UNIVATES

CENTRO: GESTÃO ORGANIZACIONAL

CÁLCULOS DE FINANÇAS

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Semestre: A/2008

PROFESSOR:	IRANI LASSEN
CURSO:	
ALUNO:	

SUMÁRIO

CÁLCULOS DE FINANÇAS
(MATEMÁTICA FINANCEIRA)

1 INTRODUÇÃO

1.1 OBJETIVO:

A Matemática Financeira tem por objetivo o manuseio de fluxos de caixa visando suas transformações em outros fluxos equivalentes que permitam as suas comparações de maneira mais fácil e segura.

Por que estudar Matemática Financeira?

> "Sabemos que o valor do dinheiro envolvido numa transação financeira não permanece constante durante o prazo da operação. Em geral, o valor na data inicial da operação é diferente do valor em qualquer outra data; isto é o valor do capital envolvido numa operação financeira varia com o tempo." (J.C.Lapponi)

NOTAS____

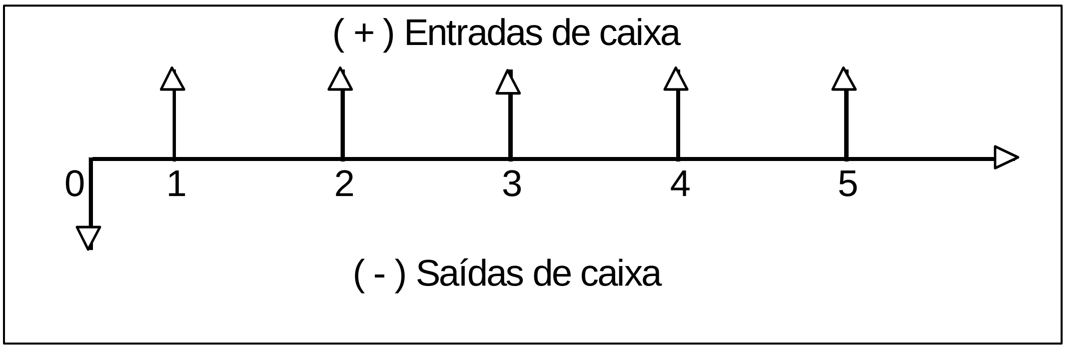
1.2 FLUXO DE CAIXA

Denomina-se Fluxo de Caixa (de uma empresa, de um investimento, de um indivíduo, etc.) ao conjunto de entradas e saídas de dinheiro ao longo do tempo.

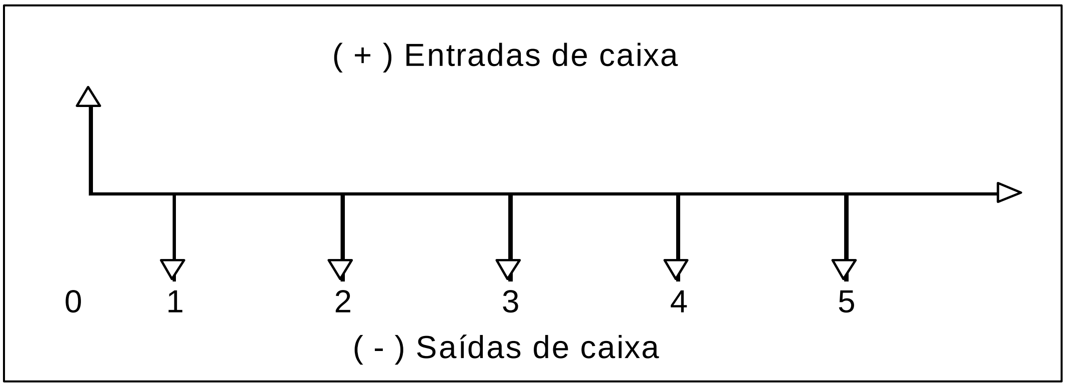
Em um fluxo de caixa convencionamos:

Entradas são os recebimentos e têm sinal positivo.
Saídas são os pagamentos e têm sinal negativo.

FLUXO DE CAIXA DO PONTO DE VISTA DE QUEM EMPRESTA:



FLUXO DE CAIXA DO PONTO DE VISTA DE QUEM TOMA EMPRESTADO:



Exercício 1.1

Uma empresa tomou emprestado para capital de giro, em um banco comercial, o valor de $5.000,00 para serem pagos da seguinte forma: em seis parcelas mensais e consecutivas de $800,00, com a primeira vencendo ao final do segundo mês, mais dois reforços de $1.000,00 a serem pagos junto com a terceira e a sexta prestação. Construa o fluxo de caixa do banco e o fluxo de caixa da empresa.

1.3 O VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO

- dinheiro cresce no tempo devido aos juros.
- Nunca somar valores monetários de datas diferentes sem considerar os juros dos períodos.

1.4 JUROS

- Dinheiro pago pelo uso de dinheiro emprestado, ou seja, custo do capital de terceiros colocados à nossa disposição.
- Remuneração do capital empregado em atividades produtivas ou, ainda, remuneração paga pelas instituições financeiras sobre o capital nelas aplicado.
- É a remuneração do capital emprestado, podendo ser entendido, de forma simplificada, como sendo o aluguel pago pelo uso do dinheiro.

1.5 UTILIZAÇÃO DOS RECURSOS

Como alguém que possua recursos (financeiros) poderá utilizá-los:

- na compra de bens de consumo;
- na compra de serviços;
- na aquisição de bens de produção;
- na compra de imóveis para uso próprio ou venda futura;
- no empréstimo a terceiros;
- na aquisição de títulos de renda fixa ou variável;
- deixando depositado para atender a "eventualidades";
- guardá-lo na expectativa de uma oportunidade melhor para sua utilização;
- ou guardá-lo pela simples satisfação de ter dinheiro.

NOTAS____

1.6 ASPECTOS RELACIONADOS A EMPRÉSTIMOS

Fatores relacionados com a taxa de remuneração avaliados por quem possui dinheiro antes de se dispor a emprestar:

1. **RISCO**: probabilidade do tomador de empréstimo não poder pagar o empréstimo;
2. **DESPESAS**: todas as despesas operacionais, contratuais e tributárias para a formalização do empréstimo e à efetivação da cobrança;
3. **INFLAÇÃO**: índice de desvalorização do poder aquisitivo da moeda previsto para o prazo do empréstimo;
4. **GANHO (ou LUCRO)**: fixado em função das demais oportunidades de investimentos ("custo de oportunidade"); justifica-se pela privação, por parte do seu dono, da utilidade do capital.

> A receita de juros deve ser suficiente para cobrir o risco, as despesas e a perda do poder aquisitivo da capital emprestado, além de proporcionar ao seu aplicador um certo lucro.

NOTAS

1.7 FORMAS DE APRESENTAÇÃO DA TAXA DE JUROS

1.7.1 FORMA PORCENTUAL (PERCENTUAL)

A taxa de juros é apresentada em centos do capital, para se fazer o cálculo primeiro tem-se que dividir por cem.

1.7.2 FORMA UNITÁRIA:

Exemplo 1.2.:
Qual o juro que rende o capital de $ 1.000,00 aplicado por 1 ano à taxa de juros de 6% ao ano?

Resposta: juro = 1.000,00 x 6 ÷ 100 x 1 ano = 10 x 6 x 1 = $ 60,00

Portanto é de $ 60,00 o juro que a aplicação rende em um ano.

A Taxa refere-se à unidade do capital, calcula-se o que rende a aplicação de uma unidade de capital no intervalo de tempo referido pela taxa.

Exemplo 1.3:
Qual o juro que rende o capital de $ 1.000,00 aplicado por 1 ano à taxa de juros de 0,06 ao ano?

Resposta: juro = 1.000,00 x 0,06 x 1 ano = 1.000 x 0.06 x 1 = $ 60,00

Portanto é de $ 60,00 o juro que a aplicação rende em um ano.

LEMBRETES:
Nos cálculos com uso de fórmulas usa-se sempre a taxa unitária
>>>> 12%a.a. = 0,12

No uso de calculadoras programáveis (H12C) usa-se a forma Percentual
>>>> 12% a.a. = 12

NOTAS

1.7.3 APRESENTAÇÃO E RELAÇÃO ENTRE TAXA PERCENTUAL E TAXA UNITÁRIA

Normalmente as taxas de juros são expressas na forma percentual, para transformá-las na forma unitária, para que possam ser aplicada diretamente nas fórmulas estas devem ser divididas por cem (100).

Exemplo 1.4::

FORMA PERCENTUAL		FORMA UNITÁRIA			LEGENDA
12% a.a.	=	12 ÷100	=	0,12 a.a.	a.a. = ao ano
6% a.s.	=	6 ÷100	=	0,06 a.s.	a.s. = ao semestre
4% a.t.	=	4 ÷100	=	0,04 a.t	a.t. = ao trimestre
1% a.m.	=	2 ÷100	=	0,01 a.m.	a.m. = ao mês
0,033% a.d.	=	0,033 ÷100	=	0,00033 a.d.	a.d. = ao dia

De modo semelhante para transformar a taxa de juros da forma unitária para a forma percentual basta multiplicar-se por cem (100).

i = 0,12 a.a. = 0,12 x 100 = 12% a.a.

LEMBRETE
A taxa de juros sempre é relacionada a um período de tempo específico, no qual é baseado o cálculo dos juros. Este período sempre deverá estar expresso após a taxa.

NOTAS____

1.8 FORMAS DE CALCULAR OS JUROS

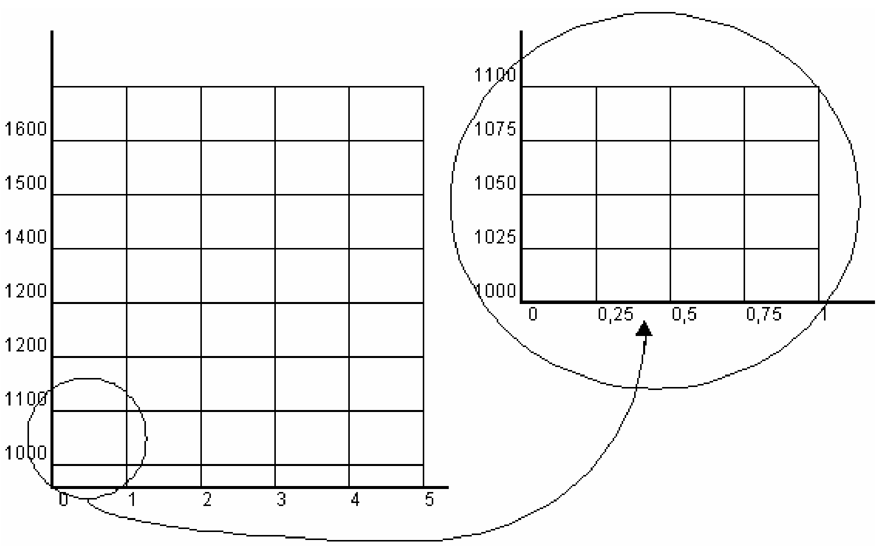
JUROS SIMPLES - Neste regime a remuneração do Capital Inicial aplicado (Principal ou Valor Presente) é diretamente proporcional ao seu valor e ao tempo de aplicação. Remunera-se somente o capital.

JUROS COMPOSTOS -Neste regime ao Capital Inicial aplicado a cada período será somado o juro calculado e sobre este montante será calculado o juros do período seguinte.

Exemplo 1.5:
Qual o montante ao final de 5 meses, para um capital de $1.000 aplicado a taxa de 10% a.m.?

JUROS SIMPLES			
MÊS	**CAPITAL**	**JUROS**	**MONTANTE**
0			
1			
2			
3			
4			
5			

JUROS COMPOSTOS			
MÊS	**CAPITAL**	**JUROS**	**MONTANTE**
0			
1			
2			
3			
4			
5			



1.9 PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS DE JUROS

1.9.1 CÁLCULO PELO REGIME DE JUROS SIMPLES

- Juros de cada período são calculados sobre o capital inicial (principal) aplicado.
- Juros não rendem juros.
- Não há capitalização de juros.
- Crescimento linear ou em progressão aritmética.

1.9.2 CÁLCULO PELO REGIME DE JUROS COMPOSTOS

- Juros de cada período são calculados sobre o capital do início do período (saldo).
- Juros rendem juros.
- Há capitalização de juros.
- Crescimento exponencial ou em progressão geométrica.

NOTAS

2 JUROS SIMPLES

Juros não geram juros

2.1 CONVENÇÕES:

J	=	Juros
n	=	número de períodos
i	=	Taxa de juros
C ou PV	=	Capital = Valor Presente (Present Value) = Atual
FV	=	Montante = Valor Futuro (Future Value = Futuro

2.2 DEDUÇÃO DA FÓRMULA (Juros x Capital)

O juro relativo a um período é formado pela aplicando-se a taxa proporcional ao período (i) aplicada a um capital (C), como no sistema de juros simples, juros não rendem juros, podemos escrever:

No início da operação..........: $J_0 = 0$

No final do 1º. Período.........: $J_1 = C \cdot i$ >>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> $J_1 = C.i.1$

No final do 2º. Período.........: $J_2 = (C.i) + (C.i) = (C.i).2$ >>>>>>>>>>> $J_2 = C.i.2$

No final do 3º. Período.........: $J_3 = (C.i) + (C.i) + (C.i) = C.I.3$ >>>>>>> $J_3 = C.i.3$

No final do enésimo Período: $J_n = \underbrace{(C.i)}_{\text{---1---}} + \underbrace{(C.i)}_{\text{---2---}} + \underbrace{(C.i)}_{\text{---3---}} + ... + \underbrace{(C.i)}_{\text{---n---}}$ >>>>> $\mathbf{J_n = C.i.n}$

2.3 FÓRMULAS (Juros x Capital):

$J = C \times i \times n$	$C = \dfrac{J}{i \times n}$
$i = \dfrac{J}{C \times n}$	$n = \dfrac{J}{C \times i}$

LEMBRETE

Para que as fórmulas possam ser usadas a taxa de juros e o período devem ser expressas na mesma grandeza, por exemplo se o período utilizado é o mensal a taxa deverá ser expressa ao mês (a.m.), se o período for anual a taxa deverá ser expressa ao ano (a.a.).

Exemplo 2.1:
Quanto renderá um capital de $1.000,00 a ser aplicado no regime de juros simples a uma taxa de 5% a.m. pelo período de 5 meses?

Exemplo 2.2:
Por quanto tempo, pelo regime de juros simples, deverá ficar aplicado um capital de $45.000,00, para que este renda $1.800,00 de juros, sabendo-se que a taxa de juros utilizada pela instituição financeira é de 2% ao mês?

Exemplo 2.3:
Qual é a taxa de juros simples que deve ser aplicada a um capital de $3.500,00 para que este produza $210,00 no período de 4 meses?

Exemplo 2.4:
Uma instituição financeira opera a juros simples, a uma taxa de 0,12% a.d., qual o capital que uma pessoa deverá aplicar pelo período de 18 dias para obter um rendimento de $388,80?

2.4 DEDUÇÃO DA FÓRMULA(Valor Futuro x Valor Presente): (Montante x Capital)

Sabe-se que:
- no sistema de juros simples juros não rendem juros;
- que **M = C + J**, então temos nos finais de cada período:

No início da operação: M_0=C

No final do 1º. Período: M_1=C+C.i >>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> M_1=C.(1+i)

No final do 2º. Período: M_2=C+C.i+C.i = C.(1+i+i) >>>>>>>>>> M_2=C.(1+2i)

No final do 3º. Período: M_3=C.+C.i+C.i+C.i = C.(1+i+i+i) >>>> M_3=C.(1+3i)

No final do enésimo Período: >>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> **M_n=C.(1+i.n)**

2.5 FÓRMULAS (Montante x Capital):

$$M = C + J$$

$M = C \times (1 + i \times n)$	$C = \dfrac{M}{(1 + i \times n)}$
$i = \dfrac{\frac{M}{C} - 1}{n}$	$n = \dfrac{\frac{M}{C} - 1}{i}$

Exemplo 2.5:
Um investidor aplicou \$120.000,00 em Letras de Câmbio, a instituição financeira ao emitir esta série de Letras de Câmbio determinou que estas teriam como atratividade um rendimento de 2,8% ao mês, a juros simples, por um prazo de 4 meses. Qual será o valor resgatado no final do período?

Exemplo 2.6:
Um capital, aplicado a juros simples de 36 % a.a. rendeu juros de R\$ 72.000,00 e acumulou o montante de R\$ 112.000,00. Durante quantos meses esse capital ficou aplicado?

2.6 PERÍODOS NÃO INTEIROS E PERÍODOS PROPORCIONAIS

- É necessário que a taxa de juros esteja sempre na mesma unidade do número de períodos e vice-versa.
- No regime de juros simples é indiferente a transformação da taxa de juros ou do número de períodos.
- Quando se está usando tabelas financeiras deve-se preferencialmente transformar prazo em períodos inteiros, ajustando-se então a taxa de juros.
- Quando se está trabalhando com calculadora financeira, pode-se usar o prazo fracionário, desde que este esteja expresso na mesma grandeza da taxa de juros.

> **Dica:** A proporcionalidade existente entre as taxas de juro, no regime de Juros Simples é a mesma existente entre os prazos a que elas se referem, podendo ser encontradas através de uma regra de três simples.

2.6.1 TAXAS PROPORCIONAIS

No regime de Juros Simples duas ou mais taxas de juros são ditas proporcionais quanto ao serem aplicada ao mesmo PV, durante um período de tempo, gerarem o mesmo FV no final do período.

Relação existente entre diferentes taxas proporcionais:

$$1.i_a = 2.i_s = 4.i_t = 12.i_m = 360.i_d$$

$$1.i_s = 2.i_t = 6.i_m = 180.i_d$$

$$1.i_t = 3.i_m = 90.i_d$$

$$1i_m = 30.i_d$$

NOTAS____

____

____

____

____

____

____

____

Exemplo 2.7:
Calcular a taxa de juros simples mensal proporcional a:

A) 24,00% a.a.

B) 13,20% a.s.

C) 0,09% a.d.

Exemplo 2.8:
Calcular a taxa de juros simples diária proporcional a:

A) 18,00% a.a.

B) 12,60% a.s.

C) 3,60% a.m.

Exemplo 2.9:
Calcular a taxa de juros simples anual proporcional a:

A) 0,070% a.d.

B) 13,20% a.s.

C) 2,67% a.m.

Exemplo 2.10:
Uma aplicação de $40.000,00 à uma taxa de 2,4% a.m., a juros simples, foi feita pelo prazo 18 dias.
A) Qual o valor retirado no final do período? (calcule considerando o prazo não inteiro = período mensal)

B) Qual o valor retirado no final do período? (calcule considerando o prazo inteiro (dias) e ajustando a taxa)

Exemplo 2.11:
Quantos dias levou um capital de $20.000,00 que ficou aplicado a juros simples em uma instituição financeira que trabalha com uma taxa de 2,4% ao mês, considerando-se que no final do período foram resgatados $20.256,00.

2.7 JURO EXATO E COMERCIAL

2.7.1 Juro Comercial

É aquele que leva em conta no seu cálculo o Período Comercial, onde sempre:

1 mês	= 30 dias,
1 bimestre	= 60 dias,
1 trimestre	= 90 dias,
1 semestre	= 180 dias e
1 ano	= 360 dias.

2.7.2 Juro Exato

É aquele que leva em conta no seu cálculo o Período Civil, onde são considerados os meses civis. O juro exato usado principalmente em operações financeiras de curto prazo onde o prazo é contado em dias.

-Janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro = 31 dias.
-Abril, Junho, Setembro e Novembro = 30 dias.
-Fevereiro = 28 ou 29 dias.
-O Ano = 365 ou 366 dias.

Exemplo 2.12:
Calcule a taxa diária exata e a taxa diária comercial a juros simples de uma aplicação de \$100.000,00 a juros simples que foi aplicada no dia 15 dezembro de 1999, retirando-se \$107.440,00 no dia 15 de janeiro de 2000.(31d -0,24% / 30d=0,248%ad)

USO DA CALCULADORA HP12-C NO CÁLCULO DATAS E PRAZOS:

Calcule o número de dias entre 15/12/1999 e 15/01/2000

DADOS	TECLAS	VISOR
	g D.MY	
15.121999	ENTER	15.12
15.012000	g ∆ DYS	**31.00**

Calcule qual é a data 120 dias após o dia 15/12/1999

DADOS	TECLAS	VISOR
	g D.MY	
15.121999	ENTER	15.12
120	g DATE	**13.04.2000 04**

2.8 PRAZO MÉDIO

É o prazo único que servirá como vencimento comum para os títulos, para efeito de cálculo dos encargos. É bastante usado no sistema de desconto de títulos.

$PM = \dfrac{C_1 \times n_1 + C_2 \times n_2 + C_3 \times n_3 + ... + C_n \times n_n}{C_1 + C_2 + C_3 + .. + C_n}$	>>>	$PM = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} (C_j \times n_j)}{\sum_{j=1}^{n} (C_j)}$

2.9 SALDO MÉDIO

É o saldo capaz de substituir vários outros, com relação a capitais empregados. É bastante utilizado no sistema bancário, para determinação juros a serem pagos em contas especiais devedoras, IOF, saldos para renovação de limites de crédito, etc....

$SM = \dfrac{C_1 \times n_1 + C_2 \times n_2 + C_3 \times n_3 + ... + C_n \times n_n}{n_1 + n_2 + n_3 + .. + n_n}$	>>>	$SM = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} (C_j \times n_j)}{\sum_{j=1}^{n} (n_j)}$

DICAS:

Quando se desejar saber o prazo médio de um determinado espaço de tempo conhecido (por exemplo: um mês = 30 dias):

>>> Nos cálculos manuais basta substituir-se na fórmula o divisor pelo prazo que se quer conhecer o saldo médio.

$$SM = \frac{\sum_{j=1}^{n} (C_j \times n_j)}{30}$$

>>> Nos cálculos com calculadoras (HP12C) quando se deseja saber a saldo médio mensal deve-se acrescentar um elemento no somatório onde FV=0 e n=número de dias que faltam para completar o mês.

2.10. TAXA MÉDIA

É a taxa capaz de substituir várias outras, com relação a capitais diversos, empregados a taxas e prazos diversos.

$TM = \dfrac{C_1 \times i_1 \times n_1 + C_2 \times i_2 \times n_2 + C_3 \times i_3 \times n_3 + ... + C_n \times i_n \times n_n}{C_1 \times n_1 + C_2 \times n_2 + C_3 \times n_3 + ... + C_n \times n_n}$	>>>	$TM = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} (C_j \times i_j \times n_j)}{\sum_{j=1}^{n} (C_j \times n_j)}$

NOTAS____

Exemplos 2.14	Valor dos títulos (R$)	prazos
Considerando-se que os valores apresentados por um comerciante foram descontados a juros simples em um banco comercial que trabalha com descontos pelo sistema comercial e que foram descontados a uma taxa de 6% a.m., calcular o valor do desconto e o valor recebido pelo comerciante e qual a taxa de juros que ele efetivamente pagou.	144,00	18d
	90,00	15d
	108,00	34d
	120,00	15d
	180,00	21d

Exemplos 2.15:
Um contrato de cheque especial prevê taxa de utilização de 7,5% a. m., sabendo-se que o Banco deduz imposto sobre operações financeiras (IOF) de 0,123% sobre o saldo médio mensal negativo. Com base saldos diários apresentados na tabela ao lado, calcule o total das despesas debitadas no final do mês.

SALDO NA CONTA (R$)		PRAZO COM MESMO SALDO
positivo	$1.050,00	3 dias
negativo	$450,00	2 dias
negativo	$1.300,00	5 dias
positivo	$350,00	2 dias
positivo	$700,00	5 dias
negativo	$3.200,00	4 dias
positivo	$1.000,00	3 dias
negativo	$2.500,00	3 dias
positivo	$2.000.00	3 dias

Exemplo 2.16:
Um borderô de títulos descontados em um banco apresentaram os valores relacionados na tabela ao lado. Calcular taxa média mensal.

	$	i	n
Título 1	$25.000,00	5.00%	15 d.
Título 2	$30.000,00	5.50%	30 d.
Título 3	$45.000,.00	6.00%	25 d.
Título 4	$40.000,00	5.70%	18 d.
Título 5	$100.000,00	7.50%	35 d.

2.11 EXERCÍCIOS - JUROS SIMPLES

1. Determine quanto será preciso depositar hoje em um Banco, que paga uma taxa de 138% ao ano, para que se obtenha um montante de R$7.560,00, no final de 5 meses.

2. Quantos dias serão necessários para um capital de R$ 3.500,00 gerar um montante de R$ 5.572,00, se for aplicado a uma taxa de 9,6% ao mês.

3. Determinar o número de meses necessários para que um valor dobre, com uma taxa de juros de 2% ao mês, no regime de juros simples.

4. Um capital ficou depositado à taxa de 60% ao ano. Ao final de 10 meses foi resgatado o montante gerado e aplicado novamente, por mais 6 meses, à taxa de 72% ao ano. Findo este prazo, foi resgatado o montante de $ 3.060. Qual o capital inicialmente aplicado?

5. Dois capitais, um de $ 300.000 e outro de $ 600.000, foram aplicados numa mesma data, a juros simples. O primeiro à taxa de 60% a.a. e o segundo à taxa de 10% a.a. Em quantos meses os montantes se igualarão?

6. Um produto que à vista custa R$280,00 pode ser comprado com uma entrada de R$160,00 mais um pagamento de R$127,80 para 25 dias. Determine a taxa mensal de juros simples cobrada na operação.

7. Um contrato de cheque especial prevê taxa de utilização de 9% a. m., sabendo-se que o Banco deduz imposto sobre operações financeiras (IOF) de 0,123% sobre o saldo médio mensal negativo. Com base saldos diários em que a conta ficou negativa, abaixo apresentados, calcule o total de juros a ser cobrado e o IOF. Movimento negativo: R$ 1.890,00 por 1 dia, R$ 2.100,00 por dois dias; R$3.500 por 4 dias; R$4.500,00 por 1 dia; R$ 1.300,00 por 1 dia; R$1.900,00 por 1 dia e R$5.000,00 por 5 dias.

3. DESCONTO

3.1 CONCEITOS:

1. Descontos são operações de crédito em que são negociados (descontados) títulos de emissão ou endosso, mediante abatimento de um percentual no ato da transação
2. Valor Nominal de um título é o valor inscrito no mesmo (valor de face), nos cálculos é representado por FV (valor futuro).
3. Valor Atual do título é o valor pelo qual o título é negociado no dia da operação, nos cálculos é representado por PV (valor presente).
4. Desconto Bancário é operado por meio de uma taxa da desconto que incide sobre o montante (valor nominal) de determinado título. Na prática este tipo de desconto é utilizado nas negociações com duplicatas e promissórias.
5. Desconto Racional, é opera por meio de uma taxa que incide sobre o valor presente (valor atual) do título.
6. Ao fazer dinheiro descontando duplicatas, as empresas repõem seu capital de giro. As notas promissórias são descontadas para empréstimos a pessoas físicas e jurídicas.

NOTAS

3.2 DESCONTO RACIONAL OU " POR DENTRO":

DESCONTO

$$D = VL \times i \times n$$

VALOR LÍQUIDO (ATUAL)

$$VL = VN - D \quad \text{ou} \quad VL = \frac{VN}{(1 + i \times n)}$$

VALOR NOMINAL	TAXA DE DESCONTO	PERÍODO DESCONTO
$VN = VL \times (1 + i \times n)$	$i = \dfrac{\dfrac{VN}{VL} - 1}{n}$	$n = \dfrac{\dfrac{VN}{VL} - 1}{i}$

- No Desconto Racional ou "por dentro" o juro é calculado a partir do valor presente (valor atual) do Título, ou seja sobre o valor liberado na operação financeira.
- A taxa de juros (desconto) cobrada representa, desta maneira, o custo efetivo de todo o período de desconto.

Exemplo 3.1:
Um título de $2.000,00 foi descontado pelo sistema racional, 20 dias antes de seu vencimento. A empresa recebeu $1.956,00. Qual é a taxa de juros mensal que a instituição de crédito trabalha

NOTAS____

3.3 DESCONTO BANCÁRIO, COMERCIAL OU "POR FORA":

DESCONTO

$$D = VN \times i \times n$$

VALOR LÍQUIDO (ATUAL)

$$VL = VN - D$$ ou $$VL = VN \times (1 - i \times n)$$

VALOR NOMINAL	TAXA DE DESCONTO	PERÍODO DESCONTO
$VN = \frac{VL}{(1 - i \times n)}$	$i = \frac{1 - \frac{VL}{VN}}{n}$	$n = \frac{1 - \frac{VL}{VN}}{i}$

- No Desconto Comercial ou "por fora" o juro é calculado a partir do valor no nominal (valor de face) do Título, ou seja que está impresso no título, gerando assim um encargo financeiro maior do que no Desconto "por dentro" .

- A taxa de juros efetiva neste neste sistema é maior do que a taxa usada no cálculo.

Exemplo 3.2:
Um título com valor de face igual a $2.000,00 a 20 dias de seu vencimento, foi descontado em um banco (desconto comercial - ^por fora^ - a juros simples). O banco trabalha a uma taxa desconto de 3,3% a.m.Qual o valor depositado na conta da empresa que descontou o título.

