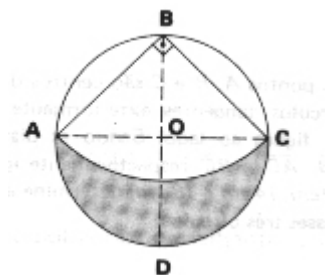
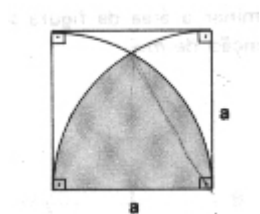


Áreas de figuras planas — algumas resolvidas

1. Na figura abaixo, determinar a área da parte sombreada em função do raio r do círculo, sendo AB e BC os lados de um quadrado inscrito nesse círculo.

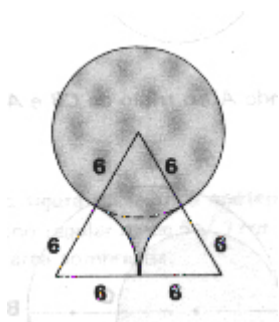


2. Calcular a área da parte sombreada.

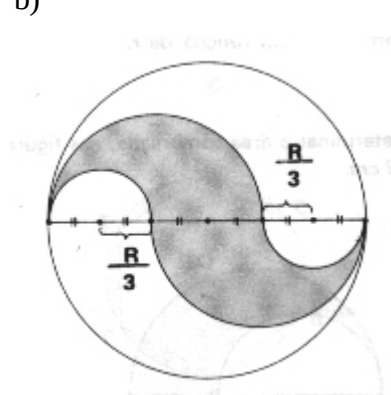


3. Calcular a área da figura sombreada.

a)

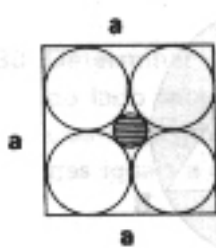


b)

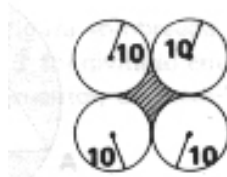


4. Calcular a área da figura sombreada.

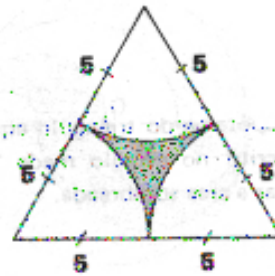
a)



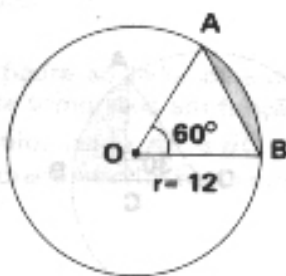
b)



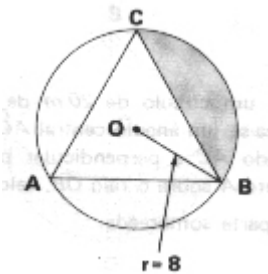
c)



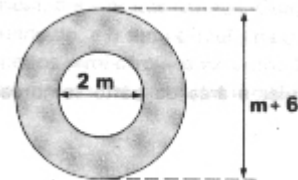
d)



e)

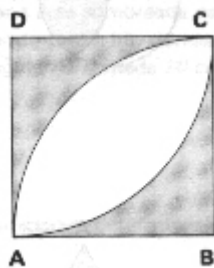


5. Determinar a área da figura sombreada, em função de m .

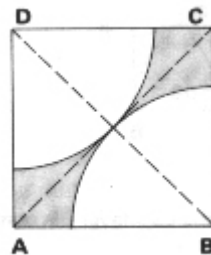


6. As figuras ABCD abaixo são quadrados de perímetro 16 cm. Determinar as áreas sombreadas.

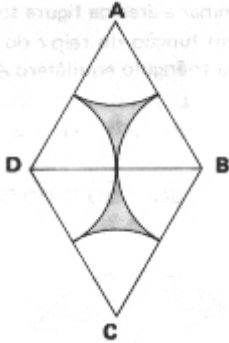
a)



