

Héctor W. Pagán
Profesor de Matemáticas
Mate 4105– Geometría para maestros de escuela elemental

Lección #1

Figuras geométricas básicas

Objetivo

Presentar los conceptos de:

- Puntos, líneas y planos
- Segmentos de línea y rayos
- Ángulos
- Medida de ángulo

Definir

- Ángulos adyacentes
- Ángulos verticales (opuestos)
- Ángulos complementarios y suplementarios

Introducción

Geometría es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de figuras de 2-3 dimensiones tales como triángulos, círculos, cilindros y esferas. Más de 5,000 años atrás los egipcios usaron la geometría para medir áreas de tierras planas inundadas en el Río Nilo después de las grandes lluvias de primavera.

Puntos, Líneas y Planos

La geometría esta basada en las palabras no definidas punto, línea y plano. No se intenta definir estas palabras formalmente.

Un punto es una figura geométrica que tiene posición pero no tiene largo, ancho o profundidad. Los puntos son etiquetados con letras mayúsculas.

Una línea es infinitamente larga pero no tiene ancho o profundidad.

Un plano es una superficie liza como el tope de una mesa, que tiene largo ancho pero no tiene profundidad.

Otras figuras geométricas se pueden crear utilizando partes o combinando puntos, líneas, y planos.

Segmentos de líneas y rayos

El segmento de línea \overline{AB} , denotado como \overline{AB} , es parte de una línea que consiste de puntos A y B y de todos los puntos entre estos. Los puntos A y B son los puntos finales (extremos) del segmento.



Figura 1

Largo de un segmento

Para determinar el largo de un segmento \overline{AB} ; \overline{AB} ; Utilizamos la fórmula $|a - b|$

Todo segmento de línea tiene un punto medio, que divide al segmento en dos partes de igual largo.

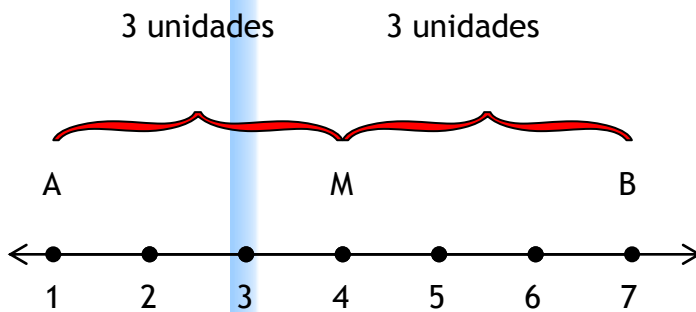


Figura 2

En la figura M es el punto medio del segmento \overline{AB} porque la medida de \overline{AM} (denotada por $m \overline{AM}$) es igual a la medida \overline{MB} (denotada por $m \overline{MB}$). La medida de cada segmento es de 3 unidades.

Utilizamos la fórmula:

$$\text{PM} = \frac{a + b}{2}; \text{ para determinar el punto medio del segmento } \overline{AB}$$

Cuando dos segmentos tienen la misma medida, se dice que los segmentos son congruentes. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$

Rayo

Un rayo es parte de una línea que empieza en un punto(A) y continúa al infinito en una dirección. El punto A es llamado punto extremo.



A

Figura 3

Ángulo

Un ángulo es una figura formada por dos rayos con puntos extremos en común. Los puntos extremos en común es llamado vértice, y los rayos son llamados lados.

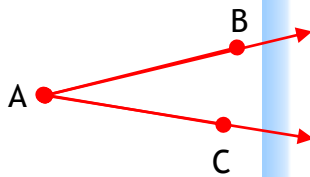


Figura 4

Medidas de ángulos

Una unidad de medida de ángulos es llamado grado. 1° . La medida de un ángulo de (Se lee un grado) significa que un lado del ángulo ha rotado 360 de una revolución completa sobre el vértice sobre el otro lado del ángulo.

Otras unidades de medidas para medir ángulos son *radianes* y *gadianes*. Busque y envíe por correo electrónico (hector.pagan2@upr.edu) los términos de *radianes* y *gadianes*.