NOTAS____

3.4 A TAXA EFETIVA DE DESCONTO

Como no desconto comercial ou “por fora” o juro é calculado a partir do valor no nominal (valor de face) do Título, ou seja que está impresso no título, gerando assim um encargo financeiro maior do que no desconto “por dentro”, a taxa de juros efetiva neste sistema, que representa o efetivo custo do dinheiro para o tomador, pode ser determinada a partir da expressão abaixo:

$i_{ed} = \dfrac{i_d}{1 - i_d \times n}$		i_{ed} ➔ **Taxa de efetiva de desconto**
		i_d ➔ **Taxa de desconto comercial**
		n ➔ **prazo**

Exemplo 3.3:
Um título foi descontado 20 dias antes de seu vencimento, foi utilizada uma taxa de desconto (por fora) de 3,3% a.m. a juros simples. Qual é a taxa efetiva de desconto (por dentro).

3.5 OBSERVAÇÕES:

1 CONCLUSÃO: A taxa de desconto “por fora” ou comercial é aplicada sobre o valor futuro, ou seja o Valor Nominal (valor de face) do título para produzir o Valor Líquido (valor atual). A taxa efetiva de desconto é a taxa que resulta no mesmo valor de encargos financeiros se aplicada sobre o valor Valor Líquido, que é o valor efetivamente creditado ao tomador do empréstimo.

2 CUIDADO COM AS TAXAS BANCÁRIAS: As operações de descontos com bancos comerciais apresentam taxas adicionais de desconto a pretexto de cobrir determinadas despesas administrativas e operacionais incorridas pelas instituições financeira**s.**

3.6 EXERCÍCIOS - DESCONTO SIMPLES

1. Qual o valor do desconto comercial referente a um título de com valor nominal de R$ 10.000,00, que vencerá em 60 dias, se a taxa de desconto for de 3% a.m. ?

2. Um título com valor de resgate de R$ 1.000,00, com 120 d.d. a decorrer até seu vencimento, está sendo negociado a juros simples, com uma taxa de desconto "por fora" de 18% aa. Determinar: a) o valor recebido; b) o valor descontado pela instituição operadora de crédito.

3. Qual o valor nominal de um título descontado pelo sistema comercial, a 3% a.m. em 2 meses, sendo que foi recebido o valor líquido de R$ 13.160,00 ?

4. Determinar o valor da taxa mensal de desconto usada numa operação de desconto de 60 dias de um título cujo valor de resgate é R$ 10.000,00, se o valor recebido foi de R$ 9.750,00 numa instituição que trabalha no sistema de desconto comercial a juros simples.

5. Determinar o valor do desconto comercial simples de um título de R$ 1.000,00 com vencimento para 60 d.d., sabendo-se que a taxa de desconto "por fora" é de 1,2% ao mês.

6. Uma empresa apresentou para desconto a um banco comercial uma duplicata com vencimento de 60 d.d., considerando que o valor do título é de R$ 16.500,00 e que o banco está operando com uma taxa de desconto comercial de 5,5% a.m., qual o valor que será descontado da empresa nesta operação?

7. Qual o valor do desconto simples de um título de R$ 1.000,00 descontado 5 meses antes do vencimento, com uma taxa de 3% a.m.

8. Uma empresa deseja descontar títulos num banco comercial que opera com sistema de juros simples a uma taxa de desconto comercial de 1% ao mês. O primeiro título tem valor de R$ 10.000,00 e com vencimento de 90 d.d.. O segundo título tem um valor de R$ 10.000,00 e com vencimento de 180 d.d. Determinar o valor a ser creditado na conta pelo banco na conta desta empresa, pelo desconto destes títulos.

UNIVATES

CÁLCULOS DE FINANÇAS

HP-12C - MÉDIAS ARITMÉTICA E PONDERADA

MÉDIA ARITMÉTICA............. $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

onde: **x** = elementos a serem somados,
n = número de elementos

MÉDIA PONDERADA.... $\bar{x} = \frac{\sum x \cdot y}{\sum y}$

onde: **x** = elemento a ponderar,
y = elemento ponderador

CÁLCULO DA MÉDIA ARITMÉTICA:
EXEMPLO 1: Um aluno tirou as seguintes notas: 5,0; 7,0; 8,0; 10,0 e 8,0.
Qual a média de suas notas.

DADOS	TECLAS	45.000	ENTER
	f CLEAR Σ+		Limpar os registros do □
5	Σ+	1	Entrada X1
7	Σ+	2	Entrada X2
8	Σ+	3	Entrada X3
10	Σ+	4	Entrada X4
8	Σ+	5	Entrada X5 ....
	g $\bar{x}$	7,6	Resposta

Após a entrada dos dados digitar g $\bar{x}$ para obter a **média aritmética** de **x**.

CÁLCULO DA MÉDIA PONDERADA:
EXEMPLO 2: Calcular o saldo médio mensal negativo de uma conta sabendo que ela ficou negativa nos seguintes períodos:
1) $450,00 por 2 dias; 2) $1.300,00 por 5 dias;
3) $3.200,00 por 4 dias 4) $2.500,00 por 3 dias;
5) $ 0,00 por 16 dias.
OBs: Para que a resposta seja apresentada diretamente na base mensal, deve-se acrescentar mais um termo com valor zero e com prazo de dias equivalente ao número de dias que estão faltando para completar o mês.(no exercício = 30 -14 = 16 dias)

DADOS	TECLAS	VISOR	OBS.
	f CLEAR Σ+		Limpar os registros do Σ+
450	ENTER	450	Entrada X1
2	Σ+	1	Entrada Y1
1.300	ENTER	1.300,00	Entrada X2
5	Σ+	2	Entrada Y2
3.200	ENTER	3.200,00	Entrada X3
4	Σ+	3	Entrada Y3
2.500	ENTER	2.500,00	Entrada X4
3	Σ+	4	Entrada X4
0	ENTER	0,00	Entrada X5 - ajustamento n.de dias
16	Σ+	5	Entrada Y5 - n. p/ completar 30
	g $\bar{x} \cdot w$	923,33	Resposta

Após a entrada dos dados digitar g $\bar{x} \cdot w$ para obter a **média ponderada** de **x**.
fornece a média aritmética de x e g $\bar{x}$
fornece a média aritmética de y g $\bar{y}$

Desvio Padrão g s fornece o desvio padrão de x e
x><y fornece o desvio padrão de y

REGISTROS ARMAZENADORES
$\mathbf{R_1}$ = n ---> número de termos (R_1= RCL 1)
$\mathbf{R_2} = \Sigma x$ $\mathbf{R_3} = \Sigma x^2$
$\mathbf{R_4} = \Sigma y$ $\mathbf{R_5} = \Sigma y^2$
$\mathbf{R_6} = \Sigma x.y$

EXEMPLO 3: Calcular a taxa média dos títulos abaixo apresentados:

T1 $25.000,00 - 5,00%am - 15 dias;
T2 $30.000,00 - 5,50%am - 30 dias;
T3 $45.000,00 - 6.00%am - 25 dias;
T4 $40.000,00 - 5.70%am - 18 dias;
T5 $100.000,00 - 7,50%am - 35 dias

OBs: Deve-se isolar a taxa, fazendo-se :
x = i (taxa) e o elemento
y = valor X prazo (valor do título x prazo)

DADOS	TECLAS	VISOR	OBS.
	f CLEAR Σ+		Limpar os registros do □
5	ENTER	5	Entrada X1
25.000	ENTER	25.000,00	
15	x Σ+	1	Entrada Y1
5,5	ENTER	5	Entrada X2
30.000	ENTER	30.000,00	
30	x Σ+	2	Entrada Y2
6	ENTER	6	Entrada X3
45.000	ENTER	45.000,00	
25	x Σ+	3	Entrada Y3
5,7	ENTER	5,7	Entrada X4
40.000	ENTER	40.000,00	
18	x Σ+	4	Entrada X4
7,5	ENTER	7,5	Entrada X5 -
100.000,00	ENTER	100.000,00	
35	x Σ+	5	Entrada Y5
	g $\bar{x} \cdot w$	6,635	Resposta

HP-12C - TRABALHANDO COM DATAS

FUNÇÕES CALENDÁRIO

g DATE a partir de uma data, calcula outra, adicionando ou retirando dias

g Δ DYS calcula o número de dias entre duas datas.

FORMATOS DE DATA

DIA-MÊS-ANO (SISTEMA BRASILEIRO) TECLAS:..... g D.MY
20 de setembro de 1999 ---> digita-se : 20.091999
MÊS-DIA-ANO (SISTEMA AMERICANO) TECLAS:..... g M.DY
Setembro 20, 1999 ----------> digita-se : 9.201999

DATAS FUTURAS

Pode-se determinar datas futuras a partir de uma determinada data através das teclas g DATE da seguinte forma: acrescentando-se a data o número de dias.

EXEMPLO: determinar a data correspondente a 120 dias após 20 de setembro de 1999

Instrução	teclas	visor
1. Digita-se o formato de data	. g D.MY	
2. Digita-se a data	20.091999 ENTER	20.09
3. Digita-se o nº de dias que se quer acrescentar	120 g DATE	18.01.2000 2
A data correspondente é 18 de janeiro de 2000 (2- terça-feira)		

1-Segunda-Feira, 2-Terça-Feira, 3-Quarta-Feira, 4-Quinta-Feira,5-Sexta-Feira , 6-Sábado, 7-Domingo

DATAS PASSADAS

Pode-se determinar data passada a partir de uma determinada data através das teclas g DATE da seguinte forma: - diminuindo-se da data o número de dias (sinal negativo CHS)

EXEMPLO:determinar a data correspondente a 120 dias antes de 20 de setembro de 1999

Instrução	Teclas	visor
1. Digita-se o formato de data	. g D.MY	
2. Digita-se a data	20.091999 ENTER	20.09
3. Digita-se o nº de dias que se quer diminuir	120 CHS g DATE	23.05.1999 7
A data correspondente é 23 de maio de 1999 (7- domingo)		

NÚMERO DE DIAS ENTRE DATAS: Pode-se determinar o número de dias transcorridos entre duas datas determinadas através da teclas.. g Δ DYS

EXEMPLO: determinar o número de dias transcorridos entre 20/ setembro/1999 e 18/janeiro/2000

Instrução	Teclas	visor
1. Digita-se o formato de data	. g D.MY	
2. Digita-se a 1a. Data	20.091999 ENTER	20.09
3. Digita-se a 2a. Data	18.01.2000 g Δ DYS	120
4. Nºde dias equivalente mês de 30d	x >< y	118

O período transcorrido entre as duas datas é de 120 dias.

O período equivalente a meses de 30 dias é de 118 dias.

HP-12C - JUROS SIMPLES

A HP-12C permite o cálculo de juros simples de duas maneiras:

1. Tomando como base o ano de 360 dias (ano comercial)
2. Tomando como base o ano de 365 dias (ano exato)

HP-12C -----> prazo n sempre em dias, e
taxa de juros i sempre anual (% anual).

EXEMPLO 1 (usando o ano comercial = 360 dias)

Um capital de R$1.000,00 foi emprestado pelo período de 75 dias, a uma taxa de 60% ao ano, a juros simples, levando em conta o ano comercial (360 dias), qual o valor resgatado no final da operação?

Instrução	teclas	visor
1. Limpar as memórias	f CLEAR FIN	
2. Digita-se o nº de dias n	75 n	75
3. Digita-se a taxa de juros I	60 i	60
4. Digita-se a principal PV	1000 CHS PV	-1.000,00
5. Calcula-se o JURO (ano comercial=360dias)	F INT	125
6. Calcula-se o FV (PV + JURO)	+	1.125,00

EXEMPLO 2 (usando o ano exato = 365 dias)

Um capital de R$1.000,00 foi emprestado pelo período de 75 dias, a uma taxa de 5% ao mês, a juros simples, levando em conta o ano exato (365 dias), qual o valor resgatado no final da operação?

Instrução	Teclas	visor
1. Limpar as memórias	f CLEAR FIN	
2. Digita-se o nº de dias n	75 n	
3. Digita-se a taxa de juros I	5 ENTER 12 x i	60
4. Digita-se a principal PV	1000 CHS PV	-1.000,00
5. Calcula-se o JURO (ano comercial=360dias)	F INT	125
6. Calcula-se o JURO (ano exato=365dias)	R↓ x >< y	123,29
7. Calcula-se o FV (PV + JURO)	+	1.123,29

4. JUROS COMPOSTOS

Juros também geram juros.

4.1 CONVENÇÕES:

J	=	Juros				
n	=	número de períodos				
i	=	Taxa de juros				
PV	=	Valor Presente (Present Value)	=	Capital	=	Atual
FV	=	Valor Futuro (Future Value)	=	Montante	=	Futuro

4.2 DEDUÇÃO DA FÓRMULA:

Sabendo-se que: **FV= PV + J** e que **J=PV.i** (com i equivalente ao período que se esta calculando) temos o capital nos finais dos períodos de Capitalização:

No início da operação: $FV_0=PV$

No final do 1º. Período: $FV_1=PV+PV.i$ >>>> $FV_1=PV.(1+i)$

No final do 2º. Período: $FV_2=PV.(1+i)+PV.(1+i).i = PV.(1+i).(1+i)$ >>>> $FV_2=PV.(1+i)^2$

No final do 3º. Período: $FV_3=PV.(1+i)^2+PV.(1+i)^2.i = PV.(1+i)^2.(1+i)$ >>>> $FV_3=PV.(1+i)^3$

No final do enésimo Período: **FV=PV.(1+i)** ^{n}

4.3 FÓRMULAS (Valor Futuro x Valor Presente):

$$FV = PV + J$$

$FV = PV \times (1+i)^n$	$PV = \dfrac{FV}{(1+i)^n}$
$i = \left(\dfrac{FV}{PV}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$	$n = \dfrac{Ln\left(\dfrac{FV}{PV}\right)}{Ln\,(1+i)}$

Exemplo 4.1:
a- Um capital de R$30.000,00 ficou depositado durante 9 meses a taxa de juros compostos de 2% ao mês. Qual o valor resgatado no final do período? ($35.852,78)

b - Daqui a 3 meses precisaremos de $133.100,00, considerando uma taxa de juros de 10% ao mês, quanto teríamos que aplicar hoje?

Exemplo 4.2:
Um capital de 40.000,00 aplicado por 6 meses, capitalizado mensalmente no final do período rendeu R$7.763,09. Qual a taxa mensal e a taxa anual? (3% a.m. - 42,576% a.a.)

Exemplo 4.3:
Qual o prazo necessário para que um capital de R$20.000,00 permita uma retirada de R$21.721,35 em uma instituição que trabalha com uma taxa capitalizada mensalmente de 3,5%. (2,4meses = 2 meses e 12 dias).

n	i	PV	FV
10	5%	3.000,00	
8	6%		9.563,09
12		5.000,00	8.479,41
	10%	30.000,00	48.315,30

HP-12C – JUROS COMPOSTOS

A HP-12C permite o cálculo de juros compostos diretamente, a partir das teclas programadas.
As teclas financeiras para os cálculos diretos de juros compostos são as Seguintes:

- n número de períodos i taxa de juros PV valor presente e FV valor futuro

---

Introduzindo-se 3 dos valores e apertando a tecla do 4o-, obtém-se o resultado deste.

Observações de uso:

1. A taxa e o número de períodos (prazo) devem sempre estar expressos na mesma unidade de tempo.

2. A taxa de juros deverá ser introduzida na forma percentual;

3. Cálculo dos períodos não inteiros:

3.1 – CONVENÇÃO EXPONENCIAL -como **juros compostos** - para que todo o cálculo seja efetuado como juro composto o **anúncio C**, no visor da calculadora **deverá estar ligado**;

3.2- CONVENÇÃO LINEAR - como juros simples: se o anúncio "C" estiver desligado, a máquina calculará os períodos inteiros como juros compostos e a parte fracionária do período como juros simples;

3.3- para ligar ou desligar o anúncio "C" do visor deve-se digitar STO EXX ;

4. A ordem de entrada dos dados não importa, importa apenas que a última tecla a ser acionada seja a tecla do valor que se quer encontrar**;**

5 FV e PV devem ter sinais contrários (convenção do fluxo de caixa), caso contrário o cálculo apresentará erro.

DICAS:

---

1. Quando a taxa de juros for dada na forma nominal anual, com capitalização mensal, e o prazo de cálculo for mensal pode-se introduzir a taxa de juros nominal anual diretamente que a calculadora efetuará diretamente a transformação para taxa efetiva (de cálculo), bastando digitar ....(taxa nominal anual %) g 12÷
(no visor aparecerá a taxa dividida por 12 e já estará gravada na memória i)

2. Quando o período n for dado na forma anual, mas o cálculo deverá ser executado em períodos mensais, a transformação poderá ser feita automaticamente, digitando-se .... (período anual) g 12x

(no visor aparecerá o prazo multiplicado por 12 - o prazo mensal já estará gravado na memória n)

MATEMÁTICA FINANCEIRA

INSTRUÇÕES DE USO:

CÁLCULO DO VAOR FUTURO - FV

Instrução	**teclas**
1. Limpar as memórias financeiras	f **CLEAR** FIN
2. Digita-se o período n	valor n
3. Digita-se a taxa de juros I na forma percentual	valor% i
4. Digita-se o valor presente PV e seu respectivo sinal	valor CHS PV
5. Pressiona-se FV, para obter-se o cálculo	

CÁLCULO DO PRESENTE - PV

Instrução	**teclas**
1. Limpar as memórias financeiras	f **CLEAR** FIN
2. Digita-se o período n	valor n
3. Digita-se a taxa de juros I na forma percentual	valor i
4. Digita-se o valor presente FV e seu respectivo sinal	valor CHS FV
5. Pressiona-se PV, para obter-se o cálculo	

CÁLCULO DA TAXA DE JUROS - i

Instrução	**teclas**
1. Limpar as memórias financeiras	f **CLEAR** FIN
2. Digita-se o período n	valor n
3. Digita-se o valor presente PV e seu respectivo sinal	valor CHS PV
4. Digita-se o valor presente FV e seu respectivo sinal	valor FV
5. Pressiona-se i, para obter-se taxa de juros na forma percentual	i

Observação: 1. A taxa de juros será expressa na mesma unidade de tempo de n.

CÁLCULO DO PRAZO - n

Instrução	**teclas**
1. Limpar as memórias financeiras	f **CLEAR** FIN
2. Digita-se a taxa de juros na forma percentual	valor i
3. Digita-se o valor presente PV e seu respectivo sinal	valor CHS PV
4. Digita-se o valor presente FV e seu respectivo sinal	valor FV
5. Pressiona-se n, para obter-se prazo (número de períodos)	n

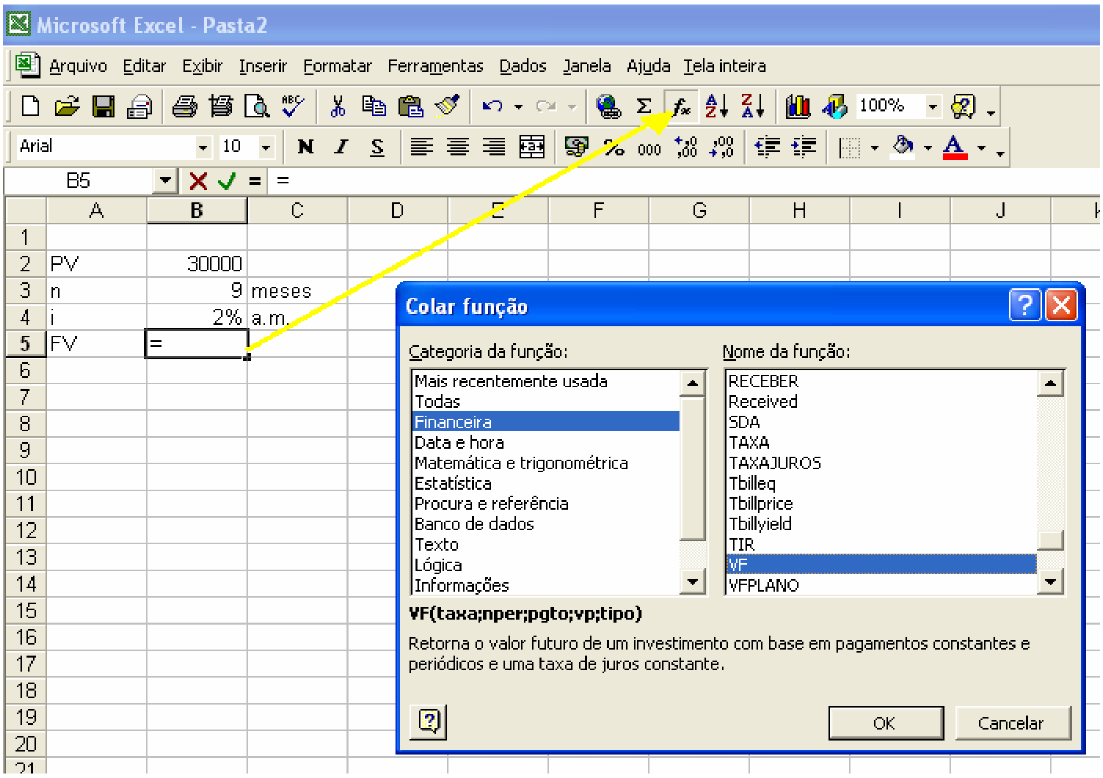
Observações: 1. O prazo (número de períodos) será expresso na mesma unidade de tempo da taxa de juros.

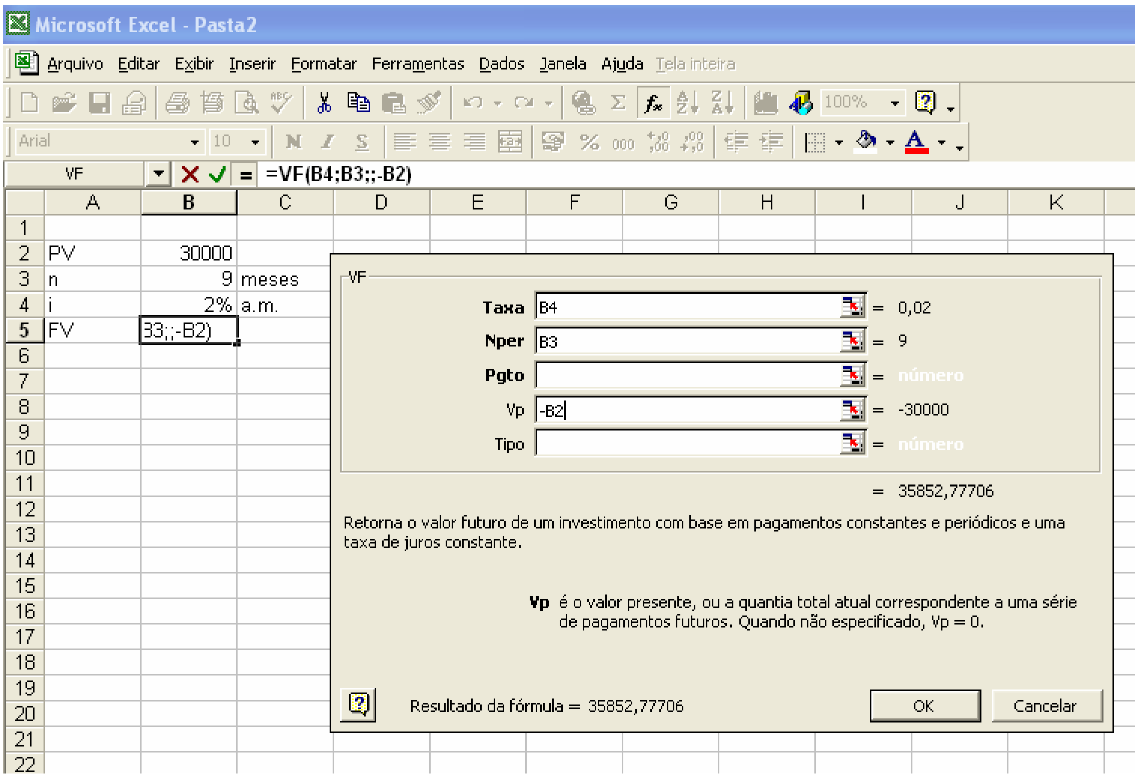
2. Se a resposta exata for um número não inteiro, a HP12-C dará como resposta um número inteiro imediatamente superior ao número fracionário.

UTILIZANDO O EXCEL

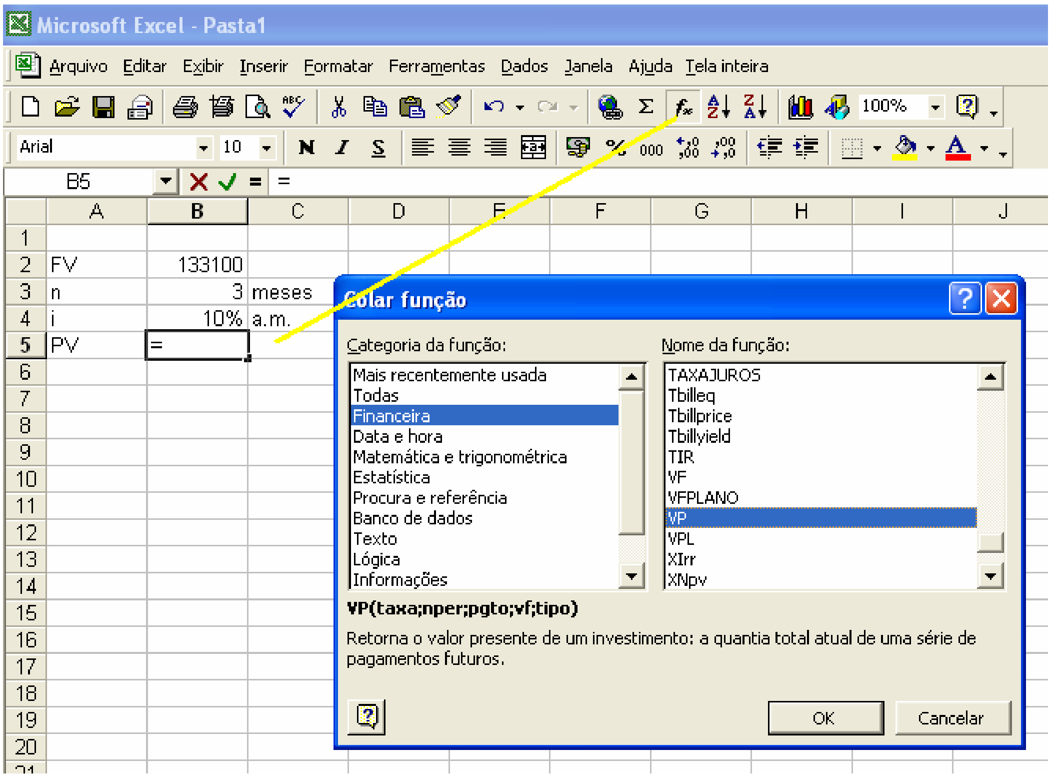
Exemplo 4.1:

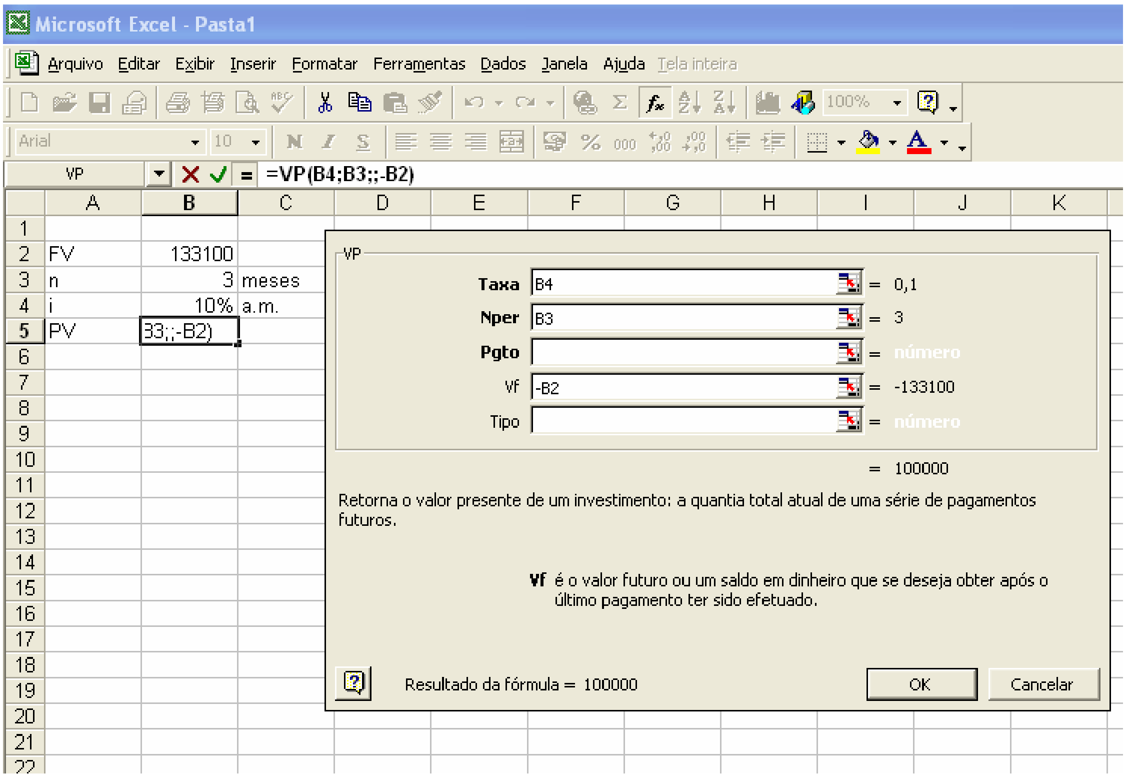
a- Um capital de R$30.000,00 ficou depositado durante 9 meses a taxa de juros compostos de 2% ao mês. Qual o valor resgatado no final do período? ($35.852,78)



