Disciplina: Matemática – Segundo Ano do Ensino Médio

Matrizes

Arquivo: Matrizes.doc — 17/11/03, 17:13 h

Índice

Matrizes
Definição
São números dispostos em linhas (filas horizontais) e colunas (filas verticais), formando uma tabela.

Gastos de uma família (aproximadamente) - Renda Familiar R$ ....

Descrição	Outubro	Novembro	Dezembro	Média
Supermercado				
Saúde				
Transporte				
Vestiário				
Higiene Pessoal				
Lazer				
Poupança				
Totais				

A tabela que você acabou de preencher, podemos transformá-la numa matriz: Onde os nomes supermercado, saúde, transporte, vestiário, higiene pessoal, lazer e poupança são as linhas (7) e outubro, novembro, dezembro e Média são as colunas (4). Assim você terá a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} \end{bmatrix}$, de ordem 7x4, que é uma matriz com 28 elementos.

Notação de uma matriz

1. Uma matriz de ordem 2x3: $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Exemplo: $D = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2/5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ é uma matriz 2x3, com 6 elementos, onde $a_{11}=4$, $a_{12}=-3$, $a_{21}=2/5$, $a_{13}=0$, $a_{22}=1$, $a_{23}=6$.

2. Uma matriz genérica de ordem nxn: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz Quadrada
— é toda matriz onde o número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplo: $A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2x2;

$B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 9 & 2 & 5\\ 8 & 0 & 3\end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3x3.

Matriz Diagonal

— É a matriz quadrada na qual os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplos: $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}9 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -10\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Matriz linha

— é toda matriz do tipo 1xn. Exemplo: $C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1 & 8\end{pmatrix}$, matriz de ordem 1x4.

Matriz coluna

— é toda matriz do tipo mx1. Exemplo: $M=\begin{pmatrix}2\\ 7\\ 40\end{pmatrix}$, matriz de ordem 3x1.

Matrizes iguais

— duas matrizes A e B são iguais, se e somente se, os elementos da mesma posição são iguais.

Exemplo: $D=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ e $E=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ logo D=E.

Exercício

1. Determine x e y, sabendo que as matrizes $\begin{pmatrix}2x+5y\\ x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ -1\end{pmatrix}$ são iguais.

2. Sendo as matrizes $A=\begin{pmatrix}x+y & m-n\\ x-2y & 3m+n\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}8 & 6\\ -1 & 10\end{pmatrix}$, achar os valores de x, y, m e n para que se tenha A=B.

3. Se $\begin{pmatrix}x+y & a+b\\ x-y & a-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, determine x, y, a e b.

Matriz Transposta

— quando se troca ordenadamente as linhas pelas colunas de uma matriz, a nova matriz é dita uma matriz transposta.

Exemplo: $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a sua transposta é $A^t=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriedades da matriz transposta

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(a.A)^t = a.A^t$

Exercício

4. Sendo as matrizes $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} x-y & x+y \\ 2y-5 & -1 \end{pmatrix}$, calcule x e y de modo que $A = B^t$.

5. Sejam as matrizes $A=\begin{pmatrix} x+y & 4 & -2 \\ 3 & 2z & 3 \\ 0 & 4 & x-y \\ -6 & z-t & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Se $A^t = B^t$, determine x, y, z e t.

6. Sejam as matrizes A e B, de mesma ordem mxn. Demonstre que: $(A-B)^t = A^t - B^t$.

Matriz Nula

— é a matriz que tem todos os elementos iguais a zero. $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz Oposta

— matriz oposta de uma matriz A é uma que somada com a matriz A, resulta na matriz Nula.

Exemplo: $A=\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ a sua oposta é: $-A=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz identidade ou Matriz unidade

— de ordem $n \geq 2$, é a matriz quadrada de ordem n que tem os elementos da diagonal principal iguais a 1 e os demais elementos iguais a zero.

Exemplos: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, matriz identidade de ordem 2; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, matriz identidade de ordem 3; $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, matriz identidade de ordem 4.

Adição de Matrizes

– A soma de duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ é a matriz $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, ambas do mesmo tipo mxn.

