

Cálculo de Diferencial

Calcular o *diferencial* dy das funções: $dy = f(x)' \cdot dx$ com dy =diferencial, $f(x)'$ = y' =derivada e dx =acrécimo.

1. $y = 6x^3 + 8x + 1$

Solução: $y = 6x^3 + 8x + 1$, derivada: $y' = 18x^2 + 16x$ logo o diferencial é: $dy = (18x^2 + 16x) \cdot dx$

2. $y = \ln(x^3 + 4)$

Solução: $y = \ln(x^3 + 4)$, derivada: $y' = \frac{3x^2}{x^3 + 4}$ logo o diferencial é: $dy = \left(\frac{3x^2}{x^3 + 4} \right) dx$

3. $y = e^{\sqrt{x^2 + 4}}$

Solução: $y = e^{(x^2 + 4)^{1/2}}$ derivada: $y' = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 4)^{-1/2} \cdot 2x \cdot e^{(x^2 + 4)^{1/2}}$ à $y' = (x^2 + 4)^{-1/2} \cdot x \cdot e^{(x^2 + 4)^{1/2}}$ à

$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \cdot e^{\sqrt{x^2 + 4}}$ logo o diferencial é: $dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \cdot e^{\sqrt{x^2 + 4}} \cdot dx$

4. $y = \frac{5x^3 + 2}{4x^2 + 1}$

Solução: $y = \frac{5x^3 + 2}{4x^2 + 1}$, derivada: $y' = \frac{3 \cdot 5x^2 \cdot (4x^2 + 1) - (5x^3 + 2) \cdot 2 \cdot 4x}{(4x^2 + 1)^2}$ à $y' = \frac{15x^2 \cdot (4x^2 + 1) - 8x \cdot (5x^3 + 2)}{(4x^2 + 1)^2}$ à

$y' = \frac{20x^4 + 15x^2 - 16x}{(4x^2 + 1)^2}$ logo o diferencial é: $dy = \left(\frac{20x^4 + 15x^2 - 16x}{(4x^2 + 1)^2} \right) dx$

5. Encontrar o diferencial dy e o crescimento Δy da função da função $y = x^2$.

a) para os valores arbitrários de x e de Δx ;

b) para $x=12$ e $\Delta x=0,2$

a) Solução: $y = x^2$, derivada: $y' = 2 \cdot x$, o diferencial $dy = (2 \cdot x) \cdot dx$

Acrécimo: $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$; diferencial: $dy = (2x) \cdot \Delta x$

b) Solução: Acrécimo $\Delta y = (12 + 0,2)^2 - 12^2 = 4,8$

Diferencial: $dy = (2 \cdot 12) \cdot 0,2 = 4,8$

Aplicação do Diferencial

Calcular o acréscimo Δy , o diferencial dy e o erro ϵ , de cada uma das funções: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

$dy = y' \cdot dx$ e $\epsilon = |\Delta y - dy|$

1. $f(x) = x \cdot \ln x$ para $x=e$ e $\Delta x=0,1$

Cálculo do acréscimo Δy :

$$\Delta y = (x + \Delta x) \cdot \ln(x + \Delta x) - x \cdot \ln x \quad \text{à} \quad \Delta y = (e + 0,1) \cdot \ln(1 + 0,1) - e \cdot \ln e \quad \text{à} \quad \Delta y = (e + 0,1) \cdot \ln(1 + 0,1) - e$$

$$\Delta y = (2,718282 + 0,1) \cdot \ln(2,718281 + 0,1) - 2,718282 \quad \text{à} \quad \Delta y = (2,818282) \cdot \ln(2,818281) - 2,718282 \quad \text{à}$$

$$\Delta y = (2,818282) \cdot 1,036123 - 2,718282 \quad \text{à} \quad \Delta y = 2,920099 - 2,718282 \quad \text{à} \quad \Delta y = 0,201817$$

Cálculo do diferencial dy :

$$y = x \cdot \ln x \quad \text{à} \quad y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \quad \text{à} \quad y' = 1 + \ln x$$

