ_1. Теорема доказана.

Теорема 8. *Собственные числа задачи Штурма-Лиувилля могут быть расположены в бесконечную возрастающую последовательность*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

При этом нормированная собственная функция $y_n(\cdot)$, $n \geq 1$, *отвечающая*

[35] См. раздел 2.12.

собственному числу λ_n, является решением экстремальной задачи

$$\left\{ \begin{array}{c} J\left(y\left(\cdot\right)\right)=\int\limits_0^l \left(q\left(x\right)y^2\left(x\right)+p\left(x\right)y'^2\left(x\right)\right)dx\to \min\limits_{D_n}, \\ D_n=\left\{y\left(x\right):\ y\left(\cdot\right)\in C^2\left(0,l\right),\, y\left(0\right)=y\left(l\right)=0,\right. \\ \left.\left\|y\right\|^2=\int_0^l y^2\left(x\right)dx=1,\ \int_0^l y\left(x\right)y_k\left(x\right)dx=0,\ k=\overline{1,n-1}\right\}. \end{array} \right\} \tag{11.33}$$

Минимальное значение функционала на D_n

$$J\left(y_n\right)=\lambda_n.$$

Доказательство. Проведем его по индукции. При $n=1$ теорема верна (см. теорему 7). Предположим, что она верна и при $n-1$. Рассмотрим теперь задачу (11.33). Она имеет решение (см. [9]), которое мы обозначим y_n. Тогда (см. раздел 2.12) существует нетривиальный набор множителей Лагранжа $(\lambda_0,\lambda_n,\nu_1,\ldots,\nu_{n-1})$ такой, что

$$\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}=0, \tag{11.34}$$

где

$$H\left(x,y,y'\right)\equiv\lambda_0\left(q\left(x\right)y^2+p\left(x\right)y'^2\right)-\lambda_n y^2-2\sum_{i=1}^{n-1}\nu_i y_i y$$

— функция Лагранжа изопериметрической вариационной задачи (11.33). Из (11.34) получаем

$$\lambda_0\,\mathrm{L}\,y_n=\lambda_n y_n+\sum_{i=1}^{n-1}\nu_i y_i.$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на y_j, $j=\overline{1,n-1}$, имеем

$$\lambda_0\left\langle \mathrm{L}\,y_n,y_j\right\rangle=\lambda_n\left\langle y_n,y_j\right\rangle+\sum_{i=1}^{n-1}\nu_i\left\langle y_i,y_j\right\rangle.$$

В правой части этого равенства все члены, кроме $\nu_j\left\langle y_j,y_j\right\rangle=\nu_j$, равны нулю. Преобразуем левую часть. По лемме 1

$$\left\langle \mathrm{L}\,y_n,y_j\right\rangle=\left\langle y_n,\mathrm{L}\,y_j\right\rangle=\lambda_j\left\langle y_n,y_j\right\rangle=0.$$

Следовательно, $\nu_j=0$ $j=\overline{1,n-1}$ и

$$\lambda_0\,\mathrm{L}\,y_n=\lambda_n y_n.$$

Если $\lambda_0=0$, то $\lambda_n=0$ и весь набор множителей Лагранжа нулевой, что неверно. Значит, $\lambda_0=1$,

$$\mathrm{L}\,y_n=\lambda_n y_n,$$

т.е. y_n — собственная функция, отвечающая собственному числу λ_n. Покажем, что $\lambda_n>\lambda_{n-1}$. Имеем

$$\lambda_{n-1}=J\left(y_{n-1}\right)=\min_{y\in D_{n-1}}J\left(y\right)\le J\left(y_n\right)=\lambda_n,$$

т.к. $y_n \in D_n \subset D_{n-1}$. Если же $\lambda_n = \lambda_{n-1}$, то по теореме 4 $y_n = \pm y_{n-1}$. Но тогда в силу (11.33)

$$0 = |\langle y_n, y_{n-1}\rangle| = 1$$

— противоречие! Следовательно, $\lambda_n > \lambda_{n-1}$. Теорема доказана.

Теорема 9. *Последовательность собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Примем без доказательства следующее "очевидное " утверждение: если функции $p(x), q(x)$ получают неотрицательные приращения $\delta p(x), \delta q(x)$, то все собственные числа при этом могут лишь возрасти. Это позволяет сравнить собственные числа λ_n с собственными числами λ_{0n} следующей "простейшей" задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathrm{L}_0\, y = \lambda y, \\ y(0) = y(l) = 0, \end{cases}$$

$\mathrm{L}_0(y) \equiv q_0 y - p_0 y''$, которая "минорирует" исходную задачу, ведь $q(x) \geq q_0$, $p(x) \geq p_0$. Имеем

$$\lambda_n \geq \lambda_{0n} = q_0 + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 p_0,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Замечание. Если функции $p(x), q(x)$ также равномерно ограничены сверху постоянными p_1, q_1, соответственно, то аналогично изложенному получаем верхнюю оценку

$$\lambda_n \leq \lambda_{1n} = q_1 + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 p_1.$$

Следовательно, в этом случае $\lambda_n = O\left(n^2\right)$ при $n \to \infty$.

Теорема Стеклова. *Любая функция $f(\cdot) \in C^2(0,l)$, $f(0) = f(l) = 0$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i(x), \; x \in [0,l], \qquad c_i = \langle f, y_i\rangle.$$

Доказательство. Рассмотрим остаток ряда

$$r_n(x) \equiv f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x).$$

Докажем лишь более слабое утверждение: $\|r_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Нетрудно видеть, что

a) $r_n(0) = r_n(l) = 0$;

b) $\langle r_n, y_j\rangle = \langle f, y_j\rangle - \sum_{i=1}^{n} c_i \langle y_i, y_j\rangle = c_j - c_j = 0\, \forall j = \overline{1,n}$;

c) $J(r_n) \geq \lambda_{n+1} \|r_n\|^2$.

Проверим последнее неравенство. Так как в силу пп. a),b) $r_n / \|r_n\| \in D_{n+1}$, то

$$\frac{1}{\|r_n\|^2} J(r_n) = J\left(\frac{r_n}{\|r_n\|}\right) \geq \min_{D_{n+1}} J = \lambda_{n+1},$$

что и утверждалось.

Рассмотрим также билинейный функционал

$$\mathrm{K}(y_1, y_2) = \int\limits_0^l \left(q(x)\, y_1 y_2 + p(x)\, y_1' y_2'\right) dx.$$

Отметим следующие его свойства:

a) Для любых функций $y_1, y_2 \in C^2(0,l)$, удовлетворяющих граничным условиям $y_{1,2}(0) = y_{1,2}(l) = 0$,

$$\mathrm{K}(y_1, y_2) = \langle \mathrm{L}\, y_1, y_2 \rangle = \langle y_1, \mathrm{L}\, y_2 \rangle = \mathrm{K}(y_2, y_1)\,,$$
$$\mathrm{K}(y, y) = J(y)\,;$$

b) $\mathrm{K}(y_i, y_j) = \langle \mathrm{L}\, y_i, y_j \rangle = \lambda_i \langle y_i, y_j \rangle = 0 \; i \neq j$;

c) $\mathrm{K}(r_n, y_j) = \langle \mathrm{L}\, y_j, r_n \rangle = \lambda_j \langle y_j, r_n \rangle = 0 \; j = \overline{1,n}$.

Имеем поэтому

$$J(f) = J\left(r_n + \sum_{i=1}^n c_i y_i\right) = J(r_n) + \sum_{i=1}^n c_i^2 J(y_i) +$$
$$+ \sum_{i \neq j}\sum c_i c_j\, \mathrm{K}(y_i, y_j) + 2\sum_{i=1}^n c_i\, \mathrm{K}(r_n, y_i) \geq$$
$$\geq \lambda_{n+1} \|r_n\|^2 + \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i \geq \lambda_{n+1} \|r_n\|^2\,,$$

следовательно, в силу теоремы 9

$$\|r_n\|^2 \leq \frac{J(f)}{\lambda_{n+1}} \to 0,$$

что и утверждалось. Заметим, что из доказанного вытекает, в частности, полнота ортонормированной системы собственных функций $\{y_i\}$ в $CL_2(0,l)$.

Замечание. Как уже отмечалось, полученные выше результаты относительно собственных чисел и функций задачи Штурма-Лиувилля без труда обобщаются на случай произвольных однородных граничных условий, т.е. на задачу (11.27). Сверх того, и эта более общая задача может быть легко обобщена до следующей

$$\begin{cases} \mathrm{L}(y(x)) = \lambda \rho(x)\, y(x)\,,\; 0 < x < l, \\ \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \\ \gamma y(l) + \delta y'(l) = 0, \end{cases} \tag{11.35}$$

где функция $\rho(\cdot) \in C(0,l)$, $\rho(x) > 0 \; \forall x \in (0,l)$. В этом случае, однако, все рассмотрения следует проводить в евклидовом пространстве $CL_2^{(\rho)}(0,l)$ со скалярным произведением

$$\langle y_i, y_j \rangle = \int\limits_0^l \rho(x)\, y_i(x)\, y_j(x)\, dx.$$

Задача Штурма-Лиувилля (11.35) служит источником многих известных в математике ортогональных систем функций.

Примеры.

1. $q(x) \equiv 0,\ p(x) \equiv \rho(x) \equiv 1$. Здесь уравнение имеет вид

$$y'' + \lambda y = 0.$$

Спектр собственных чисел и собственные функции зависят от краевых условий. Приведём некоторые варианты:

(a) $y(0) = y(l) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, y_n(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}, n = 1, 2, \ldots;$

(b) $y(0) = y'(l) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2, y_n(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} \left(n - \frac{1}{2}\right) x, n = 1, 2, \ldots;$

(c) $y'(0) = y'(l) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \left(\pi \frac{n}{l}\right)^2, n = 0, 1, 2, \ldots;$

$$y_n(x) \equiv \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi n x}{l}, & n = 1, 2, \ldots \\ \sqrt{\frac{1}{l}}, & n = 0 \end{cases}$$

2. $q(x) \equiv \frac{m^2}{x},\ p(x) \equiv \rho(x) \equiv x, |y(0)| < \infty, y(l) = 0$

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(\lambda - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0$$

— *уравнение Бесселя m-го порядка* (m - заданное целое число). Собственные числа $\lambda_n,\ n = 1, 2, \ldots$ в этом случае находятся из характеристического уравнения

$$J_m\left(\sqrt{\lambda} l\right) = 0,$$

где J_m - *функция Бесселя первого рода m-го порядка*, а собственные функции имеют вид

$$y_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{J_m'\left(\sqrt{\lambda_n}\right) l} J_m\left(\sqrt{\lambda_n} x\right)$$

3. $q(x) \equiv 0,\ p(x) \equiv 1 - x^2,\ \rho(x) \equiv 1,\ x \in (-1, 1)$

$$-\frac{d}{dx}\left(\left(1 - x^2\right) \frac{dy}{dx}\right) = \lambda y$$

— *уравнение Лежандра.* Ограниченные ненулевые решения этого уравнения существуют лишь при $\lambda_n = n(n+1)$, $n = 0, 1, \ldots$ и являются многочленами n-го порядка (*многочлены Лежандра* $P_n(x)$).

4. $q(x) \equiv \frac{m^2}{1-x^2}, m = 0, 1, \ldots$(фиксированное число); $p(x) \equiv 1 - x^2$; $\rho(x) \equiv 1$; $x \in (-1, 1)$

$$\frac{m^2}{1 - x^2} y - \frac{d}{dx}\left(\left(1 - x^2\right) \frac{dy}{dx}\right) = \lambda y$$

— *присоединённое уравнение Лежандра.* Ограниченные ненулевые решения данного уравнения существуют лишь при $\lambda_n = n(n+1)$, $n \geq m$.

Решение неоднородной задачи методом разделения переменных.

Изложим теперь общую схему решения неоднородной смешанной задачи методом Фурье:

$$\begin{cases} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\mathrm{L}\,u + g(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ \alpha u(0,t) + \beta u'_x(0,t) = f_1(t), & t \geq 0, \\ \gamma u(l,t) + \delta u'_x(l,t) = f_2(t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u'_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \tag{11.36}$$

где $g(x,t), f_1(t), f_2(t)$ — заданные функции.

Прежде всего следует избавиться от неоднородности в граничных условиях. Будем искать решение задачи (11.36) в виде суммы

$$u(x,t) = \hat{u}(x,t) + \check{u}(x,t), \tag{11.37}$$

где "предназначение" функции $\hat{u}(x,t)$ — удовлетворение граничным условиям

$$\alpha\hat{u}(0,t) + \beta\hat{u}'_x(0,t) = f_1(t),$$
$$\gamma\hat{u}(l,t) + \delta\hat{u}'_x(l,t) = f_2(t).$$

Указанными граничными условиями функция определена, очевидно, неоднозначно. Поэтому для её нахождения можно привлекать и дополнительные соображения: простота аналитического описания, возможность физической интерпретации и т.д. Из дальнейшего также выясняется, что удобно было бы взять подобную функцию из множества решений однородного уравнения $\rho u''_{tt} = -\mathrm{L}\,u$.

После подстановки (11.37) в (11.36) получаем для $\check{u}(x,t)$ следующую задачу с однородными граничными условиями

$$\begin{cases} \rho(x)\frac{\partial^2 \check{u}}{\partial t^2} = -\mathrm{L}\,\check{u} + \check{g}(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ \alpha\check{u}(0,t) + \beta\check{u}'_x(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ \gamma\check{u}(l,t) + \delta\check{u}'_x(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ \check{u}(x,0) = \check{\varphi}(x), & 0 \leq x \leq l, \\ \check{u}'_t(x,0) = \check{\psi}(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

где $\check{g}(x,t) \equiv g(x,t) - (\rho(x)\hat{u}''_{tt} - \mathrm{L}\,\hat{u})$, $\check{\varphi}(x) \equiv \varphi(x) - \hat{u}(x,0)$, $\check{\psi}(x) \equiv \psi(x) - \hat{u}'_t(x,0)$. Решение этой смешанной задачи также будем искать[36] в виде суммы

$$\check{u}(x,t) \equiv v(x,t) + w(x,t),$$

где $v(x,t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \rho(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\mathrm{L}\,v, & 0 < x < l, t > 0, \\ \alpha v(0,t) + \beta v'_x(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ \gamma v(l,t) + \delta v'_x(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) = \check{\varphi}(x), & 0 \leq x \leq l, \\ v'_t(x,0) = \check{\psi}(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \tag{11.38}$$

[36] Очевидно, что возможность подобных разложений исходной смешанной задачи непосредственнно связаны с её линейностью - *принцип суперпозиции.*

а $w(x,t)$ — задачи

$$\left\{\begin{array}{ll} \rho(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\operatorname{L} w + \breve{g}(x,t), & 0<x<l, t>0, \\ \alpha w(0,t) + \beta w'_x(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ \gamma w(l,t) + \delta w'_x(l,t) = 0, & t \ge 0, \\ w(x,0) = 0, & 0 \le x \le l, \\ w'_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le l. \end{array}\right. \tag{11.39}$$

Решение однородной задачи (11.38) производится по стандартной схеме, изложенной выше и записывается в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\breve{\varphi}_n \cos\omega_n t + \frac{\breve{\psi}}{\omega_n}\sin\omega_n t\right) y_n(x) \tag{11.40}$$

по системе собственных функций $\{y_n(x)\}$ задачи Штурма-Лиувилля

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{L} y = \lambda\rho y, \\ \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \\ \gamma y(l) + \delta y'(l) = 0. \end{array}\right.$$

Подставляя в (11.40) значения коэффициентов Фурье функций $\breve{\varphi}(x), \breve{\psi}(x)$, получим интегральное представление для функции $v(x,t)$:

$$\begin{gathered} v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l \rho(\xi)\breve{\varphi}(\xi) y_n(\xi)\, d\xi \cos\omega_n t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega_n}\int_0^l \rho(\xi)\breve{\psi}(\xi) y_n(\xi)\, d\xi \sin\omega_n t\right) y_n(x) = \\ = \int_0^l \rho(\xi)\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\cos\omega_n t\, y_n(\xi)\,\breve{\varphi}(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n} y_n(\xi)\,\breve{\psi}(\xi)\right) d\xi \equiv \\ \equiv \int_0^l \rho(\xi) G'_t(x,t,\xi)\,\breve{\varphi}(\xi)\, d\xi + \int_0^l \rho(\xi) G(x,t,\xi)\,\breve{\psi}(\xi)\, d\xi. \end{gathered} \tag{11.41}$$

Здесь

$$G(x,t,\xi) \equiv G(x \mid t \mid \xi) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n} y_n(\xi) \tag{11.42}$$

— *функция Грина* краевой задачи

$$\left\{\begin{array}{ll} \rho(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\operatorname{L} v, & 0<x<l, t>0, \\ \alpha v(0,t) + \beta v'_x(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ \gamma v(l,t) + \delta v'_x(l,t) = 0, & t \ge 0. \end{array}\right.$$

Решение задачи (11.39) также будем искать в виде ряда

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) y_n(x).$$

Для нахождения переменных коэффициентов Фурье $w_n(t) \equiv \langle w(x,t), y_n(x)\rangle$ подставим это решение в (11.39), предварительно разложив по той же системе неоднородный член уравнения:

$$\frac{1}{\rho(x)}\breve{g}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) y_n(x).$$

В итоге получаем

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n(x)\,\rho(x)\left\{\ddot{w}_n(t)+\lambda_n w_n(t)-g_n(t)\right\}=0, & 0<x<l, t>0,\\ w(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n(0)\,y_n(x)=0, & 0<x<l,\\ w_t'(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dot{w}_n(0)\,y_n(x)=0, & 0<x<l. \end{cases}$$

откуда в силу полноты ортонормированной системы $\{y_n(x)\}$

$$\begin{cases} \ddot{w}_n(t)+\lambda_n w_n(t)-g_n(t)=0, \quad t>0\\ w_n(0)=0,\\ \dot{w}_n(0)=0. \end{cases}$$

Решение последней задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка запишем в интегральной форме

$$w_n(t)=\int\limits_0^t G_n(t-\tau)\,g_n(\tau)\,d\tau,$$

где $G_n(t)\equiv\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}t}{\sqrt{\lambda_n}}$ — фундаментальное решение уравнения, т.е. решение задачи Коши

$$\begin{cases} \ddot{G}_n+\lambda_n G_n=0,\\ G_n(0)=0,\\ \dot{G}_n(0)=1. \end{cases}$$

После подстановки найденных коэффициентов Фурье в ряд решение неоднородной задачи (11.39) запишется в интегральной форме

$$\begin{gathered} w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\,y_n(x)=\\ =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_0^t\int\limits_0^l \sin\left(\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\right)g(\xi,\tau)\,y_n(\xi)\,d\xi d\tau\,y_n(x)=\\ =\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,t-\tau,\xi)\,g(\xi,\tau)\ d\xi d\tau \end{gathered}$$

через функцию Грина (11.42).

Примеры.

1. $g(x,t)\equiv\delta(x-x_0)\,\delta(t)$

$$\begin{gathered} w(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,t-\tau,\xi)\,g(\xi,\tau)\,d\xi d\tau=\\ =\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,t-\tau,\xi)\,\delta(\xi-x_0)\,\delta(\tau)\,d\xi d\tau=G(x\mid t\mid x_0)\,. \end{gathered}$$

Отсюда можно вывести "физический смысл" функции Грина: её значение $G(x\mid\tau\mid x_0)$ — это отклонение точки x в момент времени t, вызванное мгновенным точечным возмущением, приложенным в точку

x_0 в начальный момент времени. Из формулы (11.42) видна симметрия функции Грина относительно переменных x и ξ. Это означает выполнение следующей *теоремы взаимности*: отклонение точки x, вызванное начальным возмущением, приложенным в точку x_0, тождественно с отклонением точки x_0, вызванным аналогичным начальным возмущением точки x.

2. $g(x,t) \equiv A \sin \omega t$

$$\begin{gathered} w(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l G(x, t-\tau, \xi)\, g(\xi,\tau)\, d\xi d\tau = \\ = A \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) \int\limits_0^l \frac{y_n(\xi)}{\omega_n} d\xi \int\limits_0^t \underbrace{\sin \omega_n (t-\tau) \sin \omega \tau}_{E_n(t,\tau)}\, d\tau, \end{gathered}$$

где $\omega_n \equiv \sqrt{\lambda_n}$ — собственная частота колебаний n-ой стоячей волны (моды). Окончательный вид решения определяется тем, совпадает частота вынуждающей силы ω с одной из резонансных частот ω_n системы или нет:

(a) $\omega \neq \omega_n$ при всех n (нерезонансный случай). Здесь

$$\begin{gathered} E_n(t,\tau) = \tfrac{1}{2}\left[\cos(\omega_n t - (\omega+\omega_n)\tau) - \cos(\omega_n t + (\omega-\omega_n)\tau)\right], \\ w(x,t) = W_1(x) \sin \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n y_n(x) \sin \omega_n t. \end{gathered}$$

(b) $\omega = \omega_{n^*}$ — резонанс на частоте стоячей волны с номером n^*. В этом случае

$$\begin{gathered} E_{n^*}(t,\tau) = -\tfrac{\cos \omega_{n^*} t}{2} + \tfrac{\cos(\omega_{n^*} t - 2\omega_{n^*} \tau)}{2}, \\ w(x,t) = W_2(x)\, t \cos \omega_{n^*} t + \sum_{n \neq n^*} C_n y_n(x) \sin \omega_n t. \end{gathered}$$

Метод разделения переменных Фурье в многомерных задачах.

Схема метода разделения, изложенная выше, без существенных изменений обобщается на случай пространственной переменной любого числа измерений. Пусть

$$\begin{gathered} u = u(t, \mathbf{x}),\ \mathbf{x} \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega,\ t > 0, \\ \mathrm{L}\, u \equiv a_0(x)\, u - \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \tfrac{\partial u}{\partial x_j}\right), \\ a_0(x) \geq 0,\ a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x), \\ \langle a(x)\eta, \eta\rangle \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \eta_i \eta_j > 0\ \forall x \in \Omega, \forall \eta \neq 0. \end{gathered}$$

Здесь $n > 1$, Ω — ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$, $a_0(\cdot) \in C(\Omega)$, $a_{ij}(\cdot) \in C^1(\Omega)$.

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения гиперболического типа (волнового уравнения)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\mathrm{L}\, u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & (x,t) \in \Gamma \equiv \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \\ u_t'(x,0) = \psi(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{11.43}$$

Как и в случае одномерной пространственной переменной x, метод разделения переменных решения задачи (11.43) реализуется в виде последовательности стандартных шагов.

