Universidad del Zulia
Facultad Experimental de Ciencias
Asociación Matemática Venezolana

Introducción al Estudio de los Fractales

V Talleres de Formación Matemática
Maracaibo, 26 al 31 de Julio de 2004

V Talleres de Formación Matemática

Introducción al Estudio de los Fractales

Neptalí Romero & Fernando Sánchez

Maracaibo, 26 al 31 de julio de 2004

Para Litz y Oriana

Presentación

La geometría fractal es una jóven disciplina cuyo objeto de estudio puede enunciarse, de una manera un poco más formal, como el estudio de las propiedades topológicas y geométricas de conjuntos y medidas auto-similares en $\mathbb{R}^n$. Aquí "auto-similar" se usa en el sentido un poco vago que ha popularizado por los trabajos de Mandelbrot, como un conjunto que es igual a si mismo en todas las escalas, es decir, un conjunto que, despues de un re-escalamiento apropiado de una vecindades pequeñas de sus puntos "luce" igual a si mismo.

La disciplina se ha popularizado a través de la difusión de imágenes y programas de computadoras que nos presentan un mundo de figuras sorprendentes que en muchos casos se aproximan al arte y a la ciencia ficción. Una búsqueda en Internet muestra un exuberante campo donde convergen los intereses de investigadores en ciencias aplicadas, matemáticos, artistas, creadores de efectos especiales para el cine y hasta publicistas.

Esta explosión de interés está vinculada a la propagación de los computadores personales y las nuevas tecnologías de la información, con un visible impacto en la imaginería de la sociedad de consumo contemporánea.

Pero no todo es moda y publicidad. Desde el punto de vista científico hay un genuino interés po caracterizar estructuras tanto físicas como de datos que necesitan ser tratadas con métodos de teoría de la medida para introducir cuantidades calculables experimentalmente que caracterizan la organización espacial de conjuntos de puntos en el espacio con apariencia caótica y desorganizada. Las ideas de la geometría fractal se han aplicado al estudio de las configuraciones espaciales "poblaciones" de "puntos" distribuídos en un volumen tales como:

- población humana sobre una territorio, continente e incluso sobre la Tierra misma;
- observaciones metereológicas en estaciones distribuídas de manera desigual sobre el planeta;
- distribución de disipación de energía en un fluído turbulento, que fue el objeto inicial de estudio que llevó a Mandelbrot a proponer el estudio de fractales como una parte esencial de nuestra comprensión actual de la naturaleza;
- distribución de errores en una línea de transmisión;
- distribución de impurezas en la superficie y núcleo de materiales conductores, superconductores y aislantes en la física del estado sólido;
- distribución de minerales raros sobre la superficie de la tierra tales como oro, cobre y petróleo
- series temporales de datos tales como precios de mercancias y valores financieros en economía, tráfico vehicular en grandes ciudades, etc.

En todo estos ejemplos hay una escala global relevante confrontada con estructuras locales muy ricas y variables.

Al proponer su visión de la geometría fractal como la geometría de la naturaleza, Mandelbrot buscó en la Matemática modelos geométricos simples de conjuntos tales como: el conjunto de Cantor ternario, el tapiz de Sierpinski, la curva de Koch y la esponja de Sierpinski . El desarrollo del computador con sus enormes potencialidades gráficas atrajo de nuevo la atención de matemáticos y científicos sobre unos conjuntos cuyo estudio se remonta a los orígenes de la topología, la teoría de la medida y las investigaciones de principios del siglo XX sobre la teoría de funciones de variable compleja, debidas a Fatou y Julia.

Desde el punto de vista técnico la geometría fractal no es una disciplina axiomática y autónoma como la geometría de Euclides. Ella se encuentra en algún lugar en la intersección de la topología, la teoría de la medida y se ramifica rápidamente hacia la teoría de sistemas dinámicos y sus aplicaciones.

En la actualidad hay numerosos libros que tratan sobre el tema desde el punto de vista de sus fundamentos matemáticos y de las aplicaciones. Recomendamos especialmente los libros de Falconer [5] y Edgar [4]. También la obra "Fractals", del físico noruego Jens Feder, que ofrece una panorámica de las aplicaciones físicas, especialmente aquellas motivadas por la investigación de yacimientos petroleros (percolación, etc.).

El objeto de esta monografía que ofrecemos como parte del TForMa es más puntual y de carácter puramente matemático. Aprovechamos la oportunidad de la motivación e interés de los estudiantes sobre el tema para introducir al estudio riguroso de los aspectos topológicos y métricos de los conjuntos auto-similares. Esto nos llevó a repasar algunos resultados de topología y medida, para ofrecer demostraciones rigurosas de algunas propiedades de fractales clásicos tales como los conjuntos de Cantor, el tapiz de Sierpinski y la curva de Koch. Demostraciones que desde luego no tienen espacio en la inmensa mayoría de páginas web y literatura de divulgación sobre este tema, pero cuyo estudio luce instructivo y necesario para la formación de los estudiantes de las carreras de matemáticas.

Índice General

Capítulo 1

Topología de espacios métricos: conceptos elementales y resultados importantes

Comenzamos estas notas sobre algunas nociones de Geometría Fractal sentando una base topológica necesaria. El objetivo de este Capítulo es reunir algunos resultados de la topología de espacios métricos que serán usados a lo largo de esta monografía; por tanto, el presente resumen será necesariamente directo y poco pedagógico. Haremos un repaso de los conceptos y propiedades elementales sobre: espacios métricos, conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, compacidad, convergencia, completitud, conexidad y equivalencia de espacios métricos.

1.1. Definición y ejemplos

Definición 1.1.1. Un *espacio métrico* es un conjunto X equipado con una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0 \quad$ para todo $x, y \in X$.
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad$ para todo $x, y \in X$.
3. $d(x, y) = 0$ si, y sólo s,i $x = y$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad$ para todo $x, y, z \in X$.

Los elementos de X serán llamados *puntos* y $d = d(x, y)$ es, por definición, la *distancia* entre los puntos $x, y \in X$. Al par (X, d) se le conoce con el nombre de *espacio métrico*.

El concepto de espacio métrico generaliza la noción de distancia tal como se usa en la geometría euclideana. Los siguientes ejemplos son básicos. Aquí $|\cdot|$ es el valor absoluto de un número real y $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ es la norma definida por el producto interno standard de $\mathbb{R}^n$.

1.1.1. Ejemplos

1. Los siguientes son ejemplos de métricas en $X = \mathbb{R}$:

    a) $d(x, y) = |x - y|$ (métrica euclideana)

    b) $d(x, y) = \lambda|x - y|$, donde $\lambda > 0$ es un número real positivo

   c) $d(x,y) = \rho(|x-y|)$, donde $\rho = \rho(u) \geq 0$ es una función real contínua no decreciente, que se anula tan sólo en $u = 0$.

2. Sea $X = \mathbb{R}^n$, el producto cartesiano de n copias de $\mathbb{R}$. Las siguientes funciones definen métricas en $\mathbb{R}^n$:

   a) $d(x,y) = \|x-y\|$;
   b) $d(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$
   c) $d(x,y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\}$.

3. Los dos ejemplos que siguen a continuación ilustran la generalidad del concepto de espacio métrico:

   - Sea $C^0([0,1])$ el conjunto de las funciones continuas del intervalo unitario en $\mathbb{R}$. Las siguientes funciones definen métricas en $C^0([0,1])$:
     a) $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$
     b) $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$
     c) $d(f,g) = (\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx)^{1/2}$
     d) $d(f,g) = (\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx)^{1/p}$, $p > 0$
   - Sea (X,d) un espacio métrico y $\mathcal{P}(X) = \{E : E \subseteq X\}$ el conjunto de todos los subconjuntos de X. En el Capítulo 3 probaremos que la función

     $$\text{dist}_{\mathcal{H}}(E,F) = \text{ínf}\{\delta > 0 : E \subset B_\delta(F) \text{ y } F \subset B_\delta(E)\}$$

     es una métrica en el subespacio de conjuntos cerrados no vacíos de X, donde $B_\delta(E) = \{x \in X : d(x,E) < \delta\}$ es el entorno de radio δ del conjunto E. Ver abajo.

La función distancia de un espacio métrico nos permite formalizar la noción intuitiva de "*proximidad*" o "*vecindad*" de puntos, concepto topológico por excelencia. Las siguientes cantidades y subconjuntos serán usados a lo largo de esta monografía.

Sea $E \subset X$ un subconjunto de X, definimos:

1. *distancia de un punto x a un conjunto E* :

$$d(x,E) = \inf_{y\in E} d(x,y);$$

2. *diámetro de un conjunto E* :

$$\text{diam}(E) = \sup\{d(x,y) : \ x,y \in E\ \};$$

3. *bola abierta de centro x y radio $r > 0$* :

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\};$$

4. *bola cerrada de centro x y radio r* :

$$C(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\};$$

5. *bola abierta entorno a un conjunto E y radio r :*

$$B_r(E) = \{x \in X : d(x, E) < r\};$$

6. *bola cerrada entorno a un conjunto E y radio r :*

$$C_r(E) = \{x \in X : d(x, E) \leq r\}.$$

Definición 1.1.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que un conjunto U es *abierto* si para todo $x \in U$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$. Un conjunto $F \subset X$ es cerrado si su complemento es abierto.

