

Héctor W. Pagán
Profesor de Matemáticas
Mate 4105– Geometría para maestros de escuela elemental

Lección #2

Líneas paralelas y perpendiculares

Objetivos

Definir

Líneas paralelas y perpendiculares

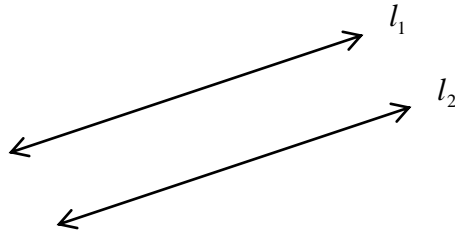
Líneas transversales y ángulos

Propiedades de líneas paralelas

Aplicar las propiedades en problemas de aplicación

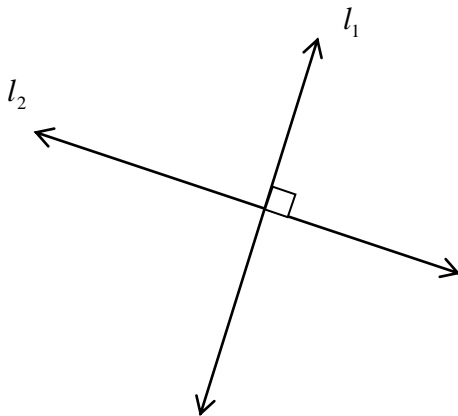
En esta lección consideramos las rectas *paralelas* y *perpendiculares*. Como las rectas paralelas siempre están a la misma distancia, en las vías de ferrocarril y en uno de los eventos de gimnasia varonil, las barras paralelas podemos ver una aplicación de las rectas paralelas. Como las rectas perpendiculares se cortan y forman ángulos rectos, un edificio y el suelo ilustran una aplicación de las rectas perpendiculares.

Líneas paralelas son líneas que no se intersecan y están en el mismo plano.



Si las rectas l_1 (léase como “ l sub 1”) y l_2 (léase como “ l sub 2”) son paralelas podemos escribir $l_1 \parallel l_2$, donde el símbolo \parallel se lee como “es paralela a”.

Líneas perpendiculares son líneas que se intersecan y forman un ángulo recto.



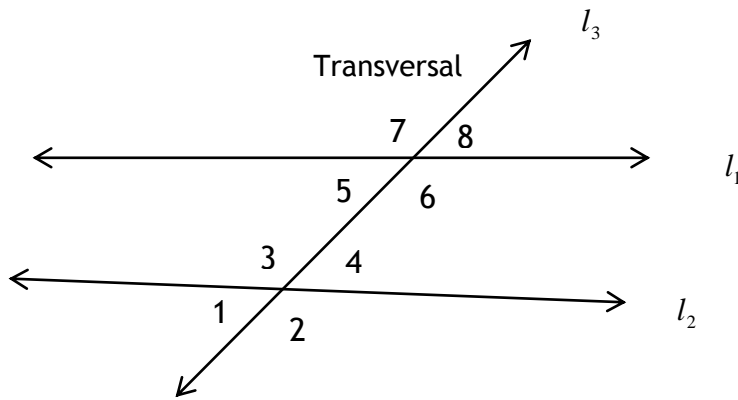
En la figura $l_1 \perp l_2$, donde el símbolo \perp se lee como “es perpendicular a”.

Ángulos y transversales

Línea transversal es una línea que interseca dos o más líneas en un mismo plano.

La línea l_3 es línea transversal a l_1 y l_2 .

Cuando a dos líneas son cortadas por una transversal, se forman los siguientes tipos de ángulos.



Ángulos alternos internos

$\angle 4$ y $\angle 5$

$\angle 3$ y $\angle 6$

En el diagrama anterior se forman cuatro pares de **ángulos correspondientes** y estos son:

$\angle 1$ y $\angle 5$

$\angle 2$ y $\angle 6$

$\angle 3$ y $\angle 7$

$\angle 4$ y $\angle 8$

Ángulos interiores:

$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$

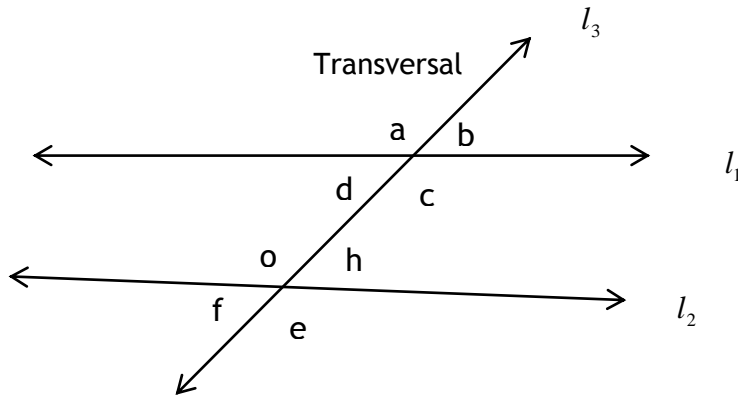
Ejemplo

Utilizando la figura identifique

a) todos los pares de ángulos alternos internos

b) todos los pares de ángulos correspondientes

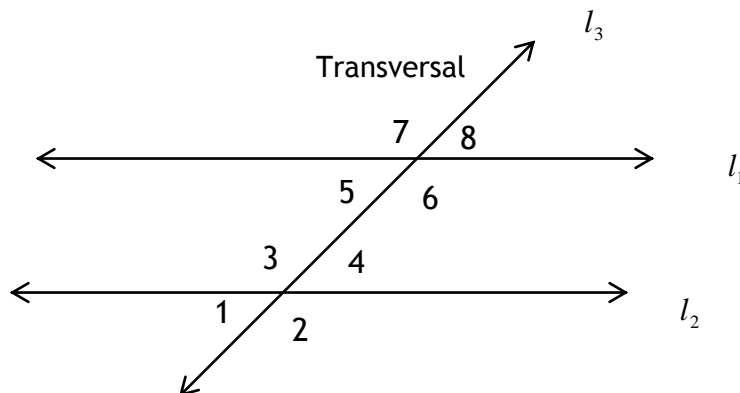
c) todos los ángulos interiores.



Propiedades de líneas paralelas

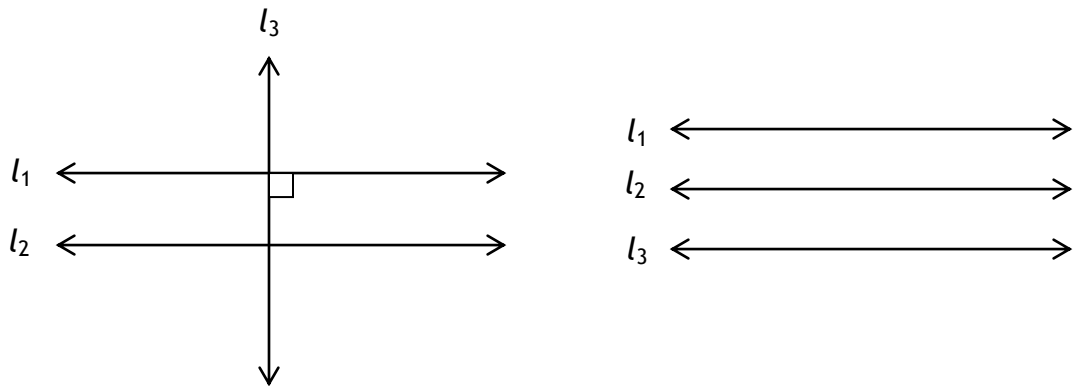
Cuando una línea transversal corta una o más líneas estas pueden ser paralelas o no. Cuando un par de líneas paralelas son cortadas por una línea transversal estas tienen algunas propiedades importantes sobre los ángulos que se forman.

1. Si dos rectas paralelas son cortadas por una línea transversal los ángulos correspondientes son congruentes. Si $l_1 \parallel l_2$ entonces $\angle 1 \cong \angle 5$, $\angle 3 \cong \angle 7$, $\angle 2 \cong \angle 6$, y $\angle 4 \cong \angle 8$
2. Si dos líneas paralelas son cortadas por una línea transversal, los ángulos alternos internos son congruentes. Si $l_1 \parallel l_2$ entonces $\angle 3 \cong \angle 6$, y $\angle 4 \cong \angle 5$.
3. Si dos líneas paralelas son cortadas por una línea transversal, los ángulos internos en el mismo lado de la línea transversal son suplementarios. Si $l_1 \parallel l_2$ entonces $\angle 3$ es suplementario con $\angle 5$ y $\angle 4$ es suplementario con $\angle 6$.
4. Si la línea transversal es perpendicular a una o dos líneas paralelas también es