Шаг 1. Ищутся все нетривиальные решения (стоячие волны) однородной краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\operatorname{L} u, & x \in \Omega,\, t > 0, \\ u = 0, & (x,t) \in \Gamma \equiv \partial\Omega \times (0,\infty)\,, \end{cases} \tag{11.44}$$

с разделёнными временной и пространственной переменной: $u(x,t) = y(x)\,T(t)$. После подстановки подобного решения в (11.44) и разделения переменных, получаем тождество

$$\frac{\ddot{T}}{T}(t) \equiv -\frac{\operatorname{L} y}{y}(x)\,.$$

Так как переменные t и x независимы, то обе части тождества должны быть постоянны. Обозначая эту постоянную $-\lambda$, приходим к следующей многомерной задаче Штурма-Лиувилля: *найти все (собственные) числа λ, при которых краевая задача*

$$\begin{cases} \operatorname{L} y = \lambda y \\ y|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{11.45}$$

имеет нетривиальное решение (собственные функции). Теория таких задач аналогична той, что построена нами выше для одномерного случая. Оказывается, что в указанных выше условиях существует бесконечный набор собственных чисел

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots,\ \lambda_n \to \infty,$$

а отвечающий им набор нормированных собственных функций

$$y_1, y_2, \ldots$$

образует ортонормированный базис в соответствующем евклидовом пространстве

$$\langle y_i, y_j \rangle = \int\limits_{\Omega} \cdots \int y_i(x)\, y_j(x)\, dx = \delta_{ij}.$$

После решения уравнений для $T(t)$:

$$\ddot{T} + \lambda_n T = 0$$

находим все стоячие волны в виде

$$u_n(x,t) = y_n(x)\, T_n(t) = \left(A_n \cos\sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n} t\right) y_n(x)\,.$$

Шаг 2. Ищем решение исходной начально-краевой задачи (11.43) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t \right) y_n(x)$$

по найденным стоячим волнам. Для нахождения неопределенных коэффициентов A_n, B_n имеем начальные условия

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow A_n = \langle \varphi, y_n \rangle \ \forall n,$$
$$u'_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} B_n y_n(x) = \psi(x) \Leftrightarrow B_n = \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \langle \psi, y_n \rangle \ \forall n.$$

В итоге формальное решение задачи приобретает вид

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\langle \varphi, y_n \rangle \cos \sqrt{\lambda_n} t + \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \langle \psi, y_n \rangle \sin \sqrt{\lambda_n} t \right) y_n(x) = \\ &= \int\limits_{\Omega} \cdots \int G(x,t,\xi)\, \psi(\xi)\, d\xi + \int\limits_{\Omega} \cdots \int G'_t(x,t,\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \end{aligned} \tag{11.46}$$

где

$$G(x,t,\xi) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n}} y_n(\xi)$$

— функция Грина соответствующей краевой задачи (11.44).

Шаг 3. На этом шаге ряд (11.46) исследуется на сходимость, устанавливается возможность его двукратного почленного дифференцирования, что позволяет произвести подстановку ряда в дифференциальное уравнение и убедиться подобным образом, что он действительно является классическим решением задачи. Разумеется, это возможно лишь при достаточно гладких начальных данных.

Пример 1. Колебания прямоугольной мембраны

$$\begin{cases} u''_{tt} = a^2 \Delta u = a^2 \left(u''_{xx} + u''_{yy} \right), & (x,y) \in \Omega,\ t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & t > 0, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ u'_t(x,y,0) = \psi(x,y), & (x,y) \in \Omega. \end{cases}$$

Здесь Ω — прямоугольная область $0 < x < p$, $0 < y < q$.

Решение. Найдем все стоячие волны, то есть нетривиальные решения однородной краевой задачи

$$\begin{cases} u''_{tt} = a^2 \Delta u = a^2 \left(u''_{xx} + u''_{yy} \right), & (x,y) \in \Omega,\ t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & t > 0, \end{cases}$$

вида $u(x,y,t) \equiv v(x,y)\, T(t)$. После подстановки подобной функции в задачу и разделения переменных получаем тождества

$$\frac{\ddot{T}}{a^2 T} \equiv \frac{\triangle v}{v},$$
$$v\,|_{\partial\Omega}\, T(t) \equiv 0.$$

Отсюда

$$\begin{cases} \triangle v + k^2 v = 0, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{11.47}$$

$$\ddot{T} + k^2 a^2 T = 0, \tag{11.48}$$

где k — постоянная.

Решение задачи Штурма-Лиувилля (11.47) также будем искать в форме с разделёнными переменными: $v(x,y) \equiv X(x)\,Y(y)$. После подстановки подобного решения в (11.47) и разделения переменных, получаем тождества

$$\begin{array}{ll} -\frac{X''(x)}{X} \equiv \frac{Y''(y)}{Y} + k^2, & 0 < x < p, 0 < y < q, \\ X(x)\,Y(0) \equiv X(x)\,Y(q) \equiv 0, & 0 < x < p, \\ Y(y)\,X(0) \equiv Y(y)\,X(p) \equiv 0, & 0 < y < q. \end{array}$$

Отсюда в силу независимости переменных x, y имеем

$$\begin{cases} X'' + k_1^2 X = 0, \\ X(0) = X(p) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y'' + k_2^2 Y = 0, \\ Y(0) = Y(q) = 0, \end{cases}$$

где k_1, k_2 — постоянные, $k_1^2 + k_2^2 = k^2$. Нетривиальные решения двух последних краевых задач имеют соответственно вид

$$X_n(x) = \sqrt{\tfrac{2}{p}} \sin \tfrac{\pi n x}{p}, \quad k_{1n} = \tfrac{\pi n}{p}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$Y_m(y) = \sqrt{\tfrac{2}{q}} \sin \tfrac{\pi m y}{q}, \quad k_{2m} = \tfrac{\pi m}{q}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Поэтому нетривиальными решениями краевой задачи (11.47) являются функции

$$v_{nm}(x,y) = X_n(x)\,Y_m(y) = \sqrt{\frac{4}{pq}} \sin \frac{\pi n x}{p} \sin \frac{\pi m y}{q},$$

отвечающие её собственным числам

$$k_{nm} = \sqrt{k_{1n}^2 + k_{2m}^2} = \sqrt{\pi^2 \left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2}\right)},\; n, m = 1, 2, \ldots.$$

Заметим, что из теории кратных рядов Фурье[37] следует, что данная система функций образует ортонормированный базис в евклидовом пространстве $L_2(\Omega)$.

Находя соответствующие решения задачи (11.48), получаем стоячие волны вида

$$\begin{gathered} u_{nm}(x,y,t) = v_{nm}(x,y)\,T_{nm}(t) = \\ = v_{nm}(x,y)\left(A_{nm} \cos \omega_{nm} t + B_{nm} \sin \omega_{nm} t\right), \end{gathered}$$

где A_{nm}, B_{nm} — произвольные постоянные, $\omega_{nm} = a k_{nm}$.

[37] А также и из общей теории задачи Штурма-Лиувилля.

Найдем формальное решение исходной задачи в виде двойного ряда по данным стоячим волнам

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{nm}(x,y,t) = \\ = \sum_{n,m=1}^{\infty} v_{nm}(x,y)\, T_{nm}(t).$$

Имеем из начальных условий:

$$u(x,y,0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} v_{nm}(x,y)\, T_{nm}(0) = \\ = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} v_{nm}(x,y) = \varphi(x,y),$$

$$u'_t(x,y,0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} v_{nm}(x,y)\, \dot{T}_{nm}(0) = \\ = \sum_{n,m=1}^{\infty} \omega_{nm} B_{nm} v_{nm}(x,y) = \psi(x,y).$$

Следовательно,

$$A_{nm} = \langle \varphi, v_{nm}(x,y) \rangle = \int\limits_{\Omega} \cdots \int \varphi(x,y)\, v_{nm}(x,y)\; dxdy,$$
$$B_{nm} = \frac{1}{\omega_{nm}} \langle \psi, v_{nm}(x,y) \rangle = \frac{1}{\omega_{nm}} \int\limits_{\Omega} \cdots \int \psi(x,y)\, v_{nm}(x,y)\; dxdy,$$

и на этом построение формального решения заканчивается. После подстановки найденных значений коэффициентов A_{nm}, B_{nm} в ряд решение можно также записать в интегральной форме с использованием функции Грина. Накладывая ограничения на начальные условия φ, ψ, можно добиться быстрой сходимости полученного ряда и возможности его двукратного дифференцирования (см. [10]). В этом случае сумма ряда является классическим решением задачи.

Пример 2. Колебания круглой мембраны

$$\begin{cases} u''_{tt} = a^2 \Delta u, & (x,y) \in \Omega,\ t > 0, \\ u\,|_{\partial\Omega} = 0, & t > 0, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ u'_t(x,y,0) = \psi(x,y), & (x,y) \in \Omega. \end{cases}$$

Теперь $\Omega \equiv \left\{(x,y) : x^2 + y^2 < r_0^2\right\}$ — круг радиуса r_0 с центром в начале координат.

Учитывая геометрию задачи, перейдём в полярную систему координат

$$\begin{cases} u''_{tt} = a^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \theta^2} \right), & 0 < \rho < r_0,\, \theta \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(r_0, \theta, t) = 0, & \theta \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(\rho, \theta, 0) = \varphi(\rho, \theta), & 0 < \rho < r_0,\, \theta \in \mathbf{R}, \\ u'_t(\rho, \theta, 0) = \psi(\rho, \theta), & 0 < \rho < r_0,\, \theta \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Дополнительным условием является условие однозначности решения: $u(\rho, \theta + 2\pi, t) \equiv u(\rho, \theta, t)$.

Решение. Вначале определяем все стоячие волны, то есть нетривиальные решения краевой задачи

$$\begin{cases} u''_{tt} = a^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \theta^2} \right), & 0 < \rho < r_0, \theta \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u\left(r_0, \theta, t\right) = 0, & \theta \in \mathbf{R}, t > 0. \end{cases}$$

с разделёнными пространственными и временно́й переменной: $u(\rho, \theta, t) = v(\rho, \theta) T(t)$. Разделяя обычным способом переменные, получаем следующее уравнение для "временно́й" функции $T(t)$:

$$\ddot{T}(t) + a^2 \lambda T = 0, \tag{11.49}$$

и следующую задачу Штурма-Лиувилля для "пространственной" функции $v(\rho, \theta)$:

$$\begin{cases} L(v) = \lambda v, \\ v\left(\rho_0, \theta\right) = 0, \\ v(\rho, \theta + 2\pi) = v(\rho, \theta), \end{cases} \tag{11.50}$$

где $L(v) \equiv -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \theta^2}$.

Решения последней задачи ищем опять в виде функций с разделёнными переменными $v(\rho, \theta) = R(\rho)\, \Theta(\theta)$. После подстановки подобного решения в (11.50) и разделения переменных получаем тождество

$$\rho^2 \left(\frac{(\rho R')'}{\rho R} + \lambda \right) \equiv -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu^2,$$

где μ — постоянная. Отсюда

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu^2 \Theta = 0, \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta). \end{cases}$$

Общим решением данного уравнения является

$$\Theta_\mu(\theta) = D_{1\mu} \cos \mu\theta + D_{2\mu} \sin \mu\theta$$

(при $\mu = 0$ имеем $\Theta_0(\theta) = D_{10} + D_{20}\theta$). Очевидно, оно будет иметь своим периодом 2π тогда и только тогда, когда $\mu = n = 0, 1, \ldots$. В итоге

$$\Theta_n(\theta) = D_{1n} \cos n\theta + D_{2n} \sin n\theta,\ n = 0, 1, \ldots.$$

Для нахождения функции $R(\rho)$ получаем при каждом фиксированном n следующую одномерную задачу Штурма-Лиувилля: найти числа λ, для которых существует нетривиальное ограниченное на отрезке $[0, r_0]$ решение краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{n^2}{\rho} R - \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = \lambda \rho R, \\ R\left(r_0\right) = 0. \end{cases} \tag{11.51}$$

Из общей теории задачи Штурма-Лиувилля, развитой выше, вытекает существование бесконечного, не ограниченного сверху набора собственных чисел данной задачи:

$$0 < \lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \ldots < \lambda_m^{(n)} < \ldots$$

Отвечающие им нормированные собственные функции

$$R_1^{(n)}(\rho),\, R_2^{(n)}(\rho),\dots,\, R_m^{(n)}(\rho),\dots$$

образуют ортонормированный базис в евклидовом пространстве $CL_2^{(\rho)}$ со скалярным произведением

$$\langle \varphi_1(\rho), \varphi_2(\rho)\rangle = \int\limits_0^{r_0} \rho\varphi_1(\rho)\,\varphi_2(\rho)\,d\rho.$$

С другой стороны, если

$$x = \sqrt{\lambda}\rho,\ y(x) = R(\rho), \tag{11.52}$$

то

$$\frac{dR}{d\rho} = \sqrt{\lambda}\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2R}{d\rho^2} = \lambda\frac{d^2y}{dx^2},$$

и потому, делая в уравнении подобную замену переменных, получаем для $y(x)$ следующее *уравнение Бесселя n-го порядка*:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Уравнения и функции Бесселя.

Уравнение Бесселя[38] порядка $\nu \in \mathbf{C}$ для комплексной функции $y(x)$ комплексного переменного x может быть записано в одной из следующих двух эквивалентных форм

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0,$$

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0.$$

Одно из его решений представляется рядом

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

и называется цилиндрической функцией 1-го рода ν-го порядка[39]. В частности,

$$J_0(x) = 1 - \left(\tfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2!}\right)^2\left(\tfrac{x}{2}\right)^4 - \left(\tfrac{1}{3!}\right)^2\left(\tfrac{x}{2}\right)^6 + \dots,$$
$$J_1(x) = \left(\tfrac{x}{2}\right)\left(1 - \tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{x}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2!3!}\left(\tfrac{x}{2}\right)^4 - \dots\right).$$

Общее решение уравнения Бесселя записывается в виде

$$y(x) = C_1J_\nu(x) + C_2Y_\nu(x),$$

[38] Справка из аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

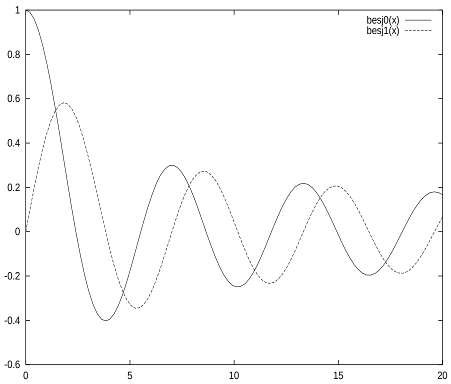
[39] Или *функцией Бесселя 1-го рода ν-го порядка.*

где $Y_\nu(x)$ — *цилиндрическая функция 2-го рода ν-го порядка*[40]

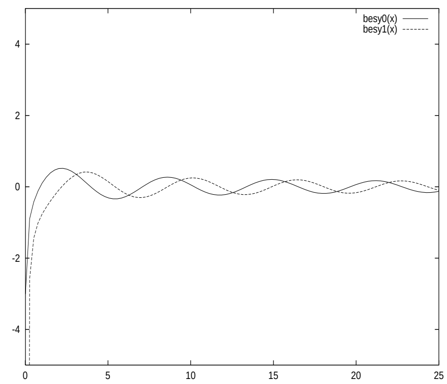
$$Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi}\left(C + \ln\frac{x}{2}\right) J_\nu(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(\nu-k-1)!}{k!}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu-2k} -$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!(\nu+k)!}\left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(k+\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}\right],$$

C — *постоянная Эйлера-Маскерони*[41]. Заметим, что функции 2-го рода имеют логарифмические особенности в нуле и, следовательно, неограничены в окрестности данной точки.

Свойства функций Бесселя.



Графики J_0, J_1



Графики Y_0, Y_1

Свойства функций Бесселя хорошо изучены. Отметим некоторые из них[42].

а) $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)\,,\ n \in \mathbf{Z}$.

б) При $\nu \notin \mathbf{Z}$ функции J_ν и $J_{-\nu}$ линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя.

в) $J_{\nu+1}(x) = -J_{\nu-1}(x) + \frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$.

г) $J'_\nu(x) = -\frac{\nu}{x}J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x)$.

д) $(x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x)\,,\ (xJ_1(x))' = xJ_0(x)\,,\ J'_0(x) = -J_1(x)$.

е) $(x^{-\nu}J_\nu(x))' = -x^\nu J_{\nu+1}(x)$.

ж) $J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) + Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(x - \frac{\pi n}{2}\right)\right]$, где $P_n(\cdot)\,, Q_n(\cdot)$ — известные многочлены степени n, в частности, $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$, $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$.

---

[40] Более частные названия данных функций - *функции Бесселя, Неймана (N_ν), Вебера* и т.д.

[41] $C = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) \simeq 0.5772157$

[42] Приводимые ниже соотношения для функций Бесселя являются тождествами в соответствующих областях определения.

з) Асимптотические выражения для функций Бесселя:

1. при $x \to +\infty$

$$J_\nu(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \tfrac{\pi\nu}{2} - \tfrac{\pi}{4}\right) + O\left(\tfrac{1}{x^{3/2}}\right),$$
$$Y_\nu(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \tfrac{\pi\nu}{2} - \tfrac{\pi}{4}\right) + O\left(\tfrac{1}{x^{3/2}}\right);$$

2. при $x \to +0,\ \nu > 0$

$$J_\nu(x) \sim \tfrac{1}{\nu!}\left(\tfrac{x}{2}\right)^\nu,$$
$$Y_0(x) \sim \tfrac{2}{\pi}\left(\ln\tfrac{x}{2} + C\right),$$
$$Y_\nu(x) \sim \tfrac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\tfrac{2}{x}\right)^\nu.$$

и) Приближённые значения корней некоторых функций Бесселя:

$$J_0 : \begin{cases} \mu_1^{(0)} \simeq 2.4 \\ \mu_2^{(0)} \simeq 5.5 \\ \mu_3^{(0)} \simeq 8.7 \\ \dots \\ \mu_k^{(0)} \sim \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \to \infty \end{cases}$$

$$J_\nu : \mu_k^{(\nu)} \sim \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi\nu}{2} + \pi k,\ k \to \infty.$$

к) Некоторые другие цилиндрические функции

1. *Функции Ханкеля*

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x),$$
$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x).$$

2. *Функции Бесселя мнимого аргумента*

$$I_\nu(x) = \exp\left(-\tfrac{\pi\nu i}{2}\right) J_\nu(ix),$$
$$K_\nu(x) = \tfrac{\pi i}{2} \exp\left(\tfrac{\pi\nu i}{2}\right) H_\nu^{(1)}(x)$$

Данные функции образуют фундаментальную систему решений уравнения
$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Вернёмся к задаче о колебаниях круглой мембраны. После введения новых переменных (11.52) задача (11.51) приобретает вид

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \\ y\left(\sqrt{\lambda} r_0\right) = 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения Бесселя, как это следует из приведённой выше справки, имеет вид
$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x).$$

Постоянную C_2 следует положить равной 0, иначе решение будет неограничено в окрестности точки $x = 0$. Следовательно $C_1 \neq 0$, иначе решение будет тривиальным.

Подстановка решения в граничное условие приводит тогда к следующему характеристическому уравнению

$$J_n\left(\sqrt{\lambda} r_0\right) = 0$$

для нахождения собственных чисел задачи (11.51). Значит,

$$\begin{gathered}\sqrt{\lambda} r_0 = \mu_m^{(n)},\ m = 1, 2, \ldots \Rightarrow \\ \lambda_m^{(n)} = \left(\tfrac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2.\end{gathered}$$

Сами решения задачи выражаются через функции Бесселя первого рода:

$$\begin{gathered}R_m^{(n)}(\rho) = y(x) = C_1 J_n(x) = \\ = C_1 J_n\left(\sqrt{\lambda_m^{(n)}}\rho\right) = C_1 J_n\left(\tfrac{\mu_m^{(n)}\rho}{r_0}\right).\end{gathered}$$

Постоянную C_1 выберем из условия нормировки[43]:

$$\begin{gathered}1 = \left\|R_m^{(n)}\right\|^2 = \int\limits_0^{r_0} \rho\left(R_m^{(n)}(\rho)\right)^2 d\rho = C_1^2 \int\limits_0^{r_0} \rho J_n^2\left(\tfrac{\mu_m^{(n)}\rho}{r_0}\right) d\rho = \\ = C_1^2 \tfrac{r_0^2}{2} J_n'^2\left(\mu_m^{(n)}\right).\end{gathered}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}C_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{r_0 J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)}, \\ R_m^{(n)}(\rho) = \tfrac{\sqrt{2}}{J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right) r_0} J_n\left(\tfrac{\mu_m^{(n)}\rho}{r_0}\right).\end{gathered}$$

Теперь мы можем выписать решения задачи (11.50):

$$v_{nm}(\rho, \theta) = R_m^{(n)}(\rho)\,\Theta_n(\theta) = R_m^{(n)}(\rho)\left\{D_{1n}\cos n\theta + D_{2n}\sin n\theta\right\}. \qquad (11.53)$$

Выберем из множества функций (11.53) ортонормированный набор $\{v_{nm}\} = \{\bar{v}_{nm}\} \cup \{\tilde{v}_{nm}\}$, состоящий из следующих функций

$$\begin{gathered}\bar{v}_{nm}(\rho, \theta) = R_m^{(n)}(\rho)\tfrac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}},\ \bar{v}_{0m}(\rho, \theta) = R_m^{(0)}(\rho)\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \\ \tilde{v}_{nm}(\rho, \theta) = R_m^{(n)}(\rho)\tfrac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}},\ n = 1, 2, \ldots.\end{gathered}$$

Как нетрудно проверить,

$$\begin{gathered}\langle \bar{v}_{nm}, \tilde{v}_{n_1m_1}\rangle \equiv \int\limits_0^{r_0} d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\theta\, \rho \bar{v}_{nm}(\rho, \theta)\,\tilde{v}_{n_1m_1}(\rho, \theta) = 0, \\ \langle \bar{v}_{nm}, \bar{v}_{n_1m_1}\rangle = \delta_{nn_1}\delta_{mm_1},\ \langle \tilde{v}_{nm}, \tilde{v}_{n_1m_1}\rangle = \delta_{nn_1}\delta_{mm_1}.\end{gathered}$$

Следующее утверждение о полноте данной системы функций в соответствующем евклидовом пространстве примем без доказательства.

[43] Интеграл точно вычисляется с использованием вышеприведённых свойств функций Бесселя.

Теорема. *Всякая непрерывная функция $F(\rho,\theta)$ может быть разложена в средне-квадратически сходящийся ряд по ортонормированной системе функций $\{v_{nm}\}$:*

$$F(\rho,\theta) = \sum_{n,m}^{\infty} \left(\bar{A}_{nm}\bar{v}_{nm}(\rho,\theta) + \tilde{A}_{nm}\tilde{v}_{nm}(\rho,\theta)\right),$$

где

$$\bar{A}_{nm} = \langle F, \bar{v}_{nm}\rangle =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{r_0 J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)} \int_0^{r_0} \rho d\rho \int_0^{2\pi} J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}\rho}{r_0}\right)\cos(n\theta)\, F(\rho,\theta)\, d\theta,$$
$$\tilde{A}_{nm} = \langle F, \tilde{v}_{nm}\rangle .$$

После нахождения из (11.49) "временны́х" функций, соответствующих найденным значениям $\lambda_m^{(n)}$

$$T_{nm}(t) = \alpha_{nm}\cos\omega_{nm}t + \beta_{nm}\sin\omega_{nm}t,$$

где $\omega_{nm} = a\sqrt{\lambda_m^{(n)}} = \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}$ — собственные частоты колебаний стоячих волн, находим, наконец, и сами стоячие волны:

$$u_{nm}(\rho,\theta,t) = \left(\bar{\alpha}_{nm}\cos\omega_{nm}t + \bar{\beta}_{nm}\sin\omega_{nm}t\right)\bar{v}_{nm}(\rho,\theta) +$$
$$+\left(\tilde{\alpha}_{nm}\cos\omega_{nm}t + \tilde{\beta}_{nm}\sin\omega_{nm}t\right)\tilde{v}_{nm}(\rho,\theta).$$

Решение всей задачи ищем в виде ряда по найденным стоячим волнам

$$u(\rho,\theta,t) = \sum_{n,m} u_{nm}(\rho,\theta,t).$$

Неизвестные постоянные определяем из начальных условий:

$$u(\rho,\theta,0) = \sum_{n,m} u_{nm}(\rho,\theta,0) =$$
$$= \sum_{n,m} \bar{\alpha}_{nm}\bar{v}_{nm}(\rho,\theta) + \tilde{\alpha}_{nm}\tilde{v}_{nm}(\rho,\theta) = \varphi(\rho,\theta),$$
$$u_t'(\rho,\theta,0) = \sum_{n,m} (u_{nm})_t'(\rho,\theta,0) =$$
$$= \sum_{n,m} \omega_{nm}\left(\bar{\beta}_{nm}\bar{v}_{nm}(\rho,\theta) + \tilde{\beta}_{nm}\tilde{v}_{nm}(\rho,\theta)\right) = \psi(\rho,\theta).$$

Отсюда

$$\bar{\alpha}_{nm} = \langle\varphi, \bar{v}_{nm}\rangle,\ \tilde{\alpha}_{nm} = \langle\varphi, \tilde{v}_{nm}\rangle,$$
$$\bar{\beta}_{nm} = \frac{1}{\omega_{nm}}\langle\psi, \bar{v}_{nm}\rangle,\ \tilde{\beta}_{nm} = \frac{1}{\omega_{nm}}\langle\psi, \tilde{v}_{nm}\rangle.$$

и формальное решение задачи построено.