Teorema 1.1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico.*

1. *La unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

2. *La intersección de un conjunto finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

3. *La unión finita de cerrados es cerrada.*

4. *La intersección de conjuntos cerrados es un subconjunto cerrado.*

5. *El conjunto formado por un único punto $\{x\}$ es un conjunto cerrado. Todo subconjunto finito $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es cerrado.*

6. *La bola abierta $B(x, r)$ es un conjunto abierto.*

7. *La bola cerrada $C(x, r)$ es un conjunto cerrado.*

Un conjunto $N(x)$ es un *entorno* o *vecindad* de un punto $x \in X$, si existe una bola abierta tal que $B(x, r) \subset N(x)$. Desde luego $B(x, r)$ es un entorno abierto de x y $C(x, r)$ un entorno cerrado. Un conjunto abierto es entorno de todos sus puntos.

Sea $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Diremos que x es un *punto de acumulación* de A, si toda vecindad abierta de x intersecta A:

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset \ \text{ para todo } \ r > 0.$$

El conjunto de los puntos de acumulación de A se llama *clausura topológica* y se denota $\overline{A}$.

Un punto $x \in X$ es *punto límite* de un subconjunto A, si para todo $r > 0$ se tiene $B(x, r) - \{x\} \cap A \neq \emptyset$. Denotamos A' el conjunto de puntos límites, también conocido como *conjunto derivado* de A.

Un punto $x \in X$ es *punto frontera* de A, si toda vecindad abierta de x corta a A y a su complemento; esto es,

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset \ \text{ y } \ B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset \ \text{ para todo } r > 0,$$

donde $A^c = X - A$ es el complemento de A en X.

Un punto $x \in A$ es un *punto interior* si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Denotamos A^0 el conjunto de los puntos interiores de A.

El siguiente enunciado resume algunas de las propiedades básicas de que relacionan las definiciones anteriores.

Teorema 1.1.2. *Sea $A \subset X$ un subconjunto de un espacio métrico (X, d).*

1. *La clausura $\overline{A}$ es un conjunto cerrado.*
2. *A es cerrado si y sólo si $\overline{A} = A$.*
3. *La clausura de la bola abierta $B(x, r)$ es la bola cerrada $C(x, r)$.*
4. *El conjunto derivado A' es cerrado.*
5. *$\overline{A} = A \cup A'$.*
6. *Si A es finito, entonces $A' = \emptyset$.*
7. *La frontera $Fr(A)$ es un conjunto cerrado.*
8. *$\overline{A} = A \cup Fr(A)$.*
9. *$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.*
10. *El conjunto A^0 es abierto.*
11. *$\overline{A} = A^0 \cup Fr(A)$.*
12. *$diam(\overline{A}) = diam(A)$.*
13. *$\overline{A} = \{x \in X : dist(x, A) = 0\ \}$.*

Diremos que un subconjunto $D \subset X$ es *denso* si su clausura es igual a todo el espacio, i.e. $\overline{D} = X$. Un espacio métrico es *separable* si existe un subconjunto denso numerable. Por ejemplo $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ con la métrica euclideana es un espacio métrico separable. Para ello basta tomar los puntos con coordenadas racionales y usar la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.3. Sea $A \subset X$ un conjunto de un espacio métrico (X, d). Una familia indexada de conjuntos $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento de A si $A \subseteq \bigcup_i X_i$.

Un cubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ es *abierto* si U_i son conjuntos abiertos. Análogamente, un cubrimiento $\mathcal{F} = \{F_i\}$ es *cerrado* si los F_i son cerrados. El cubrimiento es numerable (resp. finito) si el conjunto de índices I es numerable (resp. finito). Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de un subconjunto $Y \subset X$. Un *subcubrimento* de $\mathcal{A}$ es una subfamilia $\{A_j\}_{j \in J}$ donde $J \subset I$ es un subconjunto propio de índices.

Definición 1.1.4. Se dice que un conjunto $K \subset X$ de un espacio métrico X es *compacto* si todo cubrimiento abierto de K tiene un subcubrimiento finito.

Teorema 1.1.3.
1. *Todo conjunto compacto es cerrado;*
2. *Un subconjunto cerrado de conjunto compacto es compacto;*
3. *Si F es cerrado y K es compacto entonces $F \cap K$ es compacto;*
4. **Propiedad de intersección finita** *Sea $\mathcal{K} = \{K_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos compactos tal que toda subfamilia finita de $\mathcal{K}$ tiene intersección no vacía, entonces $\bigcap_i K_i$ es no vacía;*
5. **Propiedad de encaje de Cantor** *Sea $\{K_n\}$ una familia decreciente (encajada) de compactos no vacíos, i.e $K_{n+1} \subset K_n$ para todo $n > 0$, entonces la intersección $\bigcap_n K_n$ es no vacía;*

6. **Propiedad de Bolzano-Weierstrass** *un conjunto $K \subset X$ es compacto si y sólo si para todo subconjunto infinito $E \subset K$ tiene al menos un punto de acumulación;*

7. *Los intervalos cerrados y acotados de la recta son compactos. Los cubos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$ $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ son compactos;*

8. **Teorema de Heine-Borel** *Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

1.2. Espacios Métricos completos

Definición 1.2.1. Una *sucesión* es un conjunto numerable de puntos en $x_n \in X$ definidos por una función inyectiva $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Diremos que $\{x_n\}$ converge a $x \in X$ y lo denotaremos como $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $x_n \in B(x, \epsilon)$ para todo $n \geq N$, en otras palabras, $x_n \to x$ si y sólo si $d(x_n, x) \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Definición 1.2.2. Una *sucesión* $\{x_n\}$ *es de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todo $n \geq N$.

Teorema 1.2.1. 1. *Toda sucesión convergente es de Cauchy*

2. *Sea $X_n = \{x_k : k \geq n\}$. La sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy si y sólo si diam$(X_n) \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$*

3. *Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ es convergente*

4. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Definimos*

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \inf \{\sup X_n\}$$

y

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \sup \{\inf X_n\}$$

donde $X_n = \{x_k : k \geq n\}$. El límite $x^* = \limsup_{n\to+\infty} x_n$ es el supremo de los puntos de acumulación de $\{x_n\}$. Análogamente, $x_* = \liminf_{n\to+\infty} x_n$ es el infimo de los puntos de acumulación de la sucesión.

Definición 1.2.3. Decimos que un espacio métrico (X, d) es *completo* si toda sucesión de Cauchy en X converge a un punto de X

1.2.1. Ejemplos de espacios métricos completos

1. $\mathbb{R}^n$ con la distancia euclideana

2. el espacio de las funciones contínuas $X = C^0[0,1]$ con la distancia del supremo:

$$d(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Una sucesión de funciones f_n converge a f con la distancia del supremo si y sólo si f_n *converge uniformemente a f*. El límite uniforme de una sucesión de funciones continuas, es continuo. Esto prueba la completitud de $C^0[0,1]$ con la distancia del supremo. Los detalles se dejan a cargo del lector.

Definición 1.2.4. Una función $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) es *contínua en* x si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ tal que $d_X(x, y) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ a un punto de X. f es *contínua* si es contínua para todo $x \in X$. La función f es *uniformemente contínua* si podemos escoger $\delta = \delta(\epsilon)$ independiente de x.

Teorema 1.2.2. *1. las siguientes proposicciones son equivalentes:*

a) $f : X \longrightarrow Y$ *es contínua*

b) $\forall\ \epsilon > 0 \ \ \exists\ \delta$ *tal que* $B(x, \delta) \subset f^{-1}B(f(x), \epsilon)$

c) *la preimagen de un conjunto abierto es abierta*

d) *la preimagen de un conjunto cerrado es cerrado*

e) *para toda sucesión convergente* $x_n \to x$ *se cumple que* $f(x_n) \to f(x)$

2. la imagen de compacto por una función contínua es un conjunto compacto

3. la restricción de una función contínua a un conjunto compacto es acotada

4. toda función contínua alcanza su máximo y su mínimo en un compacto

5. una función contínua sobre un compacto es uniformemente contínua

6. **Propiedad de cubrimiento de Lebesgue** *: sea* (X, d) *un espacio métrico completo y* $K \subset X$ *un subconjunto compacto. Entonces, para todo cubrimiento abierto* $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ *de* K *existe un* $r > 0$*, llamado* número de Lebesgue de U *tal que para todo* $x \in K$ *existe* $U_i \in \mathcal{U}$ *tal que* $B(x, r) \subset U_i$

1.3. Ejercicios

1. Sea (X, d) un espacio métrico separable. Pruebe que todo abierto $U \subset X$ puede escribirse como una unión numerable de bolas abiertas.