Exercício

7. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcular:

   a) $A + B + C$ b) $A - B - C$

8. Determinar x, y e z sabendo que: $\begin{pmatrix} x-2 & 4 \\ y+1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2z-3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & z \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Produto de Matrizes

Requisito: O número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz.

Assim: a) $A_{2x3}.B_{3x4}$ **à** C_{2x4} ; b) $M_{3x4}.A_{4x1}$ **à** D_{3x1}

Exercício

9. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine A.B

10. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule as matrizes produtos:

    a) A.B b) B.A c) A.B=B.A ? V ou F.

11. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, determine a matriz X tal que $A.X = I_2$.

Propriedades:

1. A multiplicação de matrizes não é comutativa.
2. A multiplicação de matrizes é associativa: (A.B).C=A.(B.C)
3. A multiplicação de matrizes é distributiva em relação à adição: A.(B+C)=A.B+A.C
4. Multiplicação de um número real por uma matriz: $(a.A).B = a.(A.B)$
5. Multiplicação pela matriz identidade: $A.I_n = I_n.A = A$

6. $A^0 = I_n$, se $A \neq 0$
7. $A^1=A$
8. $A^{p+1} = A^p . A$, para $p \in N$
9. $A^P=A.A.A.\ldots.A$, p fatores
10. $(A.B)^t = B^t.A^t$

Exercício:

12. Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determine a matriz polinomial, $2.A^2 + 3.A + 5.I$.

Matriz Involutiva

Uma matriz A quadrada é involutiva quando $A^2 = I$

Exercício

13. Uma matriz diagonal, de ordem 2, é involutiva. Determine-a. Faça $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Matriz Simétrica

— é uma matriz quadrada $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{nxn}$, diz-se **simétrica** quando $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, $1 \leq i \leq n$, para todo j, $1 \leq j \leq n$.

Obs: Se A é simétrica então $A = A^t$.

Exercício

14. Determine o número $b \in R$, para que a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2b \\ b^2 & b \end{pmatrix}$, seja simétrica.

15. Seja a matriz $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{4x4}$, para a qual $\begin{cases} a_{ii} = 0 \\ a_{ij} = a_{ji} \\ a_{ij} = i + j, se 1 \leq i < j \leq 4 \end{cases}$. Determine A e A^t. A é simétrica?

16. Se $\begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2a & (\operatorname{sen} a + \cos a)^2 \\ \cos 4a & \left| \operatorname{sen}^3 a + \cos^3 a \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ a & c \end{pmatrix}$, determine os números a, b e c.

17. Seja a matriz A, quadrada de ordem n. Demonstre que $A+A^t$ é simétrica.

Matriz anti-simétrica:

— é uma matriz quadrada $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{nxn}$, diz-se **anti-simétrica** quando $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i, $1 \leq i \leq n$, para todo j, $1 \leq j \leq n$.

Obs: Se A é simétrica então $A = -A^t$; os elementos da diagonal principal são todos nulos.

Exercício

18. A matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ é anti-simétrica.

19. Determine os números reais a, b, c, x, y e z para que a matriz $A=\begin{pmatrix} a & 2 & -3 \\ x-1 & b & 2y-4 \\ z & 4 & c \end{pmatrix}$ seja anti-simétrica.

20. Seja a matriz A, quadrada de ordem n. Demonstre que $A-A^t$ é anti-simétrica.

Determinante de uma matriz de ordem 2

A toda matriz **quadrada** está associado um número real chamado determinante.

Exemplos: Calcular os determinantes das matrizes:

a) $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ o determinante dessa matriz é: detA= 4.7 – 6(-2) = 28 + 12 =40

b) $B=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ o determinante dessa matriz é: detB= 5.2 – 3. 4 = 10 – 12 = -2

Determinante de uma matriz de ordem 3 — Regra de Sarrus

21. Calcular os determinantes das matrizes pela regra de ***Sarrus***:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

22. Calcule os determinantes **a)** $\begin{vmatrix} \log_2 8 & tg\frac{p}{4} & \sec(-p) \\ 4^{\frac{1}{2}} & sen8p & 3^0 \\ -1^2 & \ln e & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} sen\frac{p}{2} & -1^2 & 1 \\ \log 1 & 0 & -1 \\ \cos\frac{3p}{2} & 2^{-1} & 3^0 \end{vmatrix}$

Matriz Inversa
Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz quadrada B, de ordem n, diz-se uma inversa de A, se e somente se: $A.B = B.A = I_n$.