11.2 Методы решения задач для уравнений параболического типа

11.2.1 Физические задачи, приводящие к уравнениям параболического типа

- Теплопроводность.

Рассмотрим трёхмерную среду. С точки зрения её теплоконденсирующих свойств она характеризуется удельной теплоёмкостью $c(\mathbf{r})$ и плотностью распределения массы $\rho(\mathbf{r})$. Тепло, которое удерживает в себе бесконечно-малый объём dv, окружающий точку r при абсолютной температуре $T(\mathbf{r})$,

$$dQ = c(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r})\,T\,dv.$$

Теплопроводящие свойства среды характеризуются коэффициентом теплопроводности $k(\mathbf{r})$. Тепловые потоки в среде происходят в соответствии с законом Фурье

$$\mathbf{q} = -k(\mathbf{r})\,\nabla T,$$

где q - плотность потока тепла. Количество тепла dQ, прошедшее на интервале времени $(t, t+dt)$ через бесконечно-малую площадку dS в направлении вектора нормали к ней n находится по формуле

$$dQ = \langle \mathbf{q}, \mathbf{n}\rangle\; dtdS.$$

Используя введённые характеристики, составим уравнение баланса тепла на интервале времени $(t, t+\triangle t)$ (закон сохранения энергии) в произвольном конечном объёме Ω пространства с гладкой границей $\partial\Omega$ и вектором внешней нормали к ней n. Имеем, применяя теорему Остроградского-Гаусса,

$$\begin{gathered}\triangle Q = Q(t+\triangle t) - Q(t) = \iiint\limits_{\Omega} \rho c\,(T(t+\triangle t) - T(t))\;dv = \\ = \iiint\limits_{\Omega} f(\mathbf{r})\;dv\,\triangle t - \iint\limits_{\partial\Omega} \langle \mathbf{q}, \mathbf{n}\rangle\;dS\,\triangle t = \\ = \iiint\limits_{\Omega} (f - \operatorname{div}\mathbf{q})\;dv\,\triangle t = \iiint\limits_{\Omega} (f + \operatorname{div} k\nabla T)\;dv\,\triangle t.\end{gathered}$$

После деления на $\triangle t$ и перехода к пределу при $\triangle t \to 0$ получаем

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div} k\nabla T - f\right)\,dv\; = 0.$$

Отсюда, учитывая произвольность области Ω, получаем следующее параболическое уравнение в частных производных — уравнение теплопроводности, описывающее изменение температуры T, как функции $(\mathbf{r}, t)$:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} k\nabla T + f(\mathbf{r}, t)\,.$$

Здесь $f(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ — плотность внутренних источников тепла, распределённых в среде. В однородной среде, где функции k, c, ρ постоянны, уравнение теплопроводности принимает свой простейший вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + \tilde{f}(\mathbf{r}, t)\,,$$

где $a^2 \equiv k/c\rho,\ \tilde{f} \equiv f/\rho c$.

- **Диффузия**.

Процесс диффузии стороннего вещества, помещённого в непрерывную среду происходит по закону Нернста:

$$\mathbf{W} = -D(\mathbf{r})\,\nabla u.$$

Здесь D — коэффициент диффузии, W — плотность диффузионного потока (масса вещества, протекающего в единицу времени через единичную ортогональную площадку), u — концентрация вещества ($u\,dv = dm$ — масса вещества в бесконечно-малом объеме пространства dv). Составляя уравнение баланса вещества (закон сохранения массы) в произвольном объеме пространства, получаем, как и в случае задачи о распространении тепла, следующее уравнение параболического типа (диффузионное уравнение) для функции концентрации $u\,(\mathbf{r},t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} D\nabla u + f\left(\mathbf{r}, \mathbf{t}\right),$$

где $f\left(\mathbf{r}, \mathbf{t}\right)$ — плотность источников стороннего вещества.

- Диффузионные приближения в электродинамике, теории переноса, акустике.
- Уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка в теории марковских случайных процессов.

Основное уравнение теории марковских процессов (процессов без последействия) — параболическое уравнение Колмогорова для переходной плотности вероятностей $p\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}\right)$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}\left(a^{ij}\left(\mathbf{y}\right)p\right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial y^i}\left(b^i\left(\mathbf{y}\right)p\right).$$

11.2.2 Корректность постановки задач для уравнений параболического типа

Основные типы задач для уравнений параболического типа ($u = u\left(\mathbf{x}, t\right)$):

- Задача Коши — $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$ —

  ищется решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $u\left(\mathbf{x}, \mathbf{0}\right) = \varphi\left(\mathbf{x}\right)$. Граничные условия отсутствуют.
- Смешанные задачи: $t > 0$, $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$, $u\left(\mathbf{x}, \mathbf{0}\right) = \varphi\left(\mathbf{x}\right)$
- Первого рода (Дирихле) —
  - значение функции на границе пространственной области $\partial\Omega$ задано — $u|_{\partial\Omega} = \psi\left(\mathbf{x}, t\right)$
  - Второго рода (Неймана) —

    на границе пространственной области задано значение нормальной производной — $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \psi\left(\mathbf{x}, t\right)$
- Третьего рода —
  - на границе пространственной области задано линейное соотношение, связывающее между собой функцию и её нормальную производную $\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \psi\left(\mathbf{x}, t\right)$.

Подобные начально-краевые задачи возникают из потребностей практики. Рассмотрим, например, теплотехническую интерпретацию перечисленных выше задач. Задача Коши возникает при определении температуры во всем пространстве, при известной начальной температуре и известных тепловых источниках, распределенных в пространстве. Задача Дирихле — это задача о распределении температуры в ограниченной области, при известной начальной температуре и температуре граничных точек. Задаче Неймана соответствует задача определения распределения температуры при известных тепловых потоках на границе области. В задаче третьего рода на границе области происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона[44].

Обсудим корректность постановки основных задач математической физики для простейшего уравнения параболического типа — однородного уравнения теплопроводности

$$\begin{gathered} u_t' = a^2 \Delta u, \\ u = u\,(x, y, z, t)\,,\ (x, y, z) \in \Omega \subset R^3,\ t > 0. \end{gathered}$$

Здесь Ω — ограниченная $(\operatorname{diam}\Omega < \infty)$ область в трёхмерном пространстве с границей $\partial\Omega$. Обозначим $Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$ — цилиндр в четырёхмерном пространстве. Пусть $\Gamma_1 \equiv \Omega \times \{T\}$ — его верхнее основание, $\Gamma \equiv \partial Q_T \setminus \Gamma_1 \equiv \Omega \times \{0\} \cup \partial\Omega \times [0, T]$ — оставшаяся часть его полной границы ∂Q_T — боковая поверхность вместе с нижним основанием:

Теорема (о максимуме и минимуме решения однородного уравнения теплопроводности). *Функция $u\,(x, y, z, t)$, удовлетворяющая в Q_T однородному уравнению теплопроводности и непрерывная в замыкании $\overline{Q_T}$, достигает своих минимального и максимального значений в $\overline{Q_T}$ на границе Γ, то есть либо в начальный момент времени, либо в граничных точках области Ω.*

Доказательство. Пусть[45]

$$M \equiv \max_{\overline{Q_T}} u = u\,(x_0, y_0, z_0, t_0)\,,\ m \equiv \max_{\Gamma} u.$$

Так как $\Gamma \subset \overline{Q_T}$, то $m \le M$. Покажем, что здесь в действительности имеет место равенство, т.е. $m = M$.

Предположим, что $m < M$. Построим вспомогательную функцию

$$\begin{gathered} v\,(x, y, z, t) \equiv u\,(x, y, z, t) + \\ + \tfrac{(M-m)}{6d^2}\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right], \end{gathered}$$

где $d \equiv \operatorname{diam}(\Omega)$. На границе Γ имеем

$$v \le m + \frac{M - m}{6d^2} d^2 = \frac{5m + M}{6} < M.$$

Так как

$$v\,(x_0, y_0, z_0, t_0) = u\,(x_0, y_0, z_0, t_0) = M,$$

---

[44] Плотность нормального потока тепла, проистекающего из среды с температурой u_1 в среду с температурой u_2 через разделяющую их границу

$$q_{12} = h\,(u_1 - u_2)\,,$$

где h - коэффициент теплообмена.

[45] Поскольку множества $\overline{Q_T}$, Γ являются компактами (ограниченными замкнутыми множествами в трёхмерном пространстве), то непрерывная функция $u\,(\cdot)$ достигает на них своих экстремальных значений (теорема Вейерштрасса).

то непрерывная в компакте $\overline{Q_T}$ функция $v(\cdot)$ достигает своего максимального на $\overline{Q_T}$ значения в некоторой точке $(x_1, y_1, z_1, t_1) \in \overline{Q_T} \setminus \Gamma = Q_T \cup \Gamma_1$. В этой точке имеем

$$v_t' - a^2 \triangle v = \underbrace{u_t' - a^2 \triangle u}_{=0} - a^2 \frac{M-m}{d^2} < 0.$$

С другой стороны, в этой точке как в точке экстремума

$$\begin{array}{ll} v_t' = 0, & (x_1, y_1, z_1, t_1) \in Q_T \\ v_t' \geq 0, & (x_1, y_1, z_1, t_1) \in \Gamma_1 \end{array}$$

(необходимые условия экстремума первого порядка для внутренней и граничной точек, соответственно), а также

$$v_{xx}'' \leq 0, v_{yy}'' \leq 0, v_{zz}'' \leq 0 \Rightarrow \triangle v \leq 0$$

(необходимые условия экстремума второго порядка).

Поэтому $v_t' - a^2 \triangle v \geq 0$. Полученное противоречие показывает, что случай $m < M$ невозможен, следовательно, $m = M$, что и требовалось доказать.

Следствия.

1. *Решение задачи Дирихле для уравнения теплопроводности единственно.*

   Доказательство. Для разности возможных двух решений $u \equiv u_1 - u_2$ имеем $u\,|_\Gamma \equiv 0$. Поэтому

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \min_{\overline{Q_T}} u = 0,$$

   что и требовалось доказать.

2. *Пусть $u_{1,2}$ — решения задач Дирихле*

$$\begin{cases} u_t' = a^2 \Delta u + f(\mathbf{r},t) \\ u(\mathbf{r},t)|_\Gamma = \psi_{1,2}(\mathbf{r},t) \\ u(\mathbf{r},0) = \varphi_{1,2}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

   Тогда

$$\left.\begin{cases} \varphi_1(\mathbf{r}) \leq \varphi_2(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Omega \\ \psi_1(\mathbf{r},t) \leq \psi_2(\mathbf{r},t), & (\mathbf{r},t) \in \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 \leq u_2 \text{в } \overline{Q_T}.$$

   Доказательство. Имеем для разности $u \equiv u_1 - u_2$ по доказанной теореме

$$u \leq \max_{Q_T} u = \max_{\Gamma} u \leq 0,$$

   так как на Γ указанное неравенство выполнено по условию.

3. *Пусть* $u_{0,1,2}$ *— решения задач Дирихле*

$$\begin{cases} u'_t = a^2 \Delta u \\ u\left(\mathbf{r},t\right)|_{\Gamma} = \psi_{0,1,2}\left(\mathbf{r},t\right) \\ u\left(\mathbf{r},0\right) = \varphi_{0,1,2}\left(\mathbf{r}\right) \end{cases}$$

Тогда

$$\left.\begin{cases} \varphi_1\left(\mathbf{r}\right) \le \varphi_0\left(\mathbf{r}\right) \le \varphi_2\left(\mathbf{r}\right), & \mathbf{r} \in \Omega \\ \psi_1\left(\mathbf{r},t\right) \le \psi_0\left(\mathbf{r},t\right) \le \psi_2\left(\mathbf{r},t\right), & \left(\mathbf{r},t\right) \in \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 \le u_0 \le u_2 \text{в } \overline{Q_T}.$$

Доказательство. Непосредственно вытекает из предыдущего.

4. *Пусть* $u_{1,2}$ *— решения задач Дирихле*

$$\begin{cases} u'_t = a^2 \Delta u \\ u\left(\mathbf{r},t\right)|_{\Gamma} = \psi_{1,2}\left(\mathbf{r},t\right) \\ u\left(\mathbf{r},0\right) = \varphi_{1,2}\left(\mathbf{r}\right) \end{cases}$$

Тогда при любом положительном ε

$$\left.\begin{cases} \left|\varphi_1\left(\mathbf{r}\right) - \varphi_2\left(\mathbf{r}\right)\right| \le \varepsilon, & \mathbf{r} \in \Omega \\ \left|\psi_1\left(\mathbf{r},t\right) - \psi_2\left(\mathbf{r},t\right)\right| \le \varepsilon, & \left(\mathbf{r},t\right) \in \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |u_1 - u_2| \le \varepsilon \text{в } \overline{Q_T}.$$

Доказательство. Непосредственно вытекает из предыдущего.

Из приведённых утверждений следует корректность постановки задачи Дирихле для уравнения теплопроводности в соответствующих равномерных нормах оценки решений. Доказательство корректности постановки первой краевой задачи в случае неограниченной пространственной области, а также — корректности постановки других смешанных задач, требует более сложных построений.

Перечислим основные методы, которые применяются при решении разнообразных задач математической физики, связанных с уравнениями параболического типа:

- Метод интегральных преобразований;
- Метод разделения переменных Фурье;
- Метод фундаментальных решений;
- Специальные методы (метод подобия, асимптотические методы и др.).

11.2.3 Метод интегральных преобразований

Решение задачи Коши методом интегрального преобразования Фурье по пространственным переменным.

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности в трёхмерном пространстве

$$\begin{cases} u'_t = a^2 \triangle u, & \mathbf{r} \in R^3,\ t > 0 \\ u(\mathbf{r},0) = \varphi(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in R^3. \end{cases} \tag{11.54}$$

Для её решения применим интегральное преобразование Фурье по пространственной переменной $\mathbf{r}$: $F \equiv \overset{(\mathbf{r})}{F}$. Применяя это преобразование к правым и левым частям тождеств (11.54), получим с учётом его свойств

$$\begin{cases} F(u'_t) = F\left(a^2 \triangle u\right), \\ F(u(\mathbf{r},0)) = F(\varphi(\mathbf{r})), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\bar{u} = -a^2\mathbf{k}^2\bar{u}, \\ \bar{u}(\mathbf{k},0) = \bar{\varphi}(\mathbf{k}), \end{cases} \tag{11.55}$$

где

$$\bar{\varphi}(\mathbf{k}) \equiv F(\varphi(\mathbf{r})) = \iiint\limits_{R^3} \varphi(\mathbf{r}) \exp(-i\langle\mathbf{k},\mathbf{r}\rangle)\, d\mathbf{r},$$
$$\bar{u}(\mathbf{k},t) \equiv F(u(\mathbf{r},t)),\ \mathbf{k}^2 \equiv \langle\mathbf{k},\mathbf{k}\rangle.$$

Решив (при фиксированном значении вектора $\mathbf{k}$) задачу Коши (11.55) для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, находим образ решения при фиксированном t

$$\bar{u}(\mathbf{k},t) = \bar{\varphi}(\mathbf{k}) \exp\left(-a^2\mathbf{k}^2 t\right).$$

Остаётся обратным преобразованием восстановить само решение по его Фурье-образу:

$$\begin{gathered} u(\mathbf{r},t) = F^{-1}(\bar{u}(\mathbf{k},t)) = \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint\limits_{R^3} \bar{u}(\mathbf{k},t) \exp(i\langle\mathbf{k},\mathbf{r}\rangle)\, d\mathbf{k} = \\ = \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint\limits_{R^3} \bar{\varphi}(\mathbf{k}) \exp\left(i\langle\mathbf{k},\mathbf{r}\rangle - a^2\mathbf{k}^2 t\right) d\mathbf{k} = \\ = \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint\limits_{R^3} d\mathbf{k} \iiint\limits_{R^3} \varphi(\boldsymbol{\xi}) \exp(-i\langle\mathbf{k},\boldsymbol{\xi}\rangle)\, d\boldsymbol{\xi} \exp\left(i\langle\mathbf{k},\mathbf{r}\rangle - a^2\mathbf{k}^2 t\right) = \\ = \iiint\limits_{R^3} \varphi(\boldsymbol{\xi}) \left(\left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint\limits_{R^3} \exp\left(i\langle\mathbf{k},\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}\rangle - a^2\mathbf{k}^2 t\right) d\mathbf{k}\right) d\boldsymbol{\xi} \equiv \\ \equiv \iiint\limits_{R^3} G(\mathbf{r}\ |t|\ \boldsymbol{\xi})\, \varphi(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}, \end{gathered} \tag{11.56}$$

где

$$G(\mathbf{r}\ |t|\ \boldsymbol{\xi}) \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint\limits_{R^3} \exp\left(i\langle\mathbf{k},\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}\rangle - a^2\mathbf{k}^2 t\right) d\mathbf{k} \tag{11.57}$$

— *фундаментальное решение* уравнения теплопроводности. Интеграл (11.57) легко вычисляется — достаточно воспользоваться следующим следствием известного интеграла Пуассона[46]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\omega\alpha - p\omega^2\right) d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4p}\right),\ p > 0.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ik_1 \left(x - \xi_1\right) - a^2 k_1^2 t\right) dk_1 = \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{\left(x-\xi_1\right)^2}{4a^2 t}\right)$$

и потому

$$G\left(\mathbf{r}\,|t|\,\boldsymbol{\xi}\right) \equiv \left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\left(x-\xi_1\right)^2 + \left(y - \xi_2^2\right) + \left(z - \xi_3\right)^2}{4a^2 t}\right).$$

Замечание. В том частном случае, когда $\varphi(x,y,z) \equiv \varphi(x,y)$ или даже $\varphi(x,y,z) \equiv \varphi(x)$ из симметрии ясно, что должно соответственно быть $u \equiv u(x,y,t)$ и $u \equiv u(x,t)$. Так и получается из (11.56):

$$\begin{gathered} u(\mathbf{r},t) = \iiint\limits_{R^3} G\left(\mathbf{r}\,|t|\,\boldsymbol{\xi}\right)\varphi(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} = \\ = \iint\limits_{R^2} \left(\int\limits_{R^1} G\left(x,y,z\,|t|\,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right) d\xi_3\right) \varphi\left(\xi_1,\xi_2\right) d\xi_1 d\xi_2 \equiv \\ \equiv \iint\limits_{R^2} G_2\left(x,y\,|t|\,\xi_1,\xi_2\right)\varphi\left(\xi_1,\xi_2\right) d\xi_1 d\xi_2 \equiv u(x,y,t), \end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered} G_2\left(x,y\ |t|\,\xi_1,\xi_2\right) \equiv \int\limits_{R^1} G\left(x,y,z\,|t|\,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right) d\xi_3 = \\ = \int\limits_{R^1} \left(\tfrac{1}{4\pi a^2 t}\right)^{3/2} \exp\left(-\tfrac{\left(x-\xi_1\right)^2 + \left(y-\xi_2^2\right) + \left(z-\xi_3\right)^2}{4a^2 t}\right) d\xi_3 = \\ = \tfrac{1}{4\pi a^2 t} \exp\left(-\tfrac{\left(x-\xi_1\right)^2 + \left(y - \xi_2^2\right)}{4a^2 t}\right) \end{gathered}$$

— фундаментальное решение уравнения теплопроводности в двумерном пространственном случае. Аналогично при $\varphi \equiv \varphi(x)$

$$\begin{gathered} u(\mathbf{r},t) = \iiint\limits_{R^3} G\left(\mathbf{r}\,|t|\,\boldsymbol{\xi}\right)\varphi(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} = \\ = \iint\limits_{R^2} \left(\int\limits_{R^1} G\left(x,y,z\,|t|\,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right) d\xi_2 d\xi_3\right) \varphi\left(\xi_1\right) d\xi_1 \equiv \\ \equiv \iint\limits_{R^2} G_1\left(x\ |t|\,\xi_1\right)\varphi\left(\xi_1\right) d\xi_1 \equiv u(x,t), \end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered} G_1\left(x\ |t|\,\xi_1\right) \equiv \int\limits_{R^1} G\left(x,y,z\,|t|\,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right) d\xi_2 d\xi_3 = \\ = \int\limits_{R^1} \left(\tfrac{1}{4\pi a^2 t}\right)^{3/2} \exp\left(-\tfrac{\left(x-\xi_1\right)^2 + \left(y-\xi_2^2\right) + \left(z-\xi_3\right)^2}{4a^2 t}\right) d\xi_3 = \\ = \sqrt{\tfrac{1}{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\tfrac{\left(x-\xi_1\right)^2}{4a^2 t}\right) \end{gathered}$$

[46] Удобная для запоминания форма интеграла Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(Ax^2+Bx+C\right)} dx = \sqrt{\tfrac{\pi}{A}} \exp\left(\tfrac{\Delta}{4A}\right),$$

$$\Delta \equiv B^2 - 4AC,\ \mathrm{Real}\,A > 0.$$

— фундаментальное решение уравнения теплопроводности в одномерном пространственном случае.

Как уже отмечалось выше [47], подобный приём получения решений задач для пространств меньшей размерности из решений задач для пространств большей размерности называется *методом спуска*.

Свойства фундаментального решения.

1. *Физический смысл* фундаментального решения: для $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ из (11.56) имеем

$$u(\mathbf{r},t) = \iiint\limits_{R^3} G(\mathbf{r}\,|t\,|\,\boldsymbol{\xi})\,\delta(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{r}_0)\,d\boldsymbol{\xi} = G(\mathbf{r}\,|t\,|\,\mathbf{r}_0)\,.$$

   Следовательно, значение фундаментального решения $G(\mathbf{r}\,|t\,|\,\mathbf{r}_0)$ равно температуре точки $\mathbf{r}$ среды в момент времени t, при условии, что первоначальное распределение температуры — *дельтаобразное* (мгновенный источник тепла мощности

$$Q = \iiint\limits_{R^3} c\rho\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\;d\mathbf{r} = \mathbf{c}\boldsymbol{\rho},$$

   помещённый в точку $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$).

2. *Условие нормировки* для фундаментального решения: для $\varphi(\mathbf{r}) \equiv 1$ в силу единственности решения задачи Коши

$$u(\mathbf{r},t) \equiv 1 \equiv \iiint\limits_{R^3} G(\mathbf{r}\,|t\,|\,\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}.$$

3. *Теорема взаимности*:

$$G(\mathbf{r}\,|t\,|\,\mathbf{r}_0) \equiv G(\mathbf{r}_0|t\,|\,\mathbf{r})\,.$$

Решение смешанной задачи с помощью преобразования Лапласа.