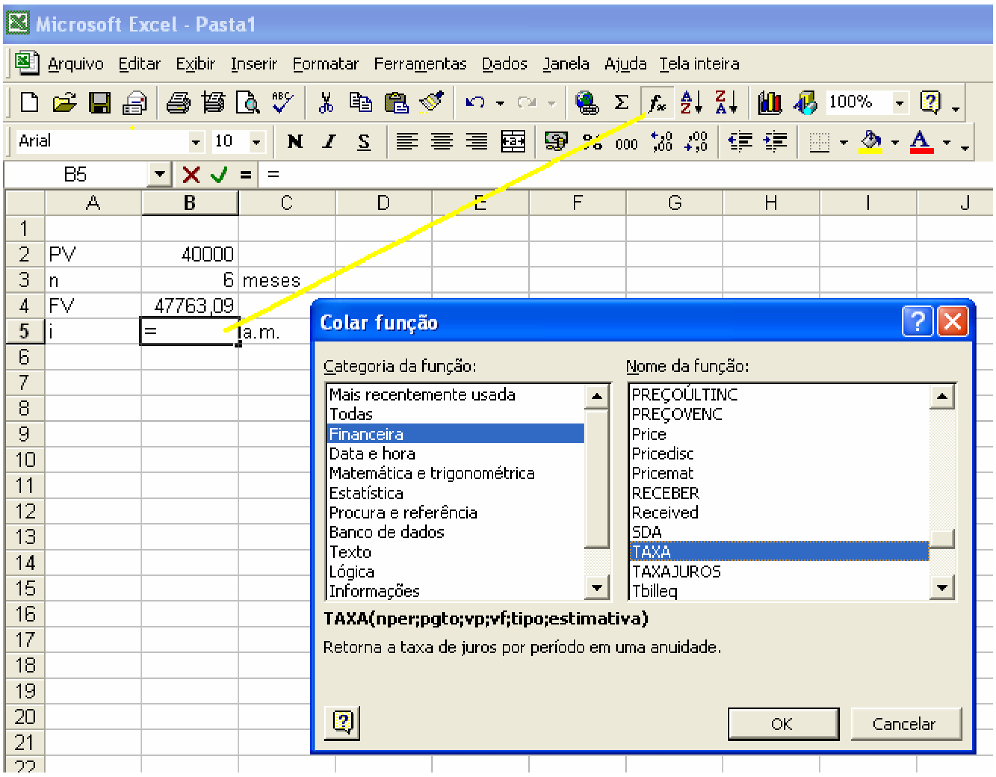


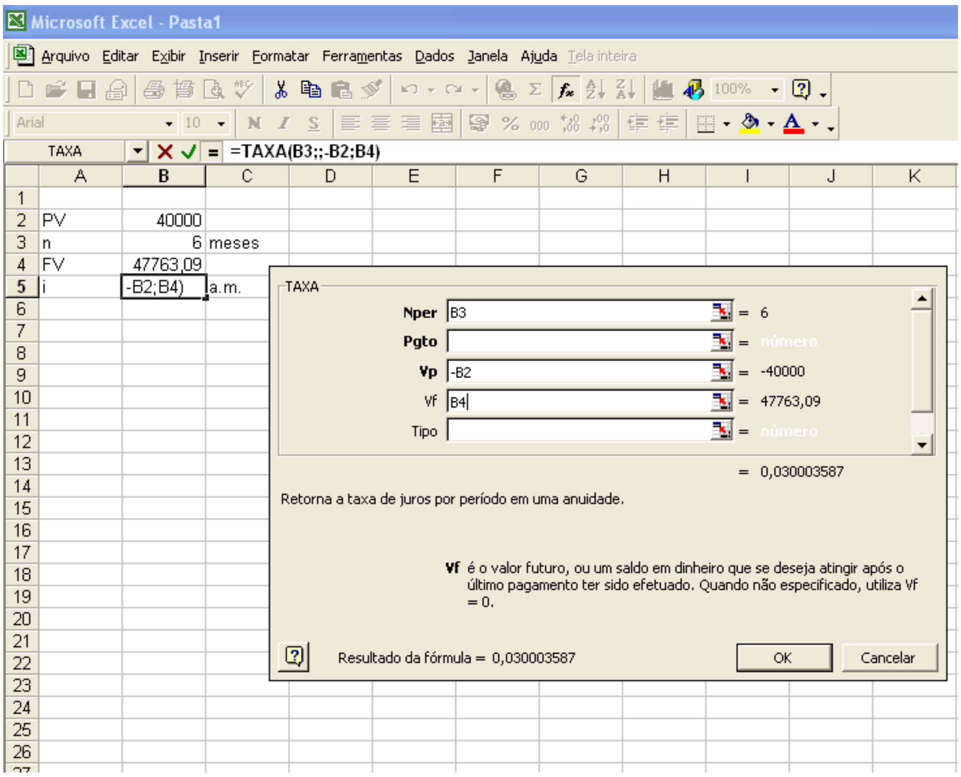
b - Daqui a 3 meses precisaremos de $133.100,00, considerando uma taxa de juros de 10% ao mês, quanto teríamos



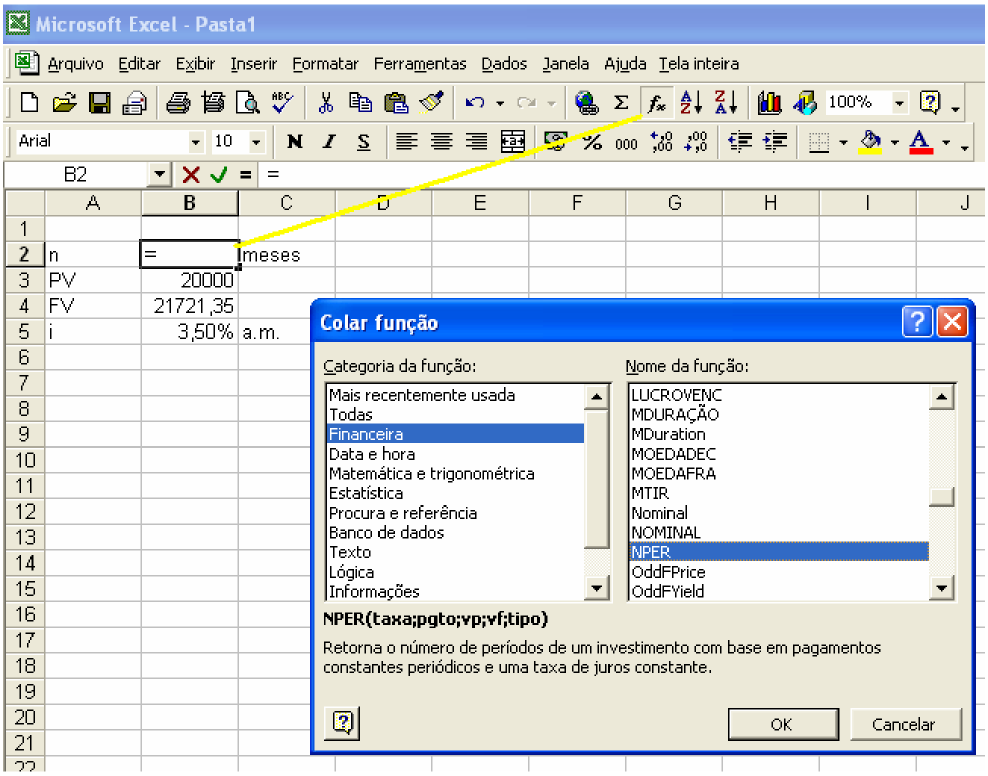


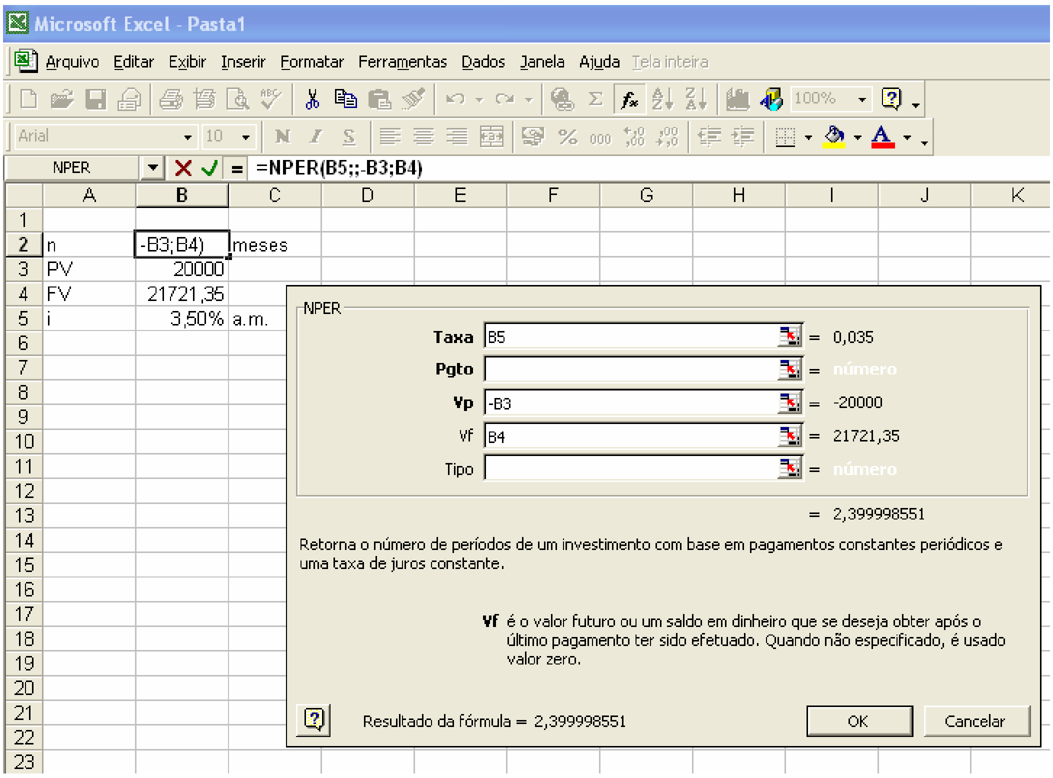
Exemplo 4.2:
Um capital de 40.000,00 aplicado por 6 meses, capitalizado mensalmente no final do período rendeu R$7.763,09. Qual a taxa mensal e a taxa anual? (3% a.m. - 42,576% a.a.)





Exemplo 4.3:
Qual o prazo necessário para que um capital de R$20.000,00 permita uma retirada de R$21.721,35 em uma instituição que trabalha com uma taxa capitalizada mensalmente de 3,5%. (2,4meses = 2 meses e 12 dias).





4.4 PERÍODOS NÃO INTEIROS

4.4.1 CONVENÇÃO EXPONENCIAL

Na convenção exponencial usa-se o mesmo regime de capitalização para todo o período (inclusive para a parte não inteira do período). Usa-se na fórmula períodos fracionários.

Esse procedimento tornou-se bastante simples com o uso de calculadoras que possuem a função exponencial.

A expressão geral para o cálculo exponencial pode ser dada por:

$$FV = PV \times (1+i)^{\left(n+\frac{m}{k}\right)}$$

onde n = parte inteira do prazo
m/k = parte fracionária do prazo

por exemplo se o período inteiro é mensal e o fracionário é diário temos: nºdias/30dias

Exemplo 4.4:
Um investidor aplicou $100.000,00 em Letras de Câmbio, a instituição financeira ao emitir esta série de Letras de Câmbio determinou que estas teriam como de atratividade um rendimento de 4% ao mês, a juros compostos, por um prazo de 4 meses e 24 dias. Qual será o valor resgatado no final do período? (n=1,8; FV=$120.714,66)

4.4.1 CONVENÇÃO LINEAR

Na convenção linear, adota-se para a parte inteira do prazo o cálculo de juros compostos e para a parte fracionária juros simples. Este sistema foi muito usado como simplificador no tempo em que as calculadoras não eram de uso generalizado, e calculava-se através de tabelas (as tabelas são calculadas para períodos inteiros).

A expressão geral para o cálculo exponencial pode ser dada por:

$$FV = PV \times (1+i)^{(n)} \times \left[1 + i \times \frac{m}{k}\right]$$

onde n = parte inteira do prazo
m/k = parte fracionária do prazo

por exemplo se o período inteiro é mensal e o fracionário é diário temos: nºdias/30dias

Exemplo 4.5:
Calcule o exemplo anterior levando em consideração a convenção linear. ($120.729,40)

UTILIZANDO A HP12C: nos cálculos em regime de juros compostos, a **HP12C** deverá apresentar o anúncio "**c**" no visor. O anúncio "**c**" aceso indica que a calculadora estará utilizando o regime de juros compostos para os períodos singulares. Se o anúncio estiver apagado cálculos dos períodos singulares serão efetuados em regime de juros simples. Os períodos singulares são expressos na HP12C como parte fracionária de n (prazo). Para ligar / desligar o anúncio "**c**" devemos pressionar as teclas **STO EEX .**

4.4 TAXA NOMINAL, EFETIVA E EQUIVALENTE

4.4.1 TAXA EFETIVA

A taxa efetiva é aquela que é usada na operação financeira, coincidente com o período de capitalização e representa o verdadeiro custo da operação financeira

A taxa efetiva representa o processo de formação dos juros pelo regime de juros compostos ao longo dos períodos de capitalização.

4.4.1.1 CAPITALIZAÇÃO

$$i_{cap} = (1 + i_n)^n - 1$$

onde i = na forma unitária
n= nº períodos de i_n necessários para capitalizar i_{cap}
Ex.: se i_{cap} = a.a. e i_n= a.m. >>>> n=12

Exemplo 4.6:
Uma taxa de 3% a.m. deve ser capitalizada por 6 meses.
icap=

4.4.1.2 DESCAPITALIZAÇÃO

$$i_{desc} = (1 + i_n)^{\frac{1}{n}} - 1$$

onde i = na forma unitária
n= nº períodos de i_n necessários para descapitalizar i_{desc}
Ex.: se i_{descap} = a.m. e i_n= a.a. >>>> n=12

Exemplo 4.7:
Qual é a taxa mensal efetiva (equivalente) a uma taxa de 18% a.a..
idescap=

4.4.1.3 FÓRMULA GERAL (BÁSICA)

$$i_E = (1 + i)^{\frac{n_p}{nC}} - 1$$

onde i_E = taxa equivalente (efetiva/exponencial) unitária
i = taxa fornecida da operação - unitária
n_C = prazo CONHECIDO - referente a taxa fornecida (i)
n_P = prazo PROCURADO - referente a taxa equivalente (i_E)
Ex.: se i_{cap} = a.a. e i_n= a.m. >>>> n=12

- Para facilitar o uso desta fórmula normalmente usa-se os prazos em dias.
- Quando nP é MAIOR que nC temos CAPITALIZAÇÃO.
- Quando nP é MENOR que nC temos DESCAPITALIZAÇÃO

Exemplo 4.8:
Qual é a taxa semestral equivalente a taxa de 120% a.a.? (descapitalização)
i_E= (1 + i)n_C/n_P = (1 + 1,20)^180/360 -1 = 0,4832 -> 48,32% a.s.

Qual é a taxa anual equivalente a taxa de 2,3% a.m. (capitalização)
i_E= (1 + i)n_C/n_P = (1 + 0,023)^360/30 -1 = 0,3137 -> 31,37% a.a.

4.4.1.3 CÁLCULO DA TAXA EFETIVA PELA HP12C - (CAPITALIZAÇÃO E DESCAPITALIZAÇÃO)

CAPITALIZAÇÃO		
DADOS	TECLAS	VISOR
	[f] [FIN]	
100	[CHS] [PV]	
i	[i]	
n	[n]	
	[FV]	
100	[-]	i_{CAP}
EXEMPLO		
	[f] [FIN]	0
100	[CHS] [PV]	-100
3	[i]	3,00
6	[n]	6,00
	[FV]	119,41
100	-	19,41

DESCAPITALIZAÇÃO		
DADOS	TECLAS	VISOR
	[f] [FIN]	
100	[CHS] [PV]	
100 + i	[FV]	
n	[n]	
	[i]	i_{DESCAP}
EXEMPLO		
	[f] [FIN]	0
100	[CHS] [PV]	-100,00
100 + 18	[FV]	118,00
12	[n]	12
	[i]	1,39

4.4.2 TAXA EQUIVALENTE

São taxas de juros equivalentes, aquelas taxas que mesmo sendo fornecidas em unidades de tempo diferentes, ao serem aplicadas a um mesmo valor principal por um prazo de tempo igual, produzem um mesmo valor futuro em um regime de juros compostos.

4.4.3 TAXA NOMINAL

A taxa nominal no regime de juros compostos não coincide com o período de capitalização (período de capitalização é aquele em que realizamos o cálculo financeiro), ela tem uma relação linear com este e não pode ser usada diretamente nos cálculos.

A taxa nominal apresenta um prazo de capitalização dos juros diferente daquele em que ela é apresentada (não é a real taxa de juros da operação). A taxa nominal é normalmente apresentada em períodos inteiros (ex.:a.a.) e é transformada para o período de capitalização admitindo-se juros proporcionais simples	$\text{Taxa efetiva} = \dfrac{\text{Taxa nominal}}{\text{número de períodos de capitalização incluídos na taxa nominal}}$

Exemplo 4.9:
Quais são as taxas efetivas mensal e anual referente a taxa nominal de 36% a.a. capitalizada mensalmente.

Exemplo 4.10:
Calcule as taxas efetivas anuais de:

a) Taxa nominal de 42% a.a. capitalizada mensalmente;

b) Taxa nominal de 60% a.a. capitalizada trimestralmente;

c) Taxa nominal de 18% a.t. capitalizada mensalmente.

Exemplo 4.11:
Calcule as taxas efetivas mensais e as taxas nominais anuais capitalizadas mensalmente:

a) Taxa efetiva de 60% a.a.;

b) Taxa efetiva de 25% a.t;

c) Taxa efetiva de 40% a.s..

Exemplo 4.12:
Calcule as taxas efetivas abaixo, conforme solicitado na primeira coluna:

aa	69,5882%					
as		19,4053%				
at			6,1208%			
ab				3,0225%		
am					5,0000%	
ad						0,2000%

Exemplo 4.13:
Calcule as taxas efetivas abaixo, conforme solicitado na primeira coluna:

	36% aa cm	**48% aa ct**	**54% aa cd**	**69,5882% aa ca 38,8105% aa cs**
aa ca				
at ct				
am cm				
ad cd				

4.5 EXERCÍCIOS - JUROS COMPOSTOS

1. Um capital de R$100.000,00 ficou depositado durante 15 meses a taxa de juros compostos de 35% ao ano. Qual o valor resgatado no final do período?

2. Um capital de 30.000,00 aplicado por 6 meses, capitalizado mensalmente no final do período rendeu R$ 2.997,69. Qual a taxa mensal e a taxa anual?

3. Qual o prazo necessário para que um capital de R$10.000,00 renda de juros R$5.513,28 em uma instituição que trabalha com uma taxa nominal de 60% ao ano e capitalização mensal. Encontre também a taxa anual efetiva.

4. Qual é a taxa efetiva mensal, calculada a juros compostos para que um capital dobre em um ano? E a Taxas anuais efetiva e nominal?

5. Qual é o prazo necessário para que um capital que aplicado a 5% a.m., a juros compostos triplique?

6. Uma pessoa aplicou em uma instituição que capitaliza mensalmente os juros, R$ 5.000,00 pelo período de 10 meses a uma taxa nominal de 36% a. a., após este período ele depositou mais R$ 3.000,00 a uma taxa mensal de 4,2% pelo período de 5 meses. Então retirou R$ 2.000,00. O saldo reaplicou a uma taxa anual efetiva de 69,59% a.a. pelo período de 6 meses. Qual o valor retirado no final deste prazo?

7. Uma instituição financeira oferece a seus clientes uma taxa de rentabilidade de 1,2% ao mês, a juros compostos. Determinar o valor da renda de uma aplicação de R$10.000,00 efetuada nessa instituição, por um prazo de 18 meses. Determine ainda as taxas anuais efetiva e nominal.

8. Uma empresa aplicou, a juros efetivos, R$ 100.000,00 durante 7 meses seguidos em duas operações, tendo resgatado o valor de R$ 120.616,61. Durante os primeiros 4 meses obteve uma taxa de juros de 2,5% ao mês. Pede-se calcular o valor da taxa de juros anual da segunda operação.

9. Um investidor tem um título aplicado em um Banco para vencimento em 5 meses, com valor de resgate de 50.000,00. A instituição lhe propõe a troca por um título com vencimento para daqui a 11 meses, no valor de 58.500,00. Sendo a taxa corrente de juros no mercado de 2% a.m. O Investidor deve fazer a troca? Qual a taxa de rentabilidade da operação proposta?

10. Um investidor tem 3 títulos aplicados em uma instituição, com valores de resgate no vencimento de R$ 10.000,00 em dois meses, 15.000,00 em dois meses e meio e o terceiro de 25.000,00 em 4 meses. A instituição propôs liquidar os títulos na data de hoje por R$45.000,00. É vantagem para o aplicador efetuar a troca, considerando que ele consegue no mercado aplicações a taxas de 3% a.m.?

5. SÉRIES UNIFORMES - (DE PAGAMENTOS OU DE RENDAS)

5.1 INTRODUÇÃO

Séries uniformes de valores monetários, caracterizam-se por pagamentos ou rendas constantes e periódicos por determinado tempo. Como todas as prestações tem o mesmo valor é possível através de fórmulas simplificadas proceder a capitalização ou os descontos destas através da soma de termos de uma progressão geométrica.

Usualmente são conhecidas como Modelo Price, porém este modelo é uma particularidade do modelo geral. O Modelo Price ou "Tabela Price" como é mais conhecido é normalmente expresso através da taxa nominal anual, indicando-se o período de capitalização dos juros (mensal, trimestral, anual, etc...)

5.2 TIPOS DE SÉRIES UNIFORMES DE PAGAMENTO OU RENDA

Séries uniformes de valores monetários, quer de pagamentos ou de rendas (recebimentos), podem, quanto a forma de pagamento ou renda, ser classificadas em temporárias ou perpétuas, o primeiro caso é o mais comum. Elas ainda podem ser classificadas dependendo de seu cálculo (conforme quadro abaixo), como imediatas ou diferidas (quando existe um prazo de carência) e postecipadas (pagamentos ou recebimentos efetuados no final dos períodos) ou antecipadas (pagamentos ou recebimentos efetuados no início dos períodos).

```
CLASSIFICAÇÃO DAS RENDAS/ PAGAMENTOS
                                                      T      T      T      T      T      T
                                       POSTECIPADA    +-------+-------+-------+-------+-------+-------+
                                                      0      1      2      3      ...    n-1    n
                           IMEDIATA
                                                      T      T      T      T      T      T
                                       ANTECIPADA     +-------+-------+-------+-------+-------+-------+
                                                      0      1      2      3      ...    n-1    n
RENDAS OU PAGAMENTOS
CONSTANTES - TEMPORÁRIOS
                                                  prazo de carência       T      T      T      T      T      T
                                       POSTECIPADA    +----------------------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+
                                                                             0      1      2      3      ...    n-1    n
                           DIFERIDA
                                                  prazo de carência       T      T      T      T      T      T
                                       ANTECIPADA     +----------------------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+
                                                                             0      1      2      3      ...    n-1    n
```

NOTAS____

____

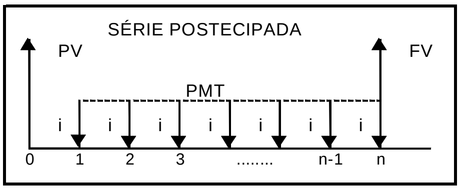
____

____

____

____

5.3 SÉRIES UNIFORMES POSTECIPADAS - FÓRMULAS



O Valor Presente (FV) de uma série uniforme de pagamentos PMT'e dado pelo somatórios dos valores presentes de cada parcela. O valor presente de cada parcela é obtido através da aplicação da fórmula geral dos juros compostos fazendo-se FV=PMT: $PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$ ➔ $PV = \frac{PMT}{(1+i)^n}$ então temos:

1ª. Parcela, à valor presente, descapitaliza a uma taxa i durante 1 período .... -> $PV = \frac{PMT}{(1+i)^1}$

2ª. Parcela, à valor presente, descapitaliza a uma taxa i durante 2 períodos .... -> $PV = \frac{PMT}{(1+i)^2}$

Penúltima Parcela, à valor presente, descapitaliza a uma taxa i durante n-1 períodos -> $PV = \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}}$

Última Parcela, à valor presente, descapitaliza a uma taxa i durante n períodos .... -> $PV = \frac{PMT}{(1+i)^n}$

Temos assim que o PV total da série uniforme é o somatório dos FV das parcelas:

$PV = \frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}} + \frac{PMT}{(1+i)^n}$, isolando-se o PMT, temos:

$$PV = PMT \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

Estes termos correspondem a soma de termos (S_n) de uma PG, cujo primeiro termo (a_1) é igual a razão (q): $a_1 = q = \frac{1}{(1+i)^n}$

Portanto: $PV = PMT \cdot [S_n]$

Sabe-se, do estudo das progressões geométricas que a soma de seus termos pode ser obtida através da fórmula: $S_n = \frac{a_1 \cdot (q_n - 1)}{(q-1)}$, procedendo-se a substituição de a_1 e q, temos

$$S_n = \frac{\frac{1}{(1+i)} \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1 \right]}{\frac{1}{(1+i)} - 1}$$, multiplicando-se por $\frac{(1+i)}{(1+i)}$ temos:

$$S_n = \frac{\frac{(1+i)}{1}}{\frac{(1+i)}{1}} \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)} \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1 \right]}{\frac{1}{(1+i)} - 1} = \frac{\left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1 \right]}{\frac{1.(1+i)}{(1+i)} - 1.(1+i)} = \frac{\left[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n} \right]}{1-1-i} = \frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n} \cdot \frac{1}{-1},$$

multiplicando-se por (-1), $S_n = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n.i}$, substituindo-se em $PV = PMT \cdot [S_n]$, temos:

$$\boxed{PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n.i} \right]} \quad (2)$$

5.3.1 RELAÇÃO PV x PMT

$$PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i}\right] \Leftrightarrow PMT = PV \cdot \left[\frac{(1+i)^n . i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

FATOR DE VALOR ATUAL

$$FVA_{(j.n)} = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i}\right] = \frac{1}{FRC}$$

FATOR DE RECUPERAÇÃO DE CAPITAL

$$FRC_{(j,n)} = \left[\frac{(1+i)^n . i}{(1+i)^n - 1}\right] = \frac{1}{FVA}$$

Para se determinar o FV, substitui-se o PV encontrado na fórmula (2), na fórmula geral dos juros compostos:

$FV = PV \times (1+i)^n$, como $PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i}\right]$, temos: $FV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i}\right] . (1+i)^n$

ou seja, $FV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$

5.3.2 RELAÇÃO FV x PMT

$$FV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \Leftrightarrow PMT = FV \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

FATOR DE ACUMULAÇÃODE CAPITAL

$$FAC_{(j.n)} = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = \frac{1}{FCC}$$

FATOR DE FORMAÇÃO DE CAPITAL

$$FCC_{(j,n)} = \left[\frac{i}{(1+i)^n . i}\right] = \frac{1}{FAC}$$

5.3.3 DETERMINAÇÃO DO PRAZO (No. DE PARCELAS)

A partir destas equações podemos determinar o prazo (ou nº de pagamentos/recebimentos)

CONHECIDOS FV, PMT, i

$$n = \frac{Ln\left[\left(\frac{FV}{PMT} . i\right) + 1\right]}{Ln(1+i)}$$

$\Leftrightarrow$

CONHECIDO PV, PMT, i

$$n = -\left[\frac{Ln\left[1 - \left(\frac{PV}{PMT} . i\right)\right]}{Ln(1+i)}\right]$$

Quando se estiver usando a calculadora HP12C deve-se ter o cuidado, pois ela fornece o número de períodos inteiros, normalmente havendo sobras que deverão ser compensadas. Estas compensações normalmente são feitas na primeira ou na última prestação.

5.3.4 DETERMINAÇÃO DA TAXA

A taxa é determinada pelo método comparativo, ou seja por processo interativo de "tentativa e erro" (pela complexidade de isolar-se a taxa na fórmula, pois ela aparece tanto no numerador quanto no denominador elevadas potências).

$$\frac{FV}{PMT}=\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \Leftrightarrow \frac{FV}{PMT}=\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n.i}\right]$$

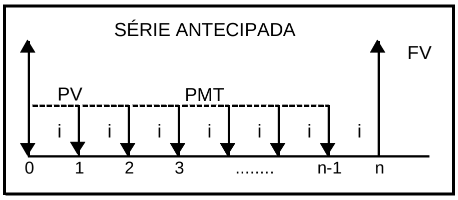
Segue-se os seguintes passos

1) Calcula-se o primeiro membro da equação, o valor FV/PMT
2) Escolhe-se uma taxa (i) e calcula-se o segundo membro da equação.
3) Compara-se os dois resultados.
4) Se o segundo membro é maior que o primeiro escolhe-se uma taxa menor e recalcula-se
5) Se o segundo membro é menor que o primeiro escolhe-se uma taxa maior e recalcula-se
6) Recalcula-se tantas vezes quantas necessário, escolhendo-se taxas maiores ou menores (passos 4 ou 5, conforme o caso), até que as parcelas se igualem.

Segue-se os seguintes passos

1. Calcula-se o primeiro membro da equação, o valor FV/PMT
2. Escolhe-se uma taxa (i) e calcula-se o segundo membro da equação.
3. Compara-se os dois resultados.
4. Se o segundo membro é maior que o primeiro escolhe-se uma taxa menor e recalcula-se
5. Se o segundo membro é menor que o primeiro escolhe-se uma taxa maior e recalcula-se
6. Recalcula-se tantas vezes quantas necessário, escolhendo-se taxas maiores ou menores (passos 4 ou 5, conforme o caso), até que as parcelas se igualem.

