

1. Calcular os elementos e formar a matriz $A=(a_{ij})_{2 \times 2}$, que é definida pela fórmula $a_{ij}=2i+2j-1$.

Resolução:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.1+2.1-1 & 2.1+2.2-1 \\ 2.2+2.1-1 & 2.2+2.2-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Determinar os valores de x e y para que se verifique a igualdades das matrizes

$$\begin{pmatrix} x+y & 4 \\ 1 & (x-y)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2xy \\ x-y & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \\ 2x=4 \rightarrow x=2 \\ 2+y=3 \rightarrow y=1 \end{cases}$$

3. Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix} 1+a & b \\ 2c & 2+d \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcule a, b, c e d para que se tenha $A=B^t$.

Resolução:

$$B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ sua transposta é: } B^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ à } \begin{cases} \begin{pmatrix} 1+a & b \\ 2c & 2+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ 1+a=3 \rightarrow a=2 \\ b=2 \\ 2c=-1 \rightarrow c=-\frac{1}{2} \\ 2+d=4 \rightarrow d=2 \end{cases}$$

4. Determine a, b e c para que $A=B$ para as matrizes: $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{16} & a^2 \\ -27 & \log_3 \frac{1}{81} \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 2^b & 9 \\ a^3 & c \end{bmatrix}$

Resolução:

$$2^b = \frac{1}{16} \rightarrow b = -4$$

$$a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3$$

$$a^3 = -27 \rightarrow a = -3$$

$$\log_3 \frac{1}{81} = c \rightarrow c = -4$$

5. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule

a) a matriz $A+B$.

Resolução:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+4 & 3+1 \\ 2-1 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

b) a matriz $A-B$

Resolução:

$$A-B = \begin{pmatrix} 1-4 & 3-1 \\ 2+1 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $A+B$, $(A+B)^t$ e A^t+B^t e verifique que $(A+B)^t = A^t+B^t$;

b) $A-B$, $(A-B)^t$ e A^t-B^t e verifique que $(A-B)^t = A^t-B^t$.

7. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -15 & 12 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, determine a matriz X tal que $X-A=B^t$.

Resolução:

$$X = B^t + (-A) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -3 \\ 15 & -12 \end{pmatrix}$$

8. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, calcule a matriz $\frac{1}{4}B - \frac{1}{2}A$.

Resolução:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

9. Resolva a equação $2.A-5.X=B^t$, sendo dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, calcule as matrizes X e Y:

a) $\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$

b) $\begin{cases} X + 2Y = 7A - 2B \\ 2X - Y = 4A + B \end{cases}$

Resolução:

$$\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$$

a)

$$2X = A + B \rightarrow 2X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

11. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule o produto das matrizes A.B.

Resolução:

$$A.B = \begin{pmatrix} 4+2+10 & 3+6+5 \\ 12+1+0 & 9+3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 14 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}$$

12. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, calcule $A^2 + 2.A - 11.I$.

13. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & b \end{pmatrix}$, calcule a e b para que se tenha $A.A^t = A^t.A$.

14. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, calcule a sua matriz inversa A^{-1} , (obs: faça $A.A^{-1} = I_2$).

15. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule as matrizes:

a) A^2

b) A^3

16. Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 2 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix}$

17. Calcule o determinante da matriz: $\begin{pmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{pmatrix}$.

18. Resolva as equações: a) $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x & x \\ 5 & x \end{vmatrix} = 0$.

19. Sabendo que $0 \leq x \leq 2\pi$, resolva a equação $\begin{vmatrix} \sin x & 3 \\ -1 & \sin x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$.

20. Resolva a inequação $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 4$.

21. Calcule os determinantes (Regra de Sarrus)

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Resolução

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 1 + 1 - (3 + 2 + 5)$

22. Resolva as equações: a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x \\ 1 & x & 4 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Resolução:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x \\ 1 & x & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 4x + x + x - (x + x^2 + 4) = 0$

23. Calcule o valor de m para que se tenha $\begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & m & 4 \end{vmatrix} = 111$.

24. Determine o conjunto solução da equação $\begin{vmatrix} \sin x & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \sin x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$, no

intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

Resolução:

$2.\sin^2 x + 1 + 0 - 0 - \sin x + 0 = \sin^2 x + \cos^2 x$ **à** $2.\sin^2 x - \sin x = 0$, colocando $\sin x$ em evidência, $\sin x.(2.\sin x - 1) = 0$ **à** $\sin x = 0$ ou $\sin x = \frac{1}{2}$.