Рассмотрим задачу о нагреве полуограниченного стержня под воздействием тепловых источников, задающих температуру левого конца стержня:

$$\begin{cases} u_t' = a^2 u_{xx}'', & x>0,\, t>0, \\ u(0,t) = f(t)\,, & t>0, \\ u(x,0) = 0, & x>0. \end{cases} \tag{11.58}$$

Применим для её решения метод интегрального преобразования Лапласа по временнóй переменной t. Пусть

$$F(p) \equiv \overset{(t)}{L}\,(f(t)) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt,$$
$$U(x,p) \equiv \overset{(t)}{L}\,(u(x,t)) = \int\limits_0^{+\infty} u(x,t)\exp(-pt)\,dt.$$

[47] В разделе 11.1.2 о методе бегущих волн.

По свойству преобразования Лапласа имеем

$$u \doteq U \Rightarrow u'_t \doteq pU - u(x,+0) = pU.$$

Поэтому из (11.58) получаем

$$\begin{cases} pU = a^2 U''_{xx}, \\ U(0,p) = F(p), \end{cases}$$

откуда $U(x,p) = F(p)\exp\left(-\sqrt{p}x/a\right)$. По таблице изображений преобразования Лапласа (см., например, справочник [20]) находим

$$G(x,p) \equiv \tfrac{1}{p}\exp\left(-\tfrac{x\sqrt{p}}{a}\right) \doteq$$
$$\doteq Erf\left(\tfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \equiv \tfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/2a\sqrt{t}}^{+\infty} \exp\left(-\xi^2\right) d\xi \equiv g(x,t).$$

Так как, очевидно, $g(x,+0) = 0$, то

$$g'_t \doteq pG(p) - g(x,+0) = p\frac{1}{p}\exp\left(-\frac{x\sqrt{p}}{a}\right) = \exp\left(-\frac{x\sqrt{p}}{a}\right).$$

Поэтому

$$u(x,t) \doteq U(x,p) = F(p)\exp\left(-\frac{x\sqrt{p}}{a}\right) \doteq f * g'_t,$$

то есть

$$u(x,t) = \int\limits_0^t f(\tau)\, g'_t(x,t-\tau)\, d\tau = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau.$$

11.2.4 Метод Фурье разделения переменных

Рассмотрим следующую смешанную задачу общего вида о нагреве отрезка стержня, концы которого поддерживаются при нулевой температуре,

$$\begin{cases} \rho(x)\, u'_t = -\mathrm{L}\, u + f(x,t), & x \in (0,l), t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in (0,l), \end{cases} \tag{11.59}$$

где $\mathrm{L}\, u \equiv q(x)\, u - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

Будем искать решение задачи (11.59) в виде суммы $u = v + w$, где $v = v(x,t)$, $w = w(x,t)$ — соответственно решения задач

$$\overset{(\mathrm{v})}{\left\{\begin{array}{l} \rho v'_t = -\mathrm{L}\, v \\ v(x,0) = \varphi(x) \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \end{array}\right\}}, \quad \overset{(\mathrm{w})}{\left\{\begin{array}{l} \rho w'_t = -\mathrm{L}\, w + f \\ w(x,0) = 0 \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \end{array}\right\}}.$$

Вначале решим задачу (v). Для этого найдем все нетривиальные решения отвечающей ей однородной краевой задачи

$$\begin{cases} \rho v'_t = -\mathrm{L}\, v \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \end{cases} \tag{11.60}$$

с разделёнными переменными: $v(x,t) \equiv y(x)\,T(t)$. Подставив это решение в (11.60), получим после разделения переменных

$$\begin{cases} \mathrm{L}\,y = \lambda\rho y \\ y(0) = y(l) = 0 \end{cases} \qquad \dot{T} + \lambda T = 0,$$

где λ — подлежащая определению постоянная. Предполагая, что полученная задача Штурма-Лиувилля удовлетворяет условиям раздела 11.1.5, находим бесконечный спектр собственных чисел $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ Соответствующий им набор собственных функций $\{y_n(x)\}$ образует ортонормированный базис в евклидовом пространстве $CL_2^{(\rho)}(0,l)$ со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_0^l \rho(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)\,dx.$$

Отвечающая λ_n функция $T(t)$ равна, очевидно, $T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n t)$ и потому соответствующее решение с разделёнными переменными

$$v_n(x,t) = A_n y_n(x) \exp(-\lambda_n t),$$

где A_n — произвольная постоянная.

Будем теперь искать решение задачи (v) в виде ряда по полученному набору подобных решений уравнения:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x) \exp(-\lambda_n t).$$

Формально подставляя это решение в начальное условие задачи и используя полноту системы, получаем

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow A_n = \langle \varphi, y_n \rangle.$$

В итоге формальное решение задачи (v) можно записать в виде

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi, y_n \rangle\, y_n(x) \exp(-\lambda_n t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^l \rho(\xi)\,\varphi(\xi)\,y_n(\xi)\,d\xi \right) y_n(x) \exp(-\lambda_n t) = \\ &= \int\limits_0^l \rho(\xi)\,G(x\,|t|\,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \end{aligned}$$

где

$$G(x\,|t|\,\xi) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) \exp(-\lambda_n t)\,y_n(\xi) \tag{11.61}$$

— функция Грина соответствующей краевой задачи.

Решение задачи (w) будем искать в виде ряда Фурье по системе функций $\{y_n(x)\}$:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\,y_n(x).$$

Для нахождения переменных коэффициентов Фурье $w_n(t) \equiv \langle w(x,t), y_n(x) \rangle$ подставим этот ряд в уравнение и начальное условие системы (w), предварительно разложив неоднородный член $f(x,t)$ в ряд по той же системе:

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{\rho} f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, y_n(x)\,, \\ f_n(t) \equiv \left\langle \tfrac{1}{\rho} f(x,t)\,, y_n(x) \right\rangle = \\ = \int\limits_0^l f(\xi,t)\, y_n(\xi)\, d\xi.\end{gathered}$$

После несложных формальных преобразований имеем

$$\begin{cases} \rho(x) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \{\dot{w}_n + \lambda_n w_n - f_n(t)\}\, y_n(x) = 0, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n(0)\, y_n(x) = 0. \end{cases}$$

Отсюда в силу полноты ортонормированной системы $\{y_n(x)\}$

$$\begin{cases} \dot{w}_n + \lambda_n w_n = f_n(t)\,, \\ w_n(0) = 0 \end{cases}$$

для каждого n. Поэтому

$$w_n(t) = \int\limits_0^t \exp(-\lambda_n(t-\tau))\, f_n(\tau)\, d\tau$$

и

$$\begin{gathered} w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^t \exp(-\lambda_n(t-\tau))\, f_n(\tau)\, d\tau y_n(x) = \\ = \int\limits_0^t \int\limits_0^l G(x\,|t-\tau|\,\xi)\, f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau. \end{gathered}$$

В конечном итоге решение задачи (11.59) записывается в интегральной форме

$$u(x,t) = \int\limits_0^l \rho(\xi)\, G(x\,|t|\,\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_0^l G(x\,|t-\tau|\,\xi)\, f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau. \quad (11.62)$$

Свойства функции Грина.

1. *Физический смысл функции Грина.*

   Рассмотрим смешанную задачу вида

$$\begin{cases} \rho(x)\, u'_t = -\mathrm{L}\, u, & x \in (0,l)\,, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \frac{1}{\rho(x)} \delta(x - x_0)\,, & x \in (0,l)\,. \end{cases}$$

   Её решение в соответствии с (11.62) имеет вид

$$u(x,t) = \int\limits_0^l G(x\,|t|\,\xi)\, \delta(\xi - x_0)\, d\xi = G(x\,|t|\,x_0)\,,$$

что даёт основания для трактовки функции Грина как распределения температуры в среде, вызванное начальным дельтаобразным её распределением. С другой стороны, решение следующей смешанной задачи

$$\begin{cases} \rho\,(x)\,u_t' = -\,\mathrm{L}\,u + \delta\,(t)\,\delta\,(x - x_0)\,, & x \in (0,l)\,, t > 0, \\ u\,(0,t) = u\,(l,t) = 0, & t > 0, \\ u\,(x,0) = 0, & x \in (0,l) \end{cases}$$

также в соответствии с (11.62) имеет вид

$$u\,(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l G\,(x\,|t-\tau|\,\xi)\,\delta\,(\tau)\,\delta\,(\xi - x_0)\,d\xi d\tau = G\,(x\,|t|\,x_0)\,,$$

что позволяет также трактовать функцию Грина как распределение температуры в среде, вызванное дельтаобразными источниками тепла, распределёнными в среде.

2. *Теорема взаимности.*

Как легко видеть из формулы (11.61),

$$G\,(x\,|t|\,\xi) \equiv G\,(\xi\,|t|\,x)\,.$$

Данное свойство симметрии функции Грина принято трактовать как *свойство взаимности*: влияние точечного источника тепла, помещённого в точку ξ, на точку измерения x симметрично относительно замены $\xi \leftrightarrow x$.

Метод разделения переменных Фурье в многомерных параболических задачах.

Рассмотрим задачу об остывании однородного круглого теплопроводящего цилиндра:

$$\begin{cases} u_t' = a^2 \Delta u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right), & \rho \geq 0, \theta \in R^1, t > 0 \\ u\,(\rho_0, \theta, t) = 0, & \theta \in R^1, t > 0, \\ u\,(\rho, \theta, 0) = \varphi\,(\rho, \theta)\,, & \rho \geq 0,\ \theta \in R^1. \end{cases}, \qquad (11.63)$$

Здесь ρ_0 — радиус цилиндра. Исходя из геометрии задачи, для её решения выбрана полярная система координат (ρ, θ). При этом для того чтобы решение задачи имело физический смысл следует добавить в постановке задачи условие периодичности решения по углу:

$$u\,(\rho, \theta + 2\pi, t) \equiv u\,(\rho, \theta, t)\,.$$

Ограничимся, впрочем, для простоты лишь случаем радиально-симметричного начального распределения температуры: $\varphi\,(\rho, \theta) \equiv \varphi\,(\rho)$. Из симметрии задачи ясно, что в этом случае распределение температуры в стержне всегда будет радиально-симметрично:

$$u\,(\rho, \theta, t) \equiv u\,(\rho, t)\,.$$

Найдём все радиально-симметричные решения однородной краевой задачи

$$\begin{cases} u'_t = a^2\Delta u = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right), & \rho \geq 0, t > 0, \\ u(\rho_0, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

с разделёнными переменными, то есть решения вида

$$u(\rho, t) = R(\rho)\, T(t).$$

Подставляя это решение в уравнение и граничное условие, получаем после разделения переменных

$$\overset{(R)}{\begin{cases} R'' + \frac{1}{\rho}R' + \lambda R = 0, & \rho \geq 0, \\ R(\rho_0) = 0, \end{cases}} \qquad \overset{(T)}{\dot{T} + a^2\lambda T = 0,} \quad t > 0$$

Здесь λ — постоянная (собственное число), подлежащая определению. Роль отсутствующего второго граничного условия в краевой задаче (R) для уравнения второго порядка для функции $R(\rho)$ играет условие ограниченности решения в круге $\rho \leq \rho_0$: $|R(\rho)| < \infty$. Заметим, что из общей теории задачи Штурма-Лиувилля, изложенной выше в разделе 11.1.5, следует существование бесконечного набора положительных собственных чисел; соответствующий ортонормированный набор собственных функций образует базис в евклидовом пространстве. Не ограничиваясь данной констатацией, выразим указанные собственные функции через функции Бесселя нулевого порядка. Ортогональность и полнота системы функций будет тогда следовать также и из теории бесселевых функций.

Заменой

$$x = \sqrt{\lambda}\rho, \; y(x) = R(\rho)$$

сведём краевую задачу (R) к следующей задаче для уравнения Бесселя нулевого порядка:

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{0^2}{x^2}\right)y = 0, \\ y\left(\sqrt{\lambda}\rho_0\right) = 0, \; |y(0)| < \infty. \end{cases}$$

Общее решение уравнения выразим через цилиндрические функции первого и второго рода нулевого порядка

$$y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x).$$

Постоянную C_2 полагаем равной нулю для ограниченности решения в нулевой точке. Граничное условие в другой точке интервала решения приводит к следующему уравнению для нахождения собственных чисел:

$$J_0\left(\sqrt{\lambda}\rho_0\right) = 0.$$

Отсюда имеем $\sqrt{\lambda}\rho_0 = \mu_n^{(0)}$, $\lambda_n = \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{\rho_0}\right)^2$, где $\left\{\mu_n^{(0)}, n = 1, 2, \ldots\right\}$ — серия последовательных корней функции Бесселя J_0. Соответствующее решение задачи (R) имеет вид

$$R_n(\rho) = C_1 J_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right).$$

Нормируем его надлежащим выбором постоянной C_1:

$$1 = \|R_n\|^2 = C_1^2 \int\limits_0^{\rho_0} \rho J_0^2 \left(\frac{\mu_n^{(0)}\rho}{\rho_0}\right) d\rho = C_1^2 \frac{\rho_0^2}{2} \left(J_0'\left(\mu_n^{(0)}\right)\right)^2,$$
$$R_n(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{\rho_0 J_0'\left(\mu_n^{(0)}\right)} J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}\rho}{\rho_0}\right).$$

Система функций $\{R_n(\rho)\}$ образует ортонормированный базис в евклидовом пространстве $CL_2^{(\rho)}(0, \rho_0)$.

После интегрирования уравнения (T) находим все радиально-симметричные решения однородной краевой задачи с разделёнными переменными[48]

$$u_n(\rho, t) = A_n R_n(\rho) \exp\left(-a^2 \lambda_n t\right).$$

Решение исходной задачи (11.63) ищем в виде ряда по системе таких решений

$$u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n R_n(\rho) \exp\left(-a^2 \lambda_n t\right).$$

Постоянные A_n определяются из начального условия

$$u(\rho, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n R_n(\rho) = \varphi(\rho) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A_n = \langle R_n(\rho), \varphi(\rho)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\rho_0 J_0'\left(\mu_n^{(0)}\right)} \int\limits_0^{\rho_0} \rho\varphi(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}\rho}{\rho_0}\right) d\rho.$$

Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом разделения переменных Фурье.

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t' = a^2 u_{xx}'', & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{11.64}$$

Вначале найдём все решения уравнения с разделёнными переменными $u(x, t) = y(x)\,T(t)$, удовлетворяющие дополнительному условию $\lim_{t\to+\infty} u(x, t) = 0$. После подстановки подобного решения в уравнение и разделения переменных получаем тождество

$$\frac{y''(x)}{y(x)} \equiv \frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)}.$$

Поскольку правая и левая его части зависят от различных независимых переменных, то они могут быть лишь постоянны. Обозначив соответствующую постоянную $-\lambda^2$, получаем уравнения

$$y'' + \lambda^2 y = 0,$$
$$\dot{T} + a^2\lambda^2 T = 0,$$

откуда

$$y_\lambda(x) = \exp(i\lambda x),$$
$$T_\lambda(t) = A(\lambda) \exp\left(-a^2\lambda^2 t\right),$$
$$u_\lambda(x, t) = A(\lambda) \exp\left(i\lambda x - a^2\lambda^2 t\right).$$

[48] *Стоячие волны* в терминологии гиперболических задач.

Заметим, что исчезающее при $t \to +\infty$ решение получается лишь при вещественном λ.

Решение задачи (11.64) ищем теперь в виде интеграла

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) \exp\left(i\lambda x - a^2\lambda^2 t\right) d\lambda,$$

подбирая коэффициенты $A(\lambda)$ так, чтобы удовлетворить начальным условиям

$$u(x,0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) \exp(i\lambda x)\, d\lambda = \varphi(x).$$

Из теории интеграла Фурье следует, что подобное разложение возможно при условии принадлежности функции $\varphi(x)$ классу Φ (см. раздел 11.1.4). При этом

$$A(\lambda) = \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,0) \exp(-i\lambda\xi)\, d\xi = \\ = \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \exp(-i\lambda\xi)\, d\xi.$$

В итоге решение задачи (11.64) можно записать в интегральной форме

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \exp(-i\lambda\xi)\, d\xi \right) \exp\left(-a^2\lambda^2 t + i\lambda x\right) d\lambda = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i\lambda(\xi - x) - a^2\lambda^2 t\right) d\lambda \right) \varphi(\xi)\, d\xi \equiv \\ \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x\,|t|\,\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

где

$$G(x\,|t|\,\xi) \equiv \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i\lambda(\xi - x) - a^2\lambda^2 t\right) d\lambda = \\ = \tfrac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\tfrac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right)$$

— фундаментальное решение уравнения теплопроводности (см. раздел 11.2.3).

11.3 Методы решения задач для уравнений эллиптического типа

11.3.1 Примеры физических задач, приводящих к уравнениям эллиптического типа

1. *Уравнение Пуассона*

$$\triangle u = f(\mathbf{x})$$

и его однородный вариант — уравнение Лапласа —

$$\triangle u = 0.$$

Описывают стационарные распределения потенциалов полей в электростатике, магнитостатике, теории гравитации, теплопроводности, диффузии. Функция $f(\mathbf{x})$ представляет плотность распределения стационарных источников поля:

$$\begin{array}{lll} \vec{E} = -\nabla u & \Rightarrow & 4\pi\rho = \nabla\vec{E} = -\nabla^2 u = -\triangle u \\ u'_t = a^2\triangle u,\ u'_t \equiv 0 & \Rightarrow & \triangle u = 0 \end{array}$$

2. *Уравнение Гельмгольца*

$$\triangle u + k^2 u = \rho(\mathbf{x}).$$

Описывает распределение амплитуды гармонического процесса, удовлетворяющего волновому уравнению:

$$\begin{array}{c} v''_{tt} = a^2\triangle v + f(\vec{r})\,e^{i\omega t},\ v(\vec{r},t) = u(\vec{r})\,e^{i\omega t} \\ \Rightarrow \triangle u + k^2 u = -\frac{1}{a^2} f(\vec{r}),\ k^2 \equiv \frac{\omega^2}{a^2} \end{array}$$

3. *Стационарное уравнение Шрёдингера*

$$\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi + [E - U(x,y,z)]\,\psi = 0.$$

Описывает стационарные состояния квантовомеханических систем: $U(x,y,z)$ — оператор потенциальной энергии, E — энергия системы.

11.3.2 Корректность постановки краевых задач для уравнений эллиптического типа

Основные краевые задачи для эллиптических уравнений.

- 1-го рода — *задача Дирихле* — на границе области задается значение функции: $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.
- 2-го рода — *задача Неймана* — на границе области задается значение нормальной производной функции: $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \psi$.
- 3-го рода — на границе области задается линейное соотношение, связывающее значения решения и его нормальной производной: $\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \chi$, $\alpha(x)\,\beta(x) \not\equiv 0$.

Интегральные формулы Грина.

Согласно *формуле Остроградского-Гаусса*

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\vec{\mathbf{A}}\,d\Omega = \iint\limits_{\partial\Omega} \left\langle \vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{n}} \right\rangle dS, \tag{11.65}$$

где $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}})$ — непрерывно-дифференцируемое векторное поле в ограниченной пространственной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$, $\vec{\mathbf{n}}$ — внешняя нормаль к границе. Взяв, в частности, $\vec{\mathbf{A}} \equiv u\nabla v$, где $u(\cdot), v(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, имеем

$$\begin{array}{c} \left\langle \vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{n}} \right\rangle = u\langle\nabla v, \vec{\mathbf{n}}\rangle = u\frac{\partial v}{\partial n}, \\ \operatorname{div}\vec{\mathbf{A}} = \nabla(u\nabla v) = u\triangle v + \langle\nabla u, \nabla v\rangle. \end{array}$$

Подставив эти выражения в формулу (11.65), получаем *первую формулу Грина*

$$\iiint\limits_{\Omega} u\triangle v d\Omega = \iint\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}dS - \iiint\limits_{\Omega} \langle\nabla u, \nabla v\rangle\, d\Omega. \tag{11.66}$$

Меняя местами функции u, v в этой формуле и вычитая полученную формулу из (11.66), получаем *вторую формулу Грина*

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\triangle v - v\triangle u)\, d\Omega = \iint\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\, dS \tag{11.67}$$

Используем формулы Грина для доказательства следующего вспомогательного утверждения, играющего важную роль в теории гармонических функций.

Лемма. $\triangle\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{x})$, *где* $r \equiv |\mathbf{x}| \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Доказательство. Положим для $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\Omega_\varepsilon &\equiv \left\{\mathbf{x} : \varepsilon < |\mathbf{x}| < \tfrac{1}{\varepsilon}\right\},\\
S_\varepsilon^{(1)} &\equiv \left\{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| = \tfrac{1}{\varepsilon}\right\},\\
S_\varepsilon^{(2)} &\equiv \left\{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| = \varepsilon\right\}.
\end{aligned}$$

Применяя вторую формулу Грина, имеем для произвольной основной (бесконечно-дифференцируемой, финитной — см. раздел **??**) функции $\varphi(\mathbf{x})$

$$\begin{gathered}
\left\langle\triangle\left(\tfrac{1}{r}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle\tfrac{1}{r}, \triangle\varphi\right\rangle = \\
= \iiint\limits_{R^3} \tfrac{1}{r}\triangle\varphi\, d\Omega \equiv \lim_{\varepsilon\to+0} \iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} \tfrac{1}{r}\triangle\varphi\, d\Omega = \\
= \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} \varphi\triangle\left(\tfrac{1}{r}\right)\, d\Omega + \iint\limits_{S_\varepsilon}\left(\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\tfrac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right) dS\right\} = \\
= \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\tfrac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{S_\varepsilon^{(2)}} \tfrac{\partial\varphi}{\partial n}dS + \varepsilon\iint\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} \tfrac{\partial\varphi}{\partial n}dS - \right.\\
\left. -\tfrac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{S_\varepsilon^{(2)}} \varphi dS + \varepsilon^2\iint\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} \varphi dS\right\} = \\
= -4\pi\varphi(\mathbf{0}) = \langle -4\pi\delta(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})\rangle.
\end{gathered}$$

Здесь мы учли, что

$$\begin{gathered}
\tfrac{\partial}{\partial n}\left(\tfrac{1}{r}\right) = -\tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial r}{\partial n} = \begin{cases} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}, & \mathbf{x}\in S_\varepsilon^{(2)} \\ -\frac{1}{r^2} = -\varepsilon^2 & \mathbf{x}\in S_\varepsilon^{(1)} \end{cases},\\
\iint\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} \tfrac{\partial\varphi}{\partial n}dS = 0,\ \iint\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} \varphi dS = 0\ \ \forall\varepsilon > \varepsilon^*,\\
\left|\iint\limits_{S_\varepsilon^{(2)}} \tfrac{\partial\varphi}{\partial n}dS\right| \le K\varepsilon^2,\\
\iint\limits_{S_\varepsilon^{(2)}} \varphi dS = 4\pi\varepsilon^2\varphi(\boldsymbol{\eta}_\varepsilon),\ \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \underset{\varepsilon\to+0}{\to} \mathbf{0}.
\end{gathered}$$

Лемма доказана.[49]

---

[49]Фактически в лемме доказано, что функция $-\frac{1}{4\pi r}$ является *фундаментальным решением* уравнения Лапласа.

Гармонические функции.

Определение. *Функция* $u(\mathbf{x})$ *называется гармонической в области* $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^n, n \geq 1$, *если она дважды непрерывно дифференцируема в* Ω *и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа*

$$\triangle u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Примеры:

а) Линейная функция во всём пространстве любой размерности;

б) $u(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|}$ в любой области трёхмерного пространства, не содержащей точки 0;

в) $u(\mathbf{x}) = \ln \frac{1}{|\mathbf{x}|}$ в любой области двумерного пространства, не содержащей точки 0;

Свойства гармонических функций.