5.4 SÉRIES UNIFORMES ANTECIPADAS - FÓRMULAS



O Valor Presente (FV) de uma série uniforme de pagamentos PMT'e dado pelo somatórios dos valores presentes de cada parcela, o valor presente de cada parcela é obtido através da aplicação da fórmula geral dos juros compostos fazendo-se FV=PMT:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n} \quad \Rightarrow \quad PV = \frac{PMT}{(1+i)^n}$$ então temos:

1ª. Parcela, à valor presente, descapitaliza a uma taxa i durante 0 período.... -> $PV = \frac{PMT}{(1+i)^0} = \frac{PMT}{1}$

2ª. Parcela, à valor presente, descapitaliza a uma taxa i durante 1 períodos ... -> $PV = \frac{PMT}{(1+i)^1}$

3ª. Parcela, à valor presente, descapitaliza a uma taxa i durante 2 períodos .... -> $PV = \frac{PMT}{(1+i)^2}$

Penúltima Parcela, à valor presente, descapitaliza a uma taxa i durante n-2 períodos -> $PV = \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}}$

Última Parcela, à valor presente, descapitaliza a uma taxa i durante n-1 períodos...... -> $PV = \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}}$

Temos assim que o PV total da série uniforme é o somatório dos FV das parcelas:

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{PMT}{(1+i)^{n-2}} + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}}$$, isolando-se o PMT, temos:

$$PV = PMT \cdot \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-2}} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right]$$

Estes termos correspondem a soma de termos(S_n)de uma PG, cujo primeiro termo (a_1) e a razão (q) são: $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{(1+i)^n}$

Portanto: $PV = PMT \cdot [S_n]$

Sabe-se, do estudo das progressões geométricas que a soma de seus termos pode ser obtida através da fórmula: $S_n = \frac{a_1 \cdot (q_n - 1)}{(q-1)}$, procedendo-se a substituição de a_1 e q, temos $S_n = \frac{1 \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right]}{q-1}$,

multiplicando-se por $\frac{(1+i)}{(1+i)}$ temos:

$$S_n = \frac{\frac{(1+i)}{1}}{\frac{(1+i)}{1}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right]}{\frac{1}{(1+i)} - 1} = \frac{(1+i)\left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right]}{\frac{1.(1+i)}{(1+i)} - 1.(1+i)} = \frac{(1+i).\left[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]}{1-1-i} = (1+i).\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n} \cdot \frac{1}{-1}$$,multiplicando-se

por (-1) $S_n = (1+1).\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n.i}$, substituindo-se em $PV = PMT \cdot [S_n]$, temos:

$$\boxed{PV = PMT.(1+i).\cdot\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n.i}\right]} \qquad (2)$$

5.4.1 RELAÇÃO PV x PMT

$$PV = PMT \cdot (1+i) \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i} \right] \Leftrightarrow PMT = \frac{PV}{(1+i)} \cdot \left[\frac{(1+i)^n . i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

FATOR DE VALOR ATUAL

$$FVA_{(j,n)} = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i} \right] = \frac{1}{FRC}$$

FATOR DE RECUPERAÇÃO DE CAPITAL

$$FRC_{(j,n)} = \left[\frac{(1+i)^n . i}{(1+i)^n - 1} \right] = \frac{1}{FVA}$$

Para se determinar o FV, substitui-se o PV encontrado na fórmula (2), na fórmula geral dos juros compostos:

$FV = PV \times (1+i)^n$, como $PV = PMT \cdot (1+i) \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i} \right]$, temos: $FV = PMT \cdot (1+i) \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i} \right] . (1+i)^n$

ou seja, $FV = PMT \cdot (1+i) \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$

5.4.2 RELAÇÃO FV x PMT

$$FV = PMT \cdot (1+i) \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \Leftrightarrow PMT = \frac{FV}{(1+i).} \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

FATOR DE ACUMULAÇÃODE CAPITAL

$$FAC_{(j,n)} = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] = \frac{1}{FCC}$$

FATOR DE FORMAÇÃO DE CAPITAL

$$FCC_{(j,n)} = \left[\frac{i}{(1+i)^n . i} \right] = \frac{1}{FAC}$$

5.4.3 DETERMINAÇÃO DO PRAZO (No. DE PARCELAS)

A partir destas equações podemos determinar o prazo (ou nº de pagamentos/recebimentos)

CONHECIDOS FV, PMT, i

$$n = \frac{Ln\left[\left(\frac{FV}{PMT} \cdot \frac{i}{(1+i)}\right) + 1\right]}{Ln(1+i)}$$

$\Leftrightarrow$

CONHECIDO PV, PMT, i

$$n = -\left[\frac{Ln\left[1 - \left(\frac{PV}{PMT} \cdot \frac{i}{(1+i)}\right)\right]}{Ln(1+i)} \right]$$

Quando se estiver usando a calculadora HP12C deve-se ter o cuidado, pois ela fornece o número de períodos inteiros, normalmente havendo sobras que deverão ser compensadas. Estas compensações normalmente são feitas na primeira ou na última prestação.

5.3.4 DETERMINAÇÃO DA TAXA

A taxa é determinada pelo método comparativo, ou seja por processo interativo de "tentativa e erro" (pela complexidade de isolar-se a taxa na fórmula, pois ela aparece tanto no numerador quanto no denominador elevadas potências).

$$\frac{FV}{PMT} = (1+i).\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \Leftrightarrow \frac{FV}{PMT} = (1+i).\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n.i}\right]$$

Segue-se os seguintes passos

1. Calcula-se o primeiro membro da equação, o valor FV/PMT
2. Escolhe-se uma taxa (i) e calcula-se o segundo membro da equação.
3. Compara-se os dois resultados.
4. Se o segundo membro é maior que o primeiro escolhe-se uma taxa menor e recalcula-se
5. Se o segundo membro é menor que o primeiro escolhe-se uma taxa maior e recalcula-se
6. Recalcula-se tantas vezes quantas necessário, escolhendo-se taxas maiores ou menores (passos 4 ou 5, conforme o caso), até que as parcelas se igualem.

Segue-se os seguintes passos

1. Calcula-se o primeiro membro da equação, o valor FV/PMT
2. Escolhe-se uma taxa (i) e calcula-se o segundo membro da equação.
3. Compara-se os dois resultados.
4. Se o segundo membro é maior que o primeiro escolhe-se uma taxa menor e recalcula-se
5. Se o segundo membro é menor que o primeiro escolhe-se uma taxa maior e recalcula-se
6. Recalcula-se tantas vezes quantas necessário, escolhendo-se taxas maiores ou menores (passos 4 ou 5, conforme o caso), até que as parcelas se igualem.

Exercício: Preencha a tabela abaixo, calculando os dados faltantes:

n	i	PV	PMT Postecipado	PMT Antecipado
3	5,0%	6.000,00		
4	3,0%		R$ 1.291,33	
12		5.000,00	R$ 548,33	
	2,5%	10.000,00	R$ 1.142,59	
8		25.000,00		R$ 3.798,02

HP-12C - SÉRIES UNIFORMES DE PAGAMENTOS

A HP-12C permite o cálculo de séries de pagamentos ou receitas à juros compostos diretamente, a partir das teclas programadas. As teclas financeiras para os cálculos diretos são as seguintes:

---

n nº. períodos i taxa de juros PV valor presente PMT prestação uniforme FV valor futuro

---

Introduzindo-se valores conhecidos e apertando a tecla do que se quer conhecer, obtém-se o resultado desta.

SÉRIES POSTECIPADAS: deverá estar aparecendo no visor da calculadora a palavra END, se não estiver aparecendo, poderá ser ligada digitando-se g END

SÉRIES ANTECIPADAS: deverá estar aparecendo no visor da calculadora a palavra BEG (begin), se não estiver aparecendo, poderá ser ligada digitando-se g BEG

Observações de uso:

1. A taxa e o número de períodos (prazo devem sempre estar expressos na mesma unidade de tempo.
2. A taxa de juros deverá ser introduzida na forma percentual;
3. Cálculo dos períodos não inteiros:
3.1 - como **juros compostos** - para que todo o cálculo seja efetuado como juro composto o **anúncio C**, no visor da calculadora **deverá estar ligado**;
3.2- como juros simples: se o anúncio "C" estiver desligado, a máquina calculará os períodos inteiros como juros compostos e a parte fracionária do período como juros simples;
3.3- para ligar ou desligar o anúncio "C" do visor deve-se digitar STO EXX ;
4. A ordem de entrada dos dados não importa, importa apenas que a última tecla a ser acionada seja a tecla do valor que se quer encontrar**;**
5 PMT, FV e PV devem ter sinais contrários (convenção do fluxo de caixa), caso contrário o cálculo apresentará erro.

DICAS:

1. Quando a taxa de juros for dada na forma nominal anual, com capitalização mensal, e o prazo de cálculo for mensal pode-se introduzir a taxa de juros nominal anual diretamente que a calculadora efetuará diretamente a transformação para taxa efetiva (de cálculo), bastando digitar.................... (taxa nominal anual %) g 12÷
(no visor aparecerá a taxa dividida por 12 e já estará gravada na memória i)

2. Quando o período n for dado na forma anual, mas o cálculo deverá ser executado em períodos mensais, a transformação poderá ser feita automaticamente, digitando-se ....
(período anual) g 12 x
(no visor aparecerá o prazo multiplicado por 12 - o prazo mensal já estará gravado na memória n)

MATEMÁTICA FINANCEIRA

INSTRUÇÕES DE USO:

CÁLCULO DO VALOR FUTURO - FV - A PARTIR DO PMT

Instrução	teclas
1. Limpar as memórias financeiras	f CLEAR FIN
2. Seleção do modo de calculo	g END ou g BEG
3. Digita-se o período n	valor n
4. Digita-se a taxa de juros I na forma percentual	valor% i
5. Digita-se o valor da prestação PMT e seu respectivo sinal	valor CHS PMT
6. Pressiona-se FV, para obter-se o cálculo	FV

CÁLCULO DO PRESENTE - PV - A PARTIR DO PMT

Instrução	teclas
1. Limpar as memórias financeiras	f CLEAR FIN
2. Seleção do modo de calculo	g END ou g BEG
3. Digita-se o período n	valor n
4. Digita-se a taxa de juros I na forma percentual	valor% i
5. Digita-se o valor da prestação PMT e seu respectivo sinal	valor CHS PMT
6. Pressiona-se PV, para obter-se o cálculo	PV

CÁLCULO DA PRESTAÇÃO - PMT

Instrução	teclas
1. Limpar as memórias financeiras	f CLEAR FIN
2. Seleção do modo de calculo	g END ou g BEG
3. Digita-se o período n	valor n
4. Digita-se a taxa de juros I na forma percentual	valor% i
5. Digita-se o valor da prestação e seu respectivo sinal	valor CHS PV e/ou valor CHS FV
6. Pressiona-se PMT, para obter-se o cálculo	PMT

CÁLCULO DA TAXA DE JUROS - i

Instrução	teclas
1. Limpar as memórias financeiras	f CLEAR FIN
2. Seleção do modo de calculo	g END ou g BEG
3. Digita-se a o período n	valor% i
4. Digita-se o valor da prestação PMT e seu respectivo sinal	valor CHS PMT
5. Digita-se o valor da prestação e seu respectivo sinal	valor CHS PV e/ou valor CHS FV
6. Pressiona-se i, para obter-se o cálculo	I

Observação: **1**. A taxa de juros será expressa na mesma unidade de tempo de n.

CÁLCULO DO PRAZO - n

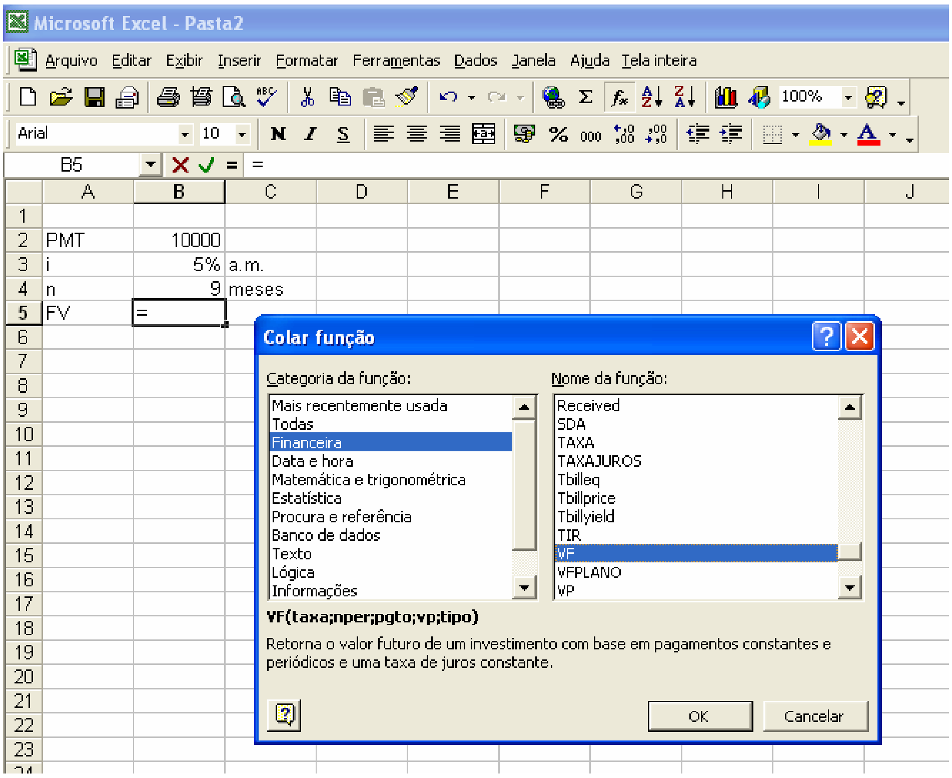
Instrução	teclas
1. Limpar as memórias financeiras	f CLEAR FIN
2. Seleção do modo de calculo	g END ou g BEG
3. Digita-se a taxa de juros I na forma percentual	valor% i
4. Digita-se o valor da prestação PMT e seu respectivo sinal	valor CHS PMT
5. Digita-se o valor da prestação e seu respectivo sinal	valor CHS PV e/ou valor CHS FV
6. Pressiona-se n, para obter-se o cálculo	n

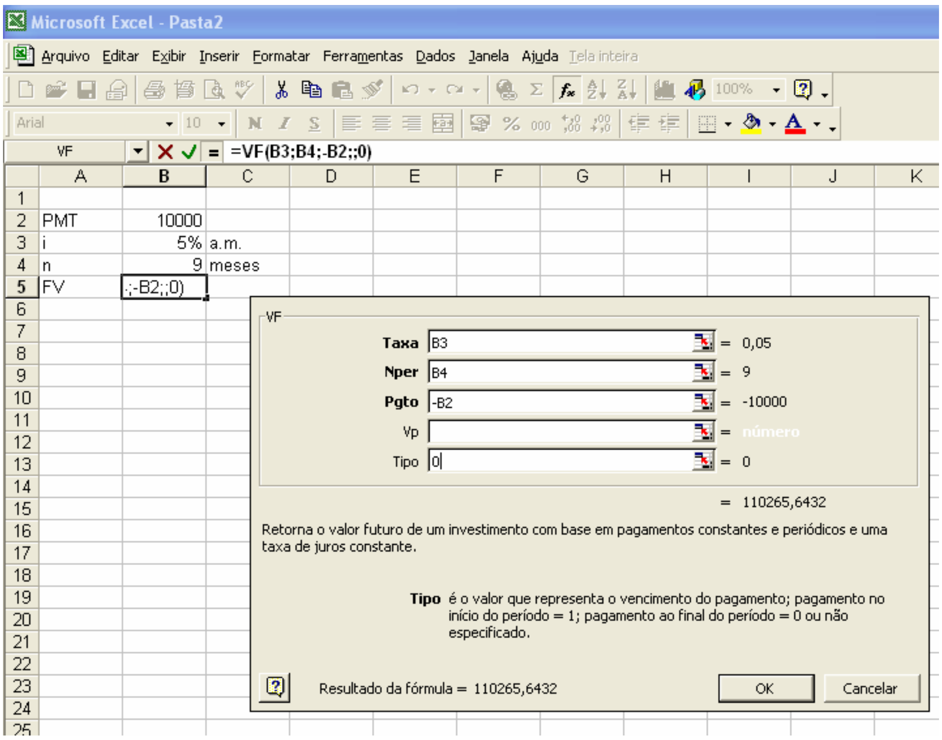
Obs: **1**. O prazo (número de períodos) será expresso na mesma unidade de tempo da taxa de juros.
2. Se a resposta exata for um número não inteiro, a HP12-C dará como resposta um número inteiro imediatamente superior ao número fracionário.

UTILIZANDO O EXCEL:

CÁLCULO DO VALOR FUTURO - FV - A PARTIR DO PMT

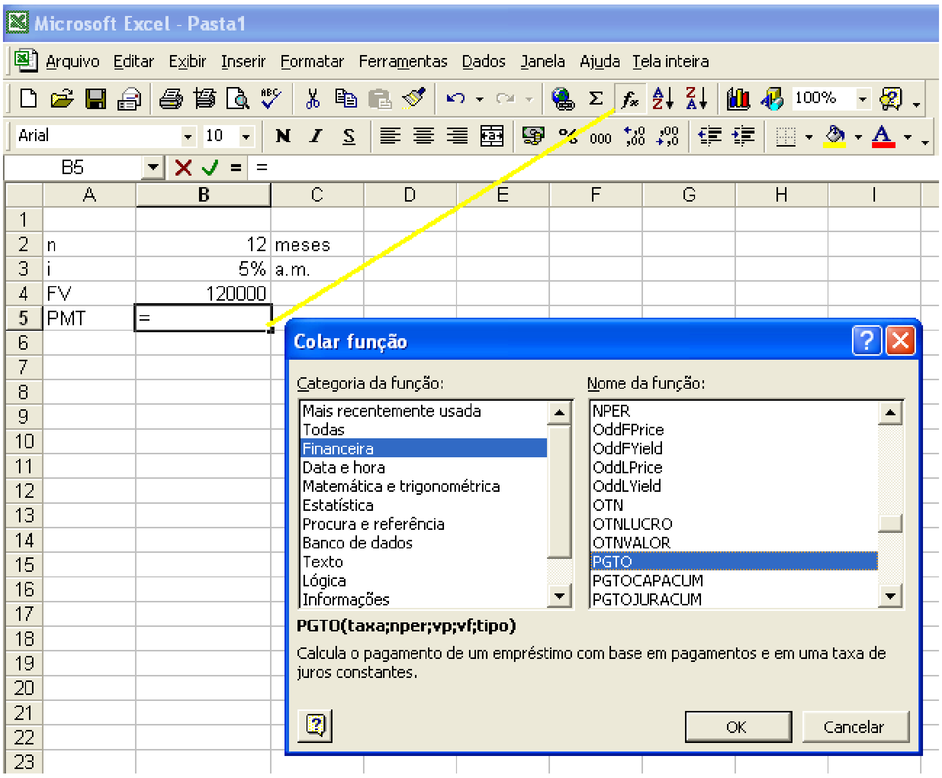
Depositando-se mensalmente o valor de R$ 10.000,00, numa instituição financeira que paga juros de 5% a.m., que valor teremos após 9 meses?

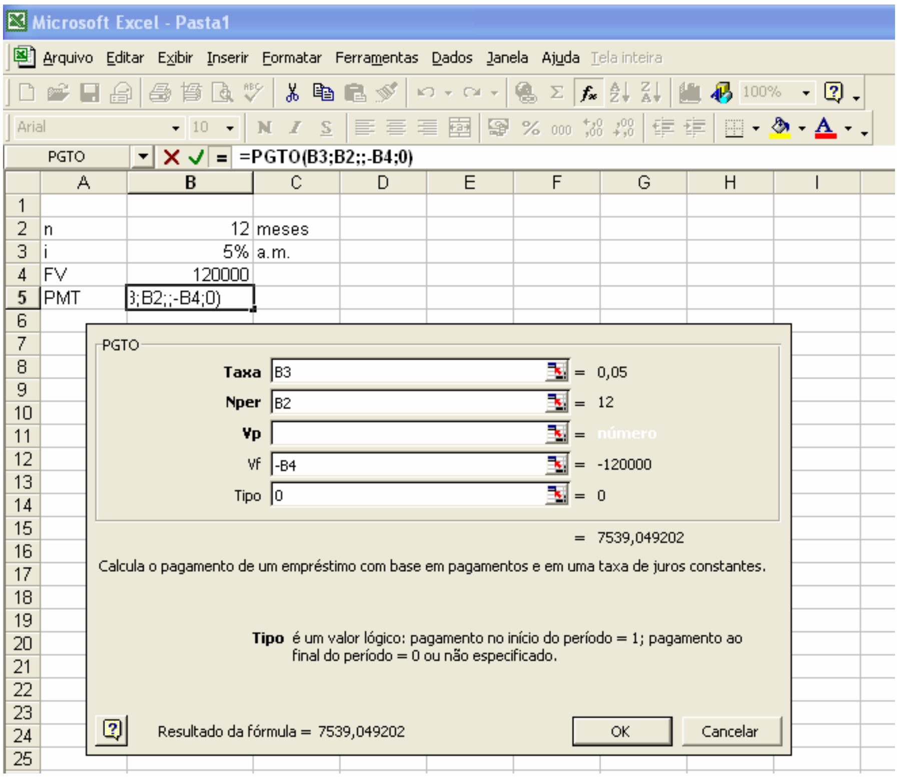




CÁLCULO DA PRESTAÇÃO - PMT A PARTIR DO VALOR FUTURO - FV

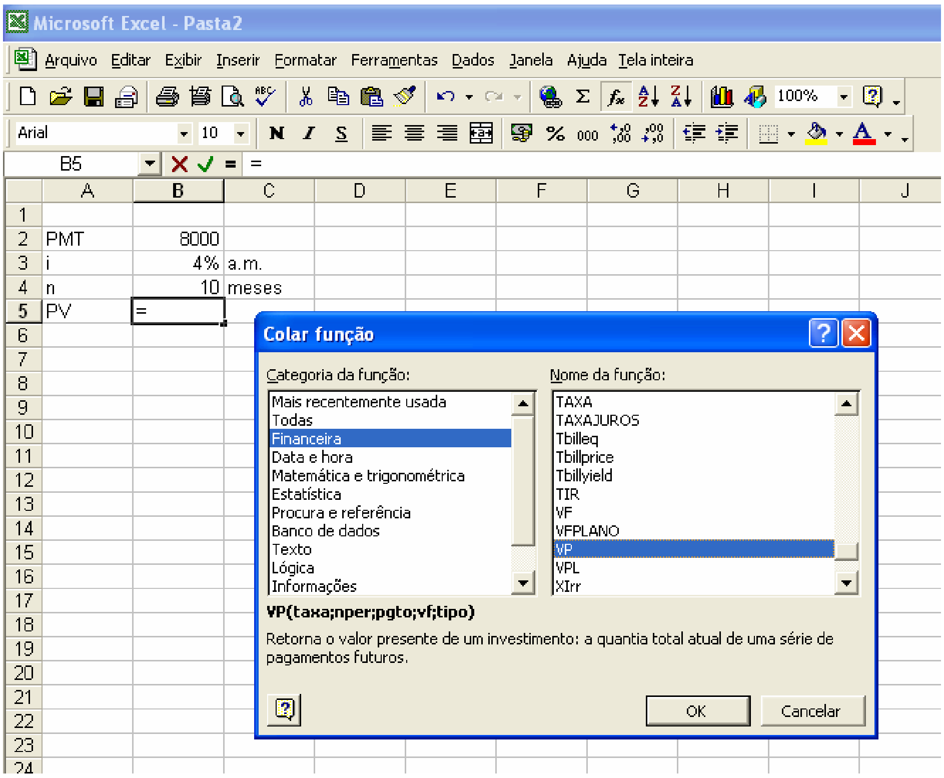
Quanto deve ser depositado mensalmente para, em 12 meses, formar uma poupança no valor de R$ 120.000,00, numa instituição financeira que paga juros de 5% a.m.

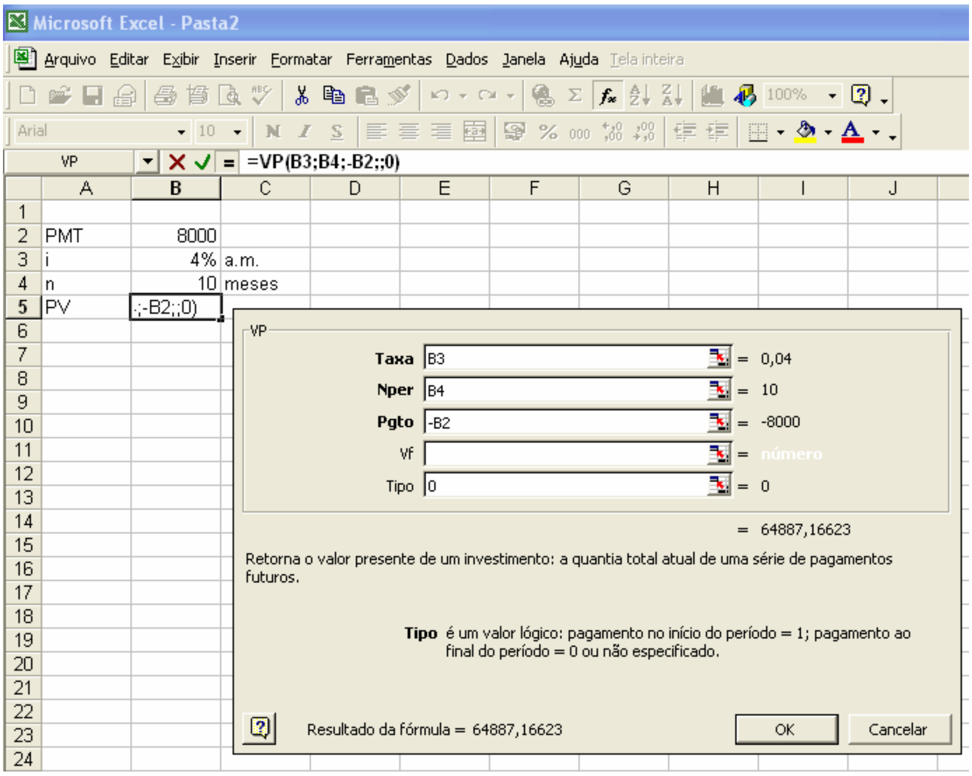




CÁLCULO DO PRESENTE - PV - A PARTIR DO PMT

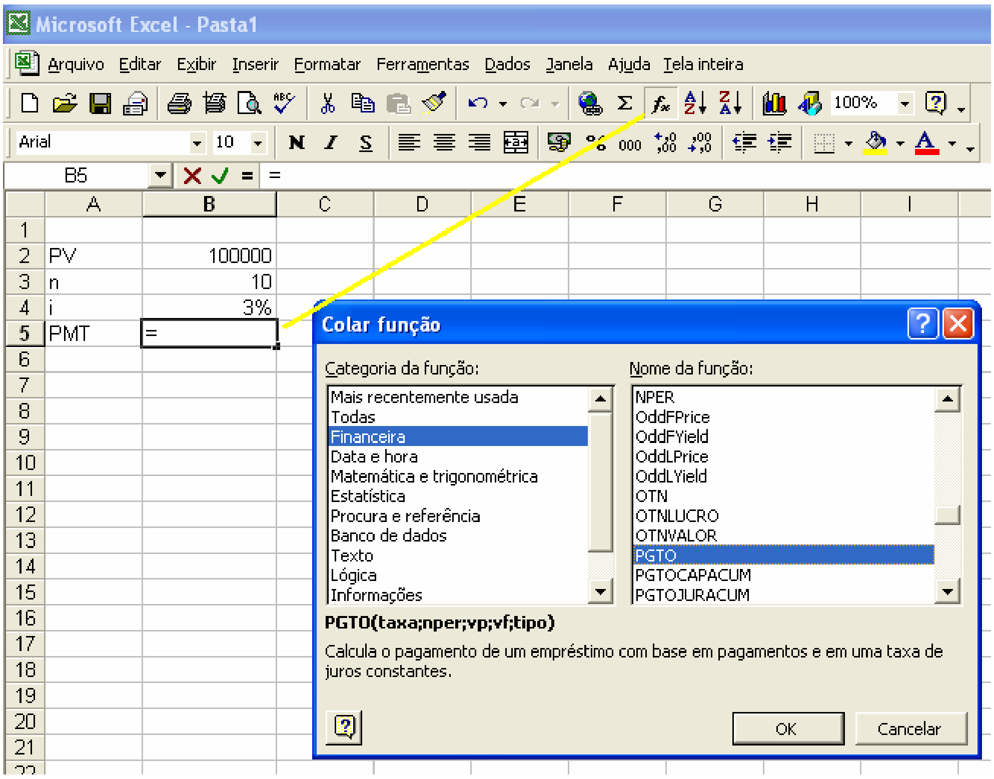
Um financiamento deverá ser pago em 10 prestações mensais, iguais e sucessivas no valor de R$ 8.000,00. Sabendo-se que a instituição financeira cobra juros de 4% a.m., calcule o valor financiado.