25. Calcule os determinantes das matrizes: (pelo Teorema de Laplace)

a) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Resolução:

$$a) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$26. \text{ Calcule o determinante da matriz: } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{fazendo o escalonamento da matriz, para torná-la uma matriz}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \text{diagonal:} & 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & -21/2 & 0 \\ & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & & & & & \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \rightarrow & \det B = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{21}{2}\right) = -21. \\ 0 & 0 & -21/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -21/2 & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & 0 & 2 & 5 & 0 \\ \text{Podíamos também a partir da matriz} & 0 & 5 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \Rightarrow \text{aplicar o teorema de Laplace à primeira}$$

$$\text{coluna: } (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ e novamente aplicar o teorema de Laplace à terceira coluna:}$$

$$(-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -21.$$

27. Calcule os determinantes das matrizes:

$$a) D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad b) E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & c & c & c \\ d & d & d & d \end{pmatrix}$$

Resolução:

- a) basta multiplicarmos os elementos da diagonal principal: $1 \times 3 \times 6 \times 10$.
 b) basta multiplicarmos os elementos da diagonal secundária: $-(a \cdot b \cdot c \cdot d)$.

28. Calcular o determinante de 5ª ordem $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Resolução:

Aplicando o teorema de Laplace a 5ª. Coluna: $(-1)^{1+5} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

29. Calcule x em cada equação:

a) $\begin{vmatrix} x^2 & 0 & x & -\frac{1}{10} \\ 7,5 & 0 & 5 & 2 \\ 10 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) (Mauá-SP) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

30. (Regra de Chió) Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 12 & 15 \\ 3 & 11 & 18 \end{vmatrix}$.

Resolução:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 12 & 15 \\ 3 & 11 & 18 \end{vmatrix}$ à regra de Chió: $\begin{vmatrix} 12-5 \times 2 & 15-5 \times 4 \\ 11-3 \times 2 & 18-3 \times 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 25 = 37$.

31. Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

32. Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

33. Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ -4 & 2 & -5 & 0 \\ 5 & 9 & 10 & -4 \\ 2 & 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$. Obs: $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$.

34. Dado o polinômio $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 & 3 \\ x^2 & 1 & 4 & 9 \\ x^3 & 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$, determine as raízes de $f(x)$.

35. Resolver o sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ 4x - y + 2z = 18 \end{cases}$.

Resolução:

Resolvendo pela regra do escalonamento:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 1 & 7 & 1 & 2 & 1 & 7 & 1 & 2 & 1 & 7 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \rightarrow 0 & -1 & -3 & -15 \rightarrow 0 & 1 & 3 & 15 \rightarrow 0 & 1 & 3 & 15 & \mathbf{à} & & \\ 4 & -1 & 2 & 18 & 0 & -9 & -2 & -10 & 0 & -9 & -2 & -10 & 0 & 0 & 25 & 625 \\ 25y = 625 & \mathbf{à} & z = 5; y = 0 & \text{e } x = 2. \end{array}$$

36. Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 4y + 5z = 3 \\ 3x + 5y + 6z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 3x - z = -9 \\ 3y + 2z = -9 \end{cases}$

37. Resolva o sistema $\begin{cases} x + y + z = 2x \\ x + y + z = 5y \\ x + 2y - 3z = 8z \end{cases}$.

38. Discutir o sistema $\begin{cases} 3x + my = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

39. Determinar k , de modo que o sistema $\begin{cases} kx + 2y - z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ x + 2z = 2 \end{cases}$, admita solução única.
40. Determinar k , de modo que o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ ax - 4y = 1 \end{cases}$, admita solução única.

Respostas:

1. $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$
2. $x=2$ e $y=1$
3. $a=b=d=2$ e $c=-\frac{1}{2}$
4. $a=-3$; $b=c=-4$.
5. a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
6. V e V
7. $\begin{pmatrix} 5 & -17 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
9. $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{18}{5} \end{pmatrix}$
10. a) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$
b) $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} 16 & 14 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
13. $a=3$; $\forall b \in \mathbb{R}$; $a=-3$, $b=2$
14. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$
15. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$
16. a) $\frac{1}{12}$ b) 6
17. a) 22 b) -19
18. $\{0; 5\}$
19. $\left\{ \frac{p}{2}, \frac{3p}{2} \right\}$
20. $\{x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } -1 < x < 7\}$
21. a) $x=1$ ou $x=4$; b) $x=1$
22. $m=37$
23. a) -6 b) -26
24. $\left\{ 0, \frac{p}{3}, p, \frac{5p}{3}, 2p \right\}$
25. -21
26. a) 180 b) abcd
27. -100
28. a) $x=-2$ ou $x=-\frac{1}{2}$ b) $x=0$ ou $x=1$ ou $x=-2$
29. 37
30. -61
31. 1
32. 307
33. $x=2$, $y=0$, $z=5$
34. $S=\{1,2,3\}$
35. a) (1,-1,1) b) (-2,-5,3)
36. $\dot{z}$
37. $x=0$, $y=0$, $z=0$
38. $\begin{cases} \text{SPD, se } m \neq -3 \\ \text{SPI, m não existe} \\ \text{SI, m} = -3 \end{cases}$

39. $k \neq -\frac{5}{8}$

40. $a \neq -6$

Bibliografia

Machado, Antonio dos Santos, —*Matemática na escola do segundo grau*—Volume 2, Atual Editora LTDA, 1994.

Giovanni, José Rui—*Matemática: Trigonometria, Matrizes, Análise Combinatória e Geometria*—Editora FTD, 1992