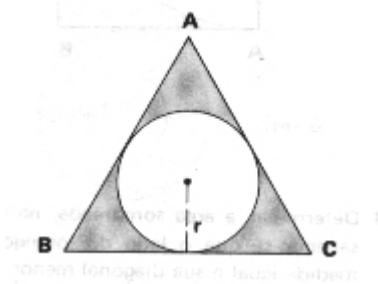
b)



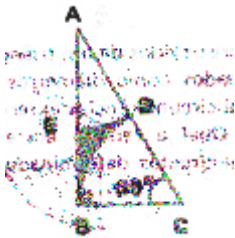
7. Determinar a área sombreada, na figura sabendo-se que o lado do losango tem medida igual à sua diagonal menor e que ambos medem 10 cm. Os arcos descritos têm centros nos vértices do losango e raio igual à metade do lado do losango.



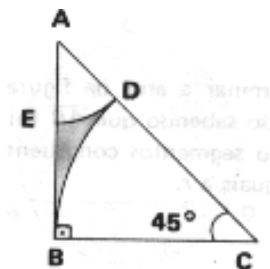
8. Determinar a área da figura sombreada ao lado, em função do raio r do círculo inscrito no triângulo equilátero ABC.



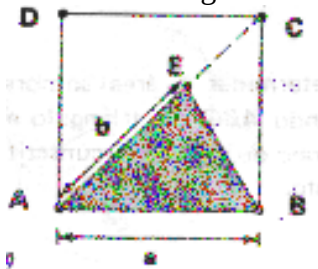
9. Determinar a área sombreada na figura abaixo, sabendo que a hipotenusa do triângulo retângulo ABC mede 10 cm.



10. Determinar a área e o perímetro da figura BED, inscrita no triângulo retângulo ABC, sabendo que o segmento AC mede 10 cm, o ângulo C mede 45° e que os arcos BD e ED tem seus centros, respectivamente, nos C e A.



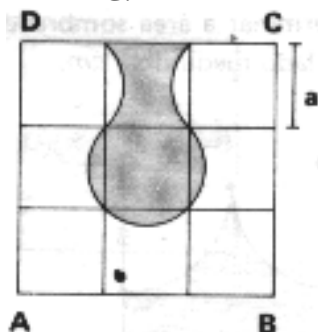
11. Na figura, ABCD é um quadrado de lado a e o segmento $AE=b$. Determine a área do triângulo AEB, sabendo que o segmento CE é congruente ao segmento BC.



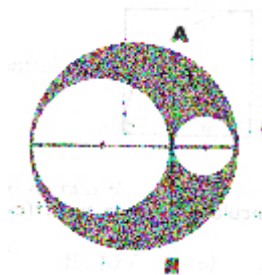
12. Na figura, o segmento AP é congruente ao segmento AC e a distância AB mede r . Calcule a área sombreada em função de r .



13. Na figura, ABCD é um quadrado. Determine a área sombreada em função de a , sendo a a medida de um segmento tomado sobre o lado do quadrado, a $\frac{1}{3}$ do vértice C.

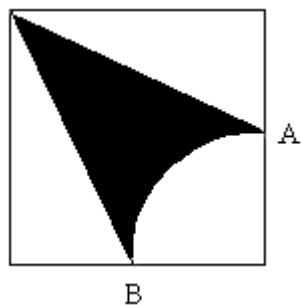


14. Calcular a área da parte sombreada sendo $AB = t$ e r o raio do círculo maior.



15.