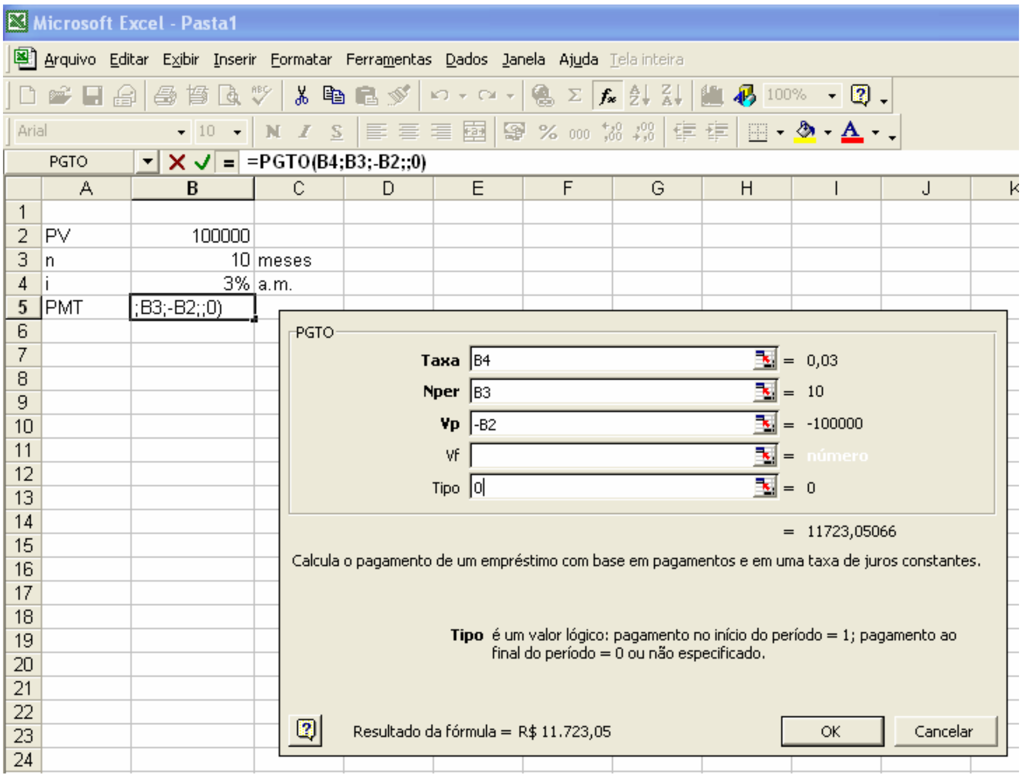




CÁLCULO DA PRESTAÇÃO - PMT

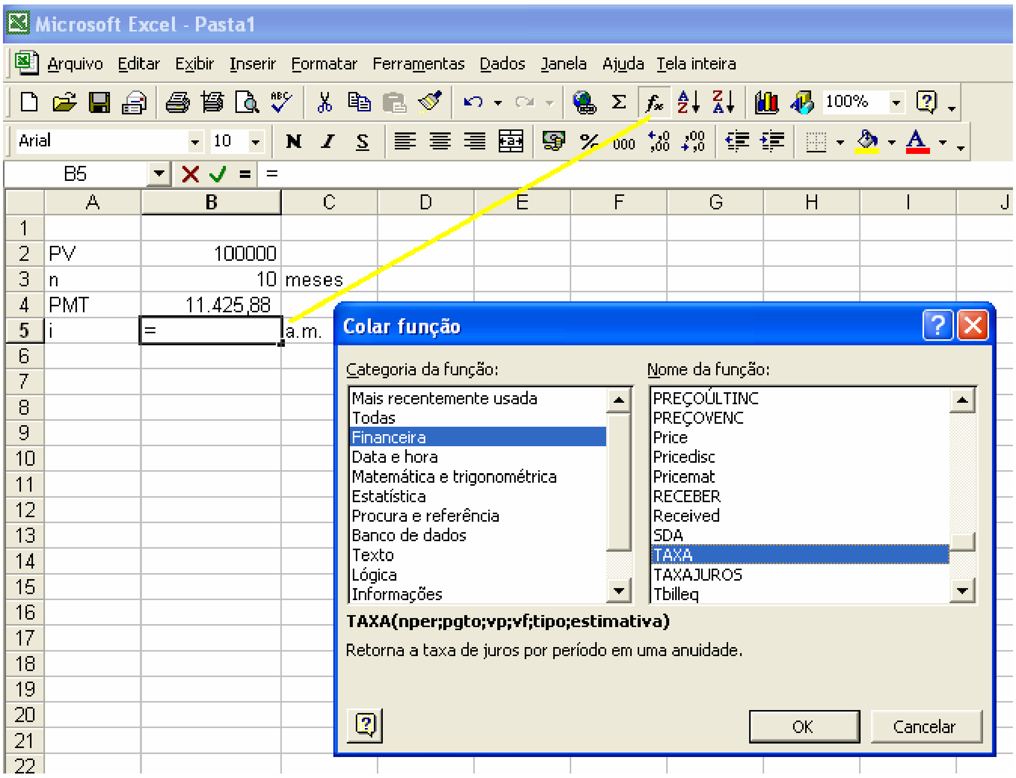
Um empréstimo de R$ 100.000,00, financiado com uma taxa de juros de 3% ao mês, é pago em dez parcelas mensais e iguais. Qual o valor de cada uma das parcelas?

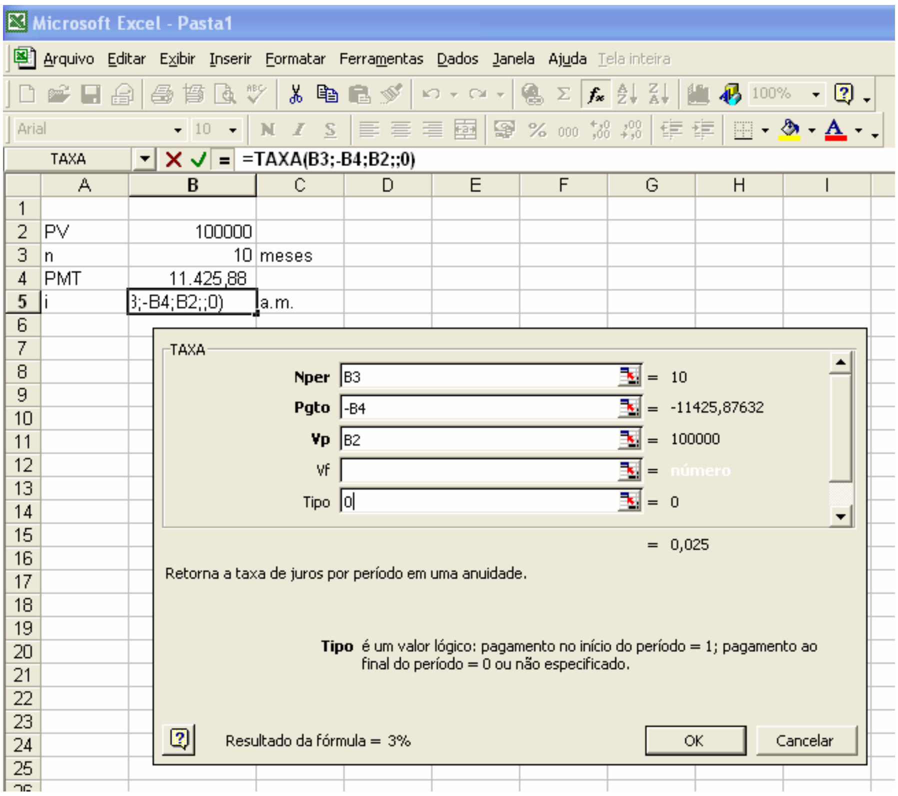




CÁLCULO DA TAXA DE JUROS - i

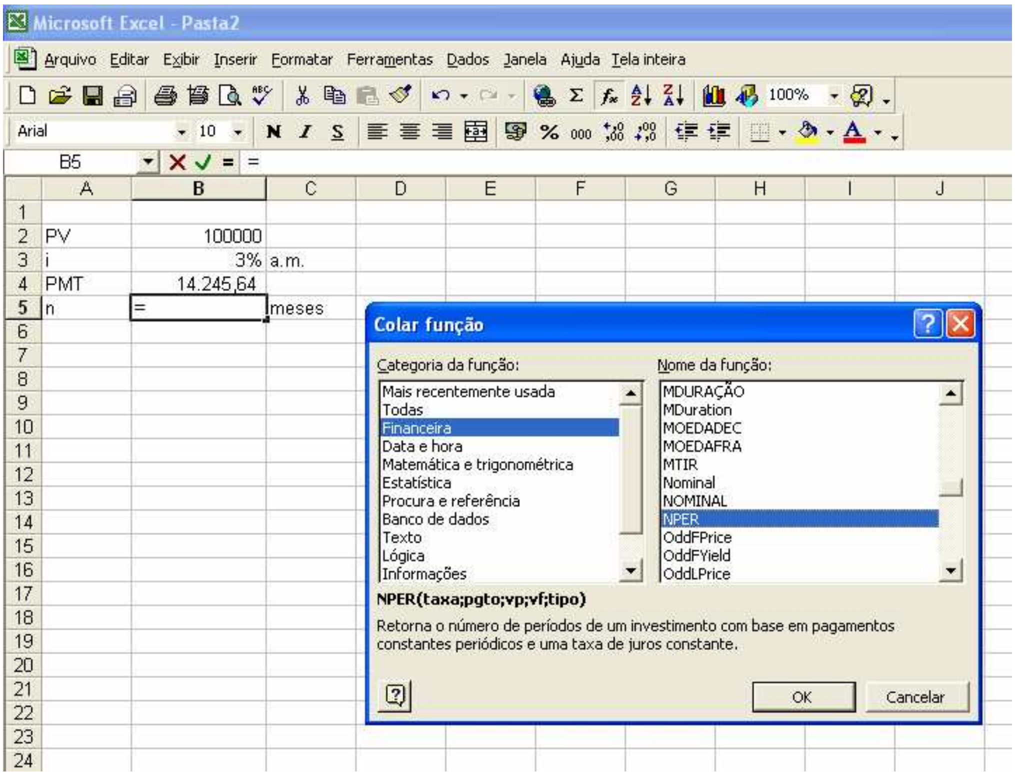
Um empréstimo de R$ 100.000,00, é financiado em dez parcelas mensais e iguais, no valor de R$ 11.425,88. Qual a taxa de juros cobrada?

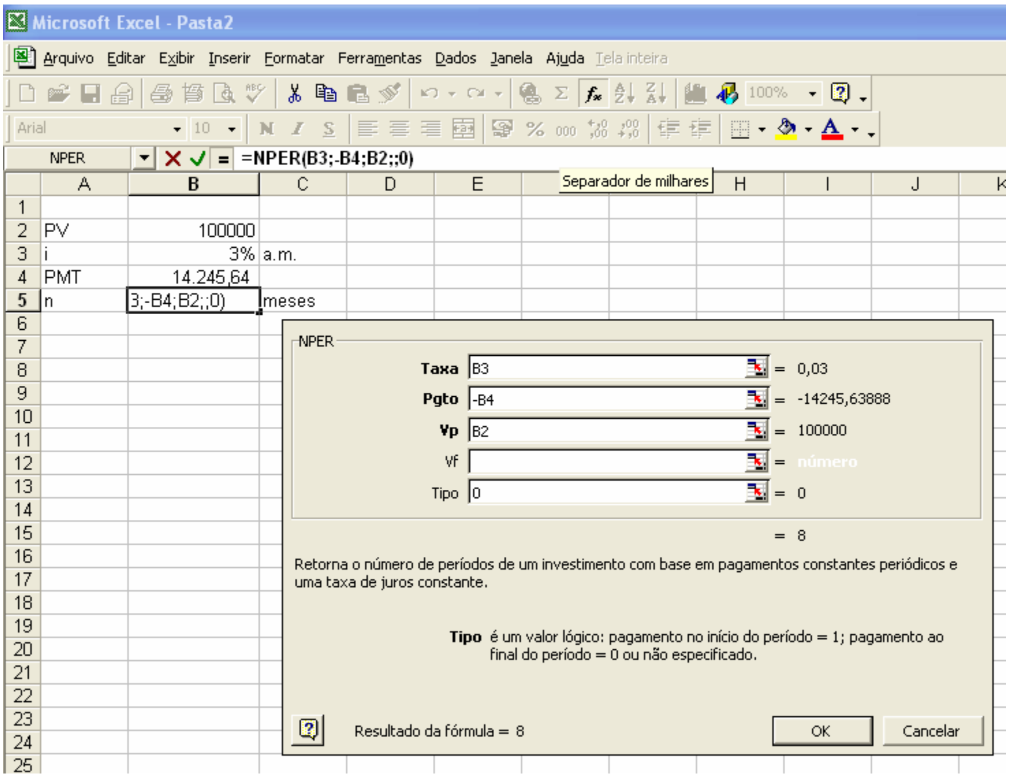




CÁLCULO DO PRAZO - n

Um empréstimo, no valor de R$ 100.000,00 foi contratado a uma taxa de 3% a.m., para ser pago em prestações mensais, iguais e sucessivas de R$ 14.245,64. Calcule o prazo do financiamento?





5.5 EXERCÍCIOS - SÉRIES UNIFORMES

1. Um empréstimo de $50.000,00 é realizado com uma taxa de 8% ao ano, no regime de juros compostos, devendo ser amortizado no prazo de seis anos, com os dois primeiros anos de carência. Determinar o valor das quatro prestações anuais, iguais e sucessivas, que deverão ser pagas a partir do final do 3º ano, nas seguintes hipóteses:

(I) os juros devidos nos dois primeiros anos de carência são pagos no final de cada ano;

(II) os juros devidos nos dois primeiros anos de carência não são pagos, mas sim capitalizados anualmente.

2. Uma compra deve ser financiada em seis prestações mensais de $10.000,00, que incluem juros calculados com a taxa de 1,25% ao mês.

(I) Determinar o valor do principal desse financiamento, no regime de juros compostos, sabendo-se que a 1ª prestação ocorre no ato da realização da compra, a título de entrada.

(II) Qual seria o valor da prestação caso a compra fosse feita em 5 prestações mensais sem entrada.

3. Um financiamento de $10.000,00 deve ser liquidado mediante o pagamento de seis prestações mensais de $1.730,00. Determinar a taxa efetiva mensal desse financiamento, no regime de juros compostos, nas seguintes hipóteses:

(I) 1ª prestação ocorre 30 dias após a liberação do principal ;

(II) 1ª prestação ocorre na mesma data da liberação do principal;

4. Um blusão de couro, é vendido por $5.000,00 à vista, ou por $1.000,00 de entrada mais prestações mensais de $480,97. Sabendo-se que a taxa de juros é de 3,5% a.m. , qual o número de prestações?

5. Uma imobiliária especializada em venda de apartamentos usados, põe a venda um apartamento de 200m2 por $120.000,00 à vista ou em 60 meses a prazo, com uma entrada de $ 30.000,00. Sabe-se que a imobiliária opera com taxa de 12% a.a., capitalizados mensalmente.

   A) Qual o valor da prestação mensal?

   B) Qual o valor da prestação mensal, considerando-se que o pagamento das prestações iniciará 4 meses após ter sido dada a entrada.

6. Um sítio foi vendido com entrada de $ 50.000,00 mais 24 prestações trimestrais de $ 3.500,00. Qual é o preço à vista do sítio, considerando-se que foi usada a taxa de 24% a.a. capitalizados trimestralmente?

7. Uma compra foi efetuada, o cliente teve o saldo devedor financiado em 3 prestações quadrimestrais de $ 5.000,00. Contudo, para evitar esta concentração nos desembolsos, o cliente solicitou a transformação do financiamento em 12 prestações mensais. Se a taxa de juros da loja for de 2% a.m., qual deverá ser o valor das prestações mensais?

8. Uma pessoa depositou em uma poupança, mensalmente durante 5 anos, a quantia de R$ 550,00, Sabendo-se a poupança remunera o capital a uma taxa efetiva de 0,5% ao mês. Qual o valor que ele pode retirar 30 dias após o último depósito, se ela não efetuou saques no período?

9. Uma pessoa quer dispor, no futuro de uma aposentadoria complementar mensal de $ 500,00 pelo período de 30 anos. Para tanto pretende formar uma poupança. Ela irá depositar uma certa quantia mensalmente durante 20 anos. Após 60 dias do último depósito a pessoa retirará a primeira parcela. Qual o valor mensal dos depósitos que ela deverá efetuar?

10. Uma indústria quer adquirir uma máquina cujo preço à vista é de R$ 120.000,00. Tendo disponível apenas R$20.000,00, procurou um financiamento sem entrada para o saldo, em uma instituição financeira. A Instituição financeira propôs um financiamento em 24 parcelas mensais calculadas pela taxa de 78% ao ano, capitalizados mensalmente. Pergunta-se:

a) Qual o valor da prestação mensal?

b) A empresa sentindo a necessidade de um prazo de carência para instalação da máquina propôs à instituição financeira, que prorrogasse em 6 meses a data do primeiro pagamento, capitalizando os juros e então parcelando o saldo em 18 meses, mantendo assim a data do último pagamento. Qual então seria o valor da Parcela mensal a se paga?

5.6 VALOR PRESENTE DE PERPETUIDADES

Uma perpetuidade equivale a um pagamento ou recebimento para sempre, em um período de tempo regular, de uma certa quantia em dinheiro.

Como exemplos podemos citar:
- dividendos de ações preferenciais;
- indenizações judiciais;
- uma herança (em que o principal fica indisponível ao beneficiário;

O Valor Presente de uma perpetuidade é a soma dos valores presentes de um infinito número de pagamentos, por analogia para um ilimitado número de termos PMT podemos calcular pela fórmula:

$$PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i}\right] \quad \Rightarrow PV.(1+i)^n.i = PMT.[(1+i)^n - 1]$$

$$\Rightarrow PV.(1+i)^n.i = [PMT.(1+i)^n] - PMT$$

multiplicando-se os termos por $\frac{1}{(1+i)^n}$ >>> $\frac{PV.(1+i)^n.i}{(1+i)^n} = \frac{PMT.(1+i)^n}{(1+i)^n} - \frac{PMT}{(1+i)^n}$

simplificando, temos: $PV.i = PMT - \frac{PMT}{(1+i)^n}$ onde, $PV.i = PMT.[1-(1+i)^{-n}]$

$$PV = PMT.[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}]$$

Quando N → ∝ , temos que $(1+i)^{-n}$ → 0, então que o $\lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}$

$$\boxed{PV_p = \frac{PMT}{i}}$$

Exemplo 5.3: Uma pessoa possui $ 1.000.000,00 e quer deixar como herança este valor a seus herdeiros. Considerando-se que ele consegue aplicar o seu dinheiro a uma taxa de 1,65% a.m., qual o valor que ele poderá dispor para si mensalmente?

Exemplo 5.2: As ações preferenciais de uma companhia rendem anualmente dividendos de $5,00 por ação, considerando-se que hoje posso vendê-las por $32,49 a unidade, qual a taxa mensal de aplicação que eu devo obter para que a operação seja vantajosa?

Exemplo 5.1: Uma pessoa recebeu em testamento, herança de um tio. O testamento determinava que sobrinho deveria receber um valor de $1.000,00, mensalmente, até a sua morte. O tio era milionário e deixou toda a sua fortuna para uma Fundação. A Fundação beneficiária ficou com a obrigação de efetuar os pagamentos. Qual o valor que o administrador da Fundação deverá deixar aplicado em uma conta de rendimentos a fim de garantir que o testamento seja cumprido, considerando-se que o mercado financeiro opera a uma taxa nominal de 22,80% ao ano, capitalizado mensalmente.

5.7 EXERCÍCIOS - PERPETUIDADES

1. O Sr. Souza deseja formar uma aposentadoria complementar, equivalente a $800,00 mensais. Ele pretende efetuar depósitos mensais durante dez anos, para então usufruir. Considerando que a taxa média mensal de juros é de 1% a.m., qual é o valor do depósito mensal que ele deverá fazer nos próximos dez anos. (VP_P=$80.000,00 - PMT=$344,32)

2. (Prova 1 - 99/2) Em um acidente de trânsito o motorista de uma empresa de transportes atropelou e matou um homem. Sua viúva, de afazeres domésticos e sem profissão, obteve em sentença judicial de última instância, uma pensão a ser paga mensalmente pela empresa, equivalente a dois terços do salário que seu marido recebia. Ele recebia R$ 600,00 por mês. A Empresa está disposta a transformar estes pagamentos mensais em uma só parcela indenizatória. Qual seria o valor justo para esta indenização, sabendo-se que a taxa de mercado para pequenos aplicadores é a da poupança? (0,5% ao mês) ($80.000,00)

3. Uma Loja está alugada por $2.400,00 mensais. Hoje no mercado financeiro pode-se obter rendimentos financeiros a taxas nominais de 9,6% a.a., com capitalizações mensais (além da inflação). Qual seria então o valor mínimo estimado para o imóvel em uma estimativa preliminar? (i=0,8% a.m. - PV=$300.000,00)

6. SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

6.1 INTRODUÇÃO

Os principais sistemas de amortização utilizados são:

- Sistema Francês de Amortização – Prestações constantes.
- Sistema de Amortização Constante
- Sistema de Amortização Misto

Por sua maior facilidade de aplicação, principalmente após o surgimento das calculadoras financeiras, o sistema Francês de Amortização, que gera prestações constantes é largamente utilizado nos setores financeiros e de capitais. Os outros dois são mais utilizados no Sistema Financeiro de Habitação (financiamentos aquisição habitacional).

6.2 SISTEMA FRANCÊS DE AMORTIZAÇÃO - SAF (PRESTAÇÕES CONSTANTES):

Este sistema leva este nome pelo fato de ter-se efetivamente desenvolvido na França no século XIX, com a incorporação de juros compostos às amortizações.

Este sistema consiste na amortização de uma determinada dívida em prestações sucessivas, iguais e periódicas. Não há uma necessidade de que as prestações sejam mensais mas sim, periódicas, podendo ser, também trimestrais, semestrais, anuais, etc., podendo ter qualquer taxa da juros.)

Este sistema também é conhecido no Brasil como Sistema da Tabela Price ou tabela Price. No SAF a taxa de juros é a taxa usada na operação (taxa efetiva), no Sistema Price a taxa é expressa na forma nominal, indicando o período de capitalização (para uso da taxa na operação deverá ser feita a conversão da taxa nominal em taxa efetiva).

Este sistema é equivalente a série de pagamentos uniformes postecipada ou seja com termos vencidos, portanto o valor da prestação é determinado pela fórmula:

$$\boxed{PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i}\right]} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{PMT = PV \cdot FRC_{(i)}}$$

FATOR DE VALOR ATUAL

$$\boxed{FRC_{(j,n)} = \left[\frac{(1+i)^n . i}{(1+i)^n - 1}\right] = \frac{1}{FVA}} \qquad (1)$$

A parcela de juros (J) é obtida multiplicando-se o saldo devedor pela taxa de juros do período.

Assim, determina-se a parcela de amortização (A) pela diferença entre o valor da prestação e o valor dos juros. (o valor da parcela de juros referente a primeira prestação, neste caso é igual a taxa de juros do período multiplicada pelo valor do capital emprestado (PV), que é o valor saldo devedor inicial).

$$A_{(t)} = PMT_{(t)} - J_{(T)}$$

Exemplo 6.2: Calcular os valores de juros e amortizações referentes às prestações de um empréstimo para ser liquidado em 8 prestações mensais iguais, a uma taxa de 5% a.m., no valor de $120.000,00

Calcula-se primeiramente o **valor das prestações**, que é constante:

PMT = PV x FRC(i,n) = $120.000,00 x 0,15472181 = $18.566.62

Calcula-se então Valor dos Juros e da Amortização da **primeira parcela**:

J_1 = PV x i = $120.000,00 x 0,05 = $6.000,00
A_1= PMT – J_1 = $18.566,62 - $6.000,00 = $ 12.566,62

Desconta-se então o valor da Amortização do Saldo Devedor Inicial (SD_0=PV_0) e tem-se o novo Saldo Devedor (SD_1), calcula-se então os Juros e a Amortização da **segunda parcela**:

SD_1 = SD_0 - A = $ 120.000,00 – $12.566,62 = $ 107.433.38
J_2 = PV_1 x i = $107.433,38 x 0,05 = $5.371,67
A_2= PMT – J_2 = $18.566,62 - $5.371,67 = $ 13.194,95

E assim por diante, calcula-se, para todos os "t" períodos (t = 1, 2, 3, ..., n).

Temos então:

Tabela de Parcelamento PRESTAÇÕES CONSTANTES –FRANCÊS

t	Juros (J_t)	Amortização (A_t)	Prestação (PMT_t)	Saldo Devedor após pagto.prest. (SD_t)
0				
1	6.000,00	12.566,62	18.566,62	107.433,38
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
TOTAL				

Mais facilmente, sem montarmos a tabela, podemos calcular os valores necessários, além do cálculo da prestação já mencionado (1) temos:

Calculo da Prestação

$$PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i} \right]$$

Cálculo do Saldo Devedor (SD_t), após o pagamento da prestação "t", que é igual ao valor) presente (PV das "n-t" prestações restantes

A partir do saldo inicial (PV_o)

$$SD_T = PV_0 \cdot \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^T}{(1+i)^n - 1} \right]$$

A partir do valor da prestação (PMT)

$$SD_T = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^T}{(1+i)^n . i} \right]$$

Cálculo da Amortização, da prestação "t"

Amortização da 1ª. parcela

$$A_{(1)} = PMT - (PV_{(0)} . i)$$

ou $A_{(1)} = PV_{(0)} . \left[\dfrac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$

Amortização da parcela "t"

$$A_{(t)} = A_{(1)} . (1+i)^{t-1}$$

Cálculo do Juro, da prestação "t"

$$J_t = i . SD_{t-1} \qquad J_t = PV_0 . i \cdot \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{t-1}}{(1+i)^n - 1} \right] \qquad J_t = PMT - \left[\frac{PV_0 . i}{(1+i)^n - 1} . (1+i)^{t-1} \right]$$

Cálculo do Montante pago, após o pagamento da prestação "t"

$$M_{(t)} = PV_{(0)} . \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Cálculo do total dos Juros pagos, após o pagamento da prestação "t"

$$\sum J_t = (PMT . t) - M_t$$

6.3 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

É um sistema extremamente simples, onde amortiza-se a dívida em parcelas iguais, acrescidas dos juros.

O valor das parcelas pode ser facilmente calculado, o valor do capital é obtido dividindo-se o valor do empréstimo pelo número de parcelas (prestações). Já o valor dos juros é obtido multiplicando-se o saldo devedor obtido no momento imediatamente anterior pela taxa de juros do período.

Exemplo 6.3: Calcular os valores de juros e amortizações referentes às prestações de um empréstimo para ser liquidado pelo sistema SAC, em 8 prestações mensais iguais, a uma taxa de 5% a.m., no valor de $ 120.000,00.

Primeira prestação:

Amortização ...... $A = PV_0 \div n = 120.000,00 \div 8 = \$\ 15.000,00$
Juros ($SD_0=PV_0$)... $J_1 = SD_0\ .\ i = 120.000,00\ .\ 0,05 = \$\ 6.000,00$
Prestação........... $Pr_1 = A_1 + J_1 = 15.000,00 + 6.000,00 = \$\ 21.000,00$
Saldo Devedor... $SD_1 = SD_0 - A = 120.000,00 - 15.000,00 = \$\ 105.000,00$ (após o pagamento da prestação)

Segunda prestação:

Amortização ...... A= $ 15.000,00
Juros .... $J_2 = SD_1\ .\ i = 105.000,00\ .\ 0,05 = \$\ 5.250,00$
Prestação.......... $Pr_2 = A_2 + J_2 = 15.000,00 + 5.250,00 = \$\ 20.250,00$
Saldo Devedor... $SD_2 = SD_1 - A = 105.000,00 - 15.000,00 = \$\ 90.000,00$ (após o pagamento da prestação)

Terceira prestação:

Amortização ...... A= $ 15.000,00
Juros .... $J_3 = SD_2\ .\ i = 90.000,00\ .\ 0,05 = \$\ 4.500,00$
Prestação.......... $Pr_2 = A_2 + J_2 = 15.000,00 + 4.500,00 = \$\ 19.500,00$

Saldo Devedor... $SD_3 = SD_2 - A = 90.000,00 - 15.000,00 = \$\ 75.000,00$ (após o pagamento da prestação)

E assim por diante até a última prestação. Temos então o plano de pagamentos conforme a tabela abaixo:

Tabela de Parcelamento AMORTIZAÇÃO CONSTANTE – SAC

t	Juros (J_t)	Amortização (A_t)	Prestação (PMT_t)	Saldo Devedor após pagto.prest. (SD_t)
0				
1	6.000,00	15.000,00	21.000,00	105.000,00
2	5.250,00	15.000,00	20.250,00	90.000,00
3				
4				
5				
6				
7				
8				
TOTAL				

Mais facilmente, sem necessidade da montagem da tabela podemos calcular os valores com o uso de fórmulas:

Cálculo da Primeira Prestação $P_1 = \frac{PV_0}{n}.(i.n+1)$	**Razão Decrescente** das Prestações (P.A.) $RD = \frac{PV_0}{n}.i$ << ou >> $RD = A.i$

Cálculo da Prestação: (do período "t")

$$P_t = A_t + J_t \qquad P_t = \frac{PV_0}{n}.[1 + i.(n+1-t)$$

Cálculo da Amortização (constante nos períodos)

$$A = \frac{PV_0}{n}$$

Cálculo do Juro: (incluído no período "t")

$$J_t = SD_{t-1}.i \qquad J_t = PV_0.i.\left(1 - \frac{t-1}{n}\right)$$

Cálculo do Saldo Devedor, após o pagamento da prestação "t"

$$SD_t = PV_0.\left(1 - \frac{t}{n}\right) \qquad SD_t = A.(n-t)$$

Cálculo do Saldo Devedor, antes do pagamento da prestação "t"

$$SD_{t-1} = PV_0.\left(1 - \frac{t-1}{n}\right) \qquad SD_{t-1} = A.(n-t+1)$$

Cálculo do Montante pago, após o pagamento da prestação "t" $M_{(t)} = \frac{PV_{(0)}}{n}.t$	**Cálculo do total dos Juros Pagos** até o período "t" $\sum J_t = i.A.t\left(\frac{2n-t+1}{2}\right)$

6.4 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTO (SAM)

Por este sistema, o devedor paga o empréstimo em prestações, que são formadas pela média aritmética entre os valores encontrados para as prestações no sistema de prestações constantes e no sistema de amortização constante.