El **transportador** es el instrumento que se utiliza para la medida de ángulos.

Comenzamos colocando el centro del transportador en el centro del transportador, con el borde del transportador alineado con uno de los lados del ángulo. La medida del ángulo se determina observando el otro lado del ángulo sobre la escala. Se debe tener cuidado y utilizar la escala apropiada, interior o exterior, cuando lea la medida del ángulo.

Si leemos el transportador de izquierda a derecha, usamos la escala interior. Si leemos el transportador de derecha a izquierda, usamos la escala exterior.

Cuando dos ángulos tienen la misma medida, decimos que estos son congruentes.

Ejercicio

Utilizando un transportador dibuje en su libreta los siguientes ángulos

- a. 30°
- b. 110°
- c. 190°
- d. 270°
- e. 400°

Clasificación de ángulos

ángulo agudo- ángulo cuya medida es mayor que 0° pero menor que 90°

ángulo recto- ángulo cuya medida es de 90°

ángulo obtuso- ángulo cuya medida es mayor que 90° pero menor de 180°

ángulo plano (Llano)- ángulo cuya medida es de 180°

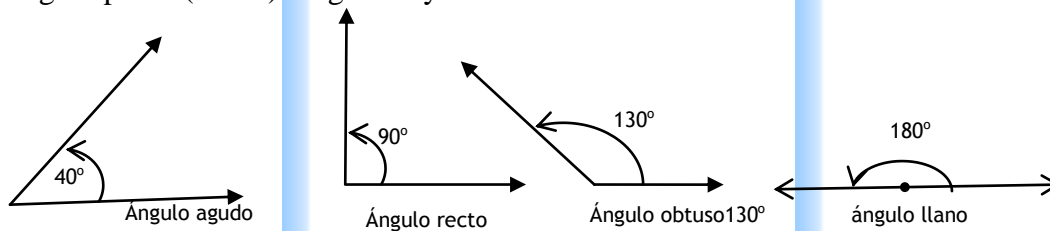


Figura 5

Nota: El Símbolo \perp lo utilizamos para denotar un ángulo recto. Por ejemplo en la próxima figura el símbolo \perp dibujado cerca del vértice del $\angle ABC$ indica que la $m\angle ABC = 90^\circ$.

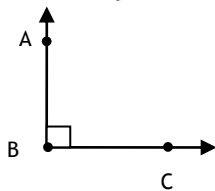


Figura 6

Ejemplo 1

Clasifica los ángulos. Clasifica cada ángulo en la figura como ángulo agudo, ángulo recto, ángulo obtuso o ángulo llano.

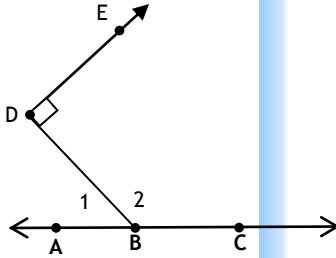


Figura 7

Solución

Como la $m\angle 1 < 90^\circ$, es un ángulo agudo.

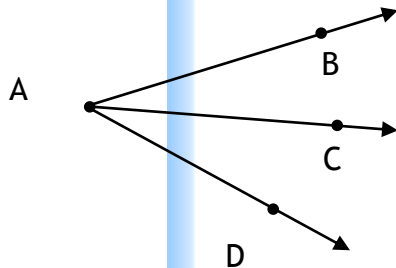
Como la $m\angle 2 > 90^\circ$ pero menor de 180° , es un ángulo obtuso.

Como la $m\angle EDB = 90^\circ$, este es un ángulo recto.

Como la $m\angle ABC = 180^\circ$, es un ángulo llano.

