

A maioria dos limites foram resolvidos usando a Regra Prática de **BriotxRuffini**, apresentada na Revista do Professor de Matemática¹.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (-2x^4 + 3x^2 - x - 8) = ?$ à resolvendo o limite, solução:
 $\lim_{x \rightarrow 1} (-2x^4 + 3x^2 - x - 8) = -2.1^4 + 3.1^2 - 1 - 8 = -8$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x + 1}{2x + 5} = ?$ à resolvendo o limite: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x + 1}{2x + 5} = \frac{2.1^2 + 1 + 1}{2.1 + 5} = \frac{4}{7}$
3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = ?$ à resolvendo o limite, vem: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(-2)^2 - (-2) - 6}{(-2)^2 - 4} = \frac{0}{0}$, que é

uma indeterminação. Fatorando a função: $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-3}{x-2}$, e substituindo-se

a função fatorada, temos: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-2-3}{-2-2} = \frac{5}{4}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = ?$ à $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2^2 - 4}{2^2 - 3.2 + 2} = \frac{0}{0}$, que é uma indeterminação.

Fatorando a função $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$, calculando-se o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{2+2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

5. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = ?$ à $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \frac{(-1)^3 + 1}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$, que é uma indeterminação. Fatorando a

função $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = \frac{x^2 - x + 1}{1}$, foi usada a regra de BriotxRuffini;

calculando o limite $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{1} = \frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{1} = 3$.

Regra de BriotxRuffini:

	1	0	0	1
-1	•	-1	1	-1
à	1	-1	1	0
				Resto

¹ Artigo apresentado na revista RPM 34, página 14, por Lenimar Nunes de Andrade, de João Pessoa, PB.

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = ?$ \hat{a} resolvendo o limite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \frac{2^2 - 4}{2^3 - 8} = \frac{0}{0}$, que é uma indeterminação.

Fatorando a função pela regra de BriotxRuffini $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{x+2}{x^2 + 2x + 4}$.

Calculando o limite: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 4} = \frac{2+2}{2^2 + 2 \cdot 2 + 4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ Logo $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \frac{1}{3}$

Regra de BriotxRuffini:

	1	0	0	-8
2	•	2	4	8
\hat{a}	1	2	4	0
	Resto			

7. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = ?$ \hat{a} $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \frac{a^2 - a^2}{a^3 - a^3} = \frac{0}{0}$, que é uma indeterminação. Fatorando a

função $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x^2 + ax + a^2)} = \frac{x+a}{x^2 + ax + a^2}$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x+a}{x^2 + ax + a^2} = \frac{a+a}{a^2 + a \cdot a + a^2} = \frac{2a}{3a^2} = \frac{2}{3a}$ logo

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \frac{2}{3a}$

8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6} = ?$ \hat{a} $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$

Numerador : usando a regra de BriotxRuffini

	1	-4	+3
3	•	3	-3
	1	-1	0
	Resto		

Denominador : usando a regra de BriotxRuffini

	1	-1	-6
3	•	3	6
	1	-2	0
	Resto		

9. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 4x^3 + x^2 - 12x - 12}{2x^3 + 7x^2 + 4x - 4} = ?$ \hat{a} Resolvendo o limite: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)^2 \cdot (x^2 - 3)}{(x+2)^2 \cdot (2x-1)} = \frac{0}{0}$, que

é uma indeterminação. Fatorando numerador e denominador pela regra de BriotxRuffini abaixo e

resolvendo o limite $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3}{2x - 1} = \frac{(-2)^2 - 3}{2 \cdot (-2) - 1} = -\frac{1}{5}$ Logo $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 4x^3 + x^2 - 12x - 12}{2x^3 + 7x^2 + 4x - 4} = -\frac{1}{5}$

Numerador : regra de BriotxRuffini

	1	+4	+1	-12	-12
-2	•	-2	-4	+6	+6
	1	2	-3	-6	0

Cálculo de limites
Quatro páginas e 14 questões

	1	2	-3	-6
-2	•	-2	0	+6
	1	0	-3	0

Denominador :