Assim também os juros, amortizações e saldo devedores são a média aritmética entre os dois sistemas. Normalmente somente as prestações são calculadas por este método.

Considerando-se como PMT o valor da prestação pelo sistema de prestações constantes (também chamado de PRICE), e Pr_1, Pr_2, Pr_3, Pr_4, ...Pr_n o valor das prestações pelo sistema de amortização constante (SAC). Temos então que o valor da Prestação pelo SAM é: $P_t^{'} = \frac{PMT + Pr_t}{2}$

Exemplo 6.4: Calcular os valores de juros e amortizações referentes às prestações de um empréstimo para ser liquidado pelo sistema SAM, em 8 prestações mensais iguais, a uma taxa de 5% a.m., no valor de $ 120.000,00.

Primeira prestação:

Prestação ...... $P'_1 = (PMT + Pr_1) \div 2 = (18.566,62 + 21.000,00) \div 2 = \$ 19.783,31$

Juros ($SD_0=PV_0$)... $J_1 = SD_0 \,.\, i = 120.000,00 \,.\, 0,05 = \$ 6.000,00$

Amortização.......... $A_1 = P'_1 - J_1 = 19.783,31 - 6.000,00 = \$ 13.783,31$

Saldo Devedor... $SD_1 = SD_0 - A = 120.000,00 - 13.783,31 = \$ 106.216,69$
(após o pagamento da prestação)

Segunda prestação:

PMT + Pr_1 18.566,62 +

Prestação ...... $P'_1 = (PMT + Pr_1) \div 2 = (18.566,62 + 20.250,00) \div 2 = \$ 19.408,31$

Juros ($SD_0=PV_0$)... $J_1 = SD_0 \,.\, i = 106.211,69 \,.\, 0,05 = \$ 5.310,83$

Amortização.......... $A_1 = P'_1 - J_1 = 19.408,31 - 5.310,83 = \$ 14.097,48$

Saldo Devedor... $SD_2 = SD_1 - A = 106.211,69 - 14.097,48 = \$ 92.119,21$
(após o pagamento da prestação)

Tabela de Parcelamento SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTA - SAM

t	Juros (J_t)	Amortização (A_t)	Prestação (PMT_t)	Saldo Devedor após pagto.prest. (SD_t)
0				
1	6.000,00	13.783,31	19.783,31	106.216,69
2	5.310,83	14.097,48	19.408,31	92.119,21
3				
4				
5				
6				
7				
8				
TOTAL				

6.5 EXERCÍCIOS - AMORTIZAÇÃO

1. Um equipamento foi comprado por $150.000,00 para serem pagos sem entrada em 6 parcelas mensais a uma taxa de juros de 3% a.m. Elabore uma planilha de pagamentos para cada um dos sistemas, SAF, SAC e SAM.

2. Considerando-se o exercício acima, qual é o momento que as prestações tornam-se iguais?

3. Elabore as planilhas SAF, SAC e SAM, considerando-se que além das condições acima foram dados 3 meses de carência para o primeiro pagamento.

4. Um financiamento no valor de $1.000.000,00 foi liberado para compra de máquina de tecelagem, para ser amortizado em 24 meses pela Tabela Price, a uma taxa anual de 18% capitalizados mensalmente, determine:
   A) o Valor Devedor ao final no 15º mês;

   B) o Valor dos juros e da Amortização referentes ao 10º pagamento;

5. Uma empresa consegue um financiamento de $ 5.000.000,00 para serem pagos em 6 anos em pagamentos trimestrais pelo sistema SAC de amortização a uma taxa de juros anual efetiva (capitalizada) de 19,252%.
   A) calcular o valor da primeira prestação e a razão decrescente dos pagamentos;
   B) calcular o valor da 10ª e da 20ª prestação;
   C) calcular a amortização e os juros referentes a 15ª prestação;
   D) calcular o montante pago e total dos juros após o pagamento da 7ª prestação.

7. Um imóvel foi financiado adquirido por $100.000,00 em 180 meses à taxa de 1% ao mês, determinar o valor das seguintes prestações 60ª, 90ª, e 120ª, para os sistemas SAF, SAC e SAM.

8. Tendo como base o exercício anterior determinar pelos sistemas SAF e SAC calcular:
   A) o valor do Amortização e do Juro após o pagamento das prestações 60ª, 90ª, e 120ª.
   B) o valor dos Juros e da Amortização acumuladas após o Pagamento das prestações 60ª, 90ª, e 120ª.

UNIVATES

CÁLCULOS DE FINANÇAS

HP-12C - AMORTIZAÇÃO

A HP-12C permite o cálculo de amortizações, pelo SAF (Sistema Francês de Amortização e pelo Sistema Price, ambos trabalham com prestações constantes. A calculadora possui funções que permitem o cálculo dos pagamentos referentes ao principal, juros, bem como o saldo devedor do empréstimo, após um ou vários pagamentos.

INSTRUÇÕES DE USO:

Instrução	teclas
1. Limpar as memórias	f CLEAR FIN
2. Digita-se a taxa de juros I- se for a taxa efetiva pressione	valor% i
Ou se for a taxa nominal anual (com capitalização mensal)	valor% g 12 ÷
3. Digita-se o principal PV	valor PV
4. Digita-se o principal PMT	valor CHS PMT
5. Digita-se o tipo de operação - se postecipada (mais comum)	g END
- se postecipada	g BEG
6. Digita-se o número de pagamentos a serem amortizados	valor
7. Para iniciar os cálculos e obter a parte do pagamento ref. aos juros	f AMORT
8. Para obter a parte dos pagamentos ref. ao principal, pressione	x >< y
9. Para obter o número de pagamentos amortizados (introd.no item 6)	R↓ R↓
10. Para obter o saldo devedor restante	RCL PV
11. Para obter o número total de pagamentos amortizados	RCL n

Exemplo 1: Uma pessoa quer comprar uma casa tomando um empréstimo de R$50.000,00, a juros nominais de 13,20% ao ano com capitalização mensal. Os pagamentos necessários deverão ser de R$571,46 (ao final de cada mês). Calcule as partes referentes aos juros e ao principal do primeiro ano de pagamentos.

Instrução	teclas	visor
1. Limpar as memórias	f CLEAR FIN	0,00
2. Digita-se a taxa de juros nominal	13,20 g 12 ÷	1,10
3. Digita-se o principal PV	50000 PV	50.000,00
4. Digita-se o principal PMT	573,35 CHS PMT	-571,46
5. Digita-se o tipo de operação - (postecipada)	g END	-571,46
6. Digita-se o n. e obtêm-se **juros no período**	12 f AMORT	-6.583,83
7. Para obter a parte do **principal pago no período**	x >< y	-273,69
8. Para obter o **saldo devedor restante**	CRL PV	48.726,31
9. Para obter o **número total de pagamentos** amortizados	RCL n	12,00

Observação: ao introduzir um número e em seguida pressionar f AMORT este número será interpretado pela calculadora como sendo o número de pagamentos realizados após quaisquer números de pagamentos que já tenham sido amortizados.

Exemplo 2: (continuação do ex.1) Calcule os valores relativos ao juro e principal pago no segundo ano , bem como o saldo restante e número total de pagamentos efetuados.

Instrução	teclas	visor
6. Digita-se o n. e obtêm-se **juros no período**	12 f AMORT	-6.545,43
7. Para obter a parte do **principal pago no período**	x >< y	-312.09
8. Para obter o **saldo devedor restante**	RCL PV	49.414,22
9. Para obter o **número total de pagamentos** amortizados	RCL n	24,00

Exemplo 3: Retomando o plano de amortização agora se pretende calcular para os mesmos dados a amortização referente aos 2 primeiros meses.

Instrução	teclas	visor
1. Recompor o valor original de PV	50000 PV	50.000,00
2. Faz-se número de meses igual a zero	0 n	0,00
3. Digita-se o n. e obtêm-se **juros do 1o. mês**	1 f AMORT	-550,00
4. Para obter a parte do **principal pago no 1o. mês**	x >< y	-21,46
5. Digita-se o n. e obtêm-se **juros do 2o. mês**	1 f AMORT	-549,76
6. Para obter a parte do **principal pago no 2o. mês**	x >< y	-21,70
7. Para obter o **saldo devedor restante**	RCL PV	49.956,84
8. Para obter o **número total de pagamentos** amortizados	RCL n	2,00

Exemplo 3: Para um financiamento do mesmo valor, com a mesma taxa (do exemplo 1) mas para ser pago em 15 anos (180 meses), calcular o valor do juro e do principal pago nos dois primeiros meses , bem como o saldo devedor.Observações: como a taxa de juros é a mesma não se zera os registros, recompõe-se o PV, introduz-se o número de parcelas e calcula-se o novo PMT.

Instrução	teclas	visor
1. Recompor o valor original de PV	50000 PV	50.000,00
2. Digita-se o número de parcelas	180 n	180,00
3. Calcula-se o novo PMT	PMT	-639,22
2. Faz-se número de meses igual a zero	0 n	0,00
3. Digita-se o n. e obtêm-se **juros do 1o. mês**	1 f AMORT	-550,00
4. Para obter a parte do **principal pago no 1o. mês**	x >< y	-89,22
5. Digita-se o n. e obtêm-se **juros do 2o. mês**	1 f AMORT	-549,02
6. Para obter a parte do **principal pago no 2o. mês**	x >< y	-90.20
7. Para obter o **saldo devedor restante**	RCL PV	49.820,58
8. Para obter o **número total de pagamentos** amortizados	RCL n	2,00

Observações:

1. Os cálculos de amortização serão arredondados conforme o número de casas decimais que estiver vigente no visor, no momento em que for apertada a função f AMORT ;
2. Para obter o arredondamento com um número diferente, antes de executar a função de cálculo específica f AMORT , deverá ser digitado **f** seguido do número de casas decimais que se quer trabalhar.

7. ANÁLISE DE INVESTIMENTOS

MÉTODOS DE AVALIAÇÃO DE FLUXOS DE CAIXA

7.1 INTRODUÇÃO

Via de regra, os recursos de capital são escassos frente a grandes possibilidades de investimentos, assim sendo estes devem ser racionalizados. A análise prévia de investimentos através de métodos de avaliação de fluxos de caixa especiais fornecem dados aos tomadores de decisão para que estes possam escolher o projeto mais adequado.

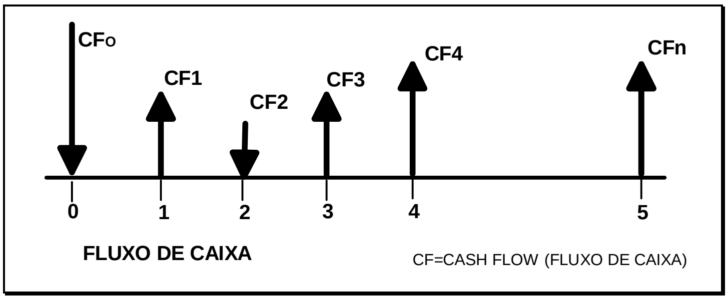
Abordaremos técnicas que identificam as melhores opções, levando em consideração o valor monetário dos projetos ao longo do tempo. Eles estão ligados a comparações de valores. Os fluxos futuros são transportados para o presente e comparados.

Dentre os métodos mais conhecidos e difundidos para avaliação de fluxo de caixa, e por conseguinte para a análise de investimentos temos:

a) VPL (NPV) = VALOR PRESENTE LÍQUIDO (Net Present Value)

b) TIR (IRR) = TAXA INTERNA DE RETORNO (Intern Rate of Return)

Para entendermos os conceitos acima devemos recordar que um fluxo de caixa representa as entradas e saídas de capitais ao longo do tempo. Entradas de capitais são representadas por setas apontada para cima (+) e saídas de capitais são representadas por setas apontadas para baixo (-).



Estes métodos consistem em proceder-se uma comparação dos fluxos futuros (rendas/receitas ou despesas/pagamentos) com um fluxo inicial (momento "0" – zero). Para esta comparação traz-se os valores futuros para valores presentes pelo sistema de capitalização composta.

NOTAS____
____
____
____

7.2 VALOR PRESENTE

O valor presente de um valor futuro é obtido pela fórmula geral: $PV = \dfrac{FV}{(1+i)^n}$.

Generalizado, temos que o valor presente de uma série de pagamentos (uniformes ou não) é dada soma dos valores trazidos ao presente, a uma taxa conhecida, dos valores futuros que compõem a série de pagamentos ou recebimentos. Onde:

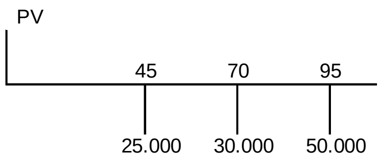
CF (valor do fluxo de caixa) = FV (valor futuro do pagamento), então,

$$PV = \frac{CF_1}{(1+i)^1} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \frac{CF_3}{(1+i)^3} + \frac{CF_4}{(1+i)^4} + ... + \frac{CF_n}{(1+i)^n}$$

temos portanto: $\boxed{PV = \sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{(1+i)^j}}$

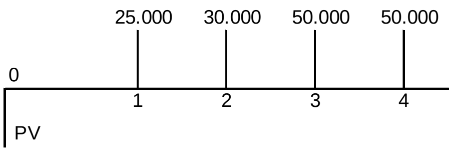
Exemplo 7.1: Uma empresa negociou uma certa quantia com um banco, para seu capital de giro, esta quantia deverá ser paga parceladamente da seguinte forma: $25.000,00 em 45 dias; 30.000,00 em 70 dias e $50.000,00 em 95 dias. Calcular o Valor Presente desta operação, considerando-se que a operação foi realizada considerando-se uma taxa de 3%a.m.

FLUXO DE CAIXA:



Exemplo 7.2: Qual o valor presente de um fluxo de caixa que prevê os seguintes retornos para os quatro próximos anos: $150.000,00, $200.000,00, 900.000,00 e $1.100.000,00, considerando-se que a empresa tenha definido como taxa de desconto (taxa de viabilidade de negócio, taxa de rentabilidade esperada) para os valores esperados em 10% a.a.

FLUXO DE CAIXA:



7.3 VALOR PRESENTE LÍQUIDO - VPL (NET PRESENT VALUE - NPV)

O Valor Presente Líquido é uma técnica de análise de fluxos de caixa. Consiste em, a uma taxa conhecida, trazer-se a valor presente os valores do fluxo de caixa e deduzir-se deste somatório o valor do fluxo inicial (valor do investimento, financiamento ou empréstimo).

Temos portanto: $$VPL_{(NPV)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{(1+i)^j} - CF_0$$

onde:
CF_j = representa os diversos valores do fluxo de caixa ao longo do tempo (j= 1,2,3,4,...n)
CF_o = representa o fluxo inicial
i = taxa de juros da operação financeira, taxa de retorno do projeto de investimento, taxa de atratividade, etc...

Através do valor encontrado para o VPL, podemos concluir que:

$VPL_{(NPV)} > 0$ (positivo), a taxa de retorno é maior que a desejado (projeto viável)

$VPL_{(NPV)} = 0$, a taxa de retorno é igual a taxa desejada.

$VPL_{(NPV)} < 0$ (negativo) a taxa de retorno é menor que a desejada (para esta taxa o projeto é inviável)

Exemplo 7.3: Considerando-se que no Exemplo 1 o capital de giro que a empresa retirou foi de $100.000,00, qual é o Valor Presente Líquido (VPL = NPV) da operação.

Exemplo 7.4: Considerando-se que no Exemplo 7.2, o capital a ser investido inicialmente pela empresa para o fluxo previsto se realize é de $1.600.000,00,qual é o Valor Presente Líquido (VPL = NPV) da operação.

7.4 TAXA INTERNA DE RETORNO -TIR (INTERN RATE OF RETURN -IRR)

A Taxa Interna de Retorno, é aquela que em um determinado momento (normalmente no valor presente) iguala os fluxos de entrada e de saída do caixa.

Para análise de projetos (financiamentos, investimentos ou empréstimos) a TIR é normalmente calculada no momento "zero", ou seja os fluxos são trazidos a valor presente. Portanto, a TIR é dada pela equação que iguala o fluxo de caixa inicial(FC_0), no momento zero com o somatório dos demais valores do fluxo de caixa trazidos ao presente. Portanto temos:

$$CF_0 = \frac{CF_1}{(1+i)^1} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \frac{CF_3}{(1+i)^3} + \frac{CF_4}{(1+i)^4} + ... + \frac{CF_n}{(1+i)^n}$$

então:

$$\boxed{CF_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{(1+i)^j}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{(1+i)^j} - CF_0 = 0}$$

$TIR_{(IRR)}$ É A TAXA QUE FAZ $VPL_{(NPV)}$ = 0

Se saldo da equação ($VPL_{(NPV)}$) > 0, a taxa utilizada (i) é menor que a $TIR_{(IRR)}$
Se saldo da equação ($VPL_{(NPV)}$) = 0, a taxa utilizada (i) é a $TIR_{(IRR)}$
Se saldo da equação ($VPL_{(NPV)}$) < 0, a taxa utilizada (i) é maior que a $TIR_{(IRR)}$

Para calcular-se a TIR, calcula-se, por aproximação, estabelece-se uma taxa e calcula-se o VPL,, calcula-se tantas vezes quantas necessárias, até que tenhamos duas taxas com VPL próximo a zero, uma maior que zero e a outra menor que zero, então interpola-se para encontrar a TIR. Esta interpolação pode ser feita através da seguinte fórmula:

$$\boxed{\mathbf{TIR_{(IRR)}} = \frac{\mathbf{VPL_{(DA\ TAXA\ i_{INF})}\ .\ (i_{SUP} - i_{INF})}}{\mathbf{VPL_{(DA\ TAXA\ i_{INF})} - VPL_{(DA\ TAXA\ i_{SUP})}}} + \mathbf{i_{INF}}}$$

onde:
i_{SUP} = taxa superior e $VPL_{(DA\ TAXA\ i_{SUP})}$ = VPL calculado com a taxa superior (i_{SUP})
i_{INF} = taxa inferior e $VPL_{(DA\ TAXA\ i_{INF})}$ = VPL calculado com a taxa inferior (i_{INF})

NOTAS____

Exemplo 7.5: Considerando-se os dados dos Exemplos 7.1 e 7.3. Qual a taxa interna de retorno (TIR(IRR))?

Exemplo 7.4: Considerando-se dados dos Exemplos 7.2 e 7.4, qual é a taxa interna de retorno(TIR(IRR))?

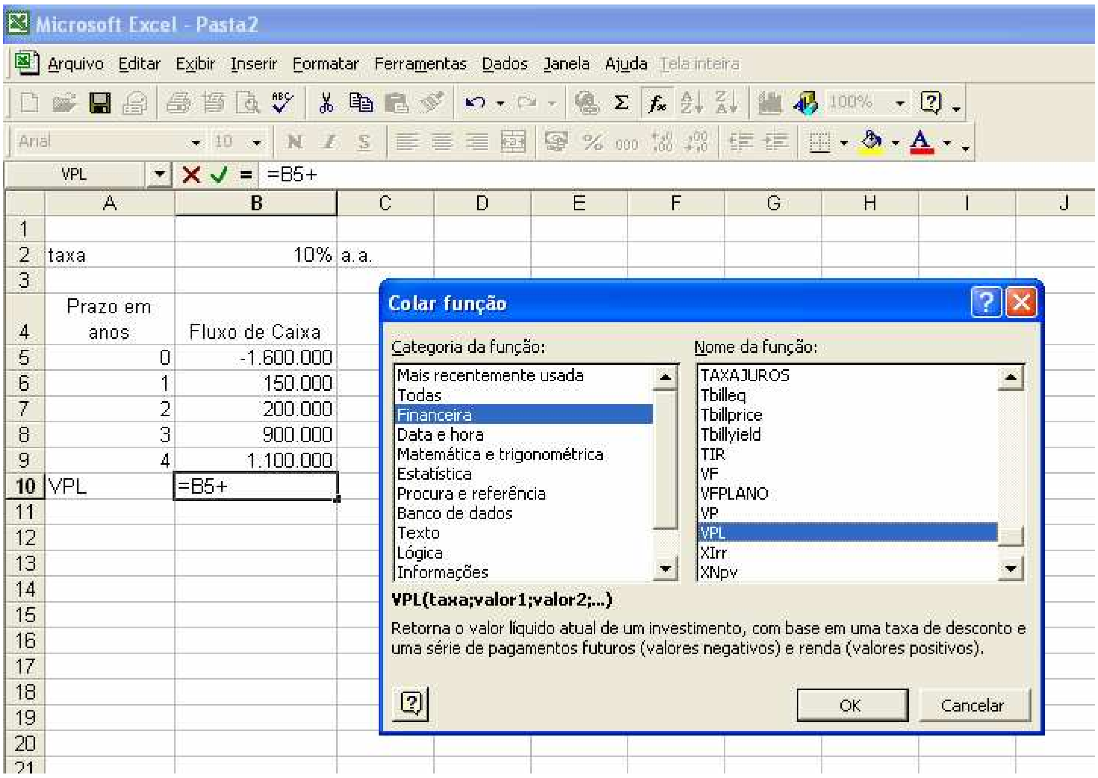
Calculando pela HP:

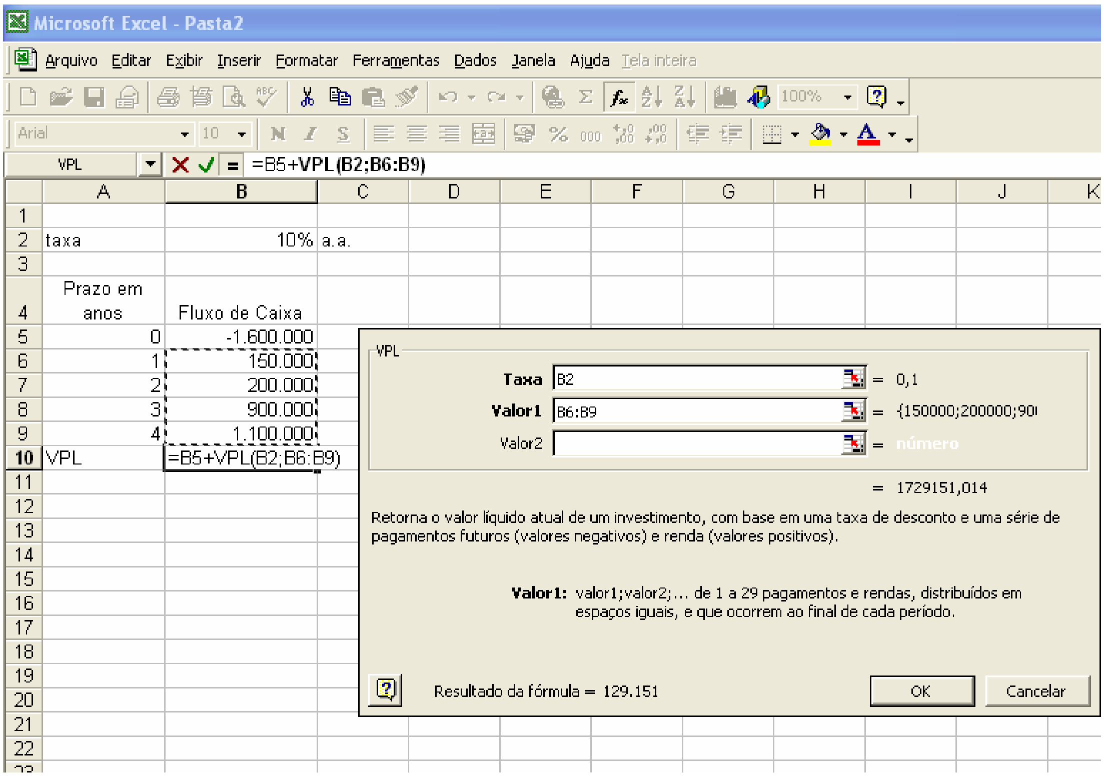
CÁLCULO DA TIR (IRR)

DADOS	TECLAS	VISOR
	[f] [FIN]	
1.600.000	[CHS] [g] [CF_0]	-1.600.000,00
150.000	[g] [CF_J]	150.000,00
200.000	[g] [CF_J]	200.000,00
900.000	[g] [CF_J]	900.000,00
1.100.000	[g] [CF_J]	1.100.000,00
	[f] [IRR]	12,73
	[f] [4]	**12,7259**

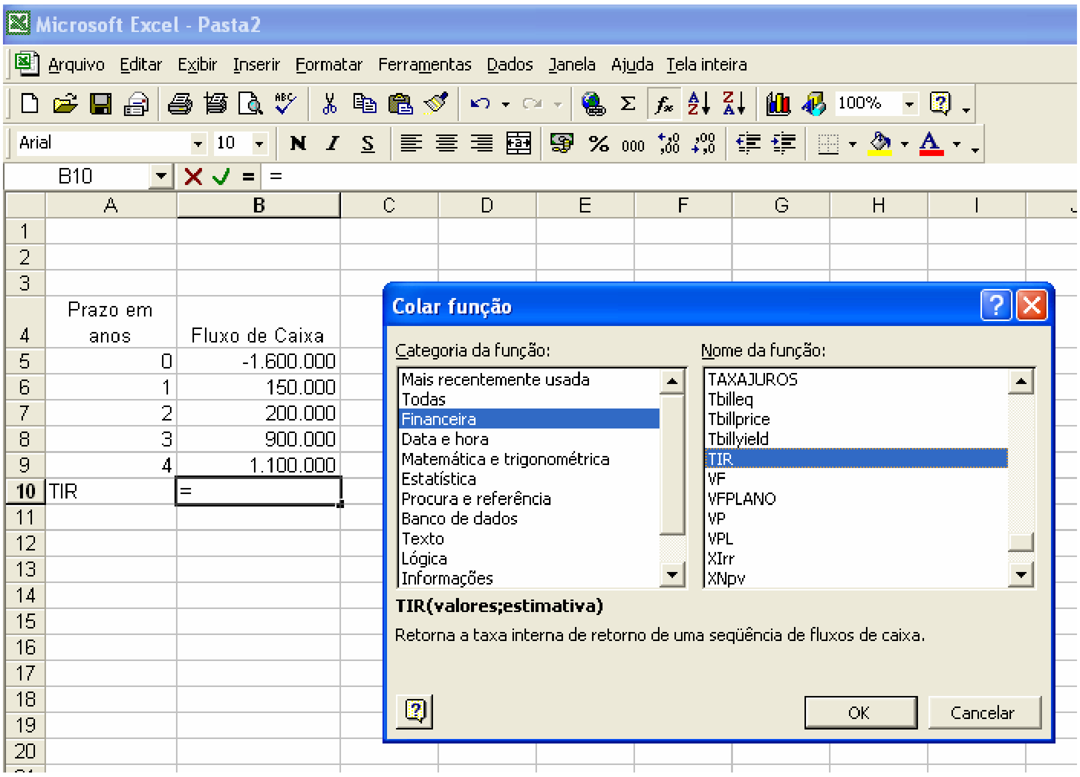
UTILIZANDO O EXCEL:

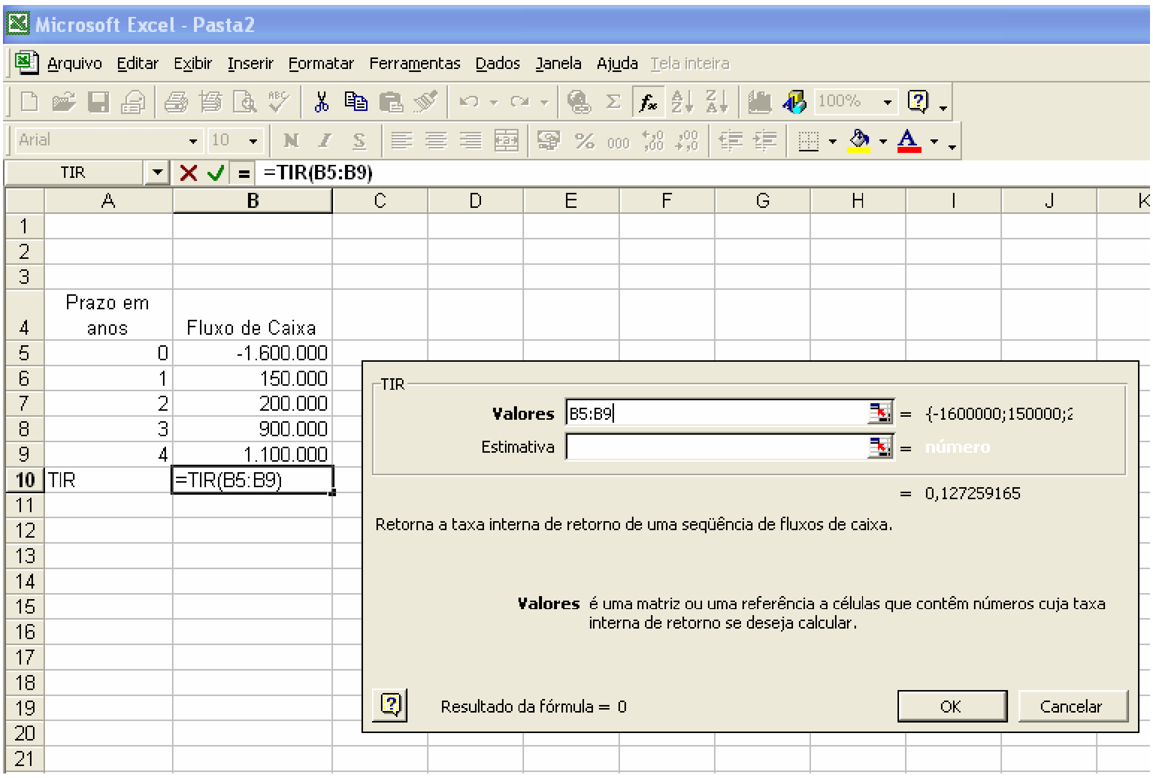
Qual o Valor Presente Líquido (VPL = NPV) de um fluxo de caixa que prevê os seguintes retornos para os quatro próximos anos: $150.000,00, $200.000,00, 900.000,00 e $1.100.000,00, considerando-se que a empresa tenha definido como taxa de desconto (taxa de viabilidade de negócio, taxa de rentabilidade esperada) para os valores esperados em 10% a.a. e que o capital a ser investido inicialmente pela empresa para o fluxo previsto se realize é de $1.600.000,00?





