Cálculo de limites

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2+3x}$ **=?**

Solução: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2+3x}=\dfrac{\sqrt{0+4}-2}{0^2-3.0}=\dfrac{0}{0}$**, isto é uma indeterminação.**

Multiplicando-se o numerador e o denominador pelo fator racionalizante

$\sqrt{x^2+4}+2$**, temos:** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{\left(x^2+3x\right).\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$ **=** $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+4-4}{\left(x^2+3x\right).\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$ **=**

$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x.(x+3).\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$ **=** $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{(x+3).\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$ **=** $\dfrac{0}{(0+3).\sqrt{0^2+4}+2}$ **=0 logo**

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2+3x}$ **= 0**

2. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}+x-4}$ **=?**

Solução: $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}+x-4}=\dfrac{3-3}{\sqrt{3-2}+3-4}=\dfrac{0}{0}$**, é uma indeterminação .**

Multiplicando-se o numerador e o denominador pelo fator racionalizante

$\sqrt{x-2}-(x-4)$**, temos:** $\lim_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{x-2}+x-4\right).\left(\sqrt{x-2}-(x-4)\right)}{(x-2)-(x-4)^2}$ **=**

$\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3).\left[\sqrt{x-2}-(x-4)\right]}{(x-2)-(x-4)^2}$ **=** $\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3).\left[\sqrt{x-2}-(x-4)\right]}{-(x-3).(x-6)}$ **=** $\dfrac{2}{3}$ **logo**

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2+3x}$ **=** $\dfrac{2}{3}$

3. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+2}-2}$ **=?**

Solução: $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+2}-2}=\dfrac{\sqrt{5.2-1}-\sqrt{2+7}}{\sqrt{2+2}-2}=\dfrac{0}{0}$ **é uma indeterminação.**

Multiplicando-se o numerador e o denominador pelo fator racionalizante, temos:

$\lim_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+7}\right).\left(\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+7}\right).\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+7}\right).\left(\sqrt{x+2}-2\right).\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$ **=**

$\lim_{x\to 2}\dfrac{[(5x-1)-(x+7)].\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x+2-4).\left(\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+7}\right)}$ **=** $\lim_{x\to 2}\dfrac{4.(x-2).\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2).\left(\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+7}\right)}$ **=**

$\lim_{x\to 2}\dfrac{4.\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+7}}$ **=** $\dfrac{2}{3}$ **logo** $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+2}-2}=\dfrac{2}{3}$

4. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ **=?**

Solução: à Multiplicando-se o numerador e o denominador pelo fator racionalizante $\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)}+1$**, temos:** $\lim_{x\to 0}\frac{x.\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right).\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$ =

$\lim_{x\to 0}\frac{x.\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{x+1-1}$ = $\lim_{x\to 0}\frac{x.\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{x}$ = $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}{1}$ =

$\frac{\sqrt[3]{(1+1)^2}+\sqrt[3]{1+1}+1}{1}$ = **3** **logo** $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ **=3**

5. $\lim_{x\to a}\frac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ **=?**

Solução: à $\lim_{x\to a}\frac{\left(x\sqrt{x}-a\sqrt{a}\right).\left(x\sqrt{x}+a\sqrt{a}\right).\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{\left(x\sqrt{x}+a\sqrt{a}\right).\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right).\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}$

$\lim_{x\to a}\frac{x^2.x-a^2.a}{x-a}.\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{x\sqrt{x}+a\sqrt{a}}$ = $\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}.\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{x\sqrt{x}+a\sqrt{a}}$ =

$\lim_{x\to a}\frac{(x-a).\left(x^2+ax+a^2\right)}{x-a}.\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{x\sqrt{x}+a\sqrt{a}}$ = $\lim_{x\to a}\frac{\left(x^2+ax+a^2\right)}{1}.\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{x\sqrt{x}+a\sqrt{a}}$ =