Ángulos Adyacentes y opuestos por el vértice

El ángulo $\angle BAC$ y el ángulo $\angle CAB$ son llamados ángulos adyacentes



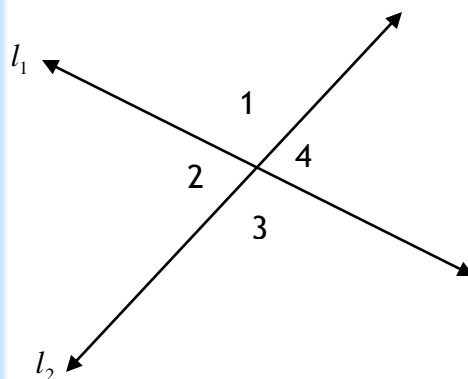
Dos ángulos que tienen un vértice en común el y un lado en común son llamados **ángulos adyacentes** si estos están lado a lado y el interior de estos no se comparten.

Ángulos opuestos

Cuando dos líneas se intersecan pares de ángulos no adyacentes son llamados ángulos opuestos o ángulos verticales.

Los ángulos opuestos siempre son iguales. Si el $\angle 4 = 30^\circ$ entonces

$$\angle 1 + 30^\circ = 180^\circ \text{ ----- } \angle 3 + 30^\circ = 180^\circ$$

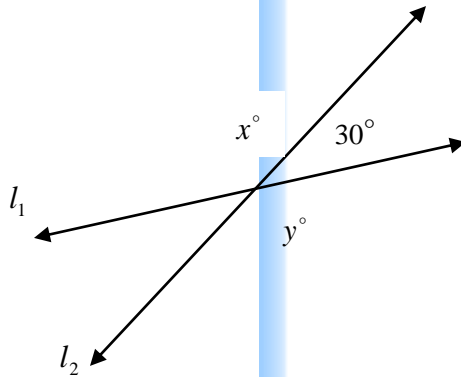


$$\angle 1 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \text{-----} \angle 3 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

de la misma forma ocurre con el ángulo 3 por lo tanto podemos concluir que el

$$\angle 1 = \angle 3 \text{ y ambos son de } 150^\circ.$$

Para aclarar el concepto de que dos ángulos verticales siempre tiene la misma medida, observe la siguiente figura con medidas de ángulos x , y y 30° . La medida de cualquier ángulo llano es de 180° ,



Tenemos que

$$30^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 150^\circ$$

$$30^\circ + y = 180^\circ$$

$$y = 150^\circ$$

Notemos que x y y son ambos 150° , $x = y$

El ejemplo anterior presenta los ángulos opuestos tienen la misma medida. Cuando dos ángulos tienen la misma medida, decimos que son congruentes.

Propiedad de los ángulos verticales

Los ángulos verticales son congruentes.

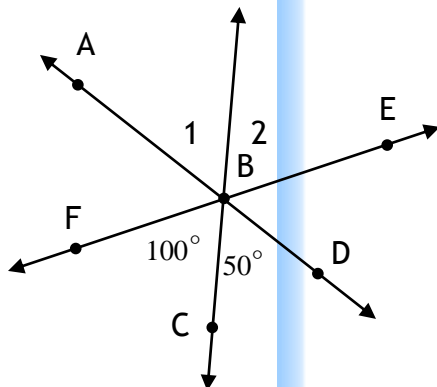
Ejemplo 3

Evaluar ángulos.

En la figura, encuentre:

a. $m\angle 1$

b. $m\angle ABF$



Solución

a. $\angle CBD$ y $\angle 1$ son ángulos verticales. Por la propiedad de ángulos verticales,
 $\angle CBD \cong \angle 1$
 Por lo tanto, los ángulos congruentes tienen la misma medida

$$m(\angle CBD) = m(\angle 1)$$

De la figura se observa que $m(\angle CBD) = 50^\circ$. Por lo tanto, $m(\angle 1)$ también es 50° y escribimos $m(\angle 1) = 50^\circ$.