1. *Интегральное представление гармонической функции* через её значения на границе области (для $n = 3$).

   Полагая во второй формуле Грина (11.67)

   $$v(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}|} \equiv \frac{1}{r_{\xi x}},$$

   где $\mathbf{x}$ — фиксированная, $\boldsymbol{\xi}$ — текущая точка области, и учитывая (см. вышеприведённую лемму), что

   $$\triangle v(\boldsymbol{\xi}) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}),$$

   получаем из этой формулы для произвольной гармонической в области функции $u(\mathbf{x})$

   $$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{r_{\xi x}} \frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) - u(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} \left(\frac{1}{r_{\xi x}} \right) \right] dS_{\xi}. \qquad (11.68)$$

2. *Поток градиента гармонической функции* через границу произвольной замкнутой области гармоничности

   $$\iint\limits_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \vec{n} \rangle \, dS_{\boldsymbol{\xi}} = \iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) \, dS_{\xi} = 0. \qquad (11.69)$$

   Для доказательства этого свойства гармонической функции достаточно положить во второй формуле Грина $v(\mathbf{x}) \equiv 1$.

3. Всякая *гармоническая функция двух переменных* (x, y) *является реальной (мнимой) частью некоторой аналитической функции* комплексного переменного $z \equiv x + iy$:

   $$u(x, y) \equiv \mathrm{Real}\, f(z).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что любая гармоническая функция бесконечно дифференцируема в области гармоничности.

И наоборот, реальная u и мнимая v части любой аналитической функции являются *сопряжёнными* между собой гармоническими функциями. Последнее означает выполнение всюду в области гармоничности *условий Коши-Римана* для этих функций:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

4. **Теорема** (*о среднем для гармонических функций*).

   Для всякой точки x из области гармоничности и любой сферы $S \equiv \{\boldsymbol{\xi} : |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| = a\} \subset \mathbf{R}^3$, целиком принадлежащей этой области,

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_S u(\boldsymbol{\xi})\, dS_{\boldsymbol{\xi}}.$$

   Для **доказательства** данного утверждения достаточно применить формулу (11.68) к области $\Omega \equiv \{\boldsymbol{\xi} : |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| < a\}$. Тогда с учётом формулы (11.69) получаем

$$u(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi a} \iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS}_{=0} - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S u \underbrace{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)}_{\equiv -1/a^2} dS = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_S u\, dS,$$

   что и требовалось доказать.

5. **Теорема** (*о максимуме и минимуме гармонической функции). Максимальное и минимальное значения гармонической функции, непрерывной в замыкании области, достигается на границе этой области.*

   Доказательство. Пусть максимум гармонической функции достигается в некоторой точке M. Если данная точка принадлежит границе, то теорема доказана. В противном случае максимальное значение достигается также и в любой точке сферы с центром в M, целиком лежащей в области гармоничности (иначе среднее значение функции по поверхности этой сферы будет меньше значения в центре). Увеличив радиус сферы до её соприкосновения с границей области, докажем теорему.

   Следствия (*к корректности постановки задачи Дирихле*):

   (a) Если на границе области гармоничности $u(\mathbf{x}) \equiv 0$, то и внутри неё функция тождественно равна нулю.

   (b) Если две гармонические функции тождественно совпадают на границе области, то они совпадают и внутри неё.

   (c) Если на границе области гармонические функции различаются не более чем на ε, то и внутри области они удовлетворяют тому же условию.

   (d) Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона единственно и непрерывно в равномерной метрике зависит от граничного условия — корректность постановки задачи Дирихле.

11.3.3 Методы решения задач для уравнений эллиптического типа

Перечислим основные методы, которые применяются для решения краевых задач для уравнений эллиптического типа:

- метод функций Грина;
- метод разделения переменных Фурье;
- метод потенциалов;
- метод интегральных преобразований;
- метод конформных преобразований;
- специальные методы.

11.3.4 Метод функций Грина

Применим метод функций Грина для решения краевой задачи общего вида

$$\begin{cases} \triangle u = f(\mathbf{x}), \, \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^3 \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \varphi(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{11.70}$$

для уравнения Пуассона.

Определение. *Функцией Грина задачи* (11.70) *называется обобщённая функция* $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, *удовлетворяющая краевой задаче*

$$\begin{cases} \triangle_\xi G = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \, \mathbf{x} \in \Omega \\ \alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n}\big|_{\boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{11.71}$$

Здесь $\triangle_{\boldsymbol{\xi}} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2}$, $\boldsymbol{\xi}$ *— текущая,* $\mathbf{x}$ *— фиксированная точка области* Ω.

Интегральное представление решений краевой задачи.

Взяв во второй формуле Грина в качестве функции $u(\boldsymbol{\xi})$ решение краевой задачи (11.70), а в качестве функции $v(\boldsymbol{\xi})$ — функцию Грина $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, получим с учётом (11.71) интегральное представление решения задачи через граничные значения решения и производных:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) = \iint\limits_{\partial\Omega} \left(G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) - u(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} \right) dS_\xi - \\ - \iiint\limits_{\Omega} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \triangle u(\boldsymbol{\xi}) \, d\Omega_{\boldsymbol{\xi}}. \end{aligned} \tag{11.72}$$

Рассмотрим отдельно следующие случаи.

1. *Задача Дирихле*

$$u(\mathbf{x}) = -\iint\limits_{\partial\Omega} \varphi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_\xi} dS_\xi - \iiint\limits_{\Omega} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) \, d\Omega_\xi. \tag{11.73}$$

2. *Задача Неймана*

$$\begin{cases} \triangle u = f \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \triangle G = -\delta \\ \frac{\partial G}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$u(\mathbf{x}) = \iint\limits_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, \varphi(\boldsymbol{\xi})\; dS_\xi - \iiint\limits_{\Omega} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, f(\boldsymbol{\xi})\; d\Omega_{\boldsymbol{\xi}}.$$

3. *Третья краевая задача* $(\beta(\mathbf{x}) \neq 0)$

$$\begin{cases} \triangle u = f \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \triangle G = -\delta \\ \alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$u(\mathbf{x}) = \iint\limits_{\partial\Omega} \frac{1}{\beta(\boldsymbol{\xi})} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, \varphi(\boldsymbol{\xi})\, dS_{\boldsymbol{\xi}} - \iiint\limits_{\Omega} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, f(\boldsymbol{\xi})\, d\Omega_\xi.$$

Здесь мы использовали тождество

$$G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n} = G\left(\frac{\varphi}{\beta} - \frac{\alpha u}{\beta}\right) + u\frac{\alpha G}{\beta} = \frac{1}{\beta} G\varphi$$

Таким образом, зная функцию Грина краевой задачи, можно сразу выписать решение любой из краевых задач в виде интеграла, включающего в себя функцию Грина, её производные и данные задачи — неоднородный член уравнения и граничные условия. Поэтому важно уметь находить саму функцию Грина.

Метод мнимых источников построения функции Грина.

Одним из методов нахождения функции Грина (11.71) является *метод изображений (мнимых источников)*, основанный на следующем выделении особенности в функции Грина.

Учитывая доказанную выше лемму, будем искать функцию $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ в виде

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi r_{x\xi}} + v(\boldsymbol{\xi}), \tag{11.74}$$

где $\mathbf{x}$ — фиксированная точка области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, $v(\boldsymbol{\xi})$ — гармоническая в области функция, служащая решением краевой задачи

$$\begin{cases} \triangle v = 0,\; \boldsymbol{\xi} \in \Omega, \\ \alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial n}\big|_{\xi\in\partial\Omega} = -\frac{1}{4\pi}\left(\alpha \frac{1}{r_{x\xi}} + \beta \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right)\right). \end{cases}$$

Иногда удается найти решение этой последней задачи из некоторых соображений симметрии, основанных, по существу, на физической интерпретации её решения. Последняя заключается в следующем. Рассмотрим полное электростатическое поле в области Ω, граница которой "заземлена" , то есть окружена проводящей поверхностью, поддерживаемой при нулевом потенциале, при условии, что в точку $\mathbf{x}$ области помещён заряд $q = -\frac{1}{4\pi}$. Потенциал этого поля есть не что иное как функция Грина $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$. С другой стороны, первый член в представлении функции Грина (11.74) это потенциал, создаваемый самим зарядом q. Следовательно, функция $v(\boldsymbol{\xi})$ является не чем иным как потенциалом, наводимым в области зарядами, индуцированными на поверхности границы области зарядом q. Идея метода изображений заключается в том, чтобы заменить эти индуцированные заряды другими "мнимыми" зарядами, расположенными вне замыкания области $\bar{\Omega}$, которые создавали бы на поверхности области потенциал равный

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\alpha\frac{1}{r_{x\xi}}+\beta\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right)\right).$$

Потенциал внутри области, который будут создавать эти мнимые заряды, совпадает с функцией $v\left(\boldsymbol{\xi}\right)$, так как у этих гармонических внутри области функций совпадают их граничные значения. Подбор таких мнимых зарядов удаётся в ряде случаев произвести, исходя из присущей задаче геометрической симметрии.

Приведем примеры подобного подбора.

Пример 1.*Решение задачи Дирихле в верхнем полупространстве.*

Пусть $\Omega\equiv\{(x_1,x_2,x_3): x_3>0\}$. Рассмотрим следующую краевую задачу первого рода для уравнения Лапласа

$$\begin{cases}\triangle u=0,\, x_3>0\\ u|_{x_3=0}=\varphi.\end{cases}$$

Ищем функцию Грина в виде (11.74). Для потенциала индуцированных зарядов v при этом имеем задачу

$$\begin{cases}\triangle v=0,\ \xi_3>0\\ v|_{\xi_3=0}=-\frac{1}{4\pi r_{x\xi}}.\end{cases}$$

Возьмём в качестве мнимого источника заряд $q=-\frac{1}{4\pi}$, расположенный в точке, симметричной точке $\mathbf{x}\equiv(x_1,x_2,x_3)$ относительно плоскости $\xi_3=0$, то есть в точке $\mathbf{x}^*\equiv(x_1,x_2,-x_3)$. Так как на границе области его потенциал равен

$$-\frac{1}{4\pi r_{x*\xi}}=-\frac{1}{4\pi r_{x\xi}},$$

то в самой области он совпадает с искомой функцией v. В итоге

$$G\left(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\right)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}-\frac{1}{r_{x^*\xi}}\right),$$

а из формулы (11.73) получаем решение задачи

$$u\left(\mathbf{x}\right)=-\iint\limits_{\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial n}dS_{\xi}=\frac{x_3}{2\pi}\iint\limits_{R^2}\frac{\varphi\left(\xi_1,\xi_2\right)\,d\xi_1 d\xi_2}{\left[\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(x_2-\xi_2\right)^2+x_3^2\right]^{3/2}}.$$

Пример 2. *Решение задачи Дирихле внутри шара ($n=3$).*

В данной задаче $\Omega\equiv\{\mathbf{x}:|\mathbf{x}|<a\}$. Рассмотрим краевую задачу первого рода

$$\begin{cases}\triangle u=0,\ \mathbf{x}\in\Omega,\\ u|_{\mathbf{x}\in\partial\Omega}=\alpha\left(\mathbf{x}\right).\end{cases}$$

Определение. *Точки $\mathbf{x}\in\Omega$ и $\mathbf{x}^*\in\mathbf{R}^3\setminus\Omega$ называются взаимно симметричными относительно сферы $\partial\Omega\equiv\{\mathbf{x}:|\mathbf{x}|=a\}$, если они лежат на одном луче, выходящем из центра сферы O и*

$$r_{ox} r_{ox^*} = a^2.$$

Здесь, как обычно, $r_{xy} \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

Вновь ищем функцию Грина в виде (11.74). Для потенциала индуцированных зарядов v при этом имеем задачу

$$\begin{cases} \triangle v = 0, \, \boldsymbol{\xi} \in \Omega \\ v|_{\boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega} = -\frac{1}{4\pi r_{x\xi}}. \end{cases}$$

Убедимся в том, что решением последней задачи служит функция

$$v(\boldsymbol{\xi}) = \frac{q}{r_{x^*\xi}},$$

где

$$q = -\frac{a}{4\pi |\mathbf{x}|}$$

— постоянная величина — мнимый заряд, а точка $\mathbf{x}^*$ симметрична точке x относительно сферы.

В самом деле, эта функция удовлетворяет всюду в пространстве за исключением точки $\mathbf{x}^*$ (и следовательно — всюду внутри сферы) уравнению Лапласа, а на самой сфере

$$v(\boldsymbol{\xi})|_{\boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega} = \left.\frac{q}{r_{x^*\xi}}\right|_{\boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega} = \frac{\left(-\frac{a}{|\mathbf{x}|}\right)}{4\pi\left(\frac{a}{|\mathbf{x}|} r_{x\xi}\right)} = \\ = -\frac{1}{4\pi r_{x\xi}}.$$

Заметим, что тождество $r_{x^*\xi} \equiv \frac{a}{|\mathbf{x}|} r_{x\xi}$, $\boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega$ вытекает из подобия треугольников $OX\xi$ и $OX^*\xi$ (см. рисунок).

Последние подобны по общему углу $\angle XO\xi$ и пропорциональности прилегающих к нему сторон:

$$\frac{OX}{O\xi} = \frac{O\xi}{OX^*}.$$

Таким образом,

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{x\xi}} + \frac{q}{r_{x^*\xi}} \right)$$

и решение, как функция сферических координат, имеет вид

$$u(r, \vartheta, \varphi) = -\iint\limits_{\partial\Omega} \alpha \frac{\partial G}{\partial n} dS = \\ = \frac{a}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \int\limits_0^{\pi} d\vartheta' \, \alpha\left(\vartheta', \varphi'\right) \frac{\left(a^2 - r^2\right) \sin\vartheta'}{\left[a^2 - 2ar\cos\gamma + r^2\right]^{3/2}}, \\ \cos\gamma \equiv \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos\left(\varphi - \varphi'\right).$$

Это известная *формула Пуассона.*

11.3.5 Метод разделения переменных Фурье

Данный метод мы изложим на примере решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа внутри шара $\Omega \equiv \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| < a\} \subset \mathbf{R}^3$ (*внутренняя задача*) и вне него (*внешняя задача*):

$$\begin{cases} \triangle u = 0, \ \mathbf{x} \in \Omega \\ u|_{x \in \partial\Omega} = f(\mathbf{x}), \end{cases}$$

или — в сферической системе координат —

$$\begin{cases} \triangle u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \\ +\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0, \ r < a \ \ (r > a) \\ u|_{r=a} = f(\theta, \varphi). \end{cases} \tag{11.75}$$

Прежде чем приступать к решению следует ознакомиться с теорией уравнений и функций Лежандра, которые тесно связаны с данной задачей математической физики.

Уравнения и функции Лежандра (справка из теории обыкновенных дифференциальных уравнений).

Уравнением Лежандра называется линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)y'\right] + \lambda y = 0, \ -1 \le x \le 1. \tag{11.76}$$

Оно имеет ограниченные на отрезке $[-1, 1]$ решения лишь при $\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Одно из этих решений обозначается $P_n(x)$ и называется *многочленом Лежандра порядка* n. Как и следует из его названия, $P_n(x)$ является многочленом от x порядка n. Второе, линейно независимое с ним решение уравнения (11.76) обозначается обычно $Q_n(x)$ и (имея логарифмические особенности в точках $x = \pm 1$) многочленом не является. Свойства всех этих функций хорошо изучены. Перечислим некоторые из них.

1. *Формула Родриго:*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2 - 1\right)^n\right].$$

   В частности, из этого выражения получаем

$$\begin{aligned} &P_0(x) \equiv 1, \\ &P_1(x) \equiv x, \\ &P_2(x) \equiv \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

2. *Рекуррентные соотношения* для многочленов Лежандра:

$$\begin{aligned} &(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} \equiv 0, \\ &P_n(x) \equiv \tfrac{1}{2n+1}\left[P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)\right]. \end{aligned}$$

3. *Взаимная ортогональность* многочленов Лежандра:

$$\langle P_n, P_k \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_k(x)\, dx = \delta_{nk} \frac{2}{2n+1},$$

где δ_{nk} — символ Кронекера.

4. *Полнота* системы многочленов Лежандра: набор $\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x),\ n = 1, 2, \ldots \right\}$ образует ортонормированный базис в евклидовом пространстве $L_2[-1,1]$.

5. *Ограниченность*:

$$|P_n(x)| \leq 1\ \forall x \in [-1,1].$$

Присоединённым уравнением Лежандра называется линейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right) y = 0,\ -1 \leq x \leq 1. \tag{11.77}$$

Здесь m — заданное целое число.

Ненулевое ограниченное на отрезке $[-1,1]$ решение этого уравнения существует лишь при $\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, \ldots$; $0 \leq m \leq n$. Это решение — *присоединённую функцию Лежандра* — $P_n^{(m)}$ можно выразить через многочлен Лежандра степени n по формуле:

$$P_n^{(m)}(x) \equiv \left(1-x^2\right)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

из чего следует, что оно в общем случае многочленом не является.

Отметим также некоторые свойства присоединённых функций:

1. $P_n^{(0)}(x) \equiv P_n(x)$, $P_n^{(m)}(x) \equiv 0$ при $m > n$,

2. $\left\| P_n^{(m)} \right\|^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$,

3. $\left\{ P_n^{(m)} \right\}_{n=m}^{\infty}$ — ортогональная замкнутая система (ортогональный базис) в евклидовом пространстве $L_2[-1,1]$.

Приступим теперь к решению задачи (11.75) методом разделения переменных. На **первом шаге** этого метода ищем решения уравнения Лапласа с разделёнными переменными вида

$$u(r,\theta,\varphi) = w(r)\, Y(\theta,\varphi).$$

После его подстановки в уравнение получаем тождество

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dw}{dr}\right) Y + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) w + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} w \equiv 0,$$

или — после разделения переменных —

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dw}{dr}\right)}{w} \equiv -\frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}}{Y} \equiv \lambda,$$

где λ — в силу независимости переменных — может быть лишь постоянной. Отсюда получаем уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dw}{dr}\right)-\lambda w=0, \tag{11.78}$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\lambda Y=0. \tag{11.79}$$

Определение. *Ограниченное решение уравнения (11.79), удовлетворяющее условию периодичности $Y(\theta,\varphi)\equiv Y(\theta,\varphi+2\pi)$, называется сферической функцией.*

Сферические функции также будем искать методом разделения переменных:

$$Y(\theta,\varphi)\equiv\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi).$$

После подстановки подобной функции в (11.79) и разделения переменных получим уравнения

$$\left\{\begin{array}{l}\Phi''+\mu\Phi=0,\\ \Phi(\varphi+2\pi)\equiv\Phi(\varphi),\end{array}\right. \tag{11.80}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0, \tag{11.81}$$

где μ — постоянное число. Решения уравнения (11.80), удовлетворяющие условию периодичности с периодом 2π, существуют только при $\mu=m^2$, $m=0,\pm1,\ldots$, и имеют вид

$$\Phi(\varphi)=A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi.$$

Подставляя данное значение в уравнение (11.81) и производя в нём замены переменных вида

$$t=\cos\theta,\ X(t)=\Theta(\theta),$$

получаем присоединённое уравнение Лежандра для функции $X(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(1-t^2\right)\frac{dX}{dt}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-t^2}\right)X=0.$$

Его нетривиальные ограниченные решения существуют лишь при $\lambda=n(n+1)$:

$$X_n^{(m)}(t)=P_n^{(|m|)}(t),\ n=0,1,\ldots;\ 0\le|m|\le n,$$

и потому нетривиальные решения уравнения (11.81) имеют вид

$$\Theta_n^{(m)}(\theta)=P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

а нетривиальные решения уравнения (11.79) —

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)=\left\{\begin{array}{l}P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi,\ m=0,1,\ldots,n\\ P_n^{(|m|)}(\cos\theta)\sin m\varphi,\ m=-1,\ldots,-n.\end{array}\right.$$

Используя свойства функций Лежандра, можно доказать, что множество функций $\left\{Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\right\}_{n=0,1,\ldots;\ |m|\le n}$ образует ортогональный базис в евклидовом пространстве $L_2(S)$ непрерывных на единичной сфере функций $\chi(\theta,\varphi)$, $0 \le \theta \le \pi$, $-\infty < \varphi < +\infty$, $\chi(\theta,\varphi) \equiv \chi(\theta,\varphi+2\pi)$ со скалярным произведением

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \, \chi_1(\theta,\varphi) \; \chi_2(\theta,\varphi).$$

При этом

$$\left\| Y_n^{(m)} \right\|^2_{L_2(S)} = 2\pi \frac{(1+\delta_{0m})}{(2n+1)} \cdot \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}.$$

Подставляя $\lambda = n(n+1)$ в уравнение (11.78), получаем *уравнение Эйлера*:

$$r^2 \frac{d^2 w}{dr^2} + 2r \frac{dw}{dr} - n(n+1) w = 0.$$

Его общее решение

$$w(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n-1}.$$

Условие ограниченности заставляет положить здесь $C_2 = 0$ в случае внутренней задачи Дирихле и, наоборот, $C_1 = 0$ в случае внешней задачи.

В итоге получаем следующий бесконечный набор ограниченных нетривиальных решений уравнения Лапласа

$$u_{mn}(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} r^n Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), & r < a, \\ r^{-n-1} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), & r > a, \end{cases}$$

$|m| \le n$, $n = 0, 1, \ldots$. Данные гармонические функции называются *шаровыми функциями*. Можно показать, что они в действительности представляют собой полиномы от декартовых переменных x, y. (*гармонические полиномы*).

На **втором шаге** будем искать решение задачи (11.75) в виде ряда по шаровым функциям

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{mn} u_{mn}(r,\theta,\varphi).$$

Неопределённые коэффициенты A_{mn} находятся из граничных условий:

- для внутренней задачи

$$u(a,\theta,\varphi) = \sum_{n,m} A_{mn} a^n Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A_{mn} = \frac{\left\langle f, Y_n^{(m)} \right\rangle}{a^n \left\| Y_n^{(m)} \right\|^2};$$

- для внешней задачи

$$u(a,\theta,\varphi) = \sum_{n,m} A_{mn} a^{-n-1} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A_{mn} = \frac{a^{n+1} \left\langle f, Y_n^{(m)} \right\rangle}{\left\| Y_n^{(m)} \right\|^2}.$$

11.3.6 Метод потенциалов

В основе данного метода лежит понятие *потенциала*, который представляет собой несобственный кратный интеграл специального вида. Напомним основные положения теории несобственных кратных интегралов в пространстве функций от трёх независимых переменных[50].

Несобственные кратные интегралы (справка из курса математического анализа).

Рассмотрим функцию $F(\boldsymbol{\xi})$, определённую и непрерывную во всех точках ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ за исключением, может быть, точки x_0, которую будем называть *особой точкой* данной функции. Предположим также, что для любой окрестности O особой точки существует интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega\setminus O} F(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}.$$

Определение. *Пусть $\{O_\varepsilon\}$ — произвольное семейство окрестностей точки $\mathbf{x}_0$, для которого $\operatorname{diam} O_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Если предел*

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \iiint\limits_{\Omega\setminus O_\varepsilon} F(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} = J \tag{11.82}$$

существует и не зависит от выбора семейства $\{O_\varepsilon\}$, то говорят, что несобственный интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega} F(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} \tag{11.83}$$

сходится и равен J.

В курсе математического анализа доказывается, что в случае неотрицательной (или неположительной) функции F для сходимости несобственного интеграла (11.83) *достаточно* существования какого-либо одного семейства окрестностей, для которого существует предел (11.82). Это утверждение значительно упрощает исследование сходимости несобственных интегралов для знакопостоянных функций. Достаточно подобрать удачное семейство окрестностей, для которого предел (11.82) существует, и сходимость несобственного интеграла доказана. С другой стороны, то что предел не существует, гарантирует расходимость несобственного интеграла.