$\frac{a^2+a^2+a^2}{1}.\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}}{a.\sqrt{a}+a.\sqrt{a}}$ = **3.a**

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$ **=?**

Solução: à $\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+p^2}-p\right).\left(\sqrt{x^2+p^2}+p\right).\left(\sqrt{x^2+q^2}+q\right)}{\left(\sqrt{x^2+p^2}+p\right).\left(\sqrt{x^2+q^2}-q\right).\left(\sqrt{x^2+q^2}+q\right)}$ =

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+p^2-p^2}{x^2+q^2-q^2}.\frac{\sqrt{x^2+q^2}+q}{\sqrt{x^2+p^2}+p}$ = $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+q^2}+q}{\sqrt{x^2+p^2}+p}$ = $\frac{q}{p}$

7. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3-2x}+1}{1-\sqrt[4]{x-1}}$ **=?**

Solução: à Multiplicando-se o numerador e denominador pelo fator racionalizante $\sqrt[3]{(3-2x)^2}-\sqrt[3]{3-2x}+1$**, vem:** $\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{3-2x}+1\right).\left(\sqrt[3]{(3-2x)^2}-\sqrt[3]{3-2x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{(3-2x)^2}-\sqrt[3]{3-2x}+1\right).\left(1-\sqrt[4]{x-1}\right)}$ =

$\lim_{x\to 2}\frac{-2.(x-2).\left(1+\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{(x-1)^2}+\sqrt[4]{(x-1)^3}\right)}{-1.(x-2).\left(\sqrt[3]{(3-2x)^2}+\sqrt[3]{3-2x}+1\right)}$ =

$\lim_{x\to 2}\frac{2.\left(1+\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{(x-1)^2}+\sqrt[4]{(x-1)^3}\right)}{\sqrt[3]{(3-2x)^2}+\sqrt[3]{3-2x}+1}$ = $\frac{8}{3}$ **Logo** $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3-2x}+1}{1-\sqrt[4]{x-1}}$ = $\frac{8}{3}$

8. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ **=?**

Solução: à $\lim_{t\to 1}\frac{t^m-1}{t^n-1}$ = $\lim_{t\to 1}\frac{(t-1).(t^{m-1}+t^{m-2}+...+t+1)}{(t-1).(t^{n-1}+t^{n-2}+...+t+1)}$ = $\lim_{t\to 1}\frac{(t^{m-1}+t^{m-2}+...+t+1)}{(t^{n-1}+t^{n-2}+...+t+1)}$

= $\frac{m}{n}$; **O mínimo múltiplo comum dos índices é :** ***mmc(m,n)=m.n*** ;

fazendo $t=\sqrt[m.n]{x},\begin{cases}x\to 1\\ t\to 1\end{cases}$ **quando e calculando-se:** $\begin{cases}t^m=\sqrt[n]{x}\\ t^n=\sqrt[m]{x}\end{cases}$ **Numerador e Denominador (Dispositivo de BriotxRuffini) : para o numerador e para o denominador**

	1	**0**	**0**	**0**	**...**	**0**	**-1**
1	**•**	**1**	**1**	**1**	**...**	**1**	**1**
	1	**1**	**1**	**1**	**...**	**1**	***0***
	Q(t)=t^{m-1}+t^{m-2}+...+t+1						**Resto**

9. $\lim_{x\to -4}\frac{b\sqrt{x+8}+a}{x+4}=\frac{1}{2}$, **calcule a e b.**

Solução: **Substituindo** $x=-4$ **no numerador, vem :** $\frac{b\sqrt{-4+8}+a}{-4+4}=\frac{1}{2}$ **à**

$\frac{b\sqrt{4}+a}{0}=\frac{1}{2}$ **à** $\frac{2.b+a}{0}=\frac{1}{2}$ **, fazendo** $2b+a=0$ **à** $a=-2.b$ **à** **Substituindo-se o valor de a no limite inicial:**