Calcule a área da região hachurada, sabendo que A e B são pontos médios dos lados do quadrado cujo perímetro é 16cm. (Use $p = 3,14$)



Respostas:

1. r^2
2. $\frac{(2p - 3\sqrt{3})a^2}{12}$
3. a) $18.(p + 2\sqrt{3})$; b) $\frac{pR^2}{3}$
4. a) $\frac{(3 - 2\sqrt{2})a^2 p}{16}$; b) $100.(4 - p)$; c) $\frac{25}{2}.(2\sqrt{3} - p)$; d) $12.(2p - 3\sqrt{3})$; e) $\frac{16}{3}.(4p - 3\sqrt{3})$
5. $\frac{3p}{4}.(4m - m^2 + 12)$
6. a) $8.(4 - p) \text{ cm}^2$; b) $4.(4 - p) \text{ cm}^2$
7. $25.(2\sqrt{3} - p) \text{ cm}^2$
8. $(3\sqrt{3} - p)r^2$

9. $\frac{25}{12}.(6\sqrt{3} - p) \text{ cm}^2$
10. $\frac{25}{2}.(2 + p.\sqrt{2} - 2p) \text{ cm}^2$
11. $\frac{ab.\sqrt{2}}{4}$
12. $\frac{pr^2}{4}$
13. $\frac{a^2}{8}.(p + 14)$
14. $\frac{pt^2}{8}$
- 15.

Resolução:

Questão 01

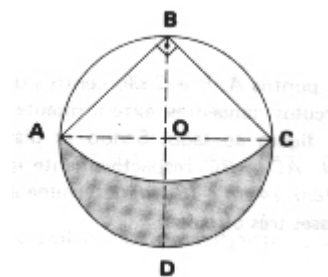
$$A_h = A_{\text{semicírculo}} - A_{\text{segmento circular}}$$

$$AC = 2r = BC\sqrt{2} \rightarrow BC = \frac{2r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$$

$$A_{sg} = A_s - A_t = \frac{p/2 \cdot (r\sqrt{2})^2}{2} - \frac{(r\sqrt{2})^2}{2}$$

$$A_{sg} = \frac{p \cdot r^2}{2} - r^2$$

$$A_h = \frac{p \cdot r^2}{2} - \left(\frac{p \cdot r^2}{2} - r^2 \right) = r^2$$



A_h =área sombreada; A_s =área do setor; A_t =área do triângulo; A_{sg} =área do segmento circular

Questão 02

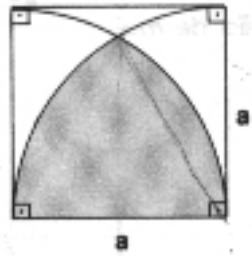
A interseção das duas curvas com a base **a** formam um triângulo equilátero:

$$A_h = A_s + A_{sg} = A_s + (A_s - A_t) = 2.A_s - A_t$$

$$A_h = 2 \cdot \frac{p/6 \cdot a^2}{2} - \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A_h = \frac{p \cdot a^2}{6} - \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{2pa^2 - 3a^2 \cdot \sqrt{3}}{12}$$

$$A_h = \frac{a^2(2p - 3\sqrt{3})}{12}$$



A_h =área sombreada; A_s =área do setor; A_t =área do triângulo; A_{sg} =área do segmento circular

Questão 03

a) $A_h = A_c + A_t - 2.A_s$

$$A_h = p \times 6^2 + \frac{12^2 \times \sqrt{3}}{4} - 2 \cdot \frac{p/3 \times 6^2}{2} = 36p - \frac{12 \times 12 \times \sqrt{3}}{2 \times 2} - \frac{p \times 6 \times 6}{3}$$

$$A_h = 36p + 36\sqrt{3} - 12p = 24p + 36\sqrt{3} = 12(2p + 3\sqrt{3})$$

b) O diâmetro do círculo médio é $d = 4 \cdot \frac{R}{3}$ e seu raio $\frac{2R}{3}$;

$$A_h = A_{\text{circulo medio}} - A_{\text{circulo pequeno}} = p \cdot \left(\frac{2R}{3}\right)^2 - p \cdot \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{pR^2}{3}$$

questão 04

a) Chame o raio do círculo interno de x e trace o triângulo retângulo formado pelos centros do círculos pequeno e pelos dois centros dos círculos de baixo. Esse

