

Limites — Questões de Vestibulares

1. (AMAN-RJ) Calculando o limite $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$, encontramos:

- a) 0 b) 1 c) 3 d) $+\infty$ e) $\frac{7}{9}$

Solução: **Primeiro Modo** (Fatorando a fração usando BriotxRuffini): $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20} =$

$\frac{5^2 - 7 \cdot 5 + 10}{5^2 - 9 \cdot 5 + 20} = \frac{0}{0}$, que é uma indeterminação. Fatorando a função, numerador e

denominador separadamente, vem: $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20} = \frac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-4)} = \frac{x-2}{x-4}$, logo

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-2}{x-4} = 3.$$

Numerador (BriotxRuffini):

	1	-7	10
5	•	5	-10
	1	-2	0
			Resto

Denominador

	1	-9	20
5	•	5	-20
	1	-4	0
			Resto

Segundo Modo: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20} = \frac{5^2 - 7 \cdot 5 + 10}{5^2 - 9 \cdot 5 + 20} = \frac{0}{0}$. Pela regra de L'Hopital

Fazendo $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$, $\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{0}{0}$. Derivando o numerador e o denominador

$$\frac{f(x)'}{g(x)'} = \frac{2x-7}{2x-9}, \text{ Logo: } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-7}{2x-9} = \frac{2 \cdot 5 - 7}{2 \cdot 5 - 9} = 3$$

2. (U.F.PR-83) O limite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 12x + 16}{3x^2 + 3x - 18}$ é igual a:

- a) $-\frac{4}{15}$ b) $-\frac{2}{5}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{3}{2}$ e) $\frac{4}{3}$

Solução: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 12x + 16}{3x^2 + 3x - 18} = \frac{0}{0}$, Fatorando pela regra de BriotxRuffini,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x-8)}{(x-2)(3x-9)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-8}{3x-9} = \frac{4}{3}$$

3. (AMAN-RJ) A razão dos valores de x para os quais não é contínua a função

$$y = \frac{1}{x^2 - 4}$$

- a) 1 b) -1 c) 2 d) $+\infty$ e) -4

Solução: $y = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)}$, calculando os limites $\left\{ \lim_{x \rightarrow +2} \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{0} \right.$

(impossibilidade). Fazendo o estudo do sinal da função: $y = \frac{1}{(x-2)(x+2)}$,

	-2	2	
+++++	-----	+++++	+++++

E calculando os limites laterais $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +2^-} \frac{1}{(x-2)(x+2)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +2^+} \frac{1}{(x-2)(x+2)} = +\infty \end{array} \right.$ e $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{(x-2)(x+2)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{(x-2)(x+2)} = -\infty \end{array} \right.$,

concluimos que -2 e $+2$ são abscissas de pontos de descontinuidade. A razão $\frac{-2}{2} = -1$, resposta letra b.

4. (U.F. Uberlândia- 81) Sabendo-se que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3m}{x-m} = \frac{4}{3}$, $x \neq m$, calcule o valor de m .

Solução: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3m}{x-m} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2+3m}{2-m} = \frac{4}{3} \Rightarrow m = \frac{2}{13}$

5. (AMAN-RJ) Qual o valor do limite $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\text{sen } 2x + \text{sen } 4x - \text{sen } x}{5 \cdot \text{sen } x + \text{sen } 2x + \text{sen } 3x} \right]$?

- a) 0,2 b) 0,333... c) 0,4 d) 0,5 e) 0,6

Solução: **Primeiro modo:** $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 2x + \sin 4x - \sin x}{5 \cdot \sin x + \sin 2x + \sin 3x} \right] =$
 $\left[\frac{\sin 2 \cdot 0 + \sin 4 \cdot 0 - \sin 0}{5 \cdot \sin 0 + \sin 2 \cdot 0 + \sin 3 \cdot 0} \right] = \frac{0}{0}$. Usando artifícios: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 2x + \sin 4x - \sin x}{5 \cdot \sin x + \sin 2x + \sin 3x} \right] =$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} + 4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} - \frac{\sin x}{x}}{5 \cdot \frac{\sin x}{x} + 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} + 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}} \right] = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 1}{5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1} = \frac{5}{10} = 0,5$.