$\lim_{x\to -4}\frac{b\sqrt{x+8}-2b}{x+4}$ = $\lim_{x\to -4}\frac{b(\sqrt{x+8}-2)}{x+4}$ = $\lim_{x\to -4}\frac{b(\sqrt{x+8}-2).\left(\sqrt{x+8}+2\right)}{\left(\sqrt{x+8}+2\right)(x+4)}$

= $\lim_{x\to -4}\frac{b(x+8-4)}{x+4}.\frac{1}{(\sqrt{x+8}+2)}$ = $\lim_{x\to -4}\frac{b}{1}.\frac{1}{(\sqrt{x+8}+2)}$ = $\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{b}{2+2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$ **b=2 e a=** -4 **.**

Obs: **se** $a\neq -4$ **então** $\lim_{x\to -4}\left|f(x)\right|=+\infty$ **.**

10. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-ax+b}{x-3}=4$**, calcule a e b.**

Solução: **substituindo** $x=3$ **no numerador , temos :** $\begin{cases}9-3a+b=0\\ b=3a-9\end{cases}$

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-ax+3a-9}{x-3}=4\Leftrightarrow\lim_{x\to 3}\frac{(x-3).(x+3-a)}{x-3}=4\Leftrightarrow\lim_{x\to 3}\frac{(x+3-a)}{1}=4\Leftrightarrow$
$(3+3-a)=4\Leftrightarrow$ **a=2 logo b=** -3

	1	**-a**	**3a-9**
3	**•**	**3**	**-3a+9**
	1	**3-a**	**0**
	Q(x)=x+(3-a)		**r=0**

11. $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}+b-ax}{x+1}=1$**, calcule a e b.**

Resolução : $\lim_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}+b-ax}{x+1}=1$ **à**

$\sqrt{2(-1)+3}+b-a(-1)=0$ **à** $1+b+a=0$ **à** $b=-(1+a)$

12. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x-2}=-\dfrac{10}{7}$ **, calcule a e b.**

Solução: $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x-2}=-\dfrac{10}{7}\to \lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x-2}=\dfrac{\sqrt{2a+b}-2}{2-2}=\dfrac{\sqrt{2a+b}-2}{0}$ **,**

como esse limite está dando resultado uma constante é porque ele é uma indeterminação da forma $\dfrac{0}{0}$ **, assim:** $\sqrt{2a+b}-2=0\to b=4-2a$ **, substituindo o valor de b:**

$$\lim_{x\to 2}\frac{ax+4-2a-4}{(x-2).\left(\sqrt{ax+4-2a}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{a(x-2)}{x-2}.\frac{1}{\sqrt{ax+4-2a}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{a}{\sqrt{ax+4-2a}+2}=$$

$$\frac{a}{\sqrt{2a+4-2a}+2}=-\frac{10}{7}\quad\begin{cases}a=-\dfrac{40}{7}\\[2mm] b=\dfrac{108}{7}\end{cases}\quad \text{à}\quad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{-\dfrac{40}{7}x+\dfrac{108}{7}}-2}{x-2}=-\frac{10}{7}$$

13. $\lim_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{37+\sqrt[3]{7-x}}-6}{x-8}$ **=?**

Solução: à $\lim_{x\to 8}\dfrac{\left(\sqrt{37+\sqrt[3]{7-x}}-6\right)\left(\sqrt{37+\sqrt[3]{7-x}}+6\right)}{\left(\sqrt{37+\sqrt[3]{7-x}}+6\right)(x-8)}$ **=** $\lim_{t\to -1}\dfrac{\sqrt{37+t}-6}{-t^3-1}$ **=**

$\lim_{t\to -1}\dfrac{37+t-36}{-t^3-1}.\dfrac{1}{\sqrt{37+t}+6}$ **=** $\lim_{t\to -1}\dfrac{t+1}{-t^3-1}.\dfrac{1}{\sqrt{37+t}+6}$