Com os dados do fluxo do exemplo anterior, calcular a Taxa Interna de Retorno do projeto.- (TIR = IRR)





7.5 EXERCÍCIOS - ANÁLISE DE INVESTIMENTOS

1. A BBA está avaliando uma máquina nova de misturar fragrâncias. O ativo requer um investimento inicial de R$ 24.000,00 e gerará uma entrada de caixa de R$ 5.000,00 ao ano, por oito anos. Para cada uma das taxas de retornos exigidas listadas abaixo: 2.1 Calcule o valor atual líquido, 1.2 Indique se a máquina deve ser aceita ou rejeitada e 1.3 explique sua decisão.

a) taxa de retorno exigida de 10%.
b) Taxa de retorno exigida de 12%.
c) Taxa de retorno exigida de 14%.

2. Calcule o valor atual líquido para os projetos seguintes, nos próximos 20 anos. Suponha que a empresa tenha um custo de oportunidade de 14 %.
   2.1 Investimento inicial de R$ 10.000,00; entradas de caixa de R$ 2.000,00 ao ano;
   2.2 Investimento inicial de R$ 25.000,00; entradas de caixa de R$ 3.000,00 ao ano;
   2.3 Investimento inicial de R$ 30.000,00; entradas de caixa de R$ 5.000,00 ao ano;

3. Sua divisão está analisando dois projetos de investimento, cada um exigindo gastos de R$ 25.000,00. Você estima que o custo de capital seja de 10% e que os investimentos produzirão os seguintes fluxos de caixa líquidos. Tomando por base a técnica do VAL escolha o projeto mais viável.

ANO	PROJETO A	PROJETO B
1	5.000	10.000
2	10.000	10.000
3	15.000	8.000
4	20.000	16.000

4. O projeto K tem um custo de R$ 52.125,00 e se espera que as entradas líquidas de caixa sejam de R$ 12.000,00 por ano durante 08 anos.
   4.1 Ao custo de capital de 12% calcule o VPL do projeto.

Qual a TIR do projeto.

5. Determinado projeto exige investimento inicial de R$ 12.000,00 e entradas de caixa conforme segue abaixo.

ANO	1	2	3	4	5	6	7
FLUXO	2.500	2.500	3.000	3.000	3.000	4.000	4.000

   5.1 Calcule o valor atual líquido a um custo de capital de 14%.
   5.2 Calcule o valor atual líquido a um custo de capital de 17,5%.
   5.3 Calcule o valor atual líquido a um custo de capital de 16,199668%.
   5.4 Calcule a TIR do projeto.

6. Determinado projeto exige investimento inicial de R$ 26.800,00 e entradas de caixa conforme segue abaixo.

ANO	1	2	4	5	6	7
FLUXO	7.000	7.000	8.000	8.000	4.000	4.000

   6.1 Calcule o valor atual líquido a um custo de capital de 10%.
   6.2 Calcule o valor atual líquido a um custo de capital de 15,0%.
   6.3 Calcule o valor atual líquido a um custo de capital de 12,150560%.
   6.4 Calcule a TIR do projeto.

7. Conceitue investimentos de capital.

8. Um projeto proporciona entradas de caixa de r$ 8.000,00 nos próximos 10 anos. Qual o investimento inicial mínimo requerido a um custo de capital de 12% ao ano, para que o projeto seja viável.

9. Qual a relação entre a TIR (taxa interna de retorno) e a taxa de custo de capital de um projeto, ou seja o que acontece quando a TIR é maior que a taxa de custo de capital e o que ocorre quando ela é menor que o custo de capital ?

10. Conceitue as técnicas de investimento de capital TIR e VAL e os critérios de aceitação ou rejeição de alguma alternativa de investimento.

8. INDEXAÇÃO E CORREÇÃO MONETÁRIA

8.1 INTRODUÇÃO

Alguns conceitos:

INFLAÇÃO: É o processo caracterizado pelo fato de que os preços dos fatores de produção e das mercadorias sofrem uma elevação continuada e persistente ao longo do tempo. O processo inflacionário não previsto tende a favorecer os devedores e aqueles que pagam juros, portanto ela tende a transferir renda dos credores para os devedores.

HIPERINFLAÇÃO: Considera-se que um país está em hiperinflação quando sua taxa de inflação mensal ultrapassa aos 50% e fica acima deste percentual por vários meses. Exemplos:

Alemanha – 1922/23 – 16 meses - com taxa média mensal de 322%
China (Xangai) – 1948/49 – 8 meses – com taxa média mensal 400%
Hungria – 1945/46 – 12 meses – com taxa média mensal de 19800%
(fonte: Mathias & Gomes, 1993)

DEFLAÇÃO: É o processo pelo qual os preços dos fatores de produção e das mercadorias tendem a diminuir ao longo do tempo. Um processo de deflação pode ser tão ou mais danoso que um processo de inflação pois que provoca a diminuição da produção. Exemplo: Estados Unidos, 1929 – “Grande Depressão”)

INDEXAÇÃO: É a tentativa de manter-se constante o poder aquisitivo. Para tanto são efetuadas mensalmente por instituições idôneas, a variação dos preços, a partir dos quais são estabelecidas as taxas de inflação (ou deflação) mensal. Esta inflação medida permite a formação de índice que aplicado aos preços (ou capitais) permite a manutenção de seu valor ao longo do tempo.

8.2 TAXA DE JUROS APARENTE E TAXAS DE JURO REAL

A taxa de juros aparente (i_a) é aquela em que vigora nas transações correntes, naquelas operações em que a taxa de juros é pré-fixada. A taxa aparente é composta de dois componentes, a taxa real (i_r) que é aquela que representa o rendimento da operação após ser excluída a taxa inflacionária (I). As taxas para um determinado período, se relacionam da seguinte forma:

$$(1+i_a) = (1+i_r)\cdot(1+I)$$

$$i_a = (1+i_r)\cdot(1+I) - 1$$

$$i_r = \frac{(1+i_a)}{(1+I)} - 1$$

$$I = \frac{(1+i_a)}{(1+i_r)} - 1$$

Exemplo 8.1: Uma casa foi adquirida por $80.000,00, após 12 meses foi vendida por 120.000,00, sabendo-se que a inflação neste período foi de 30%, qual foi o ganho real (taxa de juros real) da operação? Qual a taxa real mensal?

Exemplo 8.2: Um capital de $10.000,00, foi aplicado por um período de 2 anos a juros de 5% a.a., mais a correção monetária, calculada com base no IGP-M. Considerando-se que o IGP-M variou em 35% no primeiro ano e 40% no segundo ano, qual a rentabilidade real da operação e qual o valor do montante no segundo ano.

8.3 ÍNDICE DE PREÇOS E INDEXADORES DE VALORES MONETÁRIOS:

O acompanhamento e a medição periódica, com bases científicas da variação dos preços permite a formação de índices mensais (de inflação e deflação). Estes índices de preços relacionados entre si um a um (sempre com o período anterior) formam índices gerais de preços que quando aplicados permitem a comparação de valores ao longo do tempo. Permitem também estabelecer-se valores com poder de compra equivalentes ao longo do tempo (manutenção do poder de compra = correção monetária).

8.3.1 Alguns índices:

IPA-DI-Índice de Preços por Atacado – Disponibilidade Interna – Fundação Getúlio Vargas.
IPC – Índice de Preços ao Consumidor – FGV
INCC- Índice Nacional da Construção Civil - FGV
IGP-DI- Índice Geral de Preços – Disponibilidade Interna – FGV, formado pela média ponderada dos seguintes índices: IPA-DI (60%), IPC (30%) e INCC(10%)
IPC-Fipe – Índice de Preços ao consumidor – Fundação de Pesquisas Econômicas da Universidade de São Paulo
ICV-Diese – Índice de Custo de Vida. Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Sócio Econômicos.
IPCA-IBGE – Índice de Preços ao Consumidor – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

8.3.2 FORMAÇÃO DE UM ÍNDICE:

Considerando-se que as seguintes taxas de inflação:

	inflação mensal	índice (base 1)	formação do índice
Mês 0 (Jan/XX)	---	1	estabelecido
Mês 1 (Fev/XX)	0,3456%	1,003456	$\text{Índice}_1 = \text{Índice}_0 .(1+I_1)$
Mês 2 (Mar/XX)	0,5566%	1,009041	$\text{Índice}_2 = \text{Índice}_1 .(1+I_2) = \text{Índice}_0 .(1+I_1).(1+I_2)$
Mês 3 (Abr/XX)	0,6623%	1,015724	$\text{Índice}_3 = \text{Índice}_2 .(1+I_3) = \text{Índice}_0 .(1+I_1).(1+I_2).(1+I_3)$
Mês 4 (Mai/XX)	0,7134%	1,022970	$\text{Índice}_4 = \text{Índice}_3 .(1+I_4) = \text{Índice}_0 .(1+I_1).(1+I_2).(1+I_3) .(1+I_4)$
Mês 5 (Jun/XX)	0,6032%	1,029141	$\text{Índice}_5 = \text{Índice}_4 .(1+I_5) = \text{Índice}_0 .(1+I_1).(1+I_2).(1+I_3).(1+I_4).(1+I_5)$
Mês 6 (Jul/XX)	0,8000%	1,037374	$\text{Índice}_6 = \text{Índice}_5 .(1+I_6) = \text{Índice}_0 .(1+I_1).(1+I_2).(1+I_3).(1+I_4) .(1+I_5).(1+I_6)$

Um valor pode ser atualizado (corrigido monetariamente) multiplicado-se o valor inicial (PV) pelo resultado da divisão do índice do mês que se deseja conhecer o valor real pelo índice a que se conhece o valor:

$$\boxed{FV = \frac{\text{índice}_{(FV)}}{\text{índice}_{(PV)}}.PV} \quad \text{onde} \quad \boxed{\frac{\text{índice}_{(FV)}}{\text{índice}_{(PV)}} = (1+I)}$$

Acrescentando-se uma taxa de juros real, pode-se então determinar, em processos inflacionários os valores futuros de aplicações financeiras, considerando-se também a correção monetária. Este sistema pode ser incorporado em todos os processos de cálculos estabelecidos pela matemática financeira. Assim para a fórmula geral para o cálculo de valores futuros a juros compostos temos:

$$\boxed{FV = \frac{\text{índice}_{(FV)}}{\text{índice}_{(PV)}}.PV.(1+i)^n} \quad \text{onde} \quad \boxed{PV = \frac{\text{índice}_{(PV)}}{\text{índice}_{(FV)}}.\frac{FV}{(1+i)^n}}$$

Exemplo 8.3: Considerando se que um valor de $15.000,00 foi aplicado no sistema postecipado, por três meses a uma taxa de juros real 4% ao mês, Considerando-se que a aplicação deu-se no mês 1 e foi retirado no Mês 4 (tabela acima). Qual o valor retirado no final da aplicação? Qual a taxa aparente mensal?

Exemplo 8.4: Um barco foi adquirido à vista, passado 1 ano, seu proprietário vendeu-o por $50.000,00. Sabendo-se que a pessoa pela aplicação do seu capital obteve um rendimento de 2% ao mês, que o Índice do IGP do mês da compra era de 100,5025 e o do mês da venda foi de 115,5779, qual o valor que foi pago pelo barco.

Exemplo 8.5: Com base nos percentuais mensais de inflação, calculados pelo IGP-M, abaixo apresentados, construa uma tabela de índices com seis casas após a vírgula. (Base 1 = Dez/93)

Jan/94	39.07	Jan/95	0,92
Fev/94	40,48	Fev/95	1,39
Mar/94	45,71	Mar/95	1,12
Abr/94	40,91	Abr/95	2,10
Mai/94	40,95	Mai/95	0,58
Jun/95	45,21	Jun/95	2,46
Jul/94	40,00	Jul/95	1,82
Ago/94	7,56	Ago/95	2,20
Set/94	1,75	Set/95	-0,71
Out/94	1,82	Out/95	0,52
Nov/94	2,85	Nov/95	1,20
Dez/94	0,84	Dez/95	0,71

Mês	Infl/mês	índice		Mês	Infl/mês	índice
Dez/93		1				
Jan/94	39.07			Jan/95	0,92	
Fev/94	40,48			Fev/95	1,39	
Mar/94	45,71			Mar/95	1,12	
Abr/94	40,91			Abr/95	2,10	
Mai/94	40,95			Mai/95	0,58	
Jun/95	45,21			Jun/95	2,46	
Jul/94	40,00			Jul/95	1,82	
Ago/94	7,56			Ago/95	2,20	
Set/94	1,75			Set/95	-0,71	
Out/94	1,82			Out/95	0,52	
Nov/94	2,85			Nov/95	1,20	
Dez/94	0,84			Dez/95	0,71	

8.4 EXERCÍCIOS - INDEXAÇÃO E CORREÇÃO MONETÁRIA

1. Um equipamento de R$100.000,00 foi comprado no mês de janeiro de 1994, em quatro parcelas iguais, sem entrada, com taxa de juros nominal de 24% a.a.,capitalizados mensalmente,mais a correção monetária estipulada pela variação do IGP-M. Calcular o valor que foi pago em cada prestação.

2. Um empréstimo de 400.000,00 contratado em Fevereiro/95 foi liquidado em dezembro de 1995 por $581.345,00, considerando-se a inflação do período, qual a taxa de juros mensal que a instituição operou neste negócio?

3. Considerando-se que a inflação no período de 3 meses é de 2,5%, sendo nosso objetivo obter taxas de rendimento para o período de 3 meses equivalentes a pelo menos 3% de taxa real, qual é o valor da taxa mínima que devo aceitar? R=1.83%am

4. (Lapponi) O rendimento total de uma operação financeira com duração de 120 dias foi de 22,5%. Considerando-se que as taxas de inflação foram 2,5%, 3,5%, 4% e 5,6% para cada trinta dias consecutivos a partir da data de início da operação, pede-se calcular a taxa real para trinta dias (mensal). R=1,26%

5. (Lapponi) Uma aplicação de $10.000,00 foi realizada durante três meses com uma taxa líquida formada pela taxa real de 12% a.a. e a taxa de indexação de 2,98% ao trimestre, qual o valor resgatado no final do terceiro mês? R= $10.593,94.

6. (Lapponi) Um empréstimo de 100.000,00 foi saldado após quatro meses pagando $108.706,06. Se a taxa real foi igual a 14% ao ano, qual o valor da taxa de indexação com período mensal? R= 1% a.m.

9. TRABALHOS

9.1 JUROS SIMPLES

1. Calcular os juros simples produzidos por $40.000,00, aplicados à taxa de 36% a.a. durante 125 dias.

2. Um empréstimo de $8.000,00 rendeu juros de $2.520,00 ao final de 7 meses. Qual a taxa de juros do empréstimo?

3. Qual o capital que aplicado a juros simples de 1,2% a.m. rende $3.500,00 de juros em 75 dias?

4. Por quanto tempo um capital de $11.500,00 foi aplicado para que rendesse $1.725,00 de juros, sabendo-se que a taxa de juros de mercado é de 4,5% a.m.?

5. Que capital produziu um montante de $20.000,00, em 8 anos, a uma taxa de juros simples de 12% a.a.?

6. Calcule o montante resultante da aplicação de $70.000,00 à taxa de 10,5% a.a. durante 145 dias.

7. A que taxa mensal o capital de $38.000,00 produzirá o montante de $70.300,00 em 10 anos?

8. Um capital é aplicado a juros simples de 5% ao semestre (5 % a.s.), durante 45 dias. Após este prazo, foi gerado um montante de $886.265,55. Qual foi o capital aplicado?

9. Que capital aplicado a 3% ao bimestre (3% a.b.), por um prazo de 75 dias, proporcionou um montante de $650.000,00?

10. Um capital de $5.380,00 aplicado por 3 meses e 18 dias, rendeu $1839,96 de juros ao final do período. Qual a taxa mensal de juros simples?

11. Um capital P foi aplicado a juros simples de 15% ao bimestre (15% a.b.), por um prazo de 5 meses e 13 dias e, após este período, o investidor recebeu $10.280,38. Qual o valor P do capital aplicado?

12. Obteve-se um empréstimo de $10.000,00 , para ser liquidado por $14.675,00 no final de 8 meses e meio. Qual a taxa de juros anual cobrada nessa operação?

13. Em quanto tempo um capital aplicado a 48% a.a. dobra o seu valor?

14. Determinar o capital necessário para produzir um montante de $798.000,00 no final de um ano e meio, aplicado a uma taxa de 15% ao trimestre (15% a.t.).

15. Determinar o montante correspondente a uma aplicação de $450.000,00 por 225 dias, à taxa de 5,6% ao mês (5,6% a.m.).

16. Quanto tempo deverá permanecer aplicado um capital para que o juro seja igual a duas vezes o capital, se a taxa de juros simples for igual a 10% a.a.?

17. Um empréstimo de $ 5.300,00 é liquidado por $ 7,200,00 no final de 182 dias. Calcular a taxa de juros mensal.

18. Sabendo-se que um certo capital, aplicado durante 10 semestres, à taxa de 36% ao ano rende $ 72.000,00 de juros, determinar o montante.

19. Qual o valor a ser pago, no final de cinco meses e 18 dias, correspondente a um empréstimo de $ 125.000,00, sabendo-se que a taxa de juros é de 27% ao semestre?

20. Um capital de R$ 6.000,00 produz R$ 480,00 de juros em 2 meses. Em quanto tempo esse capital triplicará se aplicado a mesma taxa de juros?

9.2 DESCONTO SIMPLES

1- Calcular o valor liberado de um título com valor nominal de R$ 120.000,00 e com vencimento para 180 dias descontado comercialmente a uma taxa simples de desconto de 40% aa.

2- Uma promissória de R$ 450,00 foi descontada comercialmente tendo um desconto de R$ 54,00. Considerando uma taxa simples de desconto de 6% am, calcular o prazo da operação.

3- Um borderô de duplicatas no valor de R$ 2.760,00 foi descontado num Banco, a uma taxa bancária de 6,3%am. Sabendo-se que o prazo médio dos títulos são de 35 dias, calcule o valor creditado a empresa.

4- Determine qual foi a taxa mensal comercial cobrada de um cliente, que recebeu a importância de R$ 5.230,40 de um Banco, ao descontar uma duplicata de R$ 5.600,00 pelo prazo de 44 dias.

5- Um título de R$ 2.800,00 foi descontado em um Banco gerando um valor líquido de R$ 2.587,20. Sabendo-se que a taxa "por fora" cobrada foi de 11,4%am, determine por quantos dias foi realizada a operação.

6- Uma nota promissória gerou uma quantia de R$ 4.300,00, tendo sido descontada comercialmente a uma taxa de 5,4%am, faltando 34 dias para o seu vencimento. Calcule o valor nominal da promissória.

7- Uma nota promissória de R$ 1.400,00 foi descontada em um Banco faltando 48 dias para seu vencimento, a uma taxa bancária de 110,4%aa. Determine o valor do desconto.

8- Pelo desconto de 8 títulos que totalizaram R$ 32.000,00, foi creditado na conta do cliente a importância de R$ 30.388,68. Sabendo-se que o prazo médio dos títulos foi de 36,2 dias e que foram cobrados encargos no valor de R$ 105,40, determine a taxa mensal de desconto "por fora" na operação.

9- Um título de R$ 13.000,00 que vence em 120 dias foi descontado comercialmente por R$ 11.400,00. Calcular a taxa anual de desconto e a taxa efetiva da operação.

10- Uma duplicata de R$ 72.000,00 com vencimento para 5 meses foi descontada comercialmente a uma taxa de desconto de 2%am. Considerando que foi paga uma taxa de serviço bancário de 2,5% sobre o valor nominal do título. Calcular o valor líquido liberado pelo Banco.

11- Numa operação de desconto de 60 dias de um título cujo valor de resgate é R$ 10.000,00 o valor recebido foi de R$ 9.400,00. Determinar a taxa mensal de desconto usada pela instituição se utilizado o sistema de desconto comercial. Determinar também qual seria a taxa mensal caso a instituição operasse no sistema de desconto racional.

12- Uma empresa apresenta o borderô de duplicatas abaixo a uma instituição financeira para realizar uma operação de desconto comercial simples. Sabendo-se que a taxa mensal de juros cobrada foi de 4,8% determine o prazo médio das duplicatas e o valor líquido creditado ao cliente:

VALOR DAS DUPLICATAS	PRAZO DAS DUPLICATAS	
4.000,00	60 dias	
13.500,00	30 dias	
1.000,00	95 dias	
12.500,00	20 dias	
4.000,00	90 dias	

13- Uma empresa apresenta o borderô de duplicatas abaixo a uma instituição financeira para realizar uma operação de desconto comercial simples. Sabendo-se que o valor líquido creditado ao cliente foi de R$ 14.200,00, determine o prazo médio das duplicatas e a taxa mensal de juros cobrada:

VALOR DAS DUPLICATAS	PRAZO DAS DUPLICATAS	
4.000,00	60 dias	
2.793,00	11 dias	
1.000,00	95 dias	
12.500,00	20 dias	
4.000,00	89 dias	

9.3 JUROS COMPOSTOS

1- *(fácil)* Calcular o montante de uma aplicação de R$ 3.500,00, pelas seguintes taxas efetivas e prazos:

a) 4% am e 6 meses b) 8% at e 18 meses c) 12% aa e 18 meses

2 - *(fácil)* Em que prazo um capital de R$ 18.000,00 acumula um montante de R$ 83.743,00 à taxa efetiva de 15% am?

3 - *(fácil)* Uma empresa pretende comprar um equipamento de R$ 100.000,00 daqui a 4 anos com o montante de uma aplicação financeira. Calcular o valor da aplicação necessária se os juros efetivos ganhos forem de:

a) 13% at b) 18% aa c) 14% as d) 12% am

4 - *(fácil)* Um capital de R$ 51.879,31 aplicado por 6 meses resultou em R$ 120.000,00. Qual a taxa mensal efetiva ganha?

5 - *(fácil)* Em quanto tempo triplica uma população que cresce à taxa de 3% aa?

6 - *(fácil)* A rentabilidade efetiva de um investimento è de 10% aa. Se os juros ganhos forem de R$ 27.473,00, sobre um capital investido de R$ 83.000,00, quanto tempo o capital ficará aplicado?

7 - *(fácil)* Em quanto tempo o rendimento gerado por um capital iguala-se ao próprio capital, aplicando-se uma taxa efetiva de 5% am?

8 - *(fácil)* Quanto tempo deve transcorrer para que a relação entre um capital de R$ 8.000,00, aplicado a juros efetivos de 4% am, e seu montante seja igual a 4/10?

9 - *(fácil)* Calcular o rendimento de um capital de R$ 7.000,00 aplicado à taxa efetiva de 1% am no período compreendido entre 3 de abril e 6 de junho do mesmo ano. (considere ano civil entre as datas).

10 - *(fácil)* Qual a taxa anual efetiva que permite a duplicação de um capital no prazo de 42 meses?

11 - *(média)* Um capital de R$ 50.000,00 rendeu R$ 1.000,00 em um determinado prazo. Se o prazo fosse dois meses maior, o rendimento aumentaria em R$ 2.060,40. Calcular a taxa de juros efetiva ao mês ganha pela aplicação.

12 - *(média)* Um certo capital após 4 meses transformou-se em R$ 850,85. Esse capital, diminuído dos juros ganhos nesse prazo, reduz-se a R$ 549,15. Calcular o capital e a taxa de juros efetiva ao mês ganha na aplicação.

13 -*(média)* Uma pessoa depositou R$ 1.000,00 em um fundo que paga juros efetivos de 26,8242% aa, com o objetivo de dispor de R$ 1.454,69. Passados 4 meses após a aplicação, a taxa efetiva subiu para 42,5761% aa. Quanto tempo adicional terá de esperar para obter o capital requerido?

14 - *(fácil)* Determinar o valor dos juros pagos por um empréstimo de R$ 2.000,00 contratado à taxa efetiva de 5% am pelo prazo de 25 dias.

15 - Calcule as seguintes taxas de juros compostos equivalentes a uma taxa de juros compostos de 42,00% ao ano:

a) Taxa mensal :
b) Taxa Trimestral :
c) Taxa semestral :
d) Taxa diária:

16 - Determinado financiamento tem um custo semestral 20,00%. Calcule as taxas de juros compostos equivalentes, conforme solicitado a seguir:

a) Taxa mensal equivalente de juros compostos :

b) Taxa diária equivalente de juros compostos :

c) Taxa equivalente para o período de 70 dias :

17. Determine a partir de uma taxa nominal de 60 % a.a., com capitalização mensal:

a) A taxa efetiva para um mês: __________________

b) A taxa efetiva para um bimestre: __________________

c) A taxa efetiva para um trimestre: __________________

d) A taxa efetiva para um semestre: __________________

18 - Em quanto tempo um valor de R$ 2.000,00 atinge um montante de R$ 2.189,16, aplicado a uma taxa de juros compostos de 1,40% ao mês?

19 - Uma loja oferece um aparelho condicionador de ar em duas opções de venda:

a) Preço à vista de R$ 700,00, ou;

b) Entrada de R$ 400,00 e uma parcela de R$ 343,47para sessenta dias (dois meses) depois da compra.

Qual é a taxa de juros compostos mensal com que a loja está trabalhando?

20 – Determine qual o valor de um Capital que ficou aplicado no regime de juros compostos, pelo prazo de 8 meses a uma taxa efetiva de juros de 6% a.m. e produziu juros de R$ 3.563,09?

9.4 SÉRIES UNIFORMES DE PAGAMENTO

1. Um empréstimo de R$ 100.000,00, financiado com uma taxa efetiva de juros 22,00% ao ano, é pago em dez parcelas mensais e iguais. Qual será o valor de cada uma das parcelas?

2. Um empréstimo de R$ 100.000,00, financiado com uma taxa nominal de juros de 24,00% ao ano, capitalizados mensalmente, é pago em dez parcelas mensais e iguais. Qual será o valor de cada uma das parcelas?

3. Um empréstimo de R$ 100.000,00, financiado com uma taxa efetiva de juros de 24,00% ao ano é pago em dez parcelas trimestrais e iguais. Qual será o valor de cada uma das parcelas?

4. Um empréstimo de R$ 100.000,00, financiado com uma taxa nominal de juros de 24,00% ao ano, capitalizados trimestralmente, é pago em dez parcelas trimestrais e iguais. Qual será o valor de cada uma das parcelas?

5. Um empréstimo de R$ 100.000,00, financiado com uma taxa nominal de juros de 24,00% ao ano, capitalizados mensalmente, é pago em dez parcelas trimestrais e iguais. Qual será o valor de cada uma das parcelas?

6. Um empréstimo de R$ 100.000,00, financiado com uma taxa efetiva de juros 22,00% ao ano, é pago em dez parcelas mensais e iguais. Considerando um período de carência de três meses, qual será o valor de cada uma das parcelas?

7. Um empréstimo de R$ 100.000,00, financiado com uma taxa nominal juros de 24,00% ao ano, capitalizados mensalmente, é pago em dez parcelas mensais e iguais. Considerando um período de carência de três meses e um reforço de R$ 20.000,00 a ser somado à 5ª parcela, qual será o valor de cada uma das parcelas?

8. Apresente o valor de cada uma das seis parcelas mensais e iguais a serem cobradas na venda de um produto com preço à vista de R$ 4.000,00, sendo a taxa efetiva de juros de 2,00% ao mês, nas seguintes modalidades:

a) Pagamento Antecipado Resposta:

b) Pagamento Postecipadoa Resposta:

c) Com carência de 2 meses Resposta:

d) Com entrada de R$ 1.100,00, mais 5 parcelas iguais Resposta:

e) Sem entrada e reforço de R$ 500 junto à terceira parcela Resposta:

9. Qual será o valor de cada uma das quatro parcelas iguais que deverão ser pagas no financiamento de R$ 1.000,00, considerando que as parcelas são pagas em intervalos de dois meses, a uma taxa efetiva anual de juros de 15%?

10. Hoje disponho de R$ 4.000,00, aplicados num fundo que prevê remuneração de 2,50% ao mês. Também hoje, farei a compra de um produto em 12 parcelas mensais de R$ 378,24 cada uma, sem entrada,

cujo preço à vista é de R$ 4.000,00. É melhor comprar o produto à vista ou nas 12 parcelas? Demonstre os passos da análise.