Propriedade:
A inversa de uma matriz A existe se o $\det A = 0$.

Exercício:

23. Determine a matriz inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

24. Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determine A^{-1}, se existir.

25. Para cada matriz a seguir, determine A^{-1}, se existir: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ e

$$C = \begin{pmatrix} \sec q & tg\, q \\ tg\, q & \sec q \end{pmatrix}$$

26. Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Determine A^{-1}, se existir.

27. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Resolva a equação matricial $A.X = B$.

28. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ -\operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \cos 2a \\ \operatorname{sen} 2a \end{pmatrix}$, Resolva a equação matricial $A.X = B$.

Propriedades

$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

a) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

b) $(a\,.A)^{-1} = \dfrac{1}{a}.A^{-1}$

c) $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$

29. Uma matriz quadrada, não singular, diz-se **ortogonal** quando $A^{-1} = A^t$. A matriz $A = \begin{pmatrix} \cos q & \operatorname{sen} q \\ -\operatorname{sen} q & \cos q \end{pmatrix}$ é ortogonal ?

30. Para as matrizes A, B e C, simplifique: $C.B^{-1}A.(C^{-1}.B.A)^{-1}.(B^{-1}C)^{-1}.B$.

31. Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determine a matriz X, sabendo-se que: $2.X^{-1} - 3.A + I_2 = O_2$.

32. Sejam as matrizes $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 6 & 4 & 2\end{pmatrix}$. Determine as matrizes X e Y, de ordem 2x3, tais que $\begin{cases}2.X-Y=A\\ X+Y=B\end{cases}$.

33. Sendo $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 2 & b\end{pmatrix}$ com a+b=4, a.b=3 e $a<b,\ B=A^{-1},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$, é verdade que:

(01) detA=1

(02) B=$\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

(04) detA.detB=1

(08) Se A.X=C, então $X=\begin{pmatrix}-7\\ 5\end{pmatrix}$

(16) Se B.X=$\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, então $X=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$

(32) $\det(A+5.B)^t=96$

Matriz Inversa — Complementos

34. Encontrar a matriz inversa A^{-1} da matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$.

1. Usando a definição

Solução: fazendo $\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **à** $\begin{pmatrix}0.a+2c & 0b+2.d\\ -1.a+4c & -1.b+4.d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **à** $\begin{pmatrix}2c & 2.d\\ -1.a+4.c & -1.b+4.d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **à** resolvendo os sistemas: $\begin{cases}2c=1\\ -a+4c=0\end{cases}$ e $\begin{cases}2d=0\\ -b+4d=1\end{cases}$, encontramos a matriz inversa $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$.

2. Determinação da matriz inversa usando o determinante e a matriz transposta dos cofatores:

Encontrar a matriz inversa A^{-1} da matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$.

Solução:

a) Cálculo do determinante de A: detA= 0.4-2.(-1)=2

b) Determinação da matriz dos cofatores da matriz A:

$$\begin{pmatrix}a_{11}=(-1)^2.4 & a_{12}=(-1)^3.(-1)\\ a_{21}=(-1)^3.2 & a_{22}=(-1)^4.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

c) Dividir todos os elementos da matriz **transposta** formada pelos cofatores pelo detA:

$$\begin{pmatrix}4/2 & -2/2\\ 1/2 & 0/2\end{pmatrix}$$

d) Matriz inversa de A é: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

3. **Usando o escalonamento**: coloca-se à direita da matriz dada, a matriz identidade; faz-se o escalonamento de modo que a matriz identidade passe a ocupar a posição da matriz dada.

Solução: $\begin{matrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{matrix}$ **à** $\begin{matrix} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$ **à** $\begin{matrix} 1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$ **à** $\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$ **à**

$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{matrix}$**,** observe que a posição da matriz A foi ocupada pela matriz identidade e na posição da matriz identidade encontra-se a matriz inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercícios

1. Encontrar a matriz inversa da matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, usando a matriz **transposta** dos cofatores.

   ® $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}$

2. Encontrar a matriz inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, usando a matriz dos cofatores. ® conclua!?

   Se ....