Пример:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{|\boldsymbol{\xi}|<1} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^\alpha} &= \lim_{\varepsilon\to+0} \iiint\limits_{\varepsilon\le|\boldsymbol{\xi}|<1} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^\alpha} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_\varepsilon^1 \frac{r^2\, dr}{r^\alpha} = \\
&= 4\pi \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 r^{2-\alpha}\, dr = \begin{cases} \infty, & \alpha \ge 3, \\ \frac{4\pi}{3-\alpha}, & \alpha < 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

[50]Для случая ограниченной области интегрирования.

Следовательно, данный несобственный интеграл сходится при $\alpha < 3$ и расходится при $\alpha \geq 3$.

Для несобственных кратных интегралов верна теорема о мажоранте: *из того, что $\iiint \varphi \, d\boldsymbol{\xi}$ сходится и справедлива оценка $|F(\boldsymbol{\xi})| \leq \varphi(\boldsymbol{\xi})$ $\forall \boldsymbol{\xi}$ следует сходимость интеграла $\iiint F \, d\boldsymbol{\xi}$.*

Отсюда и из приведённого выше примера получается следующий конкретный *признак сходимости*: *если внутри единичного шара $|F(\boldsymbol{\xi})| \leq C/r^{\alpha}$, $\alpha < 3$, то интеграл*

$$\iiint\limits_{|\xi|<1} F(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}$$

сходится.

Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметров. Рассмотрим функцию $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$, $\boldsymbol{\xi} \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$, которая непрерывна по ξ всюду в ограниченной области Ω, за исключением, может быть, точки $\mathbf{x}$, которая (в случае её попадания в область Ω) является особой точкой функции. Рассмотрим несобственный интеграл

$$J(\mathbf{x}) \equiv \iiint\limits_{\Omega} F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \tag{11.84}$$

как функцию точки $\mathbf{x}$, предполагая что он сходится $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ и существует как обычный кратный интеграл Римана при $\mathbf{x} \notin \Omega$.

Введем понятие равномерной сходимости интеграла (11.84), для наглядности сравнивая его с понятием обычной сходимости интеграла.

Определение. *1) Интеграл* (11.84) *сходится в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякой окрестности O точки $\mathbf{x}_0$, диаметр которой не превосходит δ,*

$$\left| \iiint\limits_{O} F(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \right| < \varepsilon;$$

2) Интеграл (11.84) ***равномерно сходится*** *в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякой окрестности O точки $\mathbf{x}_0$, диаметр которой не превосходит δ, и для всякого $\mathbf{x}$, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ справедливо неравенство*

$$\left| \iiint\limits_{O} F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \right| < \varepsilon.$$

Очевидно, что из равномерной сходимости интеграла следует его (обычная) сходимость в данной точке. Обратное, как можно показать на примерах, неверно. Можно доказать также, что если функция $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ непрерывна по $\mathbf{x}$ в точке $\mathbf{x}_0$ при любом фиксированном $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{x}_0$ и интеграл (11.84) равномерно сходится в этой точке, то функция $J(x)$ непрерывна в $\mathbf{x}_0$. Далее, для возможности дифференцирования несобственного интеграла по $\mathbf{x}$ в точке $\mathbf{x}_0$ под его знаком достаточно, чтобы сам интеграл в этой точке сходился, а интеграл от производной сходился равномерно.

Объемный потенциал.

Определение. *Пусть $\rho(\boldsymbol{\xi})$ непрерывная, ограниченная в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ функция. Интеграл*

$$u(\mathbf{x}) \equiv \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}}{r_{x\xi}} \tag{11.85}$$

называется объёмным потенциалом (по области Ω с плотностью заряда ρ).

Свойства объёмного потенциала (о.п.).

1. *Функция $u(\mathbf{x})$ определена и непрерывна всюду в пространстве $\mathbf{R}^3$.*

   Доказательство. При $\mathbf{x}_0 \notin \Omega$ интеграл (11.85) является собственным; его непрерывность по параметру вытекает из соответствующего свойства римановых интегралов. Пусть $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}$. Докажем, что в этом случае интеграл (11.85) равномерно сходится в данной точке.

   Имеем очевидную оценку

   $$\left|\frac{\rho(\boldsymbol{\xi})}{r_{x_0\xi}}\right| \leq \frac{C}{r^1_{x_0\xi}}$$

   откуда в силу вышеприведённого признака сходимости несобственных кратных интегралов (для $\alpha = 1$) следует сходимость интеграла (11.85). Пусть далее $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$, O - окрестность точки $\mathbf{x}_0$, $\operatorname{diam} O < \delta$. Тогда

   $$\left|\iiint\limits_{O} \tfrac{\rho d\boldsymbol{\xi}}{r_{x\xi}}\right| \leq C \iiint\limits_{O} \tfrac{d\boldsymbol{\xi}}{r_{x\xi}} \leq$$
   $$\leq \iiint\limits_{K_{2\delta}(\mathbf{x})} \tfrac{d\boldsymbol{\xi}}{r_{x\xi}} = 4\pi C\, \tfrac{r^2}{2}\Big|_0^{2\delta} = 8\pi C\delta^2 < \varepsilon$$

   при $\delta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi C}}$. Здесь $K_{2\delta}(\mathbf{x}) \supset O$ — шар радиуса 2δ с центром в точке $\mathbf{x}$.

2. *Функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема всюду в $\mathbf{R}^3$.*

   Доказательство. Если точка $\mathbf{x}$ не принадлежит замыканию области Ω, то в соответствии с правилами дифференцирования римановых интегралов

   $$\tfrac{\partial u}{\partial x_i} = \tfrac{\partial}{\partial x_i} \iiint\limits_{\Omega} \tfrac{\rho(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}}{r_{x\xi}} = \iiint\limits_{\Omega} \rho(\boldsymbol{\xi})\, \tfrac{\partial}{\partial x_i} \tfrac{1}{r_{x\xi}} d\boldsymbol{\xi} =$$
   $$= \iiint\limits_{\Omega} \rho(\boldsymbol{\xi})\, \tfrac{(\xi_i - x_i)}{r^3_{x\xi}} d\boldsymbol{\xi} \equiv J_1(\mathbf{x}).$$

   Если же точка $\mathbf{x}$ лежит в $\bar{\Omega}$, то аналогично предыдущему пункту убеждаемся в равномерной сходимости несобственного интеграла $J_1(\mathbf{x})$, что является достаточным условием дифференцирования под знаком несобственного интеграла.

3. *Функция $u(\mathbf{x})$ является гармонической вне замыкания области Ω, то есть вне области расположения объёмных зарядов.*

   Доказательство. Достаточно дважды продифференцировать кратный риманов интеграл:

$$\triangle u(\mathbf{x}) = \iiint\limits_{\Omega} \rho(\boldsymbol{\xi}) \underbrace{\triangle\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right)}_{\equiv 0} d\boldsymbol{\xi} \equiv 0.$$

4. *Внутри области Ω функция $u(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Пуассона*

$$\triangle u = -4\pi\rho(\mathbf{x})$$

   (без доказательства)[51].

   Следствие. Частным решением уравнения Пуассона

$$\triangle u = f(\mathbf{x})$$

   является

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{r_{x\xi}}\, d\boldsymbol{\xi}$$

5. *Объёмный потенциал "исчезает" в бесконечности: $u(\mathbf{x}) \to 0$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$.*

   Доказательство. Имеем по теореме о среднем для интегралов

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x})| = \left|\iiint\limits_{\Omega} \tfrac{\rho}{r_{x\xi}}\, d\boldsymbol{\xi}\right| \le \iiint\limits_{\Omega} \tfrac{|\rho(\boldsymbol{\xi})|}{r_{x\xi}}\, d\boldsymbol{\xi} = \\ = \tfrac{1}{r_{\xi^* x}} \iiint\limits_{\Omega} |\rho(\boldsymbol{\xi})|\, d\boldsymbol{\xi} = \tfrac{C}{r_{\xi^* x}} \underset{|\mathbf{x}|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Поверхностные потенциалы

Определение. *Поверхность $S \subset \mathbf{R}^3$ называется поверхностью Ляпунова, если*

1. *в каждой её точке $\boldsymbol{\xi}$ существует касательная плоскость с вектором нормали $\vec{\mathbf{n}}_\xi$;*

2. *для каждой её точки $\boldsymbol{\xi}$ найдется такая окрестность, что прямая, проходящая параллельно вектору нормали $\vec{n}_\xi$ через произвольную точку этой окрестности, пересекает поверхность лишь в данной точке*[52]*;*

---

[51] Приведем, впрочем, формальное доказательство этого факта с помощью обобщённых функций:

$$\begin{aligned} \triangle u = \triangle\left(\rho * \tfrac{1}{r}\right) = \rho * \triangle\left(\tfrac{1}{\rho}\right) \\ = \rho * (-4\pi\delta) = -4\pi\rho. \end{aligned}$$

[52] Это позволяет локально описывать поверхность в виде графика функции $z = f(x, y)$.

3. *для угла γ между векторами нормали в точках $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\xi}_1$ справедлива оценка*
$$\gamma \le C r^{\delta}_{\xi\xi_1},$$
где $r_{\xi\xi_1}$ — расстояние между точками, C, δ — постоянные, $0 < \delta \le 1$, $C > 0$.

В дальнейшем область пространства, примыкающая к поверхности со стороны положительного направления нормали, назвается *exterior (e)*, а аналогичная область с обратной стороны поверхности — *interior (i).*

Определение. *Пусть S — ограниченная поверхность Ляпунова в $\mathbf{R}^3$, $\mu(\boldsymbol{\xi})$ — ограниченная непрерывная на S функция.*

Интеграл
$$v(\mathbf{x}) = \iint\limits_S \frac{\mu(\boldsymbol{\xi})\, dS_{\boldsymbol{\xi}}}{r_{x\xi}}$$
называется потенциалом простого слоя с поверхностной плотностью заряда $\mu(\boldsymbol{\xi})$.

Свойства потенциала простого слоя (п.п.с.).

1. *П.п.с. всюду определён в $\mathbf{R}^3$;*

2. *П.п.с. всюду непрерывен в $\mathbf{R}^3$;*

3. *Градиент п.п.с. везде существует и непрерывен вне поверхности; на самой поверхности нормальная производная $\frac{\partial v}{\partial n}$ имеет скачок $4\pi\mu(\mathbf{x})$:*
$$\left(\tfrac{\partial v}{\partial n}\right)_e \equiv \lim_{\substack{\xi\to\mathbf{x}\\ \xi\in e}} \tfrac{\partial v}{\partial n} = \tfrac{\partial v}{\partial n} - 2\pi\mu(\mathbf{x}),$$
$$\left(\tfrac{\partial v}{\partial n}\right)_i \equiv \lim_{\substack{\xi\to\mathbf{x}\\ \xi\in i}} \tfrac{\partial v}{\partial n} = \tfrac{\partial v}{\partial n} + 2\pi\mu(\mathbf{x}).$$

4. *Всюду вне поверхности п.п.с. является гармонической функцией;*

5. *П.п.с. исчезает на бесконечности:*
$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} v(\mathbf{x}) = 0.$$

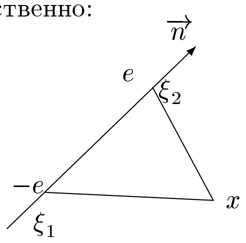
Определение. *Пусть S — двусторонняя ограниченная поверхность Ляпунова, $\nu(\boldsymbol{\xi})$ — непрерывная ограниченная на S функция. Интеграл*[53]
$$w(\mathbf{x}) \equiv \iint\limits_S \nu(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right) dS_{\boldsymbol{\xi}} \tag{11.86}$$
называется потенциалом двойного слоя с поверхностной плотностью $\nu(\boldsymbol{\xi})$.

[53]Дифференцирование под знаком интеграла производится по переменной $\boldsymbol{\xi}$ в направлении нормали к границе в этой точке.

Свойства потенциала двойного слоя (п.д.с.).

1. *Физический смысл п.д.с.*

   Рассмотрим потенциал, создаваемый в пространстве *конечным диполем*, состоящим из зарядов $\pm e$, находящихся в точках $\boldsymbol{\xi}_2$ и $\boldsymbol{\xi}_1$, соответственно:

   В точке $\mathbf{x}$ пространства суммарный потенциал равен

   $$W_h(\mathbf{x}) = \frac{e}{r_{x\xi_2}} - \frac{e}{r_{x\xi_1}}. \qquad (11.87)$$

   Пусть расстояние h между зарядами неограниченно уменьшается, а сами заряды растут так, чтобы *дипольный момент* $\nu \equiv eh$ оставался постоянным. В пределе (11.87) переходит в т.н. *потенциал точечного диполя*:

   $$\begin{gathered} W(\mathbf{x}) = \lim_{h\to 0} e\left(\tfrac{1}{r_{x\xi_2}} - \tfrac{1}{r_{x\xi_1}}\right) = \\ = \lim_{h\to 0} eh\, \tfrac{\partial}{\partial n}\left(\tfrac{1}{r_{x\xi}}\right)\Big|_{\xi=\xi^*} = \nu \tfrac{\partial}{\partial n}\left(\tfrac{1}{r_{x\xi}}\right), \end{gathered} \qquad (11.88)$$

   где $\vec{n}$ — направление дипольного момента (от отрицательного к положительному заряду). Сравнивая (11.88) и (11.86), можно прийти к следующей интерпретации потенциала двойного слоя: это потенциал, создаваемый в пространстве слоем диполей, ориентированных по нормали к поверхности и "размазанных" по ней с поверхностной плотностью $\nu(\boldsymbol{\xi})$. Последнее означает, что суммарный дипольный момент бесконечно малой площадки поверхности $dS_{\boldsymbol{\xi}}$ равен $\nu(\boldsymbol{\xi})\,dS_{\boldsymbol{\xi}}$.

2. *Вторая форма представления п.д.с.*

   Пусть $\mathbf{x}$ — фиксированная точка пространства, лежащая вне поверхности, $\boldsymbol{\xi}$ — текущая точка поверхности, $\vec{\mathbf{r}}$ — радиус-вектор, направленный из точки $\mathbf{x}$ в точку $\boldsymbol{\xi}$.

   Имеем

   $$\begin{gathered} \tfrac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial n} = \vec{\mathbf{n}}, \\ r^2 = \langle \vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{r}} \rangle \Rightarrow r\tfrac{\partial r}{\partial n} = \left\langle \vec{\mathbf{r}}, \tfrac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial n} \right\rangle \Rightarrow \\ \tfrac{\partial r}{\partial n} = \left\langle \tfrac{\vec{\mathbf{r}}}{r}, \vec{n} \right\rangle = -\cos\varphi, \end{gathered}$$

   где φ — угол между вектором нормали к поверхности в точке $\boldsymbol{\xi}$ и вектором $-\vec{\mathbf{r}}$. Отсюда

   $$\begin{gathered} \tfrac{\partial}{\partial n}\left(\tfrac{1}{r}\right) = -\tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial r}{\partial n} = \tfrac{\cos\varphi}{r^2}, \\ \tfrac{\partial}{\partial n}\left(\tfrac{1}{r}\right) dS_\xi = \tfrac{\cos\varphi\, dS_\xi}{r^2} \equiv d\omega_{x\xi} = \pm\left|d\omega_{x\xi}\right|. \end{gathered}$$

   Величина $|d\omega_{x\xi}|$ имеет простой геометрический смысл — это телесный угол, под которым элемент поверхности dS_ξ виден из точки x.

Дифференциал $d\omega_{x\xi} = |d\omega_{x\xi}|$, если из точки $\mathbf{x}$ видна внешняя сторона поверхности, и $d\omega_{x\xi} = -|d\omega_{x\xi}|$ в противном случае.

В итоге получаем ещё одно представление для потенциала двойного слоя:

$$w(\mathbf{x}) = \iint\limits_S \nu(\boldsymbol{\xi})\, d\omega_{x\xi}.$$

3. *П.д.с. определён всюду в* $\mathbf{R}^3$.

4. *П.д.с. непрерывен всюду в пространстве, за исключением точек поверхности, где он терпит разрыв первого рода:*

$$\begin{gathered} w_i(\mathbf{x}) \equiv \lim_{\substack{\xi \to \mathbf{x} \\ \xi \in i}} w(\boldsymbol{\xi}) = w(\mathbf{x}) - 2\pi\nu(\mathbf{x}), \\ w_e(\mathbf{x}) \equiv \lim_{\substack{\xi \to \mathbf{x} \\ \xi \in e}} w(\boldsymbol{\xi}) = w(\mathbf{x}) + 2\pi\nu(\mathbf{x}), \\ w_e - w_i = 4\pi\nu(\mathbf{x}). \end{gathered}$$

5. *Вне поверхности п.д.с. является гармонической функцией.*

6. *П.д.с. исчезает на бесконечности.*

Гауссов потенциал.

В том частном случае, когда $\nu(\boldsymbol{\xi}) \equiv \nu_0 = const$ потенциал двойного слоя называется *гауссовым*:

$$w(\mathbf{x}) = \nu_0 \iint\limits_S d\omega_{x\xi}.$$

Для замкнутой ограниченной поверхности, обладающей тем свойством, что любой луч пересекает её конечное число раз, гауссов потенциал легко вычисляется:

$$w(\mathbf{x}) = \begin{cases} -4\pi\nu_0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ -2\pi\nu_0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Для сферической поверхности это легко вытекает из второго представления п.д.с.. Для произвольной поверхности достаточно заметить, что телесный угол $|d\omega_{x\xi}|$, под которым виден элемент поверхности не зависит от самой поверхности, а величина $d\omega_{x\xi}$ под знаком интеграла попеременно на разных кусках поверхности, которую пересекает соответствующий луч, равна $\pm|d\omega_{x\xi}|$, так что в итоге в сумме остаётся $-|d\omega_{x\xi}|$.

Замечание. В случае плоской области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ потенциалы вводятся соответственно по формулам:

$$u(\mathbf{x}) = \iint\limits_\Omega \rho(\boldsymbol{\xi}) \ln\frac{1}{r_{x\xi}}\, d\boldsymbol{\xi},$$

$$v(\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_C \mu(\boldsymbol{\xi}) \ln\frac{1}{r_{x\xi}}\, dl_{\boldsymbol{\xi}},$$

$$w(\mathbf{x}) = \int\limits_C \nu(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right) dl_\xi =$$
$$= \int\limits_C \nu(\boldsymbol{\xi}) \frac{\cos\varphi}{r_{x\xi}} dl_{\boldsymbol{\xi}} = \int\limits_C \nu(\boldsymbol{\xi})\, d\omega_{x\xi}.$$

Здесь $|d\omega_{x\xi}|$ — линейный угол, под которым элемент дуги dl_ξ виден из точки $\mathbf{x}$. Свойства потенциалов в плоской области вполне аналогичны свойствам соответствующих потенциалов в трёхмерных областях. Укажем отличия:

1. потенциалы не исчезают на бесконечности;
2. скачки производной п.п.с. и п.д.с. на дуге C вдвое меньше, чем в пространственном случае на поверхности S, и равны соответственно $-2\pi\mu(\mathbf{x})$ и $2\pi\nu(\mathbf{x})$.

Применение потенциалов для решения краевых задач.

Использование потенциалов для решения краевых задач основано на их свойствах, и заключается в представлении решения рассматриваемой задачи в форме некоторого потенциала с заранее неизвестной плотностью заряда. После подстановки этого потенциала в уравнение получаем с учётом граничных условий интегральное уравнение для плотности заряда. В ряде случаев решить интегральное уравнение оказывается проще, чем исходную краевую задачу.

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. *Задача Дирихле для уравнения Пуассона в пространственной области*:

$$\begin{cases} \triangle u = f(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^3 \\ u|_{\partial\Omega} = \alpha(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Ищем решение задачи $u(\cdot) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ в виде суммы функций $u = u_1 + u_2$, где $\triangle u_1 = f$, а

$$\begin{cases} \triangle u_2 = 0, \\ u_2|_{\partial\Omega} = \alpha(\mathbf{x}) - u_1(\mathbf{x}) \equiv \tilde{\alpha}(\mathbf{x}). \end{cases}$$

В качестве u_1 можно взять, например, объёмный потенциал

$$u_1(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_\Omega \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{r_{x\xi}} d\boldsymbol{\xi}$$

(см. свойство 4 объёмных потенциалов).

Функцию u_2 внутри области Ω ищем в виде потенциала двойного слоя, расположенного по границе области

$$u_2(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) \equiv \iint\limits_{\partial\Omega} \nu(\xi) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right) dS_\xi.$$

Граничное условие для функции u_2 в силу её непрерывности в замыкании области даёт:

$$u_2(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\xi\to\mathbf{x}\\ \xi\in i}} u_2(\boldsymbol{\xi}) = m_{\substack{\xi\to\mathbf{x}\\ \xi\in i}} w(\boldsymbol{\xi}) \equiv$$
$$\equiv w_i(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) - 2\pi\nu(\mathbf{x}) = \tilde{\alpha}(\mathbf{x}) \ \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

(см. свойство 4 потенциала двойного слоя). Отсюда получаем интегральное уравнение

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \nu\left(\boldsymbol{\xi}\right)\, d\omega_{x\xi} - 2\pi\nu\left(\mathbf{x}\right) = \tilde{\alpha}\left(\mathbf{x}\right)$$

для определения неизвестной плотности дипольного слоя.

Пример 2. *Задача Неймана для уравнения Лапласа в пространственной области*:

$$\begin{cases} \triangle u = 0,\ \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \beta. \end{cases}$$

Решение задачи $u\left(\cdot\right) \in C^2\left(\Omega\right) \cap C^1\left(\bar{\Omega}\right)$ внутри области ищем в виде потенциала простого слоя, сосредоточенного на поверхности:

$$u\left(\mathbf{x}\right) = v\left(\mathbf{x}\right) \equiv \iint\limits_{\partial\Omega} \mu\left(\xi\right) \frac{1}{r_{x\xi}}\, dS_\xi.$$

Из граничного условия получаем: $\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial n}\left(\mathbf{x}\right) = \lim_{\substack{\xi\to\mathbf{x}\\ \xi\in i}} \tfrac{\partial u}{\partial n}\left(\boldsymbol{\xi}\right) = \lim_{\substack{\xi\to\mathbf{x}\\ \xi\in i}} \tfrac{\partial v}{\partial n}\left(\boldsymbol{\xi}\right) \equiv \\ \equiv \left(\tfrac{\partial v}{\partial n}\right)_i\left(\mathbf{x}\right) = \tfrac{\partial v}{\partial n}\left(\mathbf{x}\right) + 2\pi\mu\left(\mathbf{x}\right) = \beta\left(\mathbf{x}\right). \end{aligned}$$

Отсюда имеем интегральное уравнение

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \mu\left(\boldsymbol{\xi}\right) \frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right) dS_\xi + 2\pi\mu\left(\mathbf{x}\right) = \beta\left(\mathbf{x}\right)$$

для определения неизвестной плотности заряда μ. Отметим, что дифференцирование под знаком интеграла производится по нормали к поверхности в точке $\mathbf{x}$.