Segundo Modo: (Regra de L'Hospital) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 2x + \sin 4x - \sin x}{5 \cdot \sin x + \sin 2x + \sin 3x} \right] =$
 $\left[\frac{\sin 2 \cdot 0 + \sin 4 \cdot 0 - \sin 0}{5 \cdot \sin 0 + \sin 2 \cdot 0 + \sin 3 \cdot 0} \right] = \frac{0}{0}$. Pela regra de H'Loospital $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 2x + \sin 4x - \sin x}{5 \cdot \sin x + \sin 2x + \sin 3x} \right]$,

derivando-se o numerador e o denominador separadamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 \cos 2x + 4 \cos 4x - \cos x}{5 \cdot \cos x + 2 \cdot \cos 2x + 3 \cdot \cos 3x} \right] = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 1}{5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1} = \frac{5}{10} = 0,5..$$

6. (CEFET-PR) O limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x} \right)^{x+2}$ é igual a:

- a) e^2 b) $2 \cdot e$ c) $e^{\frac{5}{4}}$ e) $\sqrt[3]{e^2}$

Solução: Esta função $y = \left(1 + \frac{2}{3x} \right)^{x+2}$ é uma seqüência de Euler, logo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x} \right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x}{2}} \right)^{x+2} = ?, \text{ fazendo uma mudança de variável: } t = \frac{3x}{2}, \text{ quando}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow +\infty \end{array} \right., \text{ vem: } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{\frac{2t}{3} + 2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t} \right)^{\frac{2t}{3}} \right] \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{+2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t} \right)^{\frac{2t}{3}} \right] \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{+2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right]^{\frac{2}{3}} \cdot 1 \cdot e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$$

7. (UFJF-MG) Calcule o limite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$.

Solução: **Primeiro Modo** $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} = \frac{3-3}{\sqrt{3+6}-3} = \frac{0}{0}$, que é uma indeterminação.

Multiplicando o numerador e o denominador pelo fator racionalizante $\sqrt{x+6}+3$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} \cdot \frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+6}+3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x+6)-3^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x+6-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+6}+3) = \sqrt{3+6}+3=6$$

Segundo Modo: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} = \frac{3-3}{\sqrt{3+6}-3} = \frac{0}{0}$, fazendo uma mudança de variável,

$$t = \sqrt{x+6}, \text{ quando } \begin{cases} x \rightarrow 3 \\ t \rightarrow 3 \end{cases}, \text{ temos: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t^2-6)-3}{t-3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2-9}{t-3}$$

$$\lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t-3)(t+3)}{t-3} = \lim_{t \rightarrow 3} (t+3) = 3+3=6$$

8. (AMAN-RJ) Calcule o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5-1}{x-1} + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} - \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{3}{x}}$.

- a) 0 b) $+\infty$ c) 1 d) $-\infty$ e) $\frac{1}{e}$

Solução: Fazendo por partes cada um dos limites \Rightarrow a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5-1}{x-1} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^4+x^3+x^2+x+1) = 5; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^3 = e^3; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{t}\right)^t = e^3. \text{ Logo: o resultado da expressão}$$

pedida é: $5 - 5 + e^3 - e^3 = 0$

9. Se $n \rightarrow +\infty$, então $e^{\frac{n+1}{n}}$ tende para:

- a) $+\infty$ b) e c) 1 d) e^n e) $e^{\frac{1}{2}}$

Solução: **Primeiro modo:** $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1+\frac{1}{n}} = e^{1+0} = e^1 = e$

Segundo Modo: $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{n+1}{n}} = e^{\frac{+\infty}{+\infty}}$, aplicando a regra de L'Hospital $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}} = e$.

10. (PUC-PR) Se $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} = L$, podemos afirmar que:

- a) L = -1 b) L = 0 c) L = 1 d) L = 2

Solução: **Primeiro modo** \hat{a} $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{0}{0}$, logo devemos usar um artifício para

resolvermos o limite fazendo uma mudança de variável $t = \sqrt{1 - x^2}$ quando $\begin{cases} x \rightarrow 1 \\ t \rightarrow 0 \end{cases}$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - t^2) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (-t) = 0.$$

Segundo modo (usando a regra de H'Lospital): $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{0}{0}$, que é uma

indeterminação. Derivando o numerador $y = x^2 - 1 \hat{a} y' = 2x$; derivando o denominador

$$g = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \hat{a} g' = \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{2 \cdot (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}. \text{ Resolvendo o limite pela}$$

$$\text{regra de H'Lospital: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{-\frac{2x}{2 \cdot (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x) \cdot \left(-\frac{2 \cdot (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{2x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(-2 \cdot (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \right) = \left(-2 \cdot (1 - 1^2)^{\frac{1}{2}} \right) = 0.$$