b. El $\angle ABD$ es un ángulo llano, la suma de los ángulos $\angle ABF$; el ángulo de 100° y el ángulo de 50° es de 180° . Si el $m(\angle ABF) = x$, tenemos que

$$x + 100^\circ + 50^\circ = 180^\circ$$

$$x + 150^\circ = 180^\circ$$

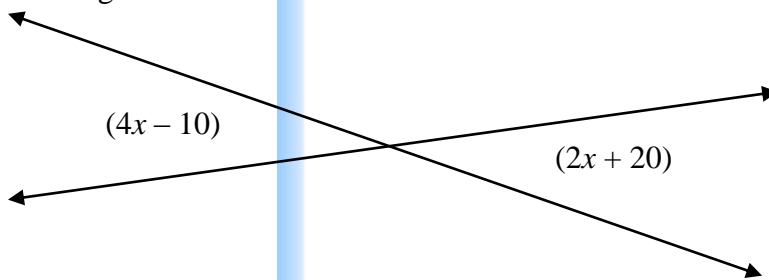
$$x = 30^\circ$$

Por lo tanto

$$m(\angle ABF) = 30^\circ$$

Ejemplo 4

En la figura encuentre el valor de x .



Solución

Como los ángulos son opuestos por el vértice tienen la misma medida.

$$(4x - 10) = (2x + 20)$$

$$4x - 10 = 2x + 20$$

$$4x - 2x = 20 + 10$$

$$2x = 30$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{30}{2}$$

$$\cancel{2}x = \frac{15 \times \cancel{2}}{\cancel{2}}$$

$$x = 15$$

Solución de Problemas

Método que estaremos utilizando para la solución de problemas de aplicación. El método consiste de 6 elementos

- Análisis del problema
- Formular la ecuación
- Resolver la ecuación
- Presentar la solución
- Verificar el resultado

Ejemplo

La medida de un ángulo es cinco grados más que un número, y un ángulo opuesto es veinticinco grados menos que seis veces el número. ¿Determine la medida del primer ángulo?

Solución

Vamos a resolver este problema utilizando el método anteriormente presentado.

Análisis del problema

- Debemos considerar dos ángulos y ellos son ángulos opuestos
- La medida del primer ángulo es cinco grados más que un número
- La medida del otro es veinticinco grados menos que seis veces el número
- Debemos encontrar la medida del primer ángulo

Formular la ecuación

La medida de cada ángulo esta expresada en términos de un número (el mismo número). Comencemos asignado una variable a este número x . Se debe transformar cada frase en expresiones algebraicas para formar la ecuación.

La frase **cinco grados más que un número** en expresión algebraica es $x + 5^\circ$.

La frase **veinticinco grados menos que seis veces el número** en expresión algebraica es $6x - 25^\circ$.

Como sabemos que los ángulos opuestos son congruentes tenemos que

$$x + 5^\circ = 6x - 25^\circ$$

Resolver la ecuación

$$x + 5^\circ = 6x - 25^\circ$$

$$x - 6x = -25^\circ - 5^\circ$$

$$-5x = -30^\circ$$

$$x = -30/(-5) = 30/5 = 6^\circ$$

El valor de la variable es 6° . Para determinar el valor del primer ángulo evaluamos el valor de x en la expresión.

$$x + 5^\circ = 6^\circ + 5^\circ = 11^\circ$$

Presentar la solución

La medida del primer ángulo es de 11° .

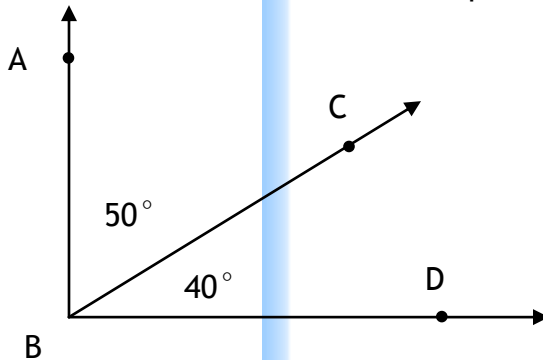
Verificar la Solución

Si evaluamos el valor de x en la otra expresión algebraica el resultado que debemos encontrar es de 11° dado que los ángulos son ángulos opuestos. Veamos $6x - 25^\circ = 6(11^\circ) - 25^\circ = 11^\circ$