Пример 3. *Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге*:

$$\begin{cases} \triangle u\left(\mathbf{x}\right) = 0,\ \mathbf{x} \in R^2,\ |\mathbf{x}| < R, \\ u\big|_{|\mathbf{x}|=R} = \alpha\left(\mathbf{x}\right). \end{cases}$$

Как и в первом примере, ищем решение в виде потенциала двойного слоя

$$u\left(\mathbf{x}\right) = w\left(\mathbf{x}\right) \equiv \int\limits_C \nu\left(\boldsymbol{\xi}\right)\, d\omega_{x\xi}.$$

Для плотности дипольного слоя получаем из граничных условий интегральное уравнение (см. сделанные выше замечания о свойствах потенциалов в плоском случае):

$$\int\limits_C \nu\left(\boldsymbol{\xi}\right)\, d\omega_{x\xi} - \pi\nu\left(\mathbf{x}\right) = \alpha\left(\mathbf{x}\right).$$

Для элемента плоского угла $d\omega_{x\xi}$ легко (учитывая, что точка $\mathbf{x}$ лежит на окружности) получить по теореме синусов

$$d\omega_{x\xi} = \frac{\cos\varphi\, dl_\xi}{r_{x\xi}} = -\frac{dl_\xi}{2R},$$

следовательно, интегральное уравнение принимает вид

$$\frac{1}{2R}\int\limits_{C}\nu\left(\boldsymbol{\xi}\right)\,dl_{\xi}+\pi\nu\left(\mathbf{x}\right)=-\alpha\left(\mathbf{x}\right). \tag{11.89}$$

Будем искать решение этого вырожденного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода (см. раздел 13.1) в виде суммы

$$\nu\left(\mathbf{x}\right)=A-\frac{\alpha\left(\mathbf{x}\right)}{\pi},$$

где A — постоянная. После подстановки данной функции в (11.89) получаем

$$\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{C}\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)\,dl_{\xi}-\pi A+\alpha\left(\mathbf{x}\right)-\pi A=\alpha\left(\mathbf{x}\right),$$

откуда

$$A=\tfrac{1}{4\pi^2 R}\int\limits_{C}\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)\,dl_{\xi},$$

$$\nu\left(\mathbf{x}\right)=\tfrac{1}{\pi}\left[\tfrac{1}{4\pi R}\int\limits_{C}\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)\,dl_{\xi}-\alpha\left(\mathbf{x}\right)\right],$$

$$\begin{aligned}u\left(\mathbf{x}\right)&=\int\limits_{C}\nu\left(\xi\right)\,d\omega_{x\xi}=\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{C}\left[\tfrac{1}{4\pi R}\int\limits_{C}\alpha\left(\xi\right)dl_{\xi}-\alpha\left(\xi\right)\right]\,d\omega_{x\xi}=\\&=\tfrac{1}{4\pi^2 R}\int\limits_{C}\alpha\left(\xi\right)\,dl_{\xi}\underbrace{\int\limits_{C}d\omega_{x\xi}}_{-2\pi}-\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{C}\alpha\left(\xi\right)\,d\omega_{x\xi}=\\&=-\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{C}\left(\tfrac{\cos\varphi}{r_{x\xi}}+\tfrac{1}{2R}\right)\alpha\left(\xi\right)\,dl_{\xi}=-\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{C}\left(\tfrac{2r_{x\xi}R\cos\varphi+r_{x\xi}^2}{2Rr_{x\xi}^2}\right)\alpha\left(\xi\right)\,dl_{\xi}.\end{aligned}$$

Переходя в последнем интеграле к полярной системе координат (ρ,θ), получим окончательное представление для решения задачи

$$u\left(\rho,\psi\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\left(R^2-\rho^2\right)\alpha\left(R\theta\right)\,d\theta}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\left(\theta-\psi\right)}$$

(*формула Пуассона*).

Пример 4. *Задача Дирихле для уравнения Лапласа в верхнем полупространстве*:

$$\begin{cases}\triangle u\left(\mathbf{x}\right)=0,\ \mathbf{x}\in\Omega\equiv\left\{x_3>0\right\},\\ u\left.\right|_{x_3=0}=\alpha\left(\mathbf{x}\right).\end{cases}$$

Решение задачи ищем в виде потенциала двойного слоя

$$u\left(\mathbf{x}\right)=\iint\limits_{\partial\Omega}\nu\left(\xi\right)d\omega_{x\xi}=\iint\limits_{R^2}\nu\left(\xi_1,\xi_2\right)\frac{\cos\varphi}{r_{x\xi}^2}d\xi_1 d\xi_2.$$

Имеем

$$\cos\varphi=\left.\frac{\xi_3-x_3}{r_{x\xi}}\right|_{\xi_3=0}=-\frac{x_3}{r_{x\xi}},$$

поэтому $\cos\varphi = 0$ при $x_3 = 0$, а соответствующее интегральное уравнение вырождается:

$$\iint\limits_{R^2} \nu(\xi_1,\xi_2) \underbrace{\frac{\cos\varphi}{r_{x\xi}^2}}_{\equiv 0} d\xi_1 d\xi_2 - 2\pi\nu(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu(\mathbf{x}) = -\tfrac{\alpha(\mathbf{x})}{2\pi},\ \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Поэтому

$$u(\mathbf{x}) = \iint\limits_{\partial\Omega} \nu(\boldsymbol{\xi})\, d\omega_{x\xi} = \frac{x_3}{2\pi} \iint\limits_{R^2} \frac{\alpha(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2}{\left[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + x_3^2\right]^{3/2}}.$$

Часть III

ИНТЕГРАЛЪНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 12

Классификация линейных интегральных уравнений

Принято делить интегральные уравнения на *линейные* и *нелинейные*. Среди последних выделяют отдельные уравнения, называемые обычно по имени автора: *уравнение Урысона*[1], *уравнение Гаммерштейна*[2] и т.д. Линейные уравнения делятся по *родам*.

Общий вид линейного интегрального уравнения (*уравнения Фредгольма*[3]) для скалярной функции скалярного аргумента

$$D(x)\, y(x) + \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds = f(x)\,,\ x \in [a,b]\,, \tag{12.1}$$

где $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ — *неизвестная функция*, $f(x)$ — заданная функция (*неоднородный член уравнения*), $K(x,s)$ — заданная функция — *ядро уравнения*. В случае $f(x) \equiv 0$ уравнение называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*. Частный случай уравнения Фредгольма, когда $K(x,s) \equiv 0$ при $s > x$, носит название *уравнения Вольтерра́*[4]:

$$D(x)\, y(x) + \int\limits_a^x K(x,s)\, y(s)\, ds = f(x)\,,\ x \in [a,b]\,. \tag{12.2}$$

Уравнение (12.1) имеет

- *первый род*, если $D(x) \equiv 0$:

$$\int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds = f(x)\,,\ x \in [a,b]\,; \tag{12.3}$$

[1]Советский математик (1898-1924).
[2]Немецкий математик (1888-1945).
[3]Шведский математик (1866-1927).
[4]Ударение на последний слог - итальянский математик (1860-1940).

- *второй род*, если $D(x) \equiv 1$:

$$y(x) + \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds = f(x)\,,\ x \in [a,b]\,; \tag{12.4}$$

- *третий род*, если $D(x) \not\equiv 0$ и $D(x) \not\equiv 1$:

$$D(x)\, y(x) + \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds = f(x)\,,\ x \in [a,b]\,. \tag{12.5}$$

Глава 13

Уравнения Фредгольма второго рода

Рассмотрим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds = f(x)\,,\ x \in [a,b]\,. \tag{13.1}$$

Здесь λ — заданное комплексное число. Ядро [1] данного уравнения $K(x,s)$ и неоднородный член $f(x)$ непрерывны соответственно на замкнутых множествах $[a,b] \times [a,b]$ и $[a,b]$.

Решение ищется в классе всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $y(x)$.

13.1 Уравнения с вырожденным ядром

Так называются уравнения, в которых ядро является *вырожденным*, то есть имеет вид

$$K(x,s) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(s)\,, \tag{13.2}$$

где $\{a_i(x)\,,\ i = \overline{1,n}\}$, $\{b_i(x)\,,\ i = \overline{1,n}\}$ — заданные наборы непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, один из которых, первый для определённости, будем считать линейно независимым.

Подставляя (13.2) в (13.1), убеждаемся в том, что решения вырожденного уравнения следует искать в виде[2]

$$y(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i a_i(x) + f(x) = \lambda \left\langle \vec{C}, \vec{a}(x) \right\rangle + f(x) \tag{13.3}$$

[1] Неточно: ядром в данном случае является $-\lambda K(x,s)$.

[2] При $\lambda = 0$ формула (13.3) даёт единственное решение уравнения $y = f(x)$. Далее считаем $\lambda \neq 0$.

где $\vec{C} \equiv \mathrm{Col}\{C_1, \ldots, C_n\}$ — неизвестный вектор. Подставляя (13.3) в (13.1), получаем

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} C_i a_i(x) + f(x) - \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(s) \cdot \\ \cdot \left(\lambda \sum_{j=1}^{n} C_j a_j(s) + f(s) \right) ds = f(x)$$

или

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \left\{ C_i - \int_a^b b_i(s) \left(\lambda \sum_{j=1}^{n} C_j a_j(s) + f(s) \right) ds \right\} = 0.$$

Отсюда в силу линейной независимости набора функций $\{a_i(x),\ i = \overline{1,n}\}$ получаем уравнения

$$C_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j \alpha_{ij} + \beta_i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - \lambda \alpha_{ij}) C_j = \beta_i,$$

где

$$\alpha_{ij} \equiv \int_a^b b_i(s) a_j(s)\, ds,\ \beta_i \equiv \int_a^b b_i(s) f(s)\, ds.$$

В матричной форме эта линейная система имеет вид

$$A(\lambda) \vec{C} = \vec{\beta},$$

где $A(\lambda) \equiv I - \lambda\alpha = \|\delta_{ij} - \lambda\alpha_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$. Если детерминант $D(\lambda) \equiv \det A(\lambda) \neq 0$, то система имеет единственное решение $\vec{C} = A^{-1}(\lambda)\vec{\beta}$, а решение интегрального уравнения —

$$y(x) = f(x) + \lambda \left\langle \vec{C}, \vec{a} \right\rangle = \\ = f(x) + \lambda \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^{-1}(\lambda) \beta_j a_i(x) = \\ = f(x) + \lambda \int_a^b \Re(x, s, \lambda) f(s)\, ds,$$

где

$$\Re(x, s, \lambda) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^{-1}(\lambda) a_i(x) b_j(s)$$

— *резольвентная функция*[3]. Если же $D(\lambda) = 0$, что возможно лишь для конечного множества комплексных значений $\lambda \in S \equiv \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k,\ k \leq n\}$[4], то существование решения линейной системы зависит от вектора $\vec{\beta}$. Исчерпывающий ответ на этот вопрос дают теоремы Фредгольма, которые будут изложены далее.

Таким образом, интегральные уравнения с вырожденными ядрами сводятся к линейным алгебраическим системам и, в этом смысле, являются

[3]Или просто *резольвента* - "разрешающая" .

[4]Спектр собственных чисел однородного интегрального уравнения.

простейшими среди интегральных уравнений. В то же время, поскольку любое непрерывное ядро может быть сколь угодно точно в равномерной метрике аппроксимировано вырожденным ядром, вырожденные уравнения представляют значительный интерес.

13.2 Существование решения уравнений второго рода

Вводя в рассмотрение интегральный оператор $A : C[a,b] \to C[a,b]$ вида

$$A[y](x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds,$$

запишем уравнение (13.1) в операторной форме:

$$y = A[y] + f. \tag{13.4}$$

Прежде чем сформулировать и доказать основные утверждения данного раздела напомним некоторые широко известные понятия и теоремы функционального анализа.

Сжимающие операторы (справка из функционального анализа).

Пусть B — полное нормированное пространство (*пространство Банаха*[5] — *банахово пространство*). Оператор

$$A : B \to B$$

называется *сжимающим* (*сжатием*), если существует число $\gamma \in (0,1)$ (*постоянная сжатия*) такое, что

$$\|A[x]\| \le \gamma \|x\| \ \forall x \in B.$$

Теорема. *Если оператор $A : B \to B$ непрерывен и некоторая его степень A^n является сжатием, то уравнение*

$$y = A[y] + f,$$

где f — заданный элемент пространства B, имеет единственное в B решение. Это решение можно получить методом последовательных приближений:

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n,$$
$$y_{n+1} = A[y_n] + f,\ n = 0, 1, \ldots,$$

используя произвольное начальное приближение $y_0 \in B$.

Применим данную теорему к интегральному уравнению (13.4).

Теорема. *При любом λ, $|\lambda| < (M(b-a))^{-1}$, где $M \equiv \max\limits_{x,s} |K(x,s)|$ уравнение Фредгольма (13.4) имеет единственное непрерывное на отрезке*

[5] Польский математик (1892-1945).

$[a,b]$ решение. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений

$$y_{n+1}(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\, y_n(s)\, ds + f(x)\,,\ n = 0, 1, \ldots,$$

начиная с произвольного начального приближения $y_0(\cdot) \in C[a,b]$. Решение может быть записано в резольвентной форме:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b \Re(x,s,\lambda)\, f(s)\, ds,$$

где $\Re$ — аналитическая по λ в круге $|\lambda| < (M(b-a))^{-1}$ резольвентная функция.

Доказательство. Имеем очевидную оценку

$$\|A[y]\| = \max_{x\in[a,b]} |A[y](x)| = \max_{x\in[a,b]} \left| \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds \right| \le |\lambda|\, M(b-a) \max_{x\in[a,b]} |y(x)| \equiv \gamma \|y\|\,.$$

Так как $\gamma < 1$, то оператор A является сжимающим, и потому уравнение имеет в $C[a,b]$ единственное решение, которое к тому же может быть получено методом последовательных приближений.

Имеем

$$\begin{gathered} y_{n+1} = A[y_n] + f = A[A[y_{n-1}] + f] + f = \ldots = \\ = A^{n+1}[y_0] + \sum_{k=0}^{n} A^k[f] \underset{n\to\infty}{\to} \sum_{k=0}^{\infty} A^k[f] \end{gathered}$$

(сходимость ряда вытекает из оценки $\left\|A^{n+1}[y_0]\right\| \le \gamma^n \|y_0\|$). Далее,

$$\begin{gathered} A[f](x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\, f(s)\, ds, \\ A^2[f](x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\, \lambda \left(\int_a^b K(s,t)\, f(t)\, dt \right) ds = \\ = \lambda^2 \int_a^b K_2(x,t)\, f(t)\, dt, \\ K_2(x,t) \equiv \int_a^b K(x,s)\, K(s,t)\, ds. \end{gathered}$$

Аналогично

$$\begin{gathered} A^n[f](x) = \lambda^n \int_a^b K_n(x,t)\, f(t)\, dt, \\ K_n(x,t) = \int_a^b K(x,s)\, K_{n-1}(s,t)\, ds. \end{gathered}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k [f](x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} A^k [f](x) =$$
$$= f(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,t) \right) f(t)\, dt \equiv$$
$$\equiv f(x) + \lambda \int_a^b \Re(x,t,\lambda) f(t)\, dt.$$

Резольвента $\Re(x,t,\lambda)$ является аналитической функцией в круге $|\lambda| < (M(b-a))^{-1}$ и может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость за исключением отдельных λ_i, которые являются собственными числами однородного интегрального уравнения.

13.3 Существование решения уравнения Вольтерра

Теорема. *При любом λ уравнение Вольтерра*

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$$

имеет единственное решение. Это решение всегда может быть найдено методом последовательных приближений

$$y_{n+1}(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)\, y_n(s)\, ds + f(x), \ n = 0, 1, \ldots, \tag{13.5}$$

исходя из произвольного начального приближения $y_0(x)$, и записано в резольвентной форме

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \Re(x,s,\lambda) f(s)\, ds,$$

где резольвентная функция $\Re(x,t,\lambda)$ является аналитической на всей комплексной плоскости.

Доказательство. Покажем, что некоторая степень оператора

$$A[y] \equiv \lambda \int_a^x K(x,s)\, y(s)\, ds$$

является сжатием. Имеем

$$|A[y]|(x) = \left| \lambda \int_a^x K(x,s)\, y(s)\, ds \right| \le |\lambda|\, M(x-a)\, \|y\|,$$
$$\left|A^2[y]\right|(x) = |A[A[y]]|(x) \le |\lambda| \left| \int_a^x |K(x,s)|\, |A[y]|(s)\, ds \right| \le$$
$$\le |\lambda|^2 M^2 \|y\| \int_a^x (s-a)\, ds = |\lambda M|^2 \tfrac{(x-a)^2}{2!},$$
$$,\ldots,$$
$$\|A^m[y]\| = \max_x |A^m[y]|(x) \le \tfrac{(|\lambda|(b-a))^m}{m!} \|y\| \equiv \gamma_m \|y\|,$$

где

$$\gamma_m = \frac{L^m}{m!} \underset{m\to\infty}{\to} 0 \ \left(L \equiv |\lambda|\, M\,(b-a)\,,\ M \equiv \max|K|\right).$$

Поэтому некоторая достаточно высокая степень оператора A является сжатием, что и доказывает теорему.

Пример. Решим различными способами уравнение Вольтерра

$$y\,(x) = \int\limits_0^x (x-s)\,y\,(s)\ ds + x^2. \tag{13.6}$$

Способ 1. Дифференцируя (13.6) дважды, получаем дифференциальное уравнение

$$y'' = y + 2.$$

Отсюда, учитывая, что $y'\,(0) = y\,(0) = 0$, получаем

$$y\,(x) = 2\,(\operatorname{ch} x - 1)\,.$$

Способ 2. Применим к уравнению (13.6) метод последовательных приближений (13.5). Пусть $y_0\,(x) \equiv 0$. Тогда

$$y_1\,(x) \equiv \int\limits_0^x (x-s)\,y_0\,(s)\ ds + x^2 \equiv x^2,$$

$$y_2\,(x) \equiv \int\limits_0^x (x-s)\,y_1\,(s)\ ds + x^2 \equiv 2\left(\tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!}\right),$$

$$,\ldots,$$

$$y_{n+1}\,(x) \equiv \int\limits_0^x (x-s)\,y_n\,(s)\ ds + x^2 \equiv 2\left(\tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \ldots + \tfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right),$$

$$,\ldots,$$

$$y\,(x) = \lim_{n\to\infty} y_n\,(x) = 2\,(\operatorname{ch} x - 1)\,.$$

Способ 3. Запишем решение в резольвентной форме

$$y\,(x) = f\,(x) + \lambda \int\limits_0^x \Re\,(x,s,\lambda)\,f\,(s)\ ds =$$

$$= x^2 + \lambda \int\limits_0^x \Re\,(x,s,\lambda)\,s^2\,ds,$$

$$\Re\,(x,s,\lambda) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n\,(x,s)\,.$$

Итерированные ядра K_n находятся по формулам

$$K_1\,(x,s) \equiv x - s,$$

$$K_2\,(x,s) = \int\limits_a^b K\,(x,t)\,K_1\,(t,s)\ dt = \int\limits_s^x (x-t)\,(t-s)\,dt = \tfrac{(x-s)^3}{3!},$$

$$,\ldots,$$

$$K_n\,(x,s) = \tfrac{(x-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Поэтому

$$\Re\,(x,s,\lambda) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n\,(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{\lambda}(x-s)\right)^{2n-1}}{\sqrt{\lambda}(2n-1)!} = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}(x-s)}{\sqrt{\lambda}},$$

$$y\,(x) = x^2 + \int\limits_0^x \Re\,(x,s,1)\,s^2 ds = x^2 + \int\limits_0^x \operatorname{sh}\,(x-s)\,s^2 ds = 2\,(\operatorname{ch} x - 1)\,.$$

13.4 Численные методы решения интегральных уравнений

- *Метод последовательных приближений:*

$$y_{n+1}(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)\, y_n(s)\; ds + f(x)\,,\ n = 0, 1, \ldots$$

- *Метод сведения к вырожденному уравнению:*

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(s) + R_n(x)\,,$$

  где остаток $R_n(x)$ может быть произвольно мал в равномерной метрике за счёт повышения порядка n соответствующей линейной системы.

- *Метод сеток:* замена интеграла в уравнении одной из квадратурных формул для выбранной сетки $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subset [a,b]$ с последующим решением линейной системы для нахождения сеточной функции, служащей приближением решения уравнения.

13.5 Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений второго рода

Рассмотрим произвольное *неоднородное* интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s)\; ds = f(x) \quad (\text{НУ}).$$

Соответствующее ему *однородное* уравнение имеет вид

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s)\; ds = 0 \ \ (\text{ОУ}).$$

Уравнение, полученное из (ОУ) перестановкой аргументов в ядре, называется *союзным* (или *сопряжённым*) с ним:

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(s,x)\, y(s)\; ds = 0 \ \ (\text{СОУ}).$$

Определение. *Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется собственным числом однородного уравнения (ОУ), если при нём это уравнение имеет нетривиальное решение — собственную функцию (ОУ).*[6]

[6] Из определения следует, что собственное число $\lambda \neq 0$.

Первая теорема Фредгольма. *При любом λ, не являющимся собственным числом (ОУ), неоднородное уравнение (НУ) имеет единственное решение.*

(без доказательства)

Вторая теорема Фредгольма. *(ОУ) и (СОУ) имеют одни и те же собственные числа. Если λ — собственное число, то (ОУ) и (СОУ) имеют одинаковое (конечное) число линейно независимых решений*[7].

(без доказательства)

Третья теорема Фредгольма. *Если λ — собственное число (ОУ), то (НУ) имеет решение тогда и только тогда, когда неоднородный член этого уравнения $f(x)$ ортогонален всем собственным функциям (СОУ), отвечающим этому λ:*

$$\langle \varphi_k, f\rangle = \int\limits_a^b \varphi_k(x) f(x)\, dx = 0\ \forall k = \overline{1,N}.$$

Доказательство (только необходимости). Имеем

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x),$$
$$\varphi_k(x) = \lambda \int\limits_a^b K(s,x)\, \varphi_k(s)\, ds.$$

Поэтому

$$\begin{gathered}\langle y, \varphi_k\rangle = \int\limits_a^b y(x)\, \varphi_k(x)\, ds = \int\limits_a^b f(x)\, \varphi_k(x)\, dx + \\ +\lambda \int\limits_a^b \varphi_k(x) \int\limits_a^b K(s,x)\, y(s)\, dsdx = \langle f, \varphi_k\rangle + \\ +\lambda \int\limits_a^b y(s) \int\limits_a^b K(s,x)\, \varphi_k(x)\, dxds = \langle f, \varphi_k\rangle + \langle y, \varphi_k\rangle \\ \Rightarrow \langle f, \varphi_k\rangle = 0.\end{gathered}$$

Замечание. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{k=1}^{N} C_k \psi_k(x),$$

где $y_0(x)$ — (частное) решение (НУ), $\{\psi_k(x)\}_{k=\overline{1,N}}$ — линейно независимый набор решений (ОУ), N — максимальное число линейно независимых решений (ОУ).

[7] В отличие от собственных чисел собственные функции ОУ и СОУ в общем случае различны.

Глава 14

Спектральная теория уравнений Фредгольма с симметричными ядрами

Определение. *Ядро интегрального уравнения называется симметричным, если оно удовлетворяет тождеству*

$$K(x,s) \equiv K(s,x).$$

Теорема. *Однородное интегральное уравнение с симметричным ядром имеет хотя бы одно собственное число*

(без доказательства).