11. Apresente os fatores que, multiplicados pelo preço à vista de qualquer produto, retornem o valor da parcela, nas situações apresentadas a seguir: (seis casas decimais)

a) Oito parcelas mensais, antecipadas, e taxa mensal de juros de 2,00%:

b) Dez parcelas mensais, postecipadas, e taxa mensal de juros de 2,00%:

12. Qual deverá ser o valor de cada um dos 10 depósitos mensais postecipados, que retornarão um montante de R$ 1.593,74 no período 10, se aplicados a uma taxa de juros compostos de 10,00% ao mês?

13. Qual será o montante de uma série de 10 depósitos mensais antecipados de R$ 100,00, aplicados a uma taxa de juros compostos de 10,00% ao mês?

14. Qual deverá ser o valor de cada um dos 5 depósitos mensais e iguais que deveremos fazer para que possamos resgatar R$ 2.000,00 no fim do oitavo mês, de um fundo que remunera à taxa de juros de 3% ao mês? (não há, portanto, depósitos nos meses 6, 7 e 8)

15. Quanto deveremos depositar mensalmente, durante os próximos 12 anos, em um fundo que remunera a uma taxa de juros de 1,20% ao mês, para que possamos sacar R$ 800,00 mensais durante os seguintes 15 anos, de forma que, depois do último saque, não sobre saldo?

16. Qual o valor de cada uma das 5 parcelas mensais e iguais a serem cobradas na venda de um produto que apresenta preço à vista de R$ 2.000,00, se a taxa de juros for de 5,00% ao mês e houver carência de 3 meses?

17. Um empréstimo de R$ 100.000,00, financiado com uma taxa efetiva de juros de 2,5% ao mês é pago em 10 parcelas mensais, iguais e postecipadas de R$ 10.333,92. Considerando um período de carência de 3 meses e um reforço que será somado à 6ª parcela, calcule qual será o valor desse reforço.

18. Um empréstimo de R$ 100.000,00, financiado com uma taxa efetiva de juros de 3,5% ao mês é pago em 15 parcelas mensais, iguais e postecipadas de R$ 8.334,02. Considerando um período de carência e um reforço de R$ 30.000,00 a ser somado à 8ª parcela, calcule de quantos meses será o período de carência.

19. Um empréstimo financiado com uma taxa efetiva de juros de 2,5% ao mês é pago em 10 parcelas mensais, iguais e postecipadas de R$ 7.967,99. Considerando um período de carência de 3 meses e um reforço de R$ 20.000,00 a ser somado à 8ª parcela, qual é o valor que foi tomado emprestado?

9.5 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

1) Uma dívida de valor $ 22.800,00 foi amortizada via SAF em prestações mensais durante 4 anos a uma taxa de juros de 36% a.a./c.m. Calcular:

a) a 15a quota de amortização;

b) os juros pagos na 20a prestação;

c) o total amortizado após o pagamento da 25a prestação;

d) o saldo devedor após o pagamento da 22a prestação;

2) Um empréstimo de $ 18.000,00 será amortizado via SAF em 10 anos mediante prestações trimestrais à taxa de 5% a.t. c.t. Calcular:

a) os juros pagos na 36a prestação;

b) o saldo devedor após o pagamento da 17a prestação;

3) Uma compra, cujo preço à vista é de $ 8.500,00 será paga em 12 prestações mensais pelo Sistema Price. Se a taxa de juros é de 36 % a.a. c.m, calcular:

a) as prestações;

b) a 4a quota de amortização;

c) os juros pagos na 3a prestação;

4) Uma dívida de $ 6.500,00 será amortizada via SAF em 4 prestações mensais, a uma taxa de juros de 10% a.m./c.m., vencendo a 1a prestação 150 dias após a liberação do empréstimo. Construir a planilha de amortização, sabendo que, durante a carência, apenas os juros são pagos.

5) Um empréstimo de $ 12.000,00 será amortizado em 6 prestações mensais pelo SAF, a uma taxa de juros de 5% a.m./c.m.,vencendo a 1a prestação 4 meses após a liberação do empréstimo. Construir a planilha de amortização, sabendo que, no período de carência, nada é pago e os juros são incorporados ao saldo devedor.

6) Um empréstimo de $ 8.500,00 foi amortizado mensalmente pelo SAF durante 2 anos. Os juros pagos na 1a prestação foram de $ 382,50. Determinar os juros pagos na última prestação.

7) Um financiamento no valor de $ 25.000,00 foi amortizado via Price durante 5 anos. Se a taxa de juros é de 42% a.a. c.m., calcular os juros pagos na 30a prestação e o valor necessário para quitar o empréstimo após o pagamento da 15a prestação.

8) Um empréstimo no valor de $ 80.000,00 será liquidado pelo SAC em 40 parcelas mensais. A taxa de juros da operação é de 4% a.m./c.m. Determinar:

a) o valor das amortizações mensais;

b) o valor dos juros e da prestação referente ao 22o pagamento;

c) o valor da última prestação;

d) o saldo devedor após o pagamento da 10a prestação.

9) Um empréstimo de $ 250.000,00 deve ser pago com juros de 8% a.m./c.m.em 20 parcelas mensais pelo SAC. Calcular os valores do 2o e do último pagamentos.

10) Um empréstimo de $ 10.000,00 foi amortizado mensalmente pelo SAC em 3 anos. Os juros pagos na 1a prestação foram de $ 450,00. Calcular os juros pagos na última prestação.

11) Um automóvel no valor de $ 40.000,00 é comprado sem entrada para ser pago em 5 prestações, com carência de 2 meses, à base de 9 % a.m./c.m. de juros, capitalizados durante a carência. O financiamento foi feito pelo SAC. Apresentar a planilha de amortização.

12) Um empréstimo de R$ 500.000,00 foi realizado pelo prazo de 8 anos, com 3 anos de carência e pagamentos mensais, utilizando o método francês. A taxa de juros cobrada pelo financiador é de 24% ao ano capitalizada mensalmente. Qual o saldo devedor 4 meses após o pagamento da terceira prestação?

13) a)Calcular os valores das parcelas de juros e amortização referentes à primeira prestação, de um empréstimo de R$ 853,20, a taxa de 3% ao mês, para ser liquidado em 10 prestações iguais.

b) Calcular o valor do saldo devedor existente no final do 6o mês (após pagamento da 6ª prestação).

c) Calcular o valor da parcela de amortização correspondente a 5ª prestação

15) a)Calcular o saldo devedor de um empréstimo de R$ 10.000,00, feito em 24 prestações mensais e iguais, à taxa de 3,5% ao mês, após o pagamento da 13ª prestação.

b) Calcular o valor da parcela de amortização referente à 12ª prestação do empréstimo referido no exercício anterior.

16) Calcular o valor dos juros acumulados entre a 84ª e 96ª prestação, correspondentes a um empréstimo de R$35.000,00, à taxa de 1% ao mês, para pagamento em 120 prestações mensais e iguais.

17) Um apartamento é vendido por R$ 150.000,00, sendo R$ 10.000,00 de entrada e o restante em 60 prestações mensais, à taxa de 2,5% ao mês, pelo Sistema de Amortização Constante.

Calcular:

a) o valor da 1ª e da última prestação;

c) o valor das parcelas de juros referentes a 37ª e a 38ª prestação;

18) Preencha a tabela abaixo utilizando o Sistema de Amortizações Constante

n	Juros	Amortização	PagamentoPMT	SaldoDevedor
0	-	-	-	
1	3.600,00	6.000,00		
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

19) Preencha a tabela abaixo utilizando o Sistema de Amortizações Francês (Price)

n	Juros	Amortização	Pagamento PMT	Saldo Devedor
0	-	-	-	15.000,00
1	600,00			
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				1.778,23
10				

20) Preencha a tabela abaixo utilizando o Sistema de Amortizações Misto

n	Juros	Amortização	Pagamento PMT	Saldo Devedor
0				10.000,00
1	600,00		2.486,98	
2				
3				
4				
5				

9.6 ANÁLISE DE INVESTIMENTOS

01) Pelo método do VPL, é viável um projeto que necessita de um investimento inicial de R$ 1.100.000,00 para gerar 10 (dez) retornos anuais de R$ 300.000,00, a partir do terceiro ano após o investimento, sabendo que o projeto foi financiado a uma taxa de juros compostos de 20,00% ao ano e, no último ano os itens do investimento inicial foram vendidos com valor residual de 20% do valor nominal investido?

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
FCL	(1.100.000)	0	0	300.000	300.000	300.000	300.000	300.000	300.000	300.000	300.000	300.000	520.000

02) Um investidor tem a oportunidade de investir R$ 2.000.000,00 num fundo que garante a remuneração da inflação prevista de 6% ao ano, mais uma taxa real de 3%. Alternativamente, o investidor tem a oportunidade de investir seus recursos num dos projetos A ou B, apresentados a seguir. Sob a ótica do retorno, o investidor deveria investir seus recursos no fundo proposto ou em algum dos dois projetos apresentados a seguir e, se positivo, qual deles?

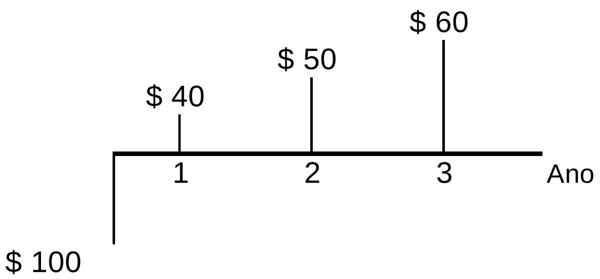
A	t	B
(2.000.000,00)	0	(2.000.000,00)
0,00	1	650.000,00
0,00	2	520.000,00
600.000,00	3	0,00
550.000,00	4	0,00
0,00	5	700.000,00
600.000,00	6	700.000,00
900.000,00	7	0,00
600.000,00	8	350.000,00

03) A nossa empresa consome o equivalente a R$ 100.000,00 por mês com processamento de informações de vendas. Há a possibilidade de adquirirmos um equipamento que permite aos vendedores lançarem os pedidos de compra on line, diminuindo os custos de processamento em 10%. Considerando que o custo de aquisição dos equipamentos para isso seja de R$ 300.000,00 e que eles tenham vida útil de 5 anos, poderíamos contratar um empréstimo a 2% ao mês para financiar a aquisição desses equipamentos?

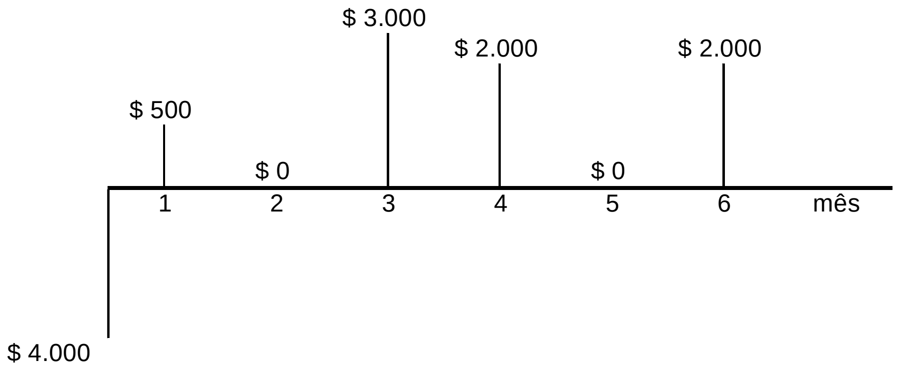
04) Dados os fluxos de caixa abaixo, e considerando uma taxa média de atratividade TMA de 10 % a.m., analise se há um fluxo que propicie ao investidor um melhor retorno, ou seja, melhor VPL ou melhor TIR. Em caso positivo, indique qual.

MÊS	FLUXO 1	FLUXO 2	FLUXO 3	FLUXO 4
0	-1.000,00	-1.000,00	-1.000,00	-1.000,00
1	250,00	500,00	300,00	100,00
2	300,00	0,00	300,00	300,00
3	350,00	0,00	300,00	400,00
4	400,00	800,00	400,00	500,00
Total	**300,00**	**300,00**	**300,00**	**300,00**

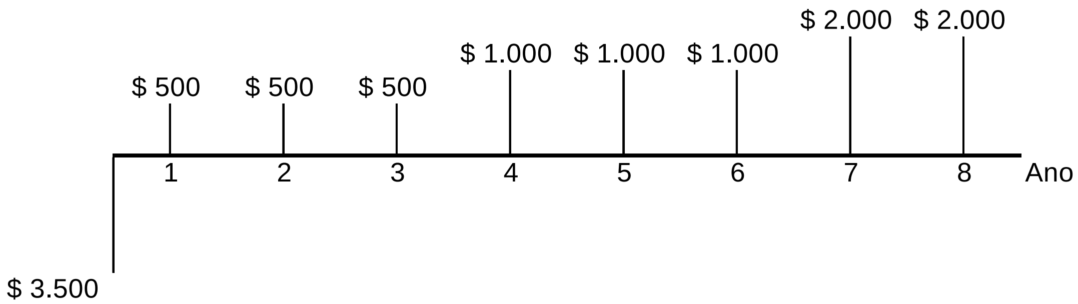
05) Considerando o fluxo de caixa de um investimento, conforme abaixo, calcule o NPV à taxa de 10% a.a. e a IRR.



06) Determine a Taxa Interna de Retorno (IRR) e Valor Presente Líquido (VPL) para uma taxa de 6 % a.m., do fluxo de caixa abaixo:



07) Calcule o valor presente líquido (NPV) do fluxo de caixa abaixo, para uma taxa de 15% a.a.:



08) O estudo de viabilidade econômica de um projeto apresentou os seguintes fluxos de caixa

ANO	RECEBIMENTOS ANUAIS	PAGAMENTOS ANUAIS
0	0,00	5.000,00
1	2.300,00	200,00
2	2.900,00	600,00
3	3.300,00	500,00
4	3.800,00	1.300,00
Total	12.300,00	7.600,00

Qual a rentabilidade (Taxa Interna de Retorno - IRR) anual desse projeto?

09) Uma loja oferece um microcomputador portátil com duas alternativas de pagamento. A primeira, R$ 1.000,00 de entrada e mais duas parcelas mensais de R$ 3.000,00. A segunda é sem entrada, com quatro parcelas mensais de R$ 1.250,00, mais uma quinta parcela de R$ 2.000,00. Se a taxa de juros de mercado (taxa de atratividade) for de 2% am, qual a melhor alternativa para o comprador?

10) Qual é a melhor alternativa para o comprador, considerando uma taxa de atratividade de 12% am para uma mercadoria que é encontrada a venda nas seguintes condições de pagamento:
__ À vista por R$ 36.000,00;
__ Duas parcelas mensais, iguais de R$ 21.000,00, sem entrada;
__ Entrada de R$ 17.600,00, mais duas parcelas mensais e iguais a entrada.

11) Qual o melhor plano de pagamento, para o comprador, de um terreno que é vendido nas duas condições a baixo, considerando uma taxa de atratividade de 3% am?

Plano A: Um único pagamento de R$ 50.000,00 daqui 12 meses;
Plano B: Uma entrada de R$ 10.000,00, mais uma parcela de R$ 33.000,00 daqui a 6 meses.

12) No exercício anterior, se a taxa de mercado fosse 2% am e a entrada no plano B, de R$ 5.000,00, qual deveria ser o valor de uma terceira parcela com vencimento em 12 meses, de tal forma que os planos fossem equivalentes?

13) Um aparelho de som é vendido em 3 parcelas mensais e iguais, sem acréscimo, sendo a primeira dada como entrada. Se o pagamento for feito à vista, haverá um desconto de 20%. Qual a melhor alternativa para o comprador, se a taxa de juros de mercado é de 15% am?

14) Uma loja vende um microcomputador por R$ 2.400,00 à vista ou na seguinte condição: 20% de entrada; R$ 380,00 em 30 dias; R$ 600,00 em 60 dias; R$ 700,00 em 90 dias e R$ 500,00 em 120 dias. Considerando que a taxa mínima de atratividade é de 4,8% am, determine, através da taxa interna de retorno, qual a melhor alternativa para o vendedor.

15 - O preço de um automóvel é de R$ 15.000,00 à vista. Um interessado faz uma contra proposta de R$ 3.000,00 no ato, R$ 5.000,00 em 60 dias, R$ 5.000,00 em 90 dias, e uma parcela final em 150 dias. De quanto deve ser esta última parcela se o interessado quer pagar a taxa efetiva de 6,00% a.m. ?

9.7 RESPOSTAS DOS TRABALHOS

9.7.1 Juros Simples

1	5.000,00
2	4,50% am
3	116.666,67
4	3,33 meses ou 100 dias
5	10.204,08
6	72.960,42
7	0,708%
8	875.324,00
9	626.506,02
10	9,50%
11	7.304,00
12	66,000%
13	2,08 anos ou 25,00 meses
14	420.000,00
15	639.000,00
16	20,00 anos
17	5,909%
18	112.000,00
19	156.500,00
20	50 meses

9.7.2 Desconto Simples

1	96.000,00
2	2 meses
3	2.557,14
4	4,5% am
5	20 dias
6	4.580,32
7	206,08
8	3,9%am
9	36,92%aa e 42,11%aa
10	63.000,00
11	3,00% e 3,19%
12	38,5714 e 32.840,00
13	40 e 31,16%

9.7.3 Juros compostos

1	a) 4.428,62
	b) 5.554,06
	c) 4.148,54
2	11 meses
3	a) 14.149,62
	b) 51.578,89
	c) 35.055,91
	d) 434,05
4	15 % am
5	37,16700968 a ou 37a2m
6	3 anos
7	14 m 6 d
8	23,36241894 m ou 23m11d
9	150,18
10	21,9013654% aa
11	2% am
12	700,00; 4,999865% am
13	10 meses
14	82,99
15	a) 2,9653%
	b) 9,1622%
	c) 19,1638%
	d) 0,0975%
16	a) 3,085332%
	b)0,10134107%
	c)7,3476908%
17	a)5,00%
	b)10,25%
	c)15,76%
	d) 34,010%
18	6,50 m ou 195,00 d
19	7,00% a m
20	R$ 6.000,00

9.7.4 Séries Uniformes de Pagamentos

1	pmt	R$ 10.941,83
2	pmt	R$ 11.132,65
3	pmt	R$ 13.282,70
4	pmt	R$ 13.586,80
5	pmt	R$ 13.664,66
6	pmt	R$ 11.499,52
7	pmt	R$ 9.797,42
8	a) pmt	R$ 700,10
	b) pmt	R$ 714,10
	c) pmt	R$ 742,95
	d) pmt	R$ 615,26
	e) pmt	R$ 629,99
9	pmt	R$ 264,90
10	i	2,00%
11	a	0,133833
	b	0,111327
12	pmt	R$ 100,00
13	fv	R$ 1.753,12
14	pmt	R$ 344,74
15	pmt	R$ 154,55
16	pmt	R$ 534,76
17	reforço	R$ 20.000,00
18	Carên.	5 meses
19	PV	R$ 80.000,00

9.7.5 Sistemas de Amortização

1	a	R$ 330,31
	b	R$ 519,45
	c	R$ 7.961,73
	d	R$ 16.131,58
2	a	R$ 227,08
	b	R$ 14.149,61
3	a	R$ 853,93
	b	R$ 654,46
	c	R$ 218,52
6		R$ 25,25
7	a	R$ 657,22
	b	R$ 22.545,29
8	a	R$ 2.000,00
	b'	R$ 1.520,00
	b"	R$ 3.520,00
	c	R$ 2.080,00
	d	R$ 60.000,00
9		R$ 31.500,00
		R$ 13.500,00
10		R$ 12,50
12		R$ 953.460,13
13	a'	R$ 25,60
	a"	R$ 74,42
	b	R$ 371,79
	c	R$ 83,77
15	a	R$ 5.605,52
	b	R$ 398,17
16		R$ 1.574,68
17	a'	R$ 5.833,33
	a"	R$ 2.391,67
	c'	R$ 1.400,00
	c"	R$ 1.341,67

	n	juros	amort	pgto	Sd
4	0	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 6.500,00
	1	R$ 650,00	R$ 0,00	R$ 650,00	R$ 6.500,00
	2	R$ 650,00	R$ 0,00	R$ 650,00	R$ 6.500,00
	3	R$ 650,00	R$ 0,00	R$ 650,00	R$ 6.500,00
	4	R$ 650,00	R$ 0,00	R$ 650,00	R$ 6.500,00
	5	R$ 650,00	R$ 1.400,56	R$ 2.050,56	R$ 5.099,44
	6	R$ 509,94	R$ 1.540,62	R$ 2.050,56	R$ 3.558,82
	7	R$ 355,88	R$ 1.694,68	R$ 2.050,56	R$ 1.864,15
	8	R$ 186,41	R$ 1.864,15	R$ 2.050,56	R$ 0,00

	n	juros	amort	pgto	Sd
5	0	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 12.000,00
	1	R$ 600,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 12.600,00
	2	R$ 630,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 13.230,00
	3	R$ 661,50	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 13.891,50
	4	R$ 694,58	R$ 2.042,29	R$ 2.736,87	R$ 11.849,21
	5	R$ 592,46	R$ 2.144,41	R$ 2.736,87	R$ 9.704,80
	6	R$ 485,24	R$ 2.251,63	R$ 2.736,87	R$ 7.453,17
	7	R$ 372,66	R$ 2.364,21	R$ 2.736,87	R$ 5.088,96
	8	R$ 254,45	R$ 2.482,42	R$ 2.736,87	R$ 2.606,54
	9	R$ 130,33	R$ 2.606,54	R$ 2.736,87	R$ 0,00

	n	juros	amort	pgto	Sd
11	0	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 40.000,00
	1	R$ 3.600,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 43.600,00
	2	R$ 3.924,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 47.524,00
	3	R$ 4.277,16	R$ 9.504,80	R$ 13.781,96	R$ 38.019,20
	4	R$ 3.421,73	R$ 9.504,80	R$ 12.926,53	R$ 28.514,40
	5	R$ 2.566,30	R$ 9.504,80	R$ 12.071,10	R$ 19.009,60
	6	R$ 1.710,86	R$ 9.504,80	R$ 11.215,66	R$ 9.504,80
	7	R$ 855,43	R$ 9.504,80	R$ 10.360,23	R$ 0,00

18	12	300,00	6.000,00	6.300,00	0,00
19	10	71,13	1.778,23	1.849,36	0,00
20	5	127,19	2.119,79	2.246,98	0,00

9.7.6 Análise de Investimentos

1	vpl	- R$ 201.893,85
2	tir a	9,0414%
	tir b	10,2078%
3	vpl	R$ 47.608,87
4	tir 1	10,4845%
	vlp 1	R$ 11,37
	tir 2	10,0399%
	vpl 2	R$ 0,96
	tir 3	10,8479%
	vpl 3	R$ 19,26
	tir 4	9,2733%
	vpl 4	-R$ 19,12

5	tir	21,6500%
	vpl	R$ 22,76
6	tir	18,1800%
	vpl	R$ 1.984,66
7	tir	18,4900%
	vpl	R$ 548,55
8	irr	31,435%
9	vpl 1	R$ 6.824,68
	vpl 2	R$ 6.571,12
10	vpl 1	R$ 36.000,00
	vpl 2	R$ 35.491,07
	vpl 3	R$ 47.344,90

11	vpl 1	R$ 35.068,99
	vpl 2	R$ 37.636,98
12		R$ 6.495,43
13	(ex: parcela de R$ 100) vpl parcelado R$ 262,57 vlp a vista R$ 240,00	
14	parcelado	
	tir a prazo	5,046234%
15	R$ 4.485,63	

10. FÓRMULAS

Juros Simples (Juros x Capital):

$J = C \times i \times n$	$C = \frac{J}{i \times n}$	$i = \frac{J}{C \times n}$	$n = \frac{J}{C \times i}$

Juros Simples (Montante x Capital):

$M = C + J$	$M = C \times (1 + i \times n)$	$C = \frac{M}{(1 + i \times n)}$	$i = \frac{\frac{M}{C} - 1}{n}$	$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i}$

Desconto Comercial Simples (Desconto x Valor Nominal x Valor Líquido):

$D = VN \times i \times n$	$VL = VN - D$	$VL = VN \times (1 - i \times n)$	$VN = \frac{VL}{(1 - i \times n)}$	$i = \frac{1 - \frac{VL}{VN}}{n}$	$n = \frac{1 - \frac{VL}{VN}}{i}$

Desconto Racional Simples (Desconto x Valor Nominal):x Valor Líquido):

$D = VL \times i \times n$	$VL = VN - D$	$VL = \frac{VN}{(1 + i \times n)}$	$VN = VL \times (1 + i \times n)$	$i = \frac{\frac{VN}{VL} - 1}{n}$	$n = \frac{\frac{VN}{VL} - 1}{i}$

Taxa efetiva de desconto

$i_{ed} = \frac{i_d}{1 - i_d \times n}$	i_{ed} ➔ **Taxa de efetiva de desconto**
	i_d ➔ **Taxa de desconto comercial**
	n ➔ **prazo**

PRAZO MÉDIO	SALDO MÉDIO	TAXA MÉDIA
$PM = \frac{\sum_{j=1}^{n}(C_j \times n_j)}{\sum_{j=1}^{n}(C_j)}$	$SM = \frac{\sum_{j=1}^{n}(C_j \times n_j)}{\sum_{j=1}^{n}(n_j)}$	$TM = \frac{\sum_{j=1}^{n}(C_j \times i_j \times n_j)}{\sum_{j=1}^{n}(C_j \times n_j)}$

Juros Compostos (Valor Futuro x Valor Presente):

$FV = PV + J$	$FV = PV \times (1 + i)^n$	$PV = \frac{FV}{(1 + i)^n}$	$i = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$	$n = \frac{Ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{Ln(1 + i)}$

CONVENÇÃO EXPONENCIAL	CONVENÇÃO LINEAR
$FV = PV \times (1 + i)^{(n + \frac{m}{k})}$	$FV = PV \times (1 + i)^{(n)} \times \left[1 + i \times \frac{m}{k}\right]$

TAXAS		
CAPITALIZAÇÃO	DESCAPITALIZAÇÃO	FÓRMULA GERAL (BÁSICA)
$i_{cap} = (1 + i)^n - 1$	$i_{desc} = (1 + i)^{\frac{1}{n}} - 1$	$i_E = (1 + i)^{\frac{n_p}{n_C}} - 1$

UNIVATES

CÁLCULOS DE FINANÇAS

SÉRIE UNIFORME DE PAGAMENTOS POSTECIPADA

$PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i}\right]$	$FV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$	$n = \left\{\frac{Ln\left[\left(\frac{FV}{PMT}.i\right)+1\right]}{Ln(1+i)}\right\}$	$n = \left\{\frac{Ln\left[1-\left(\frac{PV}{PMT}.i\right)\right]}{Ln(1+i)}\right\}$
$PMT = PV \cdot \left[\frac{(1+i)^n . i}{(1+i)^n - 1}\right]$	$PMT = FV \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$		

SÉRIE UNIFORME DE PAGAMENTOS ANTECIPADA

$PV = PMT \cdot (1+i) . \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i}\right]$	$FV = PMT \cdot (1+i) . \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$	$n = \left\{\frac{Ln\left[\left(\frac{FV}{PMT} \cdot \frac{i}{(1+i)}\right)+1\right]}{Ln(1+i)}\right\}$	$n = \left\{\frac{Ln\left[1-\left(\frac{PV}{PMT} \cdot \frac{i}{(1+i)}\right)\right]}{Ln(1+i)}\right\}$
$PMT = \frac{PV}{(1+i)} . \left[\frac{(1+i)^n . i}{(1+i)^n - 1}\right]$	$PMT = \frac{FV}{(1+i)} \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$		

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO SAF (PRICE)

Cálculo do Saldo Devedor	**Cálculo da Amortização**	**Cálculo do Juro**	**Cálculo do Montante pago**
$SD_T = PV_0 \cdot \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^T}{(1+i)^n - 1}\right]$	$A_{(1)} = PMT - (PV_{(0)} . i)$	$J_t = PV_0 . i \cdot \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{t-1}}{(1+i)^n - 1}\right]$	$M_{(t)} = PV_{(0)} . \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^n - 1}\right]$
$SD_T = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^T}{(1+i)^n . i}\right]$	$A_{(1)} = PV_{(0)} . \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$	$J_t = PMT - \left[\frac{PV_0 . i}{(1+i)^n - 1} . (1+i)^{t-1}\right]$	**Cálculo do total dos Juros** $\sum J_t = (PMT.t) - M_t$
	$A_{(t)} = A_{(1)} . (1+i)^{t-1}$		

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO SAC

Cálculo da Prestação	**Cálculo do Saldo Devedor**	**Cálculo do Juro**	**Cálculo do Montante pago**
$P_t = \frac{PV_0}{n} . [1 + i.(n + 1 - t)$	$SD_t = PV_0 . \left(1 - \frac{t}{n}\right)$	$J_t = SD_{t-1} . i$	$M_{(t)} = \frac{PV_{(0)}}{n} . t$
$P_t = A_t + J_t$	$SD_t = A.(n - t)$	$J_t = PV_0 . i . \left(1 - \frac{t-1}{n}\right)$	**Cálculo do total dos Juros** $\sum J_t = i.A.t\left(\frac{2n - t + 1}{2}\right)$
Cálculo da Amortização $A = \frac{PV_0}{n}$			

VALOR PRESENTE LÍQUIDO - VPL (NET PRESENT VALUE - NPV)

$$VPL_{(NPV)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{CF_1}{(1+i)^j} - CF_0$$