= $\lim_{t\to -1}\dfrac{t+1}{(t+1).(-t^2+t-1).\left(\sqrt{37+t}+6\right)}$ **=** $\lim_{t\to -1}\dfrac{1}{(-t^2+t-1).\left(\sqrt{37+t}+6\right)}$ **=** $\dfrac{1}{-3.12}$ **=** $-\dfrac{1}{36}$ **,**

Fazendo $t=\sqrt[3]{7-x},\ \begin{cases}x\to 8\\ t\to -1\end{cases}$

	-1	**0**	**0**	**-1**
-1	**•**	**1**	**-1**	**1**
	-1	**1**	**-1**	***0***
	Q(x)=-t²+t-1			***r=0***

14. $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^3-27}}$ **=?**

Solução: à $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^3-27}}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^3-27}}$ **= separando em dois limites (o limite da soma é a soma dos limites)**

$\lim_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^3-27}}+\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^3-27}}.\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$ **=**

$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{(x-3).(x^2+3x+9)}}+\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x^3-27}}.\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$ **=** $\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{1}{(x^2+3x+9)}}+\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^{1/2}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$ **=**

$\sqrt{\frac{1}{9+9+9}}+0=\frac{\sqrt{3}}{9}$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x+1}-\sqrt[n]{x+1}}{x}$ **=?**

Solução: à $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x+1}-1-\sqrt[n]{x+1}+1}{x}$ **=** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x+1}-1}{x}-\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$ **=** $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$ **Logo**

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x+1}-\sqrt[n]{x+1}}{x}$ **=** $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x+1}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1).(t^{m-1}+t^{m-2}+\ldots+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{1}{t^{m-1}+t^{m-2}+\ldots+t+1}=\frac{1}{m}\\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1).(t^{n-1}+t^{n-2}+\ldots+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{1}{t^{n-1}+t^{n-2}+\ldots+t+1}=\frac{1}{n}\end{cases}$$

Fazendo uma mudança de variável, temos : $t=\sqrt[m]{x+1},\begin{cases}x\to 0\\ t\to 1\end{cases}$ **, vem** $x=t^m-1$ **;**

$t=\sqrt[n]{x+1},\begin{cases}x\to 0\\ t\to 1\end{cases}$ **, vem** $x=t^n-1$

	1	**0**	**0**	**0**	**...**	**0**	**-1**
1	**•**	**1**	**1**	**1**	**...**	**1**	**1**
	1	**1**	**1**	**1**	**...**	**1**	***0***
	Q(t)=t^{m-1}+t^{m-2}+...+t+1						**Resto**

16. $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$ **= ?**

Solução: Multiplicando-se o numerador e o denominador da função pelo fator racionalizante que é $\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}.\sqrt[m]{a}+\ldots+\sqrt[m]{x}.\sqrt[m]{a^{m-2}}+\sqrt[m]{a^{m-1}}$ **, vem:**

$f(x)=\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$ **=** $\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}.\frac{\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}.\sqrt[m]{a}+\ldots+\sqrt[m]{x}.\sqrt[m]{a^{m-2}}+\sqrt[m]{a^{m-1}}}{\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}.\sqrt[m]{a}+\ldots+\sqrt[m]{x}.\sqrt[m]{a^{m-2}}+\sqrt[m]{a^{m-1}}}$

= $\frac{(x-a)}{(x-a).(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{x^{m-2}}+\sqrt[m]{a^2}.\sqrt[m]{x^{m-3}}+\ldots+\sqrt[m]{x}.\sqrt[m]{a^{m-2}}+\sqrt[m]{a^{m-1}})}$ **=**

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{x^{m-2}}+\sqrt[m]{a^2}.\sqrt[m]{x^{m-3}}+\ldots+\sqrt[m]{x}.\sqrt[m]{a^{m-2}}+\sqrt[m]{a^{m-1}}}$

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{x^{m-2}}+\sqrt[m]{a^2}.\sqrt[m]{x^{m-3}}+\ldots+\sqrt[m]{x}.\sqrt[m]{a^{m-2}}+\sqrt[m]{a^{m-1}}}$ **=**