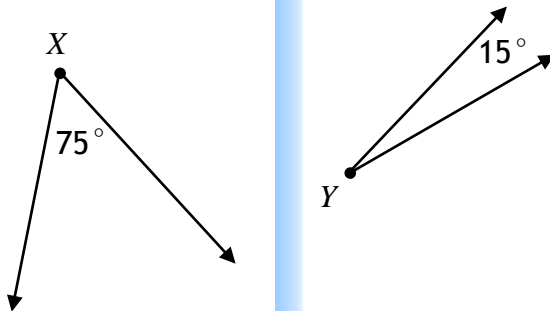
Ángulos complementarios y suplementarios

Dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus medidas es de 90° .
Dos ángulos son suplementarios cuando la suma de sus medidas es de 180° .

En la figura, $\angle ABC$ y $\angle CBD$ son ángulos complementarios porque la suma de de sus medidas es de 90° . Decimos que cada ángulos es complemento uno de otro.

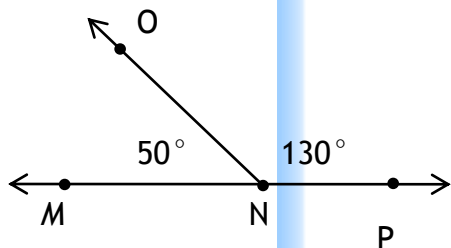


En la figura, $\angle X$ y $\angle Y$, son también son ángulos complementario, porque $m(\angle X) + m(\angle Y) = 90^\circ$

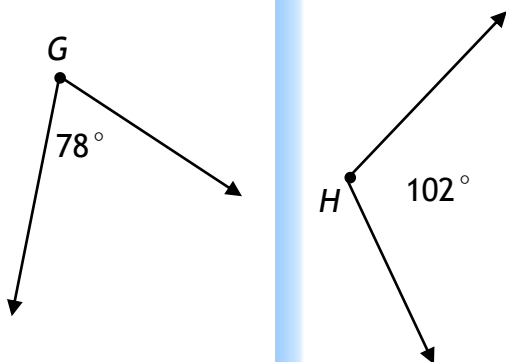


La figura anterior ilustra la importancia del hecho: los ángulos complementarios no necesitan ser ángulos adyacentes.

En la próxima figura, $\angle MNO$ y $\angle ONP$ son ángulos suplementarios, porque la suma de sus medidas es 180° . Se dice que cada ángulo es suplemento uno del otro.



Los ángulos suplementarios no necesitan ser ángulos adyacentes. Por ejemplo en la próxima figura, se observa que $\angle G$ y $\angle H$ son ángulos suplementarios (no adyacentes), porque $m(\angle G) + m(\angle H) = 180^\circ$



Nota:

La definición de ángulo suplementario requiere que la suma de dos ángulos sean 180° . Si tenemos tres ángulos por ejemplo de 40° , 50° , 90° no son suplementarios aunque la suma entre ellos es de 180° .

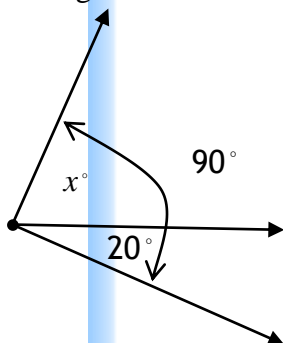
Ejemplo 5

Encuentre ángulos complementario y suplementario.

- Encuentre el ángulo complementario a 35° .
- Encuentre el ángulo suplementario a 105° .

Solución

- Observe la figura.



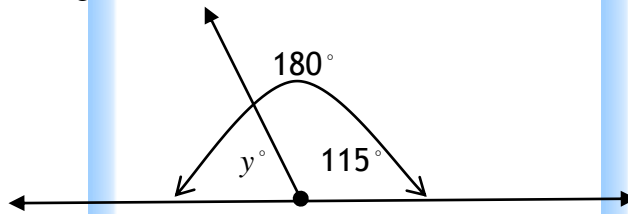
Sea x la medida del ángulo complementario al ángulo de 20° . Se observa que los ángulos son complementarios, tenemos que

$$x + 20 = 90^\circ$$

$$x = 70^\circ$$

El ángulo complemento de 20° tiene una medida de 70° .

b. Observe la figura.