2. Pruebe que todo abierto de la recta $\mathbb{R}$ con la métrica euclideana es una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos.

3. El límite de una sucesión convergente es único

4. Sea $X = \{x \in \mathbb{Q} : 1 < x < \sqrt{2}\}$. Pruebe que existe en X una sucesión de Cauchy que no converge en X.

5. Un conjunto F es cerrado si para toda sucesión convergente $\{x_n\} \subset F$ el límite x pertenece a F

6. Un punto $x \in \overline{A}$ si y sólo existe una sucesión de puntos $\{x_n\}$ contenidos en A que converge a x

7. Un conjunto K de un espacio métrico es compacto si y sólo toda sucesión infinita $\{x_n\} \subset K$ tiene una subsucesión convergente

8. El objetivo de este ejercicio es exhibir un espacio métrico con un conjunto cerrado y acotado que no es compacto. Para ello consideramos $X = C^0[0, 1]$ el espacio de las funciones contínuas

con la distancia del supremo $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$. Dados enteros $n > 0$ y $0 \leq k < 2^n$ definimos

$$I_{n,k} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$$

$$J^-_{n,k} = \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{k}{2^n}\right]$$

$$J^+_{n,k} = \left[\frac{k+1}{2^n}, \frac{2k+3}{2^{n+1}}\right]$$

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; x \in I_{n,k} \\ 2^{n+1}x - 2k + 1 & \text{si } \; x \in J^-_{n,k} \\ -2^{n+1}x + 2k + 1 & \text{si } \; x \in J^+_{n,k} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Sea $S = \{f \in X : d(f,0) = 1\}$. S es cerrado y acotado y $\{f_{n,k}\} \subset S$, com el es fácil verificar. Pruebe que esa sucesión de funciones no tiene subsucesiones convergentes en S. **Indicación**: observe que $f_{n,k} \to 0$ *puntualmente*, es decir, para cada $x \in [0,1]$ se tiene que $\lim_{n\to+\infty} f_{n,k}(x) = 0$, sin embargo ninguna subsucesión de $f_{n,k}$ puede converger uniformemente a cero porque $d(f_{n,k}, 0)01$ para todo n, km donde $0 = 0(x)$ es la función constantemente igual a cero.

9. Pruebe que el conjunto de las combinaciones lineales finitas con coeficientes en $\mathbb{Q}$ de las funciones $f_{n,k}$ es denso en $C^0[0,1]$. Es decir, dada una función continua $f \in C^0[0,1]$ y un número $\epsilon > 0$ existen funciones $f_i \in \{f_{n,k}\}$ y $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ tales que la combinación lineal $\phi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i$ satisface $d(\phi, f) < \epsilon$. Esto prueba que $(C^0[0,1], d)$ es un espacio métrico separable.

Capítulo 2

Números reales como límites de construcciones geométricas

2.1. El algoritmo sumerio de la raíz cuadrada

Se cree que el algoritmo para calcular aproximaciones de la raíz cuadrada que presentamos a continuación era conocido por los matemáticos sumerios hace 4.000 años; ver [13].

Sea $a > 0$ una número positivo y supongamos que $x > 0$ es la solución positiva de la ecuación $x^2 = a$. Despejando x tenemos

$$x = \frac{x}{a}. \tag{2.1}$$

Luego, sumando x a ambos lados y dividiendo por 2 obtenemos la siguiente ecuación equivalente para x:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right). \tag{2.2}$$

Sea $N = N(x)$ la función real definida por la fórmula

$$N(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right). \tag{2.3}$$

Es claro que x satisface la ecuación $x^2 = a$ si, y sólo si, $N(x) = x$. Esto se conoce como un *problema de punto fijo para la función $N = N(x)$.*

Los teoremas de puntos fijo son, como tendremos oportunidad de ver, herramientas de importancia invalorable pues permiten demostrar la existencia de muchos objetos matemáticos.

La solución de la ecuación de punto fijo $N(x) = x$ puede encontrarse mediante *aproximaciones sucesivas*. Para ello se define recursivamente la sucesión $x_{n+1} = N(x_n)$, es decir:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{2.4}$$

Nóte que el término general de la sucesión x_n puede escribirse como

$$x_n = N^n(x_0) \quad \text{donde} \quad N^n = \overbrace{N \circ \cdots \circ N}^{n-veces}$$

es la composición de la función N consigo misma n-veces. Una sucesión $\{x_n\}$ definida por una función N; esto es, $x_{n+1} = N(x_n)$, se dice que está definida *recursivamente*. Si $N = N(x)$ es continua y la sucesión $\{x_n\}$ converge, entonces su límite es solución de la ecuación $N(x) = x$. En efecto, si $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, entonces

$$N(x) = N(\lim_{n\to+\infty} x_n) = \lim_{n\to+\infty} N(x_n) = \lim_{n\to+\infty} N^{n+1}(x_0) = x.$$

Fig. 2.1: La intersección de la gráfica de $y = N(x)$ con la diagonal es la solución de $N(x) = x$

Veamos un ejemplo. Sea $a = 2$ y pongamos $x_0 = 2$ en la secuencia definida recursivamente en (2.4), entonces:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2}\right) = \frac{17}{12}$$

y

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{17/12}\right) = \frac{577}{408}$$

y así sucesivamente, obteniendo las siguientes aproximaciones de $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} &= 1{,}5 \\
\frac{17}{12} &= 1{,}41666\cdots \\
\frac{577}{408} &= 1{,}414215686274509 \quad 8039215686274509 \quad 8039215686274509\cdots
\end{aligned}$$

Comparemos con la aproximación de $\sqrt{2}$ calculada con 100 dígitos por el programa Maple

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753 76 \\
& 94807317667973799073247846210703885038753432764157 3 \\
& \ldots
\end{aligned}$$

El método de aproximaciones sucesivas es de gran generalidad; se usa para probar la existencia de soluciones de distintos problemas del Análisis no lineal.

Una pregunta natural respecto a las sucesiones $\{x_n\}$ definidas recursivamente por una función $N = N(x)$ de la recta en sí misma es si ellas son convergentes o no. Como veremos en los próximos

Capítulos las sucesiones definidas por funciones simples, como $N(x) = x^2 + c$, pueden llegar a tener comportamientos sorprendentes.

El siguiente lema será de utilidad para determinar la convergencia de las aproximaciones generadas por el algoritmo sumerio de la raíz cuadrada.

Lema 2.1.1. *Sea $N = N(x)$ una función continuamente diferenciable en un intervalo abierto de la recta $(a, b) \subset \mathbb{R}$ y sea $N(p) = p$ un punto fijo de N en el intervalo (a, b). Supongamos que $|N'(p)| < 1$ entonces, existe un intervalo abierto $J \subset (a, b)$ y un número $0 < \lambda < 1$ tal que:*

$$|N^n(x) - p| \leq \lambda^n |x - p|, \ \forall \ n \geq 1, \ \forall \ x \in J.$$

En particular, $x_n \to p$ cuando $n \to +\infty$.

Demostración. Como $x \longmapsto N'(x)$ es continua, por hipótesis, dado cualquier $0 < \lambda < 1$ podemos encontrar un intervalo $J = (p - \delta, p + \delta) \subset (a, b)$ tal que $|N'(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in J$. Ahora, sea $x \in J$ un punto cualquiera y $x_n = N^n(x)$. Vamos a probar que $\{x_n\}$ converge a p con velocidad exponencial.

Por el Teorema del Valor Medio tenemos para cada $n \geq 1$:

$$|x_n - p| = |N(x_{n-1}) - N(p)| = |N'(\xi_n)||x_{n-1} - p| \leq \lambda |x_{n-1} - p|,$$

donde ξ_n es algún punto entre x_{n-1} y p. Observe que esta desigualdad implica que x_n está más próximo de p de lo que está x_{n-1}. De hecho, la taza de proximidad se reduce en el factor λ; en particular $x_n \in J$ para cada $n \geq 0$. Procediendo entonces inductivamente se tiene

$$|x_n - p| \leq \lambda |x_{n-1} - p| \leq \lambda^2 |x_{n-2} - p| \leq \cdots \leq \lambda^n |x_0 - p|,$$

de lo cual se deduce el lema. $\square$

Usando los mismos argumentos anteriores se muestra que

$$|N(x) - N(y)| < \lambda |x - y| \qquad \text{para todo} \qquad x\,,\, y \in J. \tag{2.5}$$

Esto dice que, al menos localmente cerca de p, la función N se comporta geométricamente como una *contracción*.

Como consecuencia p es el único punto fijo de N en el intervalo J. En efecto, supongamos que $N(q) = q$ es otro punto fijo en J, entonces:

$$|p - q| = |N(p) - N(q)| \leq \lambda |p - q| \leq \lambda^2 |p - q| \cdots \leq \lambda^n |p - q|$$

para todo $n > 0$. Como $\lambda^n \to 0$, concluímos que $|p - q| = 0$.