$\frac{1}{\sqrt[m]{a^{m-1}}+\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a^{m-2}}+\sqrt[m]{a^2}.\sqrt[m]{a^{m-3}}+\ldots+\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a^{m-2}}+\sqrt[m]{a^{m-1}}}$ **=**

$\frac{1}{\sqrt[m]{a^{m-1}}+\sqrt[m]{a^{m-1}}+\sqrt[m]{a^{m-1}}+\ldots+\sqrt[m]{a^{m-1}}+\sqrt[m]{a^{m-1}}}$ **=** $\frac{1}{m.\sqrt[m]{a^{m-1}}}$ **=** $\frac{1}{m.\sqrt[m]{a^{m-1}}}.\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{a}}$ **=** $\frac{\sqrt[m]{a}}{m.a}$

17. $\lim_{x \to a} \dfrac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}$ **= ?**

Solução: $f(x) = \dfrac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}$ =

$$= \frac{x-a}{x-a} \cdot \frac{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{x^{n-2}} + \sqrt[n]{a^2}.\sqrt[n]{x^{n-3}} + \ldots + \sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{a^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[m]{x^{m-1}} + \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{x^{m-2}} + \sqrt[m]{a^2}.\sqrt[m]{x^{m-3}} + \ldots + \sqrt[m]{x}.\sqrt[m]{a^{m-2}} + \sqrt[m]{a^{m-1}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{x^{n-2}} + \sqrt[n]{a^2}.\sqrt[n]{x^{n-3}} + \ldots + \sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{a^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[m]{x^{m-1}} + \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{x^{m-2}} + \sqrt[m]{a^2}.\sqrt[m]{x^{m-3}} + \ldots + \sqrt[m]{x}.\sqrt[m]{a^{m-2}} + \sqrt[m]{a^{m-1}}}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{x^{n-2}} + \sqrt[n]{a^2}.\sqrt[n]{x^{n-3}} + \ldots + \sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{a^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[m]{x^{m-1}} + \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{x^{m-2}} + \sqrt[m]{a^2}.\sqrt[m]{x^{m-3}} + \ldots + \sqrt[m]{x}.\sqrt[m]{a^{m-2}} + \sqrt[m]{a^{m-1}}} =$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a^{n-2}} + \sqrt[n]{a^2}.\sqrt[n]{a^{n-3}} + \ldots + \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[m]{a^{m-1}} + \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a^{m-2}} + \sqrt[m]{a^2}.\sqrt[m]{a^{m-3}} + \ldots + \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a^{m-2}} + \sqrt[m]{a^{m-1}}} = \frac{n.\sqrt[n]{a^{n-1}}}{m.\sqrt[m]{a^{m-1}}} =$$

$$\frac{n.\sqrt[n]{a^{n-1}}}{m.\sqrt[m]{a^{m-1}}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} \cdot \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{n.\sqrt[m]{a}}{m.\sqrt[n]{a}} = \frac{n.\sqrt[n.m]{a^n}}{m.\sqrt[n.m]{a^m}} \quad \frac{n.\sqrt[n.m]{a^{n-m}}}{m} = \frac{n.a^{\frac{n-m}{n.m}}}{m}$$

18. $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2}$ **= ?**

Solução: $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{0}$ **(impossibilidade)**

Primeiro modo : Pelo estudo do sinal da função

2	
--------------	++++++++

$\lim_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$ **e** $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$ **Resposta: o limite** $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2}$ **não existe, pois os limites laterais são diferentes.**

Segundo modo :

Fazendo x= 2+h quando $\begin{cases} x \to 2 \\ h \to 0 \end{cases}$ $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{1}{2+h-2} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{1}{h} = +\infty$

Fazendo x= 2-h quando $\begin{cases} x \to 2 \\ h \to 0 \end{cases}$ $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{1}{2-h-2} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{1}{-h} = -\infty$