	2	+7	+4	-4
-2	•	-4	-6	+4
	2	+3	-2	0

	2	+3	-2
-2	•	-4	+2
	2	-1	0

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 10x + 5}{x^3 + x^2 - 5x + 3} = ? \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 10x + 5}{x^3 + x^2 - 5x + 3} = \frac{0}{0}$; Fatorando

numerador e denominador: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 \cdot (3x^2 + 5)}{(x-1)^2 \cdot (x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5}{x+3} = \frac{3 \cdot 1^2 + 5}{1+3} = 2$

Numerador :

	3	-6	+8	-10	+5
1	•	3	-3	+5	-5
	3	-3	+5	-5	0

	3	-3	+5	-5
1	•	3	0	+5
	3	0	+5	0

Denominador :

	1	1	-5	3
1	•	1	2	-3
	1	2	-3	0

	1	2	-3
1	•	1	3
	1	3	0

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{(3 - x^3) - 16} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{-x^3 - 13} = \frac{1^3 - 1}{-1 - 13} = \frac{0}{-14} = 0$

12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} + \frac{x-7}{x^2+x-6} = ? \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3+x-7}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{(x-2)(x+3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \cdot (x-2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{5}$

O mínimo múltiplo comum dos denominadores : $mmc(x-2, x^2+x-6) = (x-2) \cdot (x+3)$, para reduzir as duas frações ao mesmo denominador.

13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1} = ?$ \hat{a} $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1} = \frac{1-1}{1^n - 1} = \frac{0}{0}$, que é uma indeterminação . Fatorando a função

pela regra de BriotxRuffini: $f(x) = \frac{x-1}{x^n - 1} = \frac{x-1}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1)}$

$$= \frac{1}{x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1}$$

	1	0	0	0	...	0	-1
1	•	1	1	1	...	1	1
	1	1	1	1	...	1	0

Calculando-se o limite da expressão fatorada: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1} =$

$$\frac{1}{1^{n-1} + 1^{n-2} + 1^{n-3} + \dots + 1 + 1} = \frac{1}{n-1+1} = \frac{1}{n}$$

$n-1$ termos

Logo $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1} = \frac{1}{n}$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x+a)^n - a^n} = ?$ \hat{a} $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x+a)^n - a^n} = \frac{0}{(0+a)^n - a^n} = \frac{0}{0}$, que é uma

indeterminação . Temos a função $f(x) = \frac{x}{(x+a)^n - a^n}$, fazendo uma mudança de variável, temos :

$$t = x + a \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow a \end{cases}, \text{ com } x = t - a . \text{ Após a mudança de variável, tem } f(t) = \frac{t-a}{t^n - a^n} .$$

Resolvendo o limite da função: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x+a)^n - a^n} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{t-a}{t^n - a^n} =$

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{t-a}{(t-a)(t^{n-1} + a.t^{n-2} + a^2.t^{n-3} + \dots + a^{n-2}.t + a^{n-1})} =$$

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{1}{t^{n-1} + a.t^{n-2} + a^2.t^{n-3} + \dots + a^{n-2}.t + a^{n-1}} =$$

$$\frac{1}{(a^{n-1} + a.a^{n-2} + a^2.a^{n-3} + \dots + a^{n-2}.a^1) + a^{n-1}} = \frac{1}{(n-1).a^{n-1} + a^{n-1}} = \frac{1}{(n-1+1).a^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n.a^{n-1}} .$$

Abaixo temos a regra prática de BriotxRuffini usada na fatoração da função $f(t) = \frac{t-a}{t^n - a^n}$

	1	0	0	0	...	0	-a ⁿ
a	•	a	a ²	a ³	...	a ⁿ⁻¹	a ⁿ
	1	a	a ²	a ³	...	a ⁿ⁻¹	0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x+a)^n - a^n} = \frac{1}{n.a^{n-1}}$$

15. ?