Diferencial: $dy=(1+\ln x).dx$ à $dy=(1+1).0,1$ à $dy=0,2$

Erro: $\epsilon = |0,201817 - 0,2| = 0,001817$

2. $y=(x-1)^4$ para $x=2$; $\Delta x = 0,02$

Cálculo do acréscimo Δy : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ à $\Delta y = (2 + 0,02 - 1)^4 - (2 - 1)^4$ à $\Delta y = 0,0824$

Cálculo do diferencial: $y=(x-1)^4$ à $y'=4.(x-1).1$ à $dy=4.(x-1).dx$ à $dy=dy=4.(2-1).0,02$ à $dy=0,08$

Cálculo do erro: $\epsilon = |0,0824 - 0,08| = 0,0024$

3. $y = \frac{x^3}{3} - x^2$ para $x=3$ e $\Delta x = -0,1$

Cálculo do acréscimo Δy : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ à $\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^3}{3} - (x + \Delta x)^2 - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right)$

$$\text{à } \Delta y = \frac{(3 - 0,1)^3}{3} - (3 - 0,1)^2 - \left(\frac{3^3}{3} - 3^2 \right) \text{ à } \Delta y = 0,2803$$

Cálculo do diferencial: $dy=f'(x).dx$ à $y = \frac{x^3}{3} - x^2$ à $y' = x^2 - 2x$ à $dy = (x^2 - 2x).dx$ à $dy = (3^2 - 2.3).(-0,1)$ à $dy = -0,3$

Cálculo do erro: $\epsilon = |0,2803 + 0,3| = ?$

4. $y = \frac{e^x}{x}$ para $x=1$ e $\Delta x = 0,1$

Cálculo do acréscimo Δy : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ à $\Delta y = \frac{e^{x+\Delta x}}{x + \Delta x} - \frac{e^x}{x}$ à $\Delta y = \frac{e^{1+0,1}}{1+0,1} - \frac{e^1}{1} = 0,0127$

Cálculo do diferencial dy : $y' = \frac{e^x \cdot x - 1 \cdot e^x}{x^2}$ à $dy = \left(\frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} \right) dx$ à $dy = \left(\frac{e^1 \cdot 1 - e^1}{1^2} \right) 0,1$ à

$dy=0$;

Cálculo do erro: $\epsilon = |0,0127 - 0|$

5. $y = \sqrt{2.x^3}$ à $y = (2.x^3)^{\frac{1}{2}}$ para $x=2$ e $\Delta x = -0,012$

Cálculo do acréscimo: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ à $\Delta y = (2.(x + \Delta x)^3)^{\frac{1}{2}} - (2.x^3)^{\frac{1}{2}}$ à

$$\Delta y = (2.(x + \Delta x)^3)^{\frac{1}{2}} - (2.x^3)^{\frac{1}{2}} \text{ à } \Delta y = (2.(2 - 0,012)^3)^{\frac{1}{2}} - (2.(2)^3)^{\frac{1}{2}} \text{ à } \Delta y = -0,0359$$

Cálculo do diferencial dy : $y' = \frac{1}{2} \cdot (2x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 \cdot 2 \cdot x^2$ à $y' = \frac{3 \cdot x^2}{\sqrt{2 \cdot x^3}}$ logo $dy = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx$ à

$$dy = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot (2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-0,012) = -0,036.$$

Cálculo do Erro: $\epsilon = |-0,0359 + 0,036| = 0,00005$

6. Calcule o valor aproximado de $\sqrt{17,1}$ usando diferencial.

Resolução: fazendo $y = \sqrt{x}$ à $y = x^{\frac{1}{2}}$ para $x=16$ e $\Delta x = 1,1$. Derivada da função é $y' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ à

diferencial: $dy = \left(\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$ à $dy = \frac{1}{2} \cdot (16)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1,1) = 0,1375$. Resposta: $\sqrt{17,1} = 4 + 0,1375 = 4,1375$

7. Calcule o valor aproximado de $\sqrt[3]{8,16}$ usando diferencial.

Resolução: fazendo $y = \sqrt[3]{x}$ para $x=8$ e $\Delta x = 0,16$

$y' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$ logo $dy = \left(\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \right) dx$ à $dy = \left(\frac{1}{3} \cdot (8)^{-\frac{2}{3}} \right) (0,16)$ à $dy = 0,0133$

Resposta: $\sqrt[3]{8,16} = 2 + 0,0133 = 2,0133$

8. Calcule o valor aproximado de $\sqrt[3]{7,75}$ usando diferencial.

Resolução: fazendo $y = \sqrt[3]{x}$ para $x=8$ e $\Delta x = -0,25$. Derivada da função $y' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$ à diferencial:

$dy = \left(\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \right) dx$ à $dy = \left(\frac{1}{3} \cdot (8)^{-\frac{2}{3}} \right) (-0,25) = -0,0208$

Resposta: $\sqrt[3]{7,75} = 2 - 0,0208 = 1,979$

9. Calcule o valor aproximado de $\sqrt[4]{82,12}$ usando diferencial.

Resolução: fazendo $y = \sqrt[4]{x}$ para $x=81$ e $\Delta x = 1,12$

$y' = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}}$ à $dy = \left(\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} \right) dx$ à $dy = \left(\frac{1}{4} \cdot (81)^{-\frac{3}{4}} \right) (1,12) = 0,0103$

Resposta: $\sqrt[4]{82,12} = 3 + 0,0103 \approx 3,0103$

10. Seja $L(x) = 4x^3 - 2x^2 - 1$ uma função de lucro e $y = 12 - x^2$ uma função de demanda para uma quantidade $x=1$ e $\Delta x = 0,2$. Achar:

a) O acréscimo correspondente no custo total. Resolução: o lucro total é $L_t = R_t - C_t$ à $C_t = R_t - L_t$

A receita total: $R_t = y \cdot x$ à $R_t = (12 - x^2) \cdot x$ à $C_t = 12x - x^3 - (4x^3 - 2x^2 - 1)$ à

$C_t = -5x^3 + 2x^2 + 12x + 1$ e sua derivada é: $(C_t)' = -15x^2 + 4x + 12$

O diferencial é: $d(C_t) = (-15x^2 + 4x + 12)dx$ à $d(C_t) = (-15 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 12)(0,2) = 0,2$ u.m.

b) O novo custo obtido após o acréscimo: $C_t = -5x^3 + 2x^2 + 12x + 1$ para $x=1$

$C_t(1) = -5 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 1 = 10$ u.m. à $C_t = 10 + 0,2 = 10,2$ u.m

11. Calcular a variação aproximada na função lucro quando se passa de uma produção de 5 unidades para 5,12; sabendo-se que a função de demanda é $y = -x^2 - 4x + 320$ e a função custo total é

$y_c = x^3 + 2x^2 - 2x$.

Resolução: $L_t = R_t - C_t$ à $R_t = y_0 \cdot x$ à $R_t = (-x^2 - 4x + 320)x$ à $R_t = -x^3 - 4x^2 + 320x$

Função de custo: $Ct = -x^2 - 4x + 320$ à $Lt = -x^3 - 4x^2 + 320.x - (-x^2 - 4x + 320)$ à

$Lt = -2x^3 - 6x^2 + 322x$ e sua derivada é: $(Lt)' = -6x^2 - 12x + 322$

$d(Lt) = (Lt)' . dx$ à $d(Lt) = (-6x^2 - 12x + 322)dx$ à

$d(Lt) = (-6.5^2 - 12.5 + 322)(0,12) = 112.0,12 = 13,44$ u.m.

12. Sendo $y_c = x^2 + 2$ o custo total de um produto cuja função receita é $y_r = 3x$, passando-se a quantidade de produto de $x = 1,02$. Determine:

a) A variação aproximada no valor do **lucro** obtido:

Resolução: $Lt = Rt - Ct$ à $Rt = y_r . x$ à $Rt = (3x) . x$ à $Rt = 3x^2$

$Ct = (x^2 + 2) . x$ à $Ct = x^3 + 2x$

$Lt_1 = 3x - (x^2 + 2)$ à $Lt_1 = 3.1 - (1^2 + 2) = 0$

$Lt = 3x^2 - x^3 - 2x$ à $dLt = (Lt)' . dx$ à $dLt = (-3x^2 + 6x - 2) . dx = (-3.1^2 + 6.1 - 2) . 0,02 = 0,02$ u.m.

b) O novo valor do **lucro**:

$Lt_2 = Lt_1 + dLt$ à $Lt_2 = 0 + 0,02 = 0,02$ u.m.

13. ?