En otras palabras, *una contracción N de un intervalo J en si mismo tiene un único punto fijo en $p \in J$ que es límite de aproximaciones sucesivas.* Esta afirmación es un caso particular del *Principio de Contracción de Banach* resultado importante por la fecundidad de sus aplicaciones.

El descubrimiento de números irracionales obligó a los matemáticos griegos a desarrollar métodos para construir aproximaciones racionales de números tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $1 + \sqrt{5}/2$ (el número de oro) y π. La más famosa de esas construcciones es el método de exhausión usado por Arquímides para obtener la aproximación

$$3\frac{10}{71} < \pi < \frac{22}{7},$$

donde π representa la razón de la longitud de una circunferencia y su diámetro, bautizada así por el propio Arquímides y $3\frac{10}{71}$ es la notación tradicional para el número $3 + \dfrac{10}{71}$.

El método de exhausión consiste en aproximar una circunferencia por polígonos inscritos y circunscritos. En lo que sigue usaremos propiedades de límites de las funciones seno y coseno que, desde luego, no era conocidas por Arquímides pero que servirán para ilustrar de manera natural la esencia del método. Usando trigonometría podemos ver que la longitud de un polígono regular

PSfrag replacements

θ

r

Fig. 2.2: Poligonos regulares inscritos y circunscritos.

inscrito de n lados en una circunferencia de radio $r > 0$ es igual a $\gamma_n = 2nr\sin(\theta)$, donde $\theta = \pi/n$. Así mismo se prueba que la longitud del polígono circunscrito es igual a $\Gamma_n = 2nr\tan(\theta)$. Sea $U = 2\pi\, r$ la longitud de la circunferencia, entonces se tiene que

$$2rn\sin(\theta) < U < 2rn\tan(\theta)\,.$$

Dividiendo por $2r$ tenemos la aproximación

$$n\sin(\theta) < \pi < n\tan(\theta)\,.$$

Si duplicamos el número de lados tenemos, dividiendo el ángulo θ por 2:

$$2n\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) < \pi < 2n\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Si continuamos duplicando el número de lados recursivamente tenemos

$$2^k n\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right) < \pi < 2^k n\tan\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

si conocemos el seno y el coseno de un ángulo inicial como $\pi/3$, $\pi/4$ o $\pi/6$ podemos dar aproximaciones del número π.

2.2. Desarrollos p-adicos de números reales

La necesidad de proporcionar aproximaciones racionales de números irracionales motivó el desarrollo de métodos generales que permiten realizar esa tarea con tanta exactitud como sea posible.

En esta sección repasaremos uno de esos métodos conocidos como desarrollos p-adicos de números reales.

Teorema 2.2.1. *Sea $p > 0$ un entero positivo. Todo número real x en el intervalo $[0,1]$ se puede representar como el límite de una serie convergente de la forma*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{p^n} \tag{2.6}$$

donde i_n son enteros que varían en el conjunto $\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$.

Recordemos que la serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ es convergente para $|a| < 1$, de modo que la serie (2.6) es convergente. Observemos además que hay a lo sumo dos representaciones de la forma (2.2.1). La sucesión $\{i_n\}$ define los llamados *desarrollos p-adicos* de un número real:

$$x = .i_1 i_2 i_3 \cdots i_n \cdots \tag{2.7}$$

Por ejemplo, si $p = 2$ la representación (2.7) corresponden a los llamados *desarrollos binarios* y con $p = 10$ obtenemos los desarrollos decimales de números reales con los cuáles estamos familiarizados desde la escuela.

Demostración del Teorema 2.2.1. Comencemos dividiendo el intervalo $[0,1]$ en p subintervalos $I_i = \left[\frac{i}{p}, \frac{i+1}{p}\right]$ con $i = 0, \cdots, p-1$. La familia de intervalos $\wp_1 = \{I_i\}$ es una descomposición del intervalo unitario en intervalos compactos no yuxtapuestos, es decir $int\, I \cap int\, J = \emptyset$ para todo par de intervalos $I, J \in \wp_1$, donde $int\, J$ denota el interior topológico del intervalo J. Ahora dividimos cada I_i en p subintervalos $I_{ij} = \left[\frac{i}{p} + \frac{j}{p^2}, \frac{i}{p} + \frac{j+1}{p^2}\right]$ con j variando en $\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$. Así obtenemos una nueva descomposición $\wp_2 = \{I_{ij} : i, j \in \{0, 1, \cdots, p-1\}\}$ de p^2 subintervalos que cubren el intervalo unitario. Siguiendo este proceso de manera recursiva definimos, para cada $n \geq 1$ una descomposición del intervalo en intervalos no cerrados no solapados $\wp_n = \{I_{i_1 \cdots i_n} : (i_1, \cdots, i_n) \in \{0, \cdots, p-1\}^n\}$, donde

$$I_{i_1 \cdots i_n} = \left[\frac{i_1}{p} + \frac{i_2}{p^2} + \cdots + \frac{i_n}{p^n}, \frac{i_1}{p} + \frac{i_2}{p^2} + \cdots + \frac{i_n + 1}{p^n}\right] \tag{2.8}$$

y tal que:

1. cada $\wp_n$ es una descomposición de $[0,1]$ formada por p^n intervalos compactos no solapados $I_{i_1 \cdots i_n}$ con $(i_1, \cdots, i_n) \in \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}^n$;

2. la familia de todos los intervalos p-adicos

$$\wp = \{I_{i_1 \cdots i_n} : (i_1, \cdots, i_n) \in \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}^n \; n > 0\}$$

   es una red de conjuntos ordenada por inclusión, en otras palabras, para cada secuencia $\{i_n\}_{n \geq 1}$ se tiene

$$\cdots \subset I_{i_1 \cdots i_n} \subset I_{i_1 \cdots i_{n-1}} \subset \cdots \subset I_{i_1} \; ;$$

   de esta forma la sucesión $\{\wp_n\}_{n>0}$ es decreciente, es decir,

$$\wp_{n+1} \leq \wp_n \qquad \forall n \geq 1;$$

3. la longitud de los intervalos $J \in \wp_n$ decae a cero exponencialmente con n; esto es,

$$|I_{i_1 \cdots i_n}| = p^{-n} \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty.$$

Sea $\{i_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión con $i_n \in \{0, \cdots, p-1\}$. Por el principio de encaje de Cantor la intersección $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_{i_1\cdots i_n}$ es un compacto no vacío. Como el diámetro de los intervalos tiende a cero, la intersección se reduce a un único punto, digamos x. Claramente

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_{i_1\cdots i_n} \text{ si, y sólo si, } x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i_n}{p^n}$$

pues, por definición $x \in I_{i_1\cdots i_n}$ si, y sólo si,

$$\frac{i_1}{p} + \frac{i_2}{p^2} + \cdots + \frac{i_n}{p^n} \leq x < \frac{i_1}{p} + \frac{i_2}{p^2} + \cdots + \frac{i_n+1}{p^n},$$

en otras palabras,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{p^k} - x \right| \leq \frac{1}{p^n}.$$

Recíprocamente, todo punto $x \in \mathbb{I} = [0,1]$ admite una o a lo sumo dos representaciones del tipo (2.7).

En efecto, sea $x \in \mathbb{I}$. Como $\mathbb{I} = \bigcup_{1\leq i_1,\cdots,i_n\leq p} I_{i_1,\cdots,i_n}$ para todo $n \geq 1$, entonces, para cada n existen uno o a lo sumo dos intervalos en $\wp_n$ que contienen a x: $x \in I_{i_1\cdots i_n}$, o bien, $x \in I_{i_1\cdots i_n} \cap I_{i_1\cdots i_n+1}$. Así obtenemos una o a lo sumo dos secuencias encajadas de intervalos que convergen a x, de hecho: $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_{i_1\cdots i_n}$. La no unicidad se pierde cuando x es un extremo de dos intervalos contigüos $I_{i_1\cdots i_n}$ y $I_{i_1\cdots i_n+1}$. En ese caso x admite dos desarrollos p-adicos equivalentes:

$$x = .i_1 i_2 \cdots i_n 000\cdots \quad \text{y} \quad x = .i_1 i_2 \cdots (i_n+1)(p-1)(p-1)(p-1)\cdots$$

Con lo cual la demostración está completa. □

2.3. El espacio de la aritmética p-adica

El conjunto de las secuencias $\{i_n\}$ con valores en un conjunto finito, digamos $\{0, \cdots, p-1\}$ es tan importante y aparece con tanta frecuencia en la investigación de la geometría de fractales que merece un estudio particular.

Definición 2.3.1. Definimos el producto cartesiano infinito

$$B^+(p) = \prod_{n=1}^{+\infty} \{0, \cdots, p-1\};$$

esto es, el conjunto de todas las funciones $\omega : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, \cdots, p-1\}$.

El espacio de sucesiones $B^+(p)$ tiene una estructura geométrica que será de gran utilidad en nuestro estudio de fractales.

Definición 2.3.2. Para cada $\omega, \omega' \in B^+(p)$ definamos

$$d(\omega, \omega') = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\omega_n - \omega'_n|}{p^n}. \tag{2.9}$$

Observe que la función d está bien definida. En efecto la serie (2.9) es convergente, pues $|\omega_n - \omega'_n| < p$ para todo n y para cada par de sucesiones $\omega, \omega' \in B^+(p)$ se tiene:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\omega_n - \omega'_n|}{p^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{p^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p^n}.$$

Dejamos a cargo del lector la sencilla verificación de que d es una métrica.

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1. *$(B^+(p), d)$ un espacio métrico compacto, completo, separable, perfecto y totalmente disconexo.*

La demostración se hará a través de una serie de lemas.

Lema 2.3.1. *Si $d(\omega, \omega') < p^{-N}$ entonces $\omega_k = \omega'_k$ para $k = 1, \cdots, N-1$. Recíprocamente, si $\omega_k = \omega'_k$ para $k = 1, \cdots, N$ entonces $d(\omega, \omega') < p^{-N}$*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que $d(\omega, \omega') < p^{-N}$ y que existe un entero $1 \leq k < N$ tal que $\omega_k \neq \omega'_k$. Entonces $|\omega_k - \omega'_k| \geq 1$, de donde

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\omega_n - \omega'_n|}{p^n} \geq \frac{1}{p^k} > \frac{1}{p^{-N}}$$

lo que lleva a una contradicción.

Para ver el recíproco, supongamos que $\omega_k = \omega'_k$ para $k = 1, \cdots, N$. Entonces

$$d(\omega, \omega') = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|\omega_n - \omega'_n|}{p^n} = \frac{1}{p^N} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\omega_{n+N} - \omega'_{n+N}|}{p^n}.$$

Como $|\omega_{n+N} - \omega'_{n+N}| < p$, entonces

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\omega_{n+N} - \omega'_{n+N}|}{p^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{p^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{1-(1/p)} < 1.$$

Luego, $d(\omega, \omega') < p^{-N}$. □

Definición 2.3.3. Llamaremos *cilindros* a los conjuntos

$$C_N(\omega) = \{\omega' \in B^+(p) : \omega_k = \omega'_k, \quad k = 1, \cdots, N\}.$$

Una notación alternativa para describir estos conjuntos es

$$C_{i_1 \cdots i_n} = \{\omega \in B^+(p) : \ \omega_k = i_k \ k = 1, \cdots, n \ \}$$

El lema anterior muestra que $B(\omega, p^{-(N+1)}) \subset C_N(\omega) \subset B(\omega, p^{-N})$. Esto quiere decir que los cilindros son una base de la topología de espacio métrico definida por d. Del mismo lema se deduce sin dificultad el siguiente resultado.

Lema 2.3.2. *La sucesión $\{\omega_n\}$ converge a ω si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existen $N_1 > 0$ y $N_0 > 0$ tales que $\omega_n(k) = \omega(k)$ para todo $0 \leq k \leq N_1$ y para todo $n \geq N_0$.*

Es decir, $\omega_n \to \omega$ si a partir de un N grande, los primeros elementos de la sucesión se estabilizan. Equipados con esta noción de convergencia podemos abordar la demostración del Teorema.

Lema 2.3.3. *$(B^+(p), d)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $\{\omega_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(B^+(p), d)$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon) > 0$ tal que $d(\omega_n, \omega_m) < \epsilon$ para todo $n, m \geq N(\epsilon)$. En particular, para cada $n \geq 1$ y $\epsilon = p^{-n}$ existen N_n y M_n con $M - n, N_n \to +\infty$ tales que $\omega_i(k) = \omega_j(k)$ para todo $1 \leq k < N_n$ y para todo $i, j \geq M_n$. Esto nos permite definir, para cada $n \geq 1$, la sucesión

$$\omega_\infty(k) = \omega_{M_n}(k), \quad \text{con} \;\; k = 1, \cdots, N_n.$$

Como $N_n \to \infty$ obtenemos de esa manera que $\omega_\infty \in B^+(p)$ que es punto de acumulación de la sucesión $\{\omega_n\}$, lo cual muestra que el espacio $B^+(p)$ es completo. □

Lema 2.3.4. *$(B^+(p), d)$ es un espacio métrico separable.*

Demostración. Para ver que $B^+(p)$ es separable basta exhibir un conjunto denso numerable. Para ello tomamos el conjunto de las sucesiones periódicas. En efecto, sean $\omega = \{\omega_n\}$ una sucesión cualquiera en $B^+(p)$ y $\epsilon > 0$. Sean $n > 0$ el primer entero positivo tal que $p^{-n} < \epsilon$ y ω_0 la sucesióm periódica

$$\omega_0 = \omega_1 \cdots \omega_n \omega_1 \cdots \omega_n \cdots .$$

Entonces es claro que $d(\omega, \omega_0) < p^{-n} < \epsilon$. Dejamos al lector la verificación de que el conjunto se secuencias periódicas es numerable. □

Lema 2.3.5. *$(B^+(p), d)$ es un espacio métrico compacto.*

Demostración. Para mostrar la compacidad basta verificar que toda sucesión infinita de elementos en $B^+(p)$ tiene una subsucesión convergente. Para ello consideramos una sucesióm $\Omega_0 = \{\omega_n\}$ de elementos en $B^+(p)$ y la listamos forman una "matriz infinita"

$$\begin{array}{rl} \omega_1 = & i_{11}\, i_{12} \, \cdots \, i_{1n} \, \cdots \\ \omega_2 = & i_{21}\, i_{22} \, \cdots \, i_{2n} \, \cdots \\ & \vdots \\ \omega_m = & i_{m1}\, i_{m2} \, \cdots \, i_{mn} \, \cdots \\ & \vdots \end{array}$$

Como el conjunto $\{0, \cdots, p-1\}$ es finito, existe al menos un elemento $j_1 \in \{0, \cdots, p-1\}$ que aparece infinitas veces en la primera columna

$$i_{11} \; i_{21} \; \cdots \; i_{m1} \; \cdots$$

Sean n_j, con $j \in \mathbb{N}$, los índices de los elementos Ω_0 para los cuales $i_{n1} = j_1$. La sucesión $\Omega_1 = \{\omega_{n_j}\}_{j \geq 1}$ es una subsucesión de Ω_0 y tiene la primera entrada de todos los elementos son iguales a j_1. Inductivamente, construímos una sucesión de conjuntos infinitos

$$\Omega_n \subset \Omega_{n-1} \subset \cdots \subset \Omega_1 \subset \Omega_0$$

tal que, Ω_{i+1} es una subsucesión infinita de Ω_i y está formada por elementos $\omega_n \in \Omega_0$ que tienen sus $i+1$ primeros elementos iguales. Para construir Ω_{n+1} listamos los elementos de $\Omega_n = \{\omega_{n_k}\}_{k \geq 1}$ como una "matriz infinita", observamos que las primeras n columnas son iguales, digamos a $j_1, \cdots, j_n \in \{0, \cdots, p-1\}$:

$$\begin{array}{rl} \omega_{n_1} = & j_1\, j_2\, \cdots\, j_n\, i_{n_1 n+1} \cdots \\ \omega_{n_2} = & j_1\, j_2\, \cdots\, j_n\, i_{n_2 n+1} \cdots \\ & \vdots \\ \omega_{n_k} = & j_1\, j_2\, \cdots\, j_n\, i_{n_2 n+1} \cdots \\ & \vdots \end{array}$$

Como $\{0, \cdots, p-1\}$ es finito, existe un elemento j_{n+1} que se repite infinitas veces en la secuencia $i_{n_k n+1} \in \{0, \cdots, p-1\}$, lo cual nos permite seleccionar una subsucesión infinita $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ tal que las primeras $n+1$ entradas de los elementos de Ω_{n+1} son iguales a $j_1, \cdots, j_{n+1}$ respectivamente.

Sea $\omega_\infty = \{j_n\}_{n \geq 1}$. La secuencia de subsucesiones Ω_n es decreciente y se tiene que $d(\omega_\infty, \omega) < p^{-n+1}$ para todo $\omega \in \Omega_n$. Elijamos ahora un elemento $\omega_{n_k} \in \Omega_k$ para cada $k > 0$. El conjunto $\{\omega_{n_k}\}$ es una subsucesión de Ω_0 y converge a ω_∞, como querímos probar. □

Lema 2.3.6. *$B^+(p)$ es un conjunto perfecto.*

Demostración. Basta ver que cualquier punto ω es límite de puntos $\omega_n \in B^+(p)$. Sea $\omega = i_1 i_2 \cdots i_n \cdots$ Definamos para cada $n \geq 1$ la sucesión

$$\omega_n = i_1 i_2 \cdots i_n 000 \cdots .$$

Es claro entonces que $d(\omega_n, \omega) \to 0$ cuando $n \to +\infty$. □

Un subconjunto $A \subset X$ de un espacio métrico (X, d) es *conexo* si no existen dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos U y V, tales que $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$. En otras palabras, A es conexo si no puede descomponerse en dos piezas separadas. Dado un punto $x \in X$ existe un abierto maximal conexo $C(x)$ que contiene a x llamado la *componente conexa del punto x*. Es simple verificar que $C(x)$ es la unión de todos los conjuntos abiertos conexos que contienen a x. Este conjunto es abierto y conexo y tiene la propiedad señalada. Un espacio es *totalmente disconexo* si la componente conexa de x se reduce al punto; es decir, si $C(x) = \{x\}$ para todo $x \in X$. Equivalentemente, *un espacio métrico (X, d) es totalmente disconexo si tiene una base de entornos que son al mismo tiempo abiertos y cerrados.*

Lema 2.3.7. *$B^+(p)$ es totalmente disconexo.*

Demostración. Por las observaciones precedentes basta exhibir una base de entornos abiertos y cerrados. Para ello tomamos la base formada por los cilindros $C_N(\omega)$. En efecto, cada cilindro es abierto y, como es fácil verificar, el complemento de un cilindro es abierto, pues es una unión finita de cilindros:

$$[C_N(\omega)]^c = \bigcup \{\; C(i_1, \cdots, i_n) \;:\; (i_1, \cdots, i_n) \neq (\omega(1), \cdots, \omega(n)) \;\},$$

donde $C(i_1, \cdots, i_n) = \{\; \omega \in B^+(p) \;:\; \omega_k = i_k \; k = 1, \cdots, n \;\}$. En consecuencia cada cilindro $C_N(\omega)$ o, si prefiere $C(i_1, \cdots, i_n)$, es abierto y cerrado. Como forman una base de la topología concluímos que $B^+(p)$ es totalmente disconexo. □

Sigue por tanto, de los lemas anteriores, la demostración del teorema 2.3.1.

El siguiente teorema explica porque hemos llamado a $B^+(p)$ el espacio de desarrollos p-adicos.

Teorema 2.3.2. *Sea $p > 0$ un entero positivo. Existe una aplicación continua, abierta y sobreyectiva $h : B^+(p) \longrightarrow [0,1]$ definida por los desarrollos p-adicos de números reales.*

Demostración. En efecto, sea $\omega = \{i_n\}_{n\geq 1}$ un punto $B^+(p)$. Definimos $h(\omega)$ como el único punto definido por la intersección de la familia encajada de intervalos $\{I_{i_1\cdots i_n}\}$ construída con los desarrollos p-adicos:

$$\{h(\omega)\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_{i_1\cdots i_n}.$$

La aplicación h es sobreyectiva porque todo número real $x \in [0,1]$ admite un (y a lo sumo dos) desarrollo p-adico $x = 0.i_1 i_2 i_3 \cdots$. Esto se deduce de que

$$\mathbb{I} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{(i_1,\cdots,i_n)\in\{0,\cdots,p-1\}^n} I_{i_1\cdots i_n}.$$

La aplicación h no es inyectiva, debido a la no unicidad de los desarrollos p-adicos. Mostremos ahora que la aplicación h es continua y abierta.

Para la continuidad probaremos que la pre-imagen de un entorno cerrado es un conjunto cerrado. En efecto, si $x = 0.i_1 i_2 i_3 \cdots$ entonces el intervalo $I_{i_1\cdots i_n}$ es un entorno cerrado de x y su imagen inversa es el cilindro:

$$h^{-1}(I_{i_1\cdots i_n}) = C(i_1,\cdots,i_n),$$

que es un conjunto cerrado. Así mismo, como $h(C(i_1,\cdots,i_n)) = I_{i_1\cdots i_n}$, entonces la aplicación h es cerrada. Finalmente, como h es sobreyectiva, también es abierta. □

Para cerrar este capítulo nos gustaría destacar que las propiedades de $B^+(p)$ de ser compacto, perfecto y totalmente disconexo, se acostumbran agrupar en topología bajo un concepto.

Definición 2.3.4. Sea (X,d) un espacio métrico completo. Diremos que un subconjunto $K \subset X$ es un *conjunto de Cantor o cantorii* si es compacto, perfecto, totalmente disconexo.

Así que los espacios p-adicos son conjuntos de Cantor con la topología métrica indicada anteriormente.

Algunos hechos básicos (y relevantes) concernientes a conjuntos de Cantor se enuncian a continuación; éstos pueden consultarse en [7] y [11].

Teorema 2.3.3. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces:*

1. *Todo conjunto de Cantor es no numerable.*
2. *Cualesquiera dos conjuntos de Cantor son homeomorfos.*
3. *Todo subconjunto abierto y cerrado no vacío en un conjunto de Cantor es un conjunto de Cantor.*

2.4. Ejercicios

1. Sea $f = f(x)$ una función continuamente diferenciable. El algoritmo de Newton es un procedimiento para generar recursivamente aproximaciones a la solución de la ecuación $f(x) = 0$.

Para ello procedemos del siguiente modo. Sea $J = (a, b)$ un intervalo pequeño donde f cambia de signo, i.e. $f(a)f(b) < 0$. Por el Teorema de Bolzano, existe $p \in J$ tal que $f(p) = 0$. Supongamos que podemos elegir J suficientemente pequeño tal que p es la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo J y que f no tenga puntos críticos en el intervalo, es decir, $f'(x) > 0$ (o $f'(x) < 0$) para todo $x \in J$. Estas condiciones se pueden chequear mediante una análisis de la gráfica de f.

Ahora definimos recursivamente una sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente manera: x_{n+1} es, por definición, la intersección de la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(x_n, f(x_n))$, donde $x = x_0 \in J$ es un punto inicial arbitrario. Entonces:

a) Demuestre que $\{x_n\}$ se genera recursivamente por la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n \geq 0.$$

b) Sea $N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Demuestre que $x = p$ es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ si, y sólo si, $N(p) = p$.

c) Sea $f(x) = x^2 + c$. ¿Serán siempre convergentes las sucesiones $\{x_n\}$ generadas recursivamente por N_f en la recta $\mathbb{R}$?

d) ¿Qué pasa si en vez de una variable real consideramos z en el plano complejo $\mathbb{C}$? Vale decir, ¿son siempre convergentes las sucesiones

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^2 + c}{2z_n} \qquad \text{para todo} \qquad z_0\,,\ c \in \mathbb{C}\ ?$$

2. Encuentre una fórmula recursiva para la sucesión

$$\sqrt{2}\,,\ \sqrt{2+\sqrt{2}}\,,\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,,\ \cdots$$

Demuestre por inducción que

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-raices} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

y use esta identidad para deducir la aproximación de Vieta (**??**) para $2/\pi$.

3. Sean r_n y R_n las sucesiones definidas recursivamente por las ecuaciones

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{R_n + r_n}{2} \\ R_{n+1} &= \sqrt{R_n r_{n+1}}. \end{aligned}$$

Demuestre lo siguiente:

a) $r_n < R_n$ para todo n.

b) r_n es creciente y R_n decreciente.

c) las sucesiones $\{r_n\}$ y $\{R_n\}$ convergen al mismo límite.

4. Demuestre directamente, sin usar criterios de comparación, que la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente y demuestre que las diferencias

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)$$

convergen a un límite $C > 0$. Esta constante se llama la constante de Euler. Aún no se sabe si C es racional.

5. Demuestre usando criterios de comparación que la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge para todo $s > 1$ y define una función continua en el intervalo $(1, +\infty)$.

Capítulo 3

Dos ejemplos clásicos: el conjunto de Cantor y el tapiz de Sierpinski

La construcción del primero de estos ejemplos fue expuesta por primera vez en 1883. Este es sin duda el más importante de todos los ejemplos clásicos de fractales, aunque no es muy popular porque no admite una representación gráfica llamativa y su naturaleza como objeto geométrico es difícil de captar: el conjunto de Cantor $\mathbb{K}$ es compacto, perfecto y totalmente disconexo; en otras palabras, no contiene intervalos y tiene la misma cardinalidad de los números reales. Esto último hecho resulta en sí un poco sorprendente pues, geométricamente, ¡$\mathbb{K}$ es totalmente discontinuo!

El segundo ejemplo es el tapiz de Sierpinski uno de los fractales clásicos más conocidos.

Ambas conjuntos son límites de construcciones geométricas recursivas las cuáles tienen un gran parecido con los desarrollos p-adicos estudiados en el Capítulo anterior. El concepto de Sistemas Iterados de Funciones nos permitirá unificar estos ejemplos dentro de una teoría constructiva de conjuntos auto-similares.

3.1. Las arenas de Cantor

Empecemos fijando un intervalo, por ejemplo $\mathbb{I} = [0, 1]$. La construcción de $\mathbb{K}$ se inicia dividiendo $\mathbb{I}$ en tres segmentos iguales y quitando el tercio del medio. Obtenemos así dos intervalos I_0, I_1 de longitud $1/3$. Ahora retiramos el tercio central de los intervalos I_0 e I_1 obteniendo 2^2 subintervalos de longitud $1/9$ que denotamos I_{ij} con $i, j \in \{0, 1\}$. Para $n = 3$ obtenemos 2^3 intervalos de longitud $1/27$. El proceso continúa de la manera recursiva retirando el tercio del medio de los intervalos de la etapa anterior, obteniendo así 2^n intervalos cerrados $I_{i_1\cdots i_n}$ indexados por n-uplas $(i_1, \cdots, i_n)$ que varían en $\{0, 1\}^n$, el producto cartesiano de n copias del conjunto $\{0, 1\}$. Los intervalos $I_{i_1\cdots i_n}$ son disjuntos y están ordenados de modo que $I_{i_1\dots i_{n-1}j} \subset I_{i_1\cdots i_{n-1}}$ para todo $j \in \{0, 1\}$. Así cada intervalo $I_{i_1\cdots i_n}$ del nivel n de la construcción está contenido en exactamente un intervalo de la etapa anterior y sus longitudes decaen rápidamente a cero pues $|I_{i_1\cdots i_n}| = 3^{-n}$. Por ejemplo, para $n = 1$, se tiene:

$$I_0 = [0, 1/3] \qquad\qquad I_1 = [2/3, 1]$$

Para $n = 2$:

$$I_{00} = [0, 1/9] \quad I_{01} = [2/9, 3/9] \quad I_{10} = [6/9, 7/9] \quad I_{11} = [8/9, 9/9]$$

y para $n = 3$:

$$\begin{array}{ccc} I_{000} = [0, 1/27] & I_{001} = [2/27, 3/27] & I_{010} = [6/27, 7/27] \\ I_{011} = [8/27, 9/27] & I_{100} = [18/27, 19/27] & I_{101} = [20/27, 21/27] \\ I_{110} = [24/27, 25/27] & I_{111} = [26/27, 27/27] & \end{array}$$

El *conjunto de Cantor ternario* $\mathbb{K}$ es lo que queda del intervalo $\mathbb{I} = [0,1]$ al aplicar esta construcción infinitas veces.

PSfrag replacements

$\vdots$

Fig. 3.1: Primeras etapas en la construcción del conjunto de Cantor ternario $\mathbb{K}$

Proposición 3.1.1. *El conjunto de Cantor ternario* $\mathbb{K}$ *es un conjunto de Cantor del intervalo* $[0,1]$*; esto es, compacto, perfecto y totalmente disconexo; además, tiene la potencia del continuo.*

Demostración. Primero mostraremos que el conjunto de Cantor ternario es la intersección de una familia encajada de compactos; esto implica en particular que $\mathbb{K}$ es un conjunto compacto no vacío, por el principio de encaje de Cantor. Para probar nuestra afirmación observemos que $\mathbb{K}$ se puede representar con la ecuación conjuntista

$$\mathbb{K} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbb{K}_n, \quad \text{donde} \quad \mathbb{K}_n = \bigcup_{(i_1,\cdots,i_n)\,\in\,\{0,1\}^n} I_{i_1\cdots i_n}.$$

Claramente $\mathbb{K}_n$ es una unión finita de intervalos cerrados y acotados, por lo tanto es compacto, y $\mathbb{K}_{n+1} \subset \mathbb{K}_n$ para todo n. Luego $\{\mathbb{K}_n\}$ es una sucesión encajada de compactos, probando que $\mathbb{K}$ es compacto y no vacío como afirmamos. Esta misma representación conjuntista permite definir la función $h : B^+(2) \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante

$$\{h(\omega)\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_{i_1\cdots i_n}, \quad \text{donde} \quad \omega = \{i_j\}_{j\geq 1} \in B^+(2).$$

Como en el Teorema 2.3.2 h es continua, sobreyectiva y abierta. En realidad h es un homeomorfismo. Para ver esto basta demostrar que h es uno-a-uno. Pero esto sigue de que, para cada $n \geq 1$, los intervalos $I_{i_1\cdots i_n}$ de la n-ésima etapa de construcción del conjunto de Cantor ternario son disjuntos. Esto termina la demostración en virtud de lo probado en el Teorema 2.3.1 en Capítulo 2. □

A la luz de los resultados del Capítulo anterior podemos ver que el conjunto de Cantor ternario $\mathbb{K}$ es precisamente el conjunto de números reales $x \in \mathbb{I}$ cuyos desarrollos ternarios sólo contienen los dígitos 0 y 2. Esta definición aritmética permitirá demostrar algunas de sus propiedades topológicas más importantes.

3.1.1. Variaciones de la construcción de $\mathbb{K}$

Ahora veremos algunas variantes de la construcción anterior. Para la primera de ellas fijemos $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$. Vamos a construir un conjunto $\mathbb{K}_\lambda$ en el intervalo unitario $\mathbb{I}$ extrayendo, en cada etapa de la construcción, un segmento central de proporción λ. Escojamos un intervalo $J^\lambda \subset \mathbb{I}$ de longitud $|J^\lambda| = \lambda$. Por ejemplo, $J^\lambda = (\frac{1}{2}(1-\lambda), \frac{1}{2}(1+\lambda))$ sirve. Escribimos entonces

$$\mathbb{I} - J^\lambda = I_0^\lambda \cup I_1^\lambda$$

y procedemos recursivamente retirando un segmento central de proporción λ. Supongamos construídos los intervalos $I^\lambda_{i_1\cdots i_{n-1}}$, $(i_k = 0,1)$. Luego extraemos, para cada $(i_1,\cdots,i_{n-1}) \in \{0,1\}^n$ el intervalo (abierto) central

$$J^\lambda_{i_1\cdots i_{n-1}} \subset I^\lambda_{i_1\cdots i_{n-1}} \quad \text{tal que} \quad \frac{|J^\lambda_{i_1\cdots i_{n-1}}|}{|I^\lambda_{i_1\cdots i_{n-1}}|} = \lambda \ ,$$

formando así una familia decreciente de conjuntos tales que

$$\mathbb{K}_\lambda = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{(i_1,\cdots,i_{n-1})\in\{0,1\}^n} I^\lambda_{i_1\cdots i_n} \ .$$

El conjunto $\mathbb{K}_\lambda$ construido mediante el procedimiento recursivo descrito es homeomorfo al Cantor ternario, como veremos más adelante.

Otra variante de las construcciones de $\mathbb{K}$ y $\mathbb{K}_\lambda$ es como sigue. Consideremos una colección $\Lambda = (\lambda_0,\cdots,\lambda_{p-1})$, $p>1$, de números reales positivos con $\sum_j \lambda_j < \frac{1}{2}$; y elegimos $p-1$ intervalos abiertos disjuntos $J_k \subset \mathbb{I}$ $(k=1,\cdots,p-1)$ tales que $\sum_j |J_k| < \frac{1}{2}$. Estos intervalos son elegidos de manera que al ser excluidos de $\mathbb{I}$ se obtienen p intervalos cerrados I_i^Λ $(i=0,\cdots,p-1)$ tales que $\frac{|I_i^\Lambda|}{|\mathbb{I}|} = \lambda_i$.

El siguiente paso en la construcción es repetir lo realizado en cada uno de los intervalos I_i^Λ manteniendo las proporciones; es decir, en cada I_i^Λ extraemos $p-1$ intervalos abiertos disjuntos $J_{i1},\cdots,J_{ip-1}$ tales que

1. $I_i^\Lambda - \bigcup_k J_{ik} = I^\Lambda_{i0} \cup \cdots \cup I^\Lambda_{ip-1}$ y
2. $\dfrac{|I^\Lambda_{ij}|}{|I^\Lambda_i|} = \lambda_i$ para cada $i,j = 0,\cdots,p-1$.

Repitiendo este procedimiento, en la etapa n-ésima de la construcción tenemos p^n subintervalos $I^\Lambda_{i_1\cdots i_n}$, $(i_1,\cdots,i_n) \in \{0,\cdots,p-1\}^n$ tales que:

1. los intervalos $I^\Lambda_{i_1\cdots i_n}$ son disjuntos dos a dos;
2. para todo $\omega = \{i_n\}_{n\geq 1}$ en $B^+(p)$ la sucesión $\{I^\Lambda_{i_1\cdots i_n}\}_{n\geq 1}$ es una familia encajada de intervalos compactos;
3. los conjuntos
$$\mathbb{K}_n = \bigcup_{(i_1,\cdots,i_n)\in\{0,\cdots,p-1\}^n} I^\Lambda_{i_1\cdots i_n}$$
forman una familia encajada de compactos;
4. la longitud de los intervalos $I^\Lambda_{i_1\cdots i_n}$ decae a cero cuando $n \to +\infty$. Más aun, $|I_{i_1\cdots i_n}| = \lambda_{i_1}\cdot\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_n}$, luego $|I_{i_1\cdots i_n}| < 2^{-n}$.

De esta forma tenemos el conjunto

$$\mathbb{K}^{\Lambda} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{(i_1,\cdots,i_n)\in\{0,\cdots,p-1\}^n} I^{\Lambda}_{i_1\cdots i_n}.$$

De manera similar a como se hizo con el conjunto de Cantor ternario, se demuestra que los conjuntos $\mathbb{K}_{\lambda}$ y $\mathbb{K}^{\Lambda}$ son conjuntos de Cantor; en realidad homeomorfos a $B^{+}(2)$ y $B^{+}(p)$ respectivamente.

3.2. El tapiz de Sierpinski

Ahora vamos a definir un algoritmo para construir el *tapiz de Sierpinski*. Este conjunto fue expuesto por primera vez en 1916 como parte de los trabajos del matemático polaco Waclav Sierpinski (1882-1969) en el desarrollo de la teoría de la dimensión topológica de conjuntos compactos.

Comenzamos considerando como objeto inicial un triángulo equilátero Δ en el plano $\mathbb{R}^2$; por ejemplo el triángulo de vértices en los puntos $O = (0,0)$, $P = (2,0)$ y $Q = (1,\sqrt{3})$. Tomemos ahora los puntos medios de los lados de Δ como vértices de un triángulo equilátero y removamos el interior del mismo. La figura que resta en es la unión de tres sub-triángulos semejantes a Δ con razón de similaridad $\lambda = 1/2$. Sean Δ_0, Δ_1 y Δ_2 tales sub-triángulos. Ahora aplicamos el mismo

PSfrag replacements

Δ
Δ_0
Δ_2
Δ_1

Fig. 3.2: Poligonos regulares inscritos y circunscritos.

procedimiento a cada uno de los sub-triángulos $\Delta_i \subset \Delta_0$, $i = 1,2,3$, obteniendo así 3^2 triángulos $\Delta_{ij} \subset \Delta_i$ $(i,j = 0,1,2)$, los cuales son semejantes a Δ con razón de similaridad 2^{-2}. Repitiendo recursivamente el proceso obtenemos, en la etapa n-ésima de la construcción se tienen 3^n triángulos $\Delta_{i_1\cdots i_n}$ semejantes a Δ con razón de similaridad 2^{-n} tal que $\Delta_{i_1\cdots i_{n+1}} \subset \Delta_{i_1\cdots i_n}$ para todo $n \geq 1$, obtenidos al retirar el interior del trángulo central de razón $1/2$ en cada uno de los triángulos construidos en la etapa anterior. De esta, *el tapiz de Sierpinski* $\mathbb{S}$ *es el conjunto que queda después de repetir infinitas veces esa construcción.*

Resumiendo, en cada paso $n \geq 1$ de la construcción de $\mathbb{S}$ se obtiene un conjunto compacto (cerrado y acotado) del plano $\Delta_n \subset \Delta$, de hecho $\Delta_n = \bigcup_{(i_1\cdots i_n)\in\{0,1,2\}^n} \Delta_{i_1\cdots i_n}$, donde cada $\Delta_{i_1\cdots i_n}$ es un triángulo como señalado anteriormente. Además, de la propia definición del procedimiento empleado, $\mathbb{S} = \bigcap_{n\geq 1} \Delta_n$; y en virtud de la inclusión $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$, para cada $n \geq 1$, se sigue por el teorema de encaje de Cantor que $\mathbb{S}$ es un compacto no vacío.

El algoritmo deterministico para generar el tapiz de Sierpinski es un caso particular de una construcción más general para construir conjuntos fractales. A continuación presentamos algunas ideas que serán desarrolladas con mayor precisión en el capítulo siguiente; lo que deseamos es

Fig. 3.3: Una aproximación del tapiz de Sierpinski

motivar la construcción general que presentaremos, mostrando cómo mediante un proceso iterativo de una cierta aplicación definida sobre los conjuntos compactos no vacíos se obtiene, en particular, el conjunto $\mathbb{S}$ como límite de tales iteraciones.

Definamos en $\mathbb{R}^2$ las transformaciones afines T_0, T_1, T_2 de razón $\lambda = 1/2$ que transforman Δ en Δ_0, Δ_1 y Δ_2, respectivamente; esto es, $T_i(\Delta) = \Delta_i$, $i = 0, 1, 2$. Estas transformaciones afines están definidas por:

$$
\begin{aligned}
T_0\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \\
T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \\
T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Observe que cada T_i es una contracción $\Delta_1 = T_0(\Delta) \cup T_1(\Delta) \cup T_2(\Delta)$. Si introducimos la notación $\tau(A) = T_0(A) \cup T_1(A) \cup T_2(A)$, donde $A \subset \mathbb{R}^2$ es cualquier conjunto compacto no vacío, entonces $\tau(\Delta) = \Delta_1$. Además, al componer τ consigo misma y evaluarla en Δ se obtiene:

$$
\tau^2(\Delta) \;=\; (\tau \circ \tau)(\Delta) = T_0(\tau(\Delta)) \cup T_1(\tau(\Delta)) \cup T_2(\tau(\Delta)) = \bigcup_{i,j=0}^{2} T_i \circ T_j(\Delta).
$$

Pero, una simple inspección muestra que $T_i \circ T_j(\Delta) = \Delta_{ij}$ para cada i, j en $\{0, 1, 2\}$. En realidad, para cada $n \geq 1$ y cualesquiera sean $i_1, \cdots, i_n$ en $\{0, 1, 2\}$, la familia de triángulos que generan el tapiz de Sierpinski se pueden obtener usando las contracciones T_i, en efecto

$$
\Delta_{i_1 \cdots i_n} = T_{i_n} \circ \cdots \circ T_{i_1}(\Delta). \tag{3.1}
$$

Por otro lado, empleando argumentos inductivos se verifica que para cada $n \geq 1$ vale la identidad:

$$
\tau^n(\Delta) = \bigcup_{(i_1, \cdots, i_n) \in \{0,1,2\}^n} T_{i_n} \circ \cdots \circ T_{i_1}(\Delta) = \Delta_n.
$$

Esto es, al iterar el operador τ (definido sobre un espacio apropiado: los compactos de $\mathbb{R}^2$) se obtienen los conjuntos obtenidos en el algoritmo para construir $\mathbb{S}$, de hecho, $\Delta_{n+1} = \tau(\Delta_n)$. Dado que los conjuntos Δ_n forman familias encajadas de compactos, entonces ellos dan lugar a un *conjunto límite* del operador τ; en otras palabras, $\mathbb{S}$ puede entenderse como el límite, cuando $n \to +\infty$, de los iterados por el operador τ. Esta es la propiedad que deseamos destacar como elemento motivador para un análisis posterior.

3.3. Ejercicios

1. Decimos que un conjunto es nunca denso o de primera categoría de Baire si el interior de la clausura es vacío. Pruebe que el conjunto de Cantor es nunca denso.

2. Pruebe que todo conjunto perfecto es no numerable. **Indicación**: use el argumento diagonal de Cantor.

3. El complemento del conjunto de Cantor ternario es una unión numerable de intervalos abiertos, i.e. $\mathbb{I} - K = \bigcup_n U_n$ con $U_n = (a_n, b_n)$, donde a_n, b_n son extremos de intervalos de la forma $I_{i_1 \cdots i_m}$. Pruebe que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |U_n| = 1.$$
Esto prueba que $\mathbb{K}$ tiene medida cero.

4. Pruebe que los conjuntos de Cantor $\mathbb{K}_\lambda$ tienen medida cero.

5. Sea $\mathcal{S} \subset \{0, \cdots, 9\}$ un subconjunto propio. Pruebe que $\Lambda = \Lambda_{\mathcal{S}}$, el conjunto de los $x \in \mathbb{I}$ cuyos desarrollos decimales sólo contiene dígitos $n_i \in \mathcal{S}$ es un conjunto de Cantor.

Capítulo 4

Sistema Iterado de Funciones: construcción de Conjuntos Fractales

En el capítulo anterior presentamos algunos ejemplos de conjuntos con estructura fractal: el conjunto de Cantor ternario, incluyendo algunas variaciones; y el tapiz de Sierpinski. Tales conjuntos son una muestra de atractores de ciertos sistemas dinámicos discretos definidos en un espacio métrico especial: *el espacio de las formas*; también conocido como *"el espacio de los fractales"*: sus puntos son los conjuntos compactos no vacíos de un espacio métrico completo (X, d).

Nuestro objetivo acá es formalizar las diferentes nociones que permiten generar conjuntos fractales mediante la iteración de aplicaciones definidas sobre el espacio de las formas. En primer lugar debemos formalizar la noción del espacio de las formas; luego introducir los elementos necesarios de la teoría de los sistemas dinámicos discretos para finalmente considerar las aplicaciones que generarán tales atractores como límites de conjuntos .

4.1. Métrica de Hausdorff y el espacio de las formas

En lo que sigue, y salvo aviso en contrario, (X, d) es un espacio métrico completo. Primero vamos a recordar algunas definiciones básicas sobre distancia entre conjuntos.

En el