Resposta: $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2}$ **não existe, pois, os limites laterais são diferentes.**

19. $\lim_{x \to 4} \dfrac{2x-1}{(x-4)^6}$ **=?**

Solução: $\lim_{x \to 4} \dfrac{2x-1}{(x-4)^6} = \dfrac{8-1}{(4-4)^6} = \dfrac{7}{0}$ **à** $\lim_{x \to 4} \dfrac{2x-1}{(x-4)^6} = +\infty$

Estudo do sinal da função :

$1/2$	4	
-------------	+++++++	+++++++++

20. $\lim_{x\to 0}\dfrac{2-x}{3x^3-x^2}$ **= ?**

Solução: $\lim_{x\to 0}\dfrac{2-x}{3x^3-x^2}=\dfrac{2-0}{0-0}=\dfrac{2}{0}$ **à** $\lim_{x\to 0}\dfrac{2-x}{3x^3-x^2}$ **=** $-\infty$**, fazendo o estudo do sinal da função** $h(x)=\dfrac{2-x}{3x^3-x^2}$ **, vemos que quando x se aproxima de 0, pela esquerda e pela direita, os sinais são iguais (negativo), ou seja, a função h(x) tende ao menos infinito.**

0	$\frac{1}{3}$	**2**
-------------	--------------	+++++++++|-------------

21. $\lim_{x\to 1}\dfrac{5x-2}{(x-1)^3}$ **=?**

Solução: $\lim_{x\to 1}\dfrac{5x-2}{(x-1)^3}=\dfrac{5-2}{(1-1)^3}=\dfrac{3}{0}$ **à** $\lim_{x\to 1}\dfrac{5x-2}{(x-1)^3}$ **= não existe, pois, os limites laterais são diferentes, pela esquerda tende ao menos infinito e pela direita tende ao mais infinito.**

$\frac{2}{5}$	**1**	
++++++++	--------------	++++++++++

22. $\lim_{x\to 5}\dfrac{3-4x}{|x-5|}$ **=?**

Solução: primeiro modo (veja teorema abaixo)

$$f(x)=\frac{3-4x}{|x-5|}=\begin{cases}\dfrac{3-4x}{x-5}, & para\ x>5\\[2mm] \dfrac{3-4x}{-x+5}, & para\ x<5\end{cases} \quad \text{à} \quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{-4(x-\frac{3}{4})}{x-5}, & para\ x>5\\[2mm] \dfrac{-4(x-\frac{3}{4})}{-1.(x-5)}, & para\ x<5\end{cases}$$

$\frac{3}{4}$	**5**	
--------------	+++++++	----------------

$\frac{3}{4}$	**5**	
+++++++	--------------	++++++++++

Resposta: $\lim_{x\to 5}\dfrac{3-4x}{|x-5|}$ **=** $-\infty$

Segundo Modo:

Teorema : Se $\lim_{x\to a} f(x)=0$ **então** $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{|f(x)|}=+\infty$ **.**

$\lim_{x\to 5}(x-5)=0$ **então** $\lim_{x\to 5}\dfrac{1}{|x-5|}=+\infty$ **,**

daí temos: $\lim_{x\to 5}\frac{3-4x}{|x-5|}$ = $\lim_{x\to 5}\frac{-(4x-3)}{|x-5|}$ = $\lim_{x\to 5}[-(4x-3)].\frac{1}{|x-5|}$ = $[-(5.4-3)].(+\infty)$ = $-17.(+\infty)$ = $-\infty$

23. $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{2x}$ **= ?**

Solução $f(x)=\frac{|x|}{2x}$ **=** $\begin{cases}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2},\ x>0\\ \frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2},\ x<0\end{cases}$ **. O limite** $\lim_{x\to 5^+}\frac{1}{2}$ **=** $\frac{1}{2}$ **e o limite** $\lim_{x\to 5^-}\frac{1}{2}$ **=** $-\frac{1}{2}$

logo $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{2x}$ **= não existe.**