triângulo retângulo que tem lados: $\frac{a}{4} + x$; $\frac{a}{4} + x$ e $\frac{a}{2}$. Veja que o lado $a/2$ é a

diagonal de um quadrado $d = l \cdot \sqrt{2} = \frac{a}{2} = \left(\frac{a}{4} + x\right) \cdot \sqrt{2} \rightarrow x = \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot (2 - \sqrt{2})}{8}$ = raio do

círculo sombreado. A área do círculo sombreado é: $A = p \cdot x^2 = p \cdot \left(\frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot (2 - \sqrt{2})}{8}\right)^2$

b) A área sombreada é: $A = A_{\text{quadrado}} - A_{\text{circulo}} = 20^2 - p \cdot 10^2 = 400 - 100p$
 $A = 100 \cdot (4 - p)$

c) A área sombreada é: $A = A_{\text{triangulo}} - 3 \cdot A_{\text{setor}} = \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{p/3 \times 5^2}{2} = 25\sqrt{3} - \frac{25p}{2}$

d) A área sombreada é um segmento circular:

$$A = A_{\text{setor}} - A_{\text{triangulo}} = \frac{p/3 \times 12^2}{2} - \frac{12^2 \times \sqrt{3}}{4}$$

e) A área sombreada é: $A = \frac{1}{3}(A_{\text{circulo}} - A_{\text{triangulo}}) = \frac{1}{3} \left(p \cdot x 8^2 - \frac{(8\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \right)$

Questão 05.

Área da coroa circular: $A = p \cdot [(m+6)^2 - (2m)^2]$

Questão 06

a) Área do quadrado menos duas vezes a área do segmento circular.

$$A = 4^2 - 2x \left(\frac{p \cdot 4^2}{4} - \frac{4^2}{2} \right)$$

b) Área do quadrado menos a área do semicírculo: $A = 4^2 - \frac{p \cdot (4\sqrt{2})^2}{2}$

Questão 07

A área sombreada é: $A = 2 \cdot (A_{\text{triangulo}} - 3 \cdot A_{\text{setor}}) = 2 \cdot \left(\frac{10^2 \sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{p / 3 \times 5^2}{2} \right) = 50\sqrt{3} - 25p$

Questão 08

Num triângulo equilátero a altura=mediana: $h=r+2r=3r$.

Calculo do lado do triângulo $h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 3r \rightarrow l = \frac{6r}{\sqrt{3}} = 2r\sqrt{3}$

A área sombreada é área do triângulo menos a área do círculo: $A = \frac{(2r\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - p \cdot r^2$

Questão 09

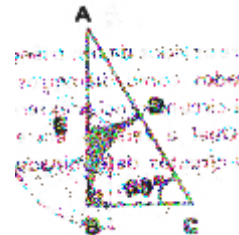
Cálculo do lado BC:

$$\cos 60^\circ = \frac{BC}{10} = \frac{1}{2} \rightarrow BC = 5 = AD$$

A área sombreada:

$$A = A_{\text{triangulo}} - A_{\text{setor}} - A_{\text{setor}}$$

$$A = \frac{5 \times 5 \sqrt{3}}{2} - \frac{p / 3 \times 5^2}{2} - \frac{p / 6 \times 5 \sqrt{3}}{2}$$



Questão 10

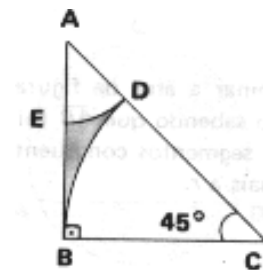
Cálculo dos segmentos BC e AD:

$$\cos 45^\circ = \frac{BC}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow BC = 5\sqrt{2} \quad e$$

$$AD = 10 - 5\sqrt{2}$$

A área sombreada é igual a área do triângulo ABC menos a área do setor EAD, menos a área do setor BCD:

$$A = \frac{(5\sqrt{2})^2}{2} - \frac{p / 4 \times (10 - 5\sqrt{2})^2}{2} - \frac{p / 4 \times (5\sqrt{2})^2}{2}$$