11. Calcule o limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

Primeiro modo: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1^n - 1}{\sqrt{1} - 1} = \frac{0}{0}$. Multiplicando-se o numerador e denominador

dessa função pelo fator racionalizante $\sqrt{x} + 1$, temos: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} =$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^n - 1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1}$, fatorando o binômio $x^n - 1$ pelo regra de BriotxRuffini:

	1	0	0	0	...	0	-1
--	---	---	---	---	-----	---	----

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & | & \bullet & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \mathbf{0} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^n - 1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x^1 + 1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x^1 + 1)(\sqrt{x} + 1) = (n-1+1) \cdot (\sqrt{1} + 1) = 2 \cdot n$$

Segundo Modo: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1^n - 1}{\sqrt{1} - 1} = \frac{0}{0}$, é uma indeterminação. Usando a regra de

H'Lospital \hat{a} $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^{1/2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{n \cdot x^{n-1}}{\frac{1}{2} x^{-1/2}} = \frac{n \cdot 1^{n-1}}{\frac{1}{2} \cdot 1^{-1/2}} = \frac{n}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot n.$

12. Sendo $\ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{ax} \right] = 49$, qual é o valor positivo de **a**?

Solução: $\ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{ax} \right] = 49 \hat{a} \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{a}} \right)^{ax} \right] = 49 \hat{a} \ln \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{a \cdot at} \right] = 49 \hat{a}$

$$\ln \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right]^{a^2} = 49 \hat{a} \ln [e^{a^2}] = 49 \hat{a} a^2 \cdot \log_e e = 49 \hat{a} a^2 = 49 \hat{a} a^2 = 7^2 \hat{a} a = 7.$$

13. (1ª. Questão Escola Naval 2002) Se $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot gx)^{\frac{1}{\ln x}} = p$, então

a) $0 \leq p \leq \frac{1}{3}$

..b) $\frac{1}{3} < p \leq \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2} < p \leq 1$

d) $1 < p \leq 2$

e) $2 < p \leq 3$

Resolução:

13. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot gx)^{\frac{1}{\ln x}} = \infty^0$, fazendo $y = (\cot gx)^{\frac{1}{\ln x}}$ e aplicando logaritmo natural Ln a ambos os membros dessa função, temos: $\text{Ln} y = \text{Ln}(\cot gx)^{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{\text{Ln} x} \cdot \text{Ln}(\cot gx)$, aplicando limite nessa igualdade: $\lim_{y \rightarrow 0} \text{Ln} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Ln} x} \cdot \text{Ln}(\cot gx) = 0 \cdot \infty$, fazendo $\frac{f}{g} = \frac{\text{Ln}(\cot gx)}{\text{Ln} x}$ e

$\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{\infty}{\infty}$, aplicando a regra de L'Hôpital ao numerador e ao denominador

separadamente:

$$\frac{f'}{g'} = \frac{-c \sec^2 x}{\frac{1}{x}} = -\frac{x \cdot c \sec^2 x}{1 \cdot \cot gx} = \frac{x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = -\frac{x}{\cos x} = -\frac{x}{\sin x \cdot \cos x} = -\frac{x}{\frac{1}{2} \cdot \sin 2x} e$$

$\frac{f'(0)}{g'(0)} = -\frac{0}{\frac{1}{2} \cdot 0}$; aplicando a regra de L'Hôpital novamente ao numerador e ao denominador

$$\text{separadamente } \frac{f''(x)}{g''(x)} = -\frac{2}{2 \cdot \cos 2x} \quad e \quad \frac{f''(0)}{g''(0)} = -\frac{2}{2 \cdot \cos 2 \cdot 0} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \text{Ln}(\cot gx)^{\frac{1}{\ln x}} = -1 = \log_e e^{-1} = p$, $\text{Ln} \lim_{x \rightarrow 0} (\cot gx)^{\frac{1}{\ln x}} = \text{Ln} e^{-1}$ concluímos que

$$p = e^{-1} = \frac{1}{e} \cong \frac{1}{2,78} = 0,36 \text{ e finalmente temos como resposta a letra b).}$$

Bibliografia:

Suplemento exclusivo do professor – Questões de vestibulares/1987 – *Matemática 3 em 1* –

Curso completo do 2º. grau – Luiz Carlos de Domenico.