24. $\lim_{x\to 0^+}\frac{3x+2}{5x^2}$ **=?**

Solução: $\lim_{x\to 0^+}\frac{3x+2}{5x^2}$ **=** $\frac{2}{0}$ **, temos:** $f(x)=\frac{3x+2}{5x^2}$ **=** $\frac{x^2.\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{5x^2}$ **=** $\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{5}$ **=** $\frac{3}{5x}+\frac{2}{5x^2}$ **, calculando-se o limite:** $\lim_{x\to 0^+}\frac{3x+2}{5x^2}$ **=** $\lim_{x\to 0^+}\frac{3}{5x}+\frac{2}{5x^2}$ **=** $\lim_{x\to 0^+}\frac{3}{5}.\frac{1}{x}+\frac{2}{5}.\frac{1}{x^2}$ **=** $\frac{3}{5}.\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}+\frac{2}{5}.\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}$ **=** $+\infty$

Teorema : Se $\lim_{x\to a}g(x)=0$ **e** $g(x)\neq 0$ **numa vizinhança de** a **,** $V(a)$**, então** $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=+\infty$ **.**

25. $\lim_{x\to -4}\frac{2}{(x+4)^2}$ **= ?**

Solução: $\lim_{x\to -4}\frac{2}{(x+4)^2}$ **=** $\frac{2}{0}$ **, pelo teorema acima, temos** $\lim_{x\to -4}(x+4)^2=0\Rightarrow$

$\lim_{x\to -4}2.\frac{1}{(x+4)^2}$ **=** $\lim_{x\to -4}2.\lim_{x\to -4}\frac{1}{(x+4)^2}$ **=** $2.(+\infty)$ **=** $+\infty$

	-4	
	++++++++	+++++++++

26. $\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x^2-3x+2}$ **=?**

Solução: $\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{(x-1).(x-2)}=\frac{1-2}{1-3+2}=\frac{-1}{0}$ **à** $\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{(x-1).(x-2)}$ **=** $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$ **= não existe**

	1	2
--------------	+++++++	++++++++++

O limite $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$ **e o limite** $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=$ **= +** ∞

Observação: **quando x se aproxima de 2,**

$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-1).(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-1).}=\frac{1}{2-1}=1$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\left(x^2-x\right)^2}$ **=?**

Solução: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\left(x^2-x\right)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\left[x(x-1)\right]^2}$ **=** $+\infty$ **(o sinal dessa fração só depende do termo sob o radical, x+1, pois o denominador está elevado ao quadrado).**

-1	**0**	
--------------	+++++++	++++++++++

28. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{(x-1)^2}$ **= ?**

Solução: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{(x-1)^2}$ **=** $\dfrac{2}{0}$ **à** $\lim\limits_{x\to 1} 2x.\dfrac{1}{(x-1)^2}$ **=** $\lim\limits_{x\to 1} 2x.\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2}$ **=** $2.1.(+\infty)$ **=** $+\infty$

29. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1-2x}{x-3}$ **= ?**

Solução: $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1-2x}{x-3} = \dfrac{1-6}{3-3} = \dfrac{-5}{0}$ **à** $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-2.\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x-3}$ **=** $+\infty$

$\frac{1}{2}$	**3**	
--------------	++++++++	--------------

30. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x^2-3x-5}{(2-x)^3}$ **= ?**

Solução: $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x^2-3x-5}{(2-x)^3} = \dfrac{8-6-5}{(2-2)^3} = \dfrac{-3}{0}$ **à** $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2.\left(x-\frac{5}{2}\right).(x+1)}{(-1)^3.(x-2)^3}$ **=**

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\left(x-\frac{5}{2}\right).(x+1)}{-1.(x-2)^3}$ **=** $+\infty$

Estudo do sinal :

-1	**2**	$\frac{5}{2}$	
++++	---------------	+++++++++	-------------