14.0.1 Свойства собственных чисел и собственных функций интегральных уравнений с симметричными ядрами

1. *Если y_k, $k=\overline{1,N}$ — собственные функции, отвечающие одному и тому же собственному числу λ, то произвольная их линейная комбинация либо тождественно равна нулю, либо является собственной функцией, отвечающей тому же собственному числу λ.*

2. *Собственные функции, отвечающие различным собственным числам, взаимно ортогональны.*

   Доказательство. Пусть $\lambda_1 \leftrightarrow y_1$, $\lambda_2 \leftrightarrow y_2$,

$$y_{1,2}(x) = \lambda_{1,2} \int_a^b K(x,s)\, y_{1,2}(s)\, ds$$

   После умножения этих уравнений на $y_{2,1}(x)/\lambda_{1,2}$ и интегрирования по

x, получаем в силу симметрии ядра

$$\left(\tfrac{1}{\lambda_2}-\tfrac{1}{\lambda_1}\right)\langle y_1,y_2\rangle=\int\limits_a^b y_2(x)\,dx\int\limits_a^b K(x,s)\,y_1(s)\,ds-$$
$$-\int\limits_a^b y_1(x)\,dx\int\limits_a^b \underbrace{K(x,s)}_{\equiv K(s,x)}y_2(s)\,ds=0.$$

Отсюда, так как $\lambda_1\neq\lambda_2$, получаем $\langle y_1,y_2\rangle=0$, что и требовалось доказать.

3. *Все собственные числа вещественны.*

   Доказательство. Допустим, что λ — комплексное собственное число, $\lambda\neq\bar{\lambda}$. Применяя операцию комплексного сопряжения к обеим частям однородного интегрального уравнения, получаем, что соответствующая собственная функция отвечает сразу двум различным собственным числам. Но тогда по предыдущему пункту она ортогональна сама себе:

$$\langle y,y\rangle=\int\limits_a^b |y(x)|^2\,dx=0\Rightarrow y(x)\equiv 0,$$

   что противоречит условию нетривиальности собственной функции. Следовательно, все собственные числа вещественны.

4. *Любой ограниченный промежуток прямой содержит конечное (возможно пустое) множество собственных чисел.*

   Доказательство. Пусть в некотором ограниченном промежутке $[A,B]$ содержится бесконечный набор собственных чисел $\{\lambda_n\}$. Соответствующий набор собственных функций $\{\varphi_n\}$ можно считать ортонормированным. Разложим ядро уравнения $K(x,s)$ при фиксированном x в обобщённый ряд Фурье по ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$:

$$K(x,s)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x)\,\varphi_n(s),$$
$$c_n(x)=\langle K(x,s),\varphi_n(s)\rangle=\int\limits_a^b K(x,s)\,\varphi_n(s)\,ds=\tfrac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}.$$

   По неравенству Бесселя[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2}\leq\int\limits_a^b K^2(x,s)\,ds.$$

   Интегрируя последнее неравенство по x и учитывая нормировку собственных функций, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\leq\int\limits_a^b\int\limits_a^b K^2(x,s)\,dsdx.$$

[1] Немецкий астроном (1784-1846).

Таким образом, ряд в левой части неравенства сходится, и потому его общий член

$$\frac{1}{\lambda_n^2} \to 0 \Rightarrow \lambda_n \to \infty,$$

что противоречит исходному предположению.

Следствие. *Собственные числа интегрального уравнения можно пронумеровать в порядке роста их абсолютных значений:*

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_n| \leq \ldots$$

Если спектр бесконечен, то $|\lambda_n| \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

5. *Любому собственному числу отвечает конечное число линейно независимых собственных функций*[2].

Доказательство. Пусть собственному числу λ отвечает бесконечная система линейно независимых собственных функций. Считая её ортонормированной[3], разложим ядро уравнения $K(x,s)$ при фиксированном x в обобщённый ряд Фурье по ортонормированной системе $\{\varphi_n(s)\}$:

$$K(x,s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\,\varphi_n(s),$$
$$c_n(x) = \langle K(x,s), \varphi_n(s)\rangle = \tfrac{\varphi_n(x)}{\lambda}.$$

По неравенству Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{\varphi_n(x)}{\lambda}\right)^2 =$$
$$= \tfrac{1}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(x) \leq \int_a^b K^2(x,s)\, ds.$$

Отсюда $\forall p$

$$\frac{p}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\int_a^b \sum_{n=1}^{p} \varphi_n^2(x)\, dx \leq \int_a^b\int_a^b K^2(x,s)\, dxds,$$

что, очевидно, невозможно. Следовательно, исходное предположение неверно.

6. *Спектр уравнения конечен тогда и только тогда, когда ядро вырождено.*

Достаточность утверждения очевидна. Доказательство необходимости опускаем.

Следствие. Спектр уравнения с невырожденным ядром бесконечен, причём $|\lambda_n| \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

[2]Иными словами, линейная оболочка множества собственных функций, отвечающих любому собственному числу - *собственное подпространство* - конечномерна.

[3]Любую линейно независимую систему можно подвергнуть процедуре ортогонализации и получить из неё ортогональную систему функций, являющихся линейными комбинациями исходных функций.

7. **Теорема Гильберта-Шмидта**[4]**.** *Если функция $F(x)$ истокопредставима,*

$$F(x) = \int_a^b K(x,s)\,h(s)\,ds,$$

где $K(x,s)$ — невырожденное симметричное ядро, $h(x)$ — кусочно-непрерывная функция источника, то она разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье по ортонормированной системе собственных функций однородного интегрального уравнения (ОУ):

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \varphi_n(x),$$
$$F_n \equiv \langle F, \varphi_n \rangle = \int_a^b F(x)\,\varphi_n(x)\,dx.$$

(без доказательства).

В качестве **примера** применения данной теоремы приведём представление решения неоднородного уравнения Фредгольма в виде ряда по собственным функциям однородного уравнения. Пусть в уравнении

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds + f(x)$$

число λ не принадлежит спектру однородного уравнения. Тогда по теореме Гильберта-Шмидта истокопредставимая функция

$$\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} C_k y_k(x).$$

Поэтому

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} C_k y_k(x)$$

и после подстановки данного выражения в уравнение имеем

$$f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} C_k y_k(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) \left[f(s) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} C_k y_k(s) \right] ds =$$
$$= f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} f_k \frac{y_k(x)}{\lambda_k} + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{y_k(x)}{\lambda_k},$$

$$C_k = \frac{f_k}{\lambda_k} + \lambda \frac{C_k}{\lambda_k} \Rightarrow C_k = \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \Rightarrow$$
$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k y_k(x)}{\lambda_k - \lambda}.$$

Здесь $f_k = \lambda_k B_k$, B_k - коэффициенты в разложении истокопредставимой функции

$$\int_a^b K(x,s)\,f(s)\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} B_n y_n(x).$$

[4]Гильберт Давид (1862-1943), Шмидт Эрхард (1876-1959)- немецкие математики.

Глава 15

Задача Штурма-Лиувилля и интегральные уравнения

15.1 Функция Грина краевой задачи

Спектральная теория интегральных уравнений является в определённом смысле более общей теорией по сравнению со спектральной теорией дифференциальных операторов. В частности, все основные результаты, полученные нами для задачи Штурма-Лиувилля в разделе 11.1.5 могут быть выведены из результатов настоящей главы.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} L(y) = f(x), \ x \in (0,l) \\ y(0) = y(l) = 0, \end{cases} \tag{15.1}$$

где

$$L(y) \equiv q(x)\, y - \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)$$

— дифференциальный оператор из раздела 11.1.5.

Определение. *Функцией Грина*[1] *задачи* (15.1) *называется решение краевой задачи*

$$\begin{cases} L(G) = \delta(x-z), \ x \in (0,l) \\ G(0,z) = G(l,z) = 0, \end{cases}$$

где z — фиксированная точка интервала $(0,l)$.

15.1.1 Свойства функции Грина

1. $G(x,z)$ *симметрична относительно перестановки аргументов:*

$$G(z_1,z_2) \equiv G(z_2,z_1) \ \forall z_1, z_2$$

Доказательство. Воспользуемся самосопряжённостью оператора L. Пусть $y_1(x) \equiv G(x,z_1)$, $y_2(x) \equiv G(x,z_2)$, где $z_{1,2} \in (0,l)$.

[1] Грин Джордж (1793-1841) - английский математик и физик.

Тогда

$$\begin{gathered}\langle L(y_1), y_2\rangle = \langle L(y_2), y_1\rangle \Leftrightarrow \\ \langle \delta(x-z_1), G(x,z_2)\rangle = \langle \delta(x-z_2), G(x,z_1)\rangle \Leftrightarrow \\ G(z_1,z_2) = G(z_2,z_1).\end{gathered}$$

2. *$G(x,z)$ непрерывна по (x,z), а $G'_x(x,z)$ непрерывна при $x \neq z$ и имеет разрыв первого рода при $x = z$.*

   (без доказательства)

3. **Теоремы Гильберта** (1-ая и 2-ая): *функция $y(x)$ является решением краевой задачи (15.1) тогда и только тогда, когда её можно представить в виде интеграла*

$$y(x) = \int\limits_0^l G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

   (без доказательства)

   Следствие. *Функция $y(x)$ является собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля*[2]*, отвечающей собственному числу λ,*

$$\begin{cases} L(y) = \lambda y, \\ y(0) = y(l) = 0, \end{cases}$$

   тогда и только тогда, когда она является собственной функцией интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^l G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi.$$

Из последнего замечания вытекает возможность вывода свойств спектра задачи Штурма-Лиувилля из соответствующих свойств спектра интегрального уравнения с симметричным ядром. В качестве примера этого получим теорему Стеклова, доказанную нами в разделе 11.1.5 как следствие теоремы Гильберта-Шмидта.

Пусть $f(\cdot) \in C^2(0,l)$, $f(0) = f(l) = 0$. Обозначим $h \equiv L(f)$. Тогда по первой теореме Гильберта

$$f(x) = \int\limits_0^l G(x,\xi)\, h(\xi)\, d\xi,$$

а по теореме Гильберта-Шмидта (примененной к истокопредставимой функции $f(\cdot)$) данная функция разлагается в ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k y_k(x)$$

[2] Штурм Жан Шарль Франсуа (1803-1855), Лиувилль Жозеф (1809-1882) - французские математики.

по собственным функциям интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^l G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi,$$

который сходится абсолютно и равномерно. Учитывая сделанное выше замечание о связи данного интегрального уравнения с задачей Штурма-Лиувилля, получаем отсюда теорему Стеклова[3]: любая функция $f(\cdot) \in C^2(0, l)$, $f(0) = f(l) = 0$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

КОНЕЦ КУРСА[4] (около 30 лекций)

[3] Стеклов Владимир Андреевич (1864-1926) - русский математик.

[4] **Ура!!**

Часть IV

ПРИЛОЖЕНИЯ

Вопросы к экзаменам

.1 Вопросы к коллоквиуму по вариационному исчислению

1. Простейшая задача вариационного исчисления (A). Вывод необходимых условий эстремума (краевая задача Эйлера, условия Лежандра). Интегралы уравнения Эйлера.

2. Основная лемма вариационного исчисления.

3. Принцип Ферма, задача о брахистохроне.

4. Вариационная задача на классе векторных функций (B).

5. Вариационная задача на классе функций со старшими производными (C).

6. Вариационная задача на классе функций многих переменных (E). Вывод уравнений колебаний отрезка струны.

7. Изопериметрическая вариационная задача (F). Двойственные вариационные задачи.

8. Задача Лагранжа (G). Вывод уравнений геодезических линий на поверхности.

9. Задача Лагранжа в понтрягинской форме (G_1). Функция Понтрягина.

10. Задача Понтрягина (оптимального управления) (H). Принцип максимума Понтрягина. Задача быстродействия (на примере).

11. Вариационные задачи на классах кривых с подвижными границами (I_1,I_2,I_3). Условия трансверсальности.

12. Достаточные условия C^1-локального экстремума. Вторичная экстремальная задача. Уравнение Якоби. Сопряжённые точки. Аналитическая и геометрическая формулировки достаточных условий экстремума.

.2 Вопросы к экзамену по методам математической физики

.2.1 Дифференциальные уравнения

([10], Гл. 2 §3, гл. 3 §1-3, гл. 4 § 1-5)

1. Каноническая форма записи дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка с двумя независимыми переменными. Характеристические линии.

2. Классификация уравнений 2-го порядка с n независимыми переменными.

3. Корректность постановки задачи математической физики. Пример Адамара.

4. Уравнения Хевисайда. Вывод, преобразования, различные типы граничных условий.

5. Метод бегущих волн решения уравнений гиперболического типа. Формула Даламбера. Решение неоднородной задачи. Эадача о распространении краевого режима. Колебания отрезка струны.

6. Обобщённые функции: определения и основные свойства. Применение обобщённых функций в задачах гиперболического типа. Фундаментальное решение волнового уравнения, обобщённая задача Коши, вывод формулы Даламбера методами теории обобщённых функций

7. Преобразование Фурье: определения и основные свойства. Применение преобразования Фурье для решения задачи Коши для волнового уравнения.

8. Метод стоячих волн решения смешанных задач для уравнений гиперболического типа.

9. Задача Штурма-Лиувилля: определения и основные свойства, теоремы о собственных числах и функциях, экстремальные свойства собственных чисел. Теорема Стеклова.

10. Метод Фурье в многомерных задачах гиперболического типа. Колебания прямоугольной и круглой мембран.

11. Теорема о максимуме и минимуме решения однородного уравнения теплопроводности. Корректность постановки задачи Дирихле для уравнения теплопроводности.

12. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом интегрального преобразования Фурье.

13. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом преобразования Лапласа.

14. Решение смешанной задачи о нагреве стержня методом разделения переменных. Функция Грина краевой задачи.

15. Задача об остывании круглого цилиндра. Уравнения и функции Бесселя: определения и минимум свойств.

16. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом разделения переменных.

17. Представление решений основных краевых задач для уравнения Пуассона с помощью функции Грина.

18. Метод мнимых источников построения функций Грина в эллиптических задачах — задачи Дирихле в верхнем п/п и внутри шара.

19. Определение и свойства гармонических функций. Теорема о максимуме и минимуме гармонической в области функции. Корректность постановки задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

20. Метод разделения переменных в эллиптических задачах (на примере задачи Дирихле для уравнения Лапласа в пространстве). Уравнения и функции Лежандра: определения и основные свойства. Сферические и шаровые функции.

21. Потенциалы в эллиптических задачах: объёмный, простого и двойного слоев. Гауссов потенциал.

22. Применение потенциалов для сведения краевых задач к интегральным уравнениям (задача Дирихле в верхнем полупространстве).

.2.2 Интегральные уравнения

([11],Гл. 4,6-9).

1. Классификация линейных интегральных уравнений.

2. Интегральные уравнения с вырожденным ядром.

3. Существование решения уравнения Фредгольма с малым ядром.

4. Существование решения уравнения Вольтерра.

5. Теоремы Фредгольма.

6. Уравнения с симметричными ядрами. Свойства спектра. Теорема Гильберта-Шмидта.

7. Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению с симметричным ядром. Теоремы Гильберта. Вывод теоремы Стеклова из теоремы Гильберта-Шмидта.

Библиография

[1] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.

[2] Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. М.:

Дополнительная литература по вариационному исчислению

[3] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1974.

[4] Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Наука, 1961.

[5] Буслаев В.С. Вариационное исчисление. Л.: ЛГУ, 1980.

[6] Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Наука, 1974.

[7] Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

[8] Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986 (б-ка “Квант”).

[9] Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Основы вариационного исчисления. М.-Л.: ОНТИ, 1935. ТТ.1,2.

Основная литература по уравнениям математической физики и интегральным уравнениям

[10] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

[11] Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984.

Дополнительная литература по уравнениям математической физики

[12] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

[13] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

[14] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

[15] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

[16] Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

[17] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики, т.1. М.: Мир, 1982.

[18] Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: МГУ, 1984.

[19] Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.

[20] Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974.

Задачники

[21] Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980.

[22] Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985.

[23] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

[24] Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1974.

Методические разработки

[25] Смирнов И.П., Смирнова И.Р. Задачи по вариационному исчислению и теории оптимального управления. Нижний Новгород: ННГУ, 1994.

[26] Кошелев В.Н., Саичев А.И. Метод функций Грина для уравнения теплопроводности. Горький: ГГУ, 1984.

[27] Кошелев В.Н., Саичев А.И. Телеграфное уравнение. Горький: ГГУ, 1984.

Алфавитный указатель

Алфавитный указатель

Брахистохрона, 13
Бесселя
неравенство, 111
Брахистохрона, 45, 50, 58

Вариационная задача
Дидоны, 24
Вариационная задача
вторичная, 54
двойственная, 26
Дидоны, 26
для функций многих переменных, 21
- достаточные условия экстремума, 53
изопериметрическая, 24
Лагранжа, 28
Лагранжа в понтрягинской форме, 29
на классе векторных функций, 14
Понтрягина
со свободными границами, 43, 46, 48
со старшими производными, 20
со
Волна
бегущая, 84
прямая, отраженная, инвертированная, 91
стоячая, 94, 113

Грина
формула, 21

Зад
Дирихле, 138
Неймана, 138
Задача
быстродействия, 35
быстродействия
вторичная экстремальная, 54
Дирихле, 156
корректно
Коши, 77, 138
Коши для волнового уравнения, 85
Коши обобщенная, 101
краевая, 77
краевая третьего рода, 138
третья краевая, 157
математической физики, 77
Неймана, 157
о мягкой посадке космического аппарата, 30
о колебаниях отрезка струны, 93
о
о распространении
смешанная, 78
Штурма-Лиувилля, 113, 115, 127, 191
Задача Коши
для волнового уравнения, 107
Закон
Нернста, 137
Ньютона 1-ый, 16
Ньютона 2-ой, 17
Снеллиуса, 13, 18
Фурье, 137

Интеграл
импульса, 12
кратный несобственный, 164
Пуассона, 143
энергии, 12
Интегральное преобразование, 105
Бесселя, 105
Лапласа, 105, 109, 144
Меллина, 105
Фурье, 105, 142

Интегральное преобразование
    Фурье, 106
Интегральное преобразование
    синус, косинус, 105

Класс
    корректности, 78
    оригиналов, изображений, 104
Колебания
    круглой мембраны, 130
    прямоугольной мембраны, 128
Координаты
    фазовые управляемого объекта, 30

Лагранжа
    уравнение, 16, 26, 28
    функция, 25
Лемма
    основная вариационного исчисления, 9
Линия
    геодезическая, 28
    геодезическая на сфере, 29
    переключения, 36
    телеграфная, без искажений, 83
    характеристическая, 66, 70
    цепная, 19
    циклоида, 14

Метод
    бегущих волн, 83
    геометрической оптики, 17
    последовательных приближений, 182
    потенциалов, 164
    спуска, 88
    функций Грина, 157
    функций Грина, 156
    разделения
    разделения переменных (Фурье), 145
    разделения переменных (Фурье), 160

Неравенство
    Бесселя, 111, 188
    изопериметрическое, 24
Носитель функции, 95

Ньютона
    1-ый закон, 16
    2-ой закон, 17

Обобщенная
    координата, 16
    функция, 31
Ограничение
    понтрягинское, 33
Оператор
    Даламбера, 101
    интегральный, 105, 181
    сжимающий, 181
Определение
    вторичной
    локального экстремума, 53
    сопряженной точки, 55
    функционала, 3

Параметры
    управляющие, 30
Плоскость
    фазовая, 86
Поверхность
    интегральная, 66
    Ляпунова, 167
Показатель
    преломления среды, 17
Поле экстремалей, 57
Понтрягина
    принцип максимума, 34
    функция, 30, 34
Потенциал
    гауссов, 170
    двойного слоя, 170
    диполя, 169
    объемный, 166
    простого слоя, 168
Пример
    Адамара, 78
Принцип
    Гамильтона, 16
    максимума Л.С.Понтрягина, 34
Пространство
    Банаха, 181
    евклидово, 110
    нормированное, 111
    основных и обобщенных функций, 95

Равенство

Парсеваля-Стеклова, 112
Резонанс, 126
Решение
обобщенное, 86
фундаментальное, 102
Ряд
Фурье, 94

Обобщенная функция, 100
Свертка, 100, 103
Связь
голономная, 28
дифференциальная, 28
неголономная, 28
Система
характеристическая, 66
Система элементов
ортогональная, нормированная, полная, 111
Собственная функция, 115
Собственное число, 115
Сопряженная
система уравнений, 35
точка, 55
функция, 34
Спектр
собственных чисел, 188
Среда
однородная, 17
стратифицированная, 18

Теорема
взаимности (в теплопроводности), 148
взаимности
Гильберта (1-ая и 2-ая), 192
Гильберта-Шмидта, 190
о
о
Стеклова, 120
Теорема взаимности
в теории колебаний, 126
Теоремы
Фредгольма, 186
Тип
гиперболический, 76
уравнения параболический, 75
эллиптико- (гиперболо-) параболический, 75
уравнения смешанный , 73
ультрагиперболический, 76
эллиптический, 75
Точка
переключения, 36
Точки
симметричные

Уравнение
Бесселя, 122, 132
в частных производных, 63
волновое, 23
Вольтерра, 177, 183
второго порядка, 69
Гамильтона-Якоби, 60
Гельмгольца, 152
геодезической линии, 29
гиперболическое, 70, 76
гиперболо-параболическое, 75
движения, 16, 30
диффузии, 137
квазилинейное, 65, 74
квазилинейное, 69
колебаний отрезка струны, 22
колебаний
Колмогорова, 138
Лагранжа, 28
Лагранжа, 26
Лагранжа-Пуассона, 27
Лапласа, 151
Лежандра, 160
Лежандра, присоединенное, 122
линейное, 65
лучевое, 17
математической физики, 64
однородное, 185
параболическое, 71, 75
первого порядка, 65
полулинейное, 65
Пуассона, 151, 167
с вырожденным ядром, 179
сопряженное, 185
сопряженное, 35
телеграфное, 89
Трикоми, 73
ультрагиперболическое, 76
неоднородное, 185
второго рода, 178
первого рода, 177
третьего рода, 178
характеристическое, 66, 70

Шредингера, 152
Эйлера, 44
Эйлера векторное, 15
эллиптико-параболическое, 75
эллиптическое, 72, 75
Якоби, 55
Уравнение интегральное
Фредгольма, 177
Уравнения
классическое решение, 63
порядок, 63
телеграфные (Хевисайда), 82
Условие
достаточное экстремума, 56, 57
естественное граничное, 45
краевое (граничное), 77
Лежандра усиленное, 55
начальное, 77
ортогональности, 50
трансверсальности, 44, 46, 48, 49
Якоби, усиленное, 55

Форма
квадратичная, 75
уравнения каноническая, 70
Формула
Остроградского-Гаусса, 152
Формула
Грина, 21, 153
Даламбера, 85, 103, 107
Даламбера расширенная, 87
Кирхгофа, 88
Пуассона, 88, 159
Родриго, 160
смещения, 106
Функция
Хевисайда, 103
Фундаментальное решение
уравнения теплопроводности, 143
Функционал
Больца, 43
действия, 16
Обобщенная функция
дельта-функция, 96
регулярная,
Функци
Понтрягина, 30
Функция
Бесселя, 122, 132
Бесселя
Гамильтона, 59
гармоническая, 154
Грина, 124, 147, 156, 191
истокопредставимая, 190
Лагранжа, 25
Лежандра, 122
Лежандра присоединенная, 160
обобщенная, 31, 95
Понтрягина, 34
продолженная, 91
резольвентная, 180
релейная, 36
синтеза, синтезирующая, 36
собственная, 115
сопряженная, 34
сферическая, 162
управляющая (управление), 30
финитная, 95
Ханкеля, 134
Хевисайда, 92
цилиндрическая, 132
шаровая, 163

Характеристика, 66
волнового уравнения, 86
Характеристический треугольник, 86

Число
собственное, 187

Эйлера
краевая задача, 53
уравнение, 11, 44
уравнение векторное, 15
уравнений система , 15
системы уравнений интегралы, 16

Ядро, 105
вырожденное, 179
интегрального уравнения, 177
симметричное, 187