3. Determinar a matriz inversa das matrizes: (usar o escalonamento)

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. ® $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & -1 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & -1 & 1/5 \end{pmatrix}$

   b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ ® $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1/10 & -1/5 & 1/6 \\ 2/5 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$

Determine a matriz inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. ® $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -1/3 \\ 4/3 & 0 & -1/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$

Respostas

1) 2 e 7
2) x=5; y=3; m=4 e n= -2
3) 3, 2, 1 e –2
4) 7 e 5
5) x=2, y=3, z=1 e t=4
6) $(A-B)^t = (A + (-B))^t = A^t + (-1).B^t = A^t – B^t$.
7) a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -14 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$
8) 4, -1 e 4
9) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

14) 0 ou 2

15) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, sim A é uma matriz simétrica.

16) $a = \frac{1}{2}$, b= $\frac{3}{2}$ e c= $\frac{3\sqrt{6}}{8}$

17) Veja o 20.

18) 0, 0, 0, -1, 0, 3

19) a=b=c=0; x=-1 e y=0

20) Se uma matriz é anti-simétrica então: $A-B^t = -A + B^t$. Fazendo $(A- A^t)^t = A^t + (-1A^t)^t = A^t - A = -A+A^t$. O que prova que $A-A^t$ é uma matriz anti-simétrica.

21) a) -47 b) -2

22) a) -8 b) 3/2

23) $\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$

24) Não existe, pois a matriz é singular.

25) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,

$C^{-1} = \begin{pmatrix} \sec q & -tg q \\ -tg q & \sec q \end{pmatrix}$, B^{-1} não existe.

26) Existe, pois detA= -12.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/12 & -1/2 & 5/12 \\ 1/6 & 0 & 1/6 \\ 1/12 & -1/2 & 1/12 \end{pmatrix}$

27) $X = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

28) $X = \begin{pmatrix} \cos 3a \\ \operatorname{sen} 3a \end{pmatrix}$

29) Sim, A é uma matriz ortogonal.

30) C

31) $\begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ -6 & 5/2 \end{pmatrix}$

32) $X = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & 2/7 \\ 9/7 & 10/7 & 5/7 \end{pmatrix}$ e

$Y = \begin{pmatrix} -2/7 & -1/7 & 4/7 \\ 11/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$

33) V, F,V,V,F,V, total: 45

Os Matemáticos

Pierre Simon de Laplace, 1749—1827,

Nasceu na França e é considerado um dos grandes matemáticos do período da Revolução Francesa. Estudou na Escola Militar, exerceu cargos políticos, entre eles o de Ministro do Interior de Napoleão. Foi professor da Escola Normal e da Escola Politécnica de Paris, além de participar do Comitê de Pesos e Medidas.

Como cientista, Laplace contribuiu para o desenvolvimento da Física, principalmente com relação à Mecânica Celeste. Na Matemática, que ele considerava uma “coleção de instrumentos”, que ele manejava com muita habilidade, seus principais estudos voltaram-se para a Teoria das Probabilidades. Nas suas principais obras, Teoria Analítica das Probabilidades, de 1812, e Ensaios Filosóficos da Probabilidades, de 1814, Laplace mostrou um grande conhecimento de Análise, aplicando as noções de Cálculo Avançado no estudo das probabilidades, (José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno, *Matemática — Trigonometria, Matrizes, Análise Combinatória e Geometria*, Volume 2, FTD, 1992).

Carl Gustav Jacob (Jacobi), 1804—1851

Nasceu na Alemanha, onde fez seus estudos, dedicando-se principalmente à Filosofia e à Matemática, aperfeiçoando-se nesta última. Diferentemente de muitos matemáticos de seu tempo, Jacobi era um professor nato e gostava de ensinar.

Seus principais trabalhos foram no campo da Teoria das Funções Elípticas e da Teoria dos Determinantes. Nesta, Jacobi preocupou-se com a notação adequada para os determinantes, criando algoritmos e regras práticas para sua utilização. Foi por esse motivo considerado um dos grandes responsáveis pelo desenvolvimento da Teoria dos Determinantes, (José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno, *Matemática — Trigonometria, Matrizes, Análise Combinatória e Geometria*, Volume 2, FTD, 1992).