Sea y la medida del ángulo suplementario al ángulo de 115° . Se observa que los ángulos son suplementarios, tenemos que

$$y + 115^\circ = 180^\circ$$

$$y = 65^\circ$$

El ángulo suplementario de 115° tiene una medida de 65° .

Ejemplo 6

Usando álgebra para resolver problemas de geometría.

La medida de un ángulo es de 15° más que el doble que el ángulo suplementario.

¿Cual es la medida del ángulo?

Análisis del problema

- Se deben considerar dos ángulos
- Los ángulos son suplementarios
- La medida de un ángulo (primer ángulo) es 15° más que el doble que el otro ángulo.
- Debemos buscar la medida del primer ángulos

Formular la ecuación

La medida de unos de los ángulos es expresado en términos de su suplementos, permitimos que x = la medida del suplemento. Traduciendo las frases *más que* y *el doble*, representamos la medida del primer ángulo por una expresión $2x + 15^\circ$

Como los ángulos son suplementarios, tenemos que

$$2x + 15^\circ + x = 180^\circ$$

Resolver la ecuación

$$2x + 15^\circ + x = 180^\circ$$

$$3x + 15^\circ = 180^\circ$$

$$3x = 180^\circ - 15^\circ$$

$$3x = 165^\circ$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{165^\circ}{3} = \frac{55^\circ \times 3}{3}$$

$$x = 55^\circ$$

El suplemento es 55° . Para encontrar la medida del primer ángulo, evaluamos la expresión $2x + 15^\circ$ para $x = 55^\circ$.

$$\begin{aligned}2x + 15^\circ &= 2(55^\circ) + 15^\circ \\ &= 110^\circ + 15^\circ \\ &= 125^\circ\end{aligned}$$

Presentar la solución

La medida del primer ángulo es de 125° .

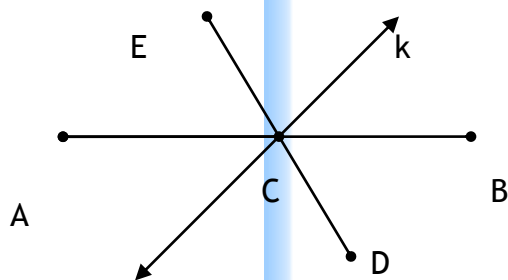
Verificar el resultado

Como 125° es 15° más que el doble de 55° y como $125^\circ + 55^\circ = 180^\circ$

Términos importantes que se estarán utilizando más adelante.

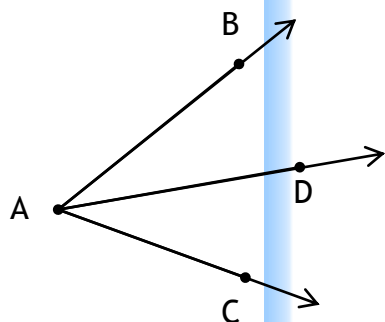
Definición

Una **bisectriz** de \overline{AB} es cualquier recta o segmento de recta que contiene al punto medio C pero a ningún otro punto de \overline{AB} .



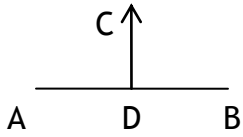
Definición

El conjunto de puntos \overrightarrow{AD} se denomina **bisectriz** de $\angle BAC$ si \overrightarrow{AD} está en el interior de $\angle BAC$ y $m \angle BAD = m \angle CAD$.



Definición

Dado un segmento \overline{AB} , el rayo \overrightarrow{CD} es una **mediatriz** del segmento \overline{AB} si el rayo \overrightarrow{CD} biseca al segmento \overline{AB} y es perpendicular al segmento \overline{AB} .



Para la próxima clase necesitamos un compas para trazar y determinar algunas bisectrices, mediatrices y otros.