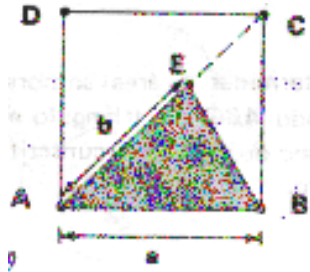
Questão 11

A diagonal do quadrado é $d = a\sqrt{2}$ e $AE = b = (a\sqrt{2} - a)$

A área sombreada é:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin 45^\circ = \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{2}}{2} \quad \text{ou}$$

$$A = \frac{a \cdot (a\sqrt{2} - a) \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{a^2 \cdot (\sqrt{2} - 1)}{2}$$



Questão 12

Cálculo da área sombreada: $A = \frac{p \cdot r^2}{2} - p \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2$

Questão 13

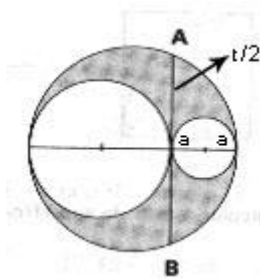
A sombreada é igual a área de dois quadrados de lado a mais a área de um segmento circular de raio r .

Cálculo do raio r do círculo sombreado: $d = l\sqrt{2} = a\sqrt{2} = 2r \rightarrow r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Cálculo da área sombreada: $A = 2 \cdot a^2 + \left(\frac{p / 4 \cdot a^2 \cdot 2}{2} - \left(\frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2}{2} \right) \right)$

Questão 14

s



Da figura temos: $\frac{t}{2} \cdot \frac{t}{2} = 2a \cdot (2r - 2a)$ à $\frac{t^2}{4} = 4a \cdot (r - a)$ à

$4a^2 - 4r \cdot a + \frac{t^2}{4} = 0$, resolvendo essa última equação:

$$a = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 - t^2}}{4}.$$

Fazendo $\begin{cases} A = \text{área hachurada} \\ A_{cg} = \text{área do círculo grande} \\ A_{cm} = \text{área do círculo médio} \\ A_{cp} = \text{área do círculo pequeno} \end{cases}$, temos: $A = A_{cg} - A_{cm} - A_{cp}$

$$A = p \cdot r^2 - p \cdot \left(\frac{2r - 2a}{2} \right)^2 - p \cdot a^2$$

$$A = p.r^2 - p.(r-a)^2 - p.a^2 = p.r^2 - p.(r^2 - 2.ra + a^2) - p.a^2$$

$$A = p.r^2 - p.r^2 + 2p.ra - pa^2 - p.a^2 = 2p.ra - 2p.a^2$$

$$A = 2p.r \frac{2r + \sqrt{4r^2 - t^2}}{4} - 2p \left(\frac{4r^2 + 4r\sqrt{4r^2 - t^2} + 4r^2 - t^2}{16} \right)$$

$$A = 2p.r \frac{2.(2r + \sqrt{4r^2 - t^2})}{8} - p \left(\frac{4r^2 + 4r\sqrt{4r^2 - t^2} + 4r^2 - t^2}{8} \right)$$

$$A = \frac{4p.r.(2r + \sqrt{4r^2 - t^2})}{8} - p \left(\frac{4r^2 + 4r\sqrt{4r^2 - t^2} + 4r^2 - t^2}{8} \right)$$

$$A = \frac{8p.r^2 + 4p.r\sqrt{4r^2 - t^2} - 4p.r^2 - 4p.r\sqrt{4r^2 - t^2} - 4p.r^2 + p.t^2}{8}$$

$$A = + \frac{p.t^2}{8} \quad \text{à} \quad \text{c.q.d.}$$

Questão 15

$$A_h = A_{\text{quadrado}} - 2.A_t - A_{\text{setot}} = 4^2 - 2x \frac{4x2}{2} - \frac{p}{2} \frac{2x2^2}{2}$$