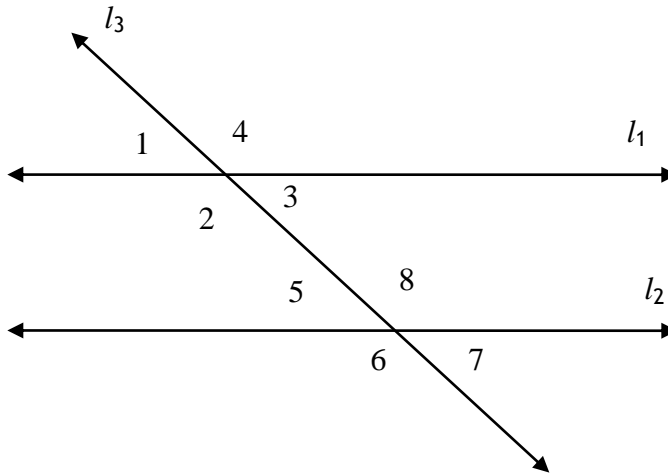
perpendicular a las otras líneas. Si $l_1 \parallel l_2$ y $l_3 \perp l_1$ entonces $l_3 \perp l_2$.

5. Si dos líneas son paralelas a una tercera línea, ellas son paralelas entre ellas.
 Si $l_1 \parallel l_2$ y $l_1 \parallel l_3$ entonces $l_2 \parallel l_3$.



Ejemplo

Si $l_1 \parallel l_2$ y $m(\sphericalangle 3) = 120^\circ$. Encuentre la medida de los otros ángulos y explique qué propiedad lo justifica.



Solución

$m(\sphericalangle 1) = 120^\circ$; $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 1$ opuestos por el vértice.

$m(\sphericalangle 2) = 60^\circ$; $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 2$ son ángulos suplementarios

$m(\sphericalangle 4) = 60^\circ$; $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 4$ son ángulos suplementarios y
 $\sphericalangle 4$ y $\sphericalangle 2$ opuestos por el vértice

$m(\sphericalangle 5) = 60^\circ$; $\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 5$ suplementarios están al mismo lado de la transversal

$m(\sphericalangle 6) = 120^\circ$; $\sphericalangle 6$ y $\sphericalangle 5$ son ángulos suplementarios

$m(\sphericalangle 7) = 60^\circ$; $\sphericalangle 6$ y $\sphericalangle 7$ son ángulos suplementarios

$m(\sphericalangle 8) = 120^\circ$; $\sphericalangle 7$ y $\sphericalangle 8$ son ángulos suplementarios
 $\sphericalangle 6$ y $\sphericalangle 8$ opuestos por el vértice

Conversos (opuestos)

Muchos hechos geométricos son presentados de la forma *si ... , entonces ...*. Por ejemplo, ya hemos visto que

Si dos ángulos son ángulos opuestos, entonces son congruentes.

Cuando estudiamos tales oraciones, si sus partes son intercambiables entonces determinamos que su “reverso” es ciertas.

Si dos ángulos son congruentes, entonces son ángulos opuestos.

En este caso, el resultado de este reverso no es cierto.

Si una oración matemática es escrita de la forma *si p entonces q* llamamos a la oración *si q entonces p* es el **converso**. Es interesante que el converso de algunas oraciones sea cierta, mientras que otras oraciones son falsas.

Anteriormente estudiamos que:

- Si dos líneas paralelas son cortadas por una línea transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.
- Si dos líneas paralelas son cortadas por una línea transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

Podemos probar que los conversos de estas oraciones son ciertas. Esto es, dados dos líneas cortadas por una transversal,

- Si un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces las líneas son paralelas.
- Si un par de ángulos alternos internos son congruentes, entonces las líneas son paralelas.

Cuando una oración y su converso ambos son ciertas, podemos combinarlas en una oración simple usando la frase *si y solo si*.

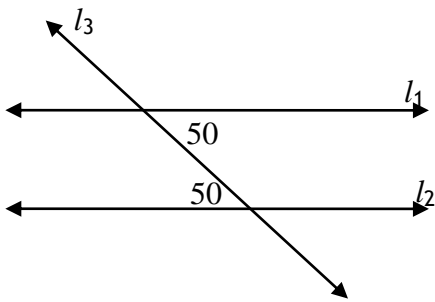
Propiedades de las líneas paralelas

Dado dos líneas cortadas por un línea transversal,

1. Ángulos correspondientes son congruentes si y solo si las líneas son paralelas.
2. Ángulos alternos internos son congruentes si y solo si las líneas son paralelas.

Ejemplo

¿Son las líneas l_1 y l_2 que se muestran en la figura paralelas?



Solución

Tenemos dos líneas cortadas por una transversal. Como un par de ángulos alternos internos son congruentes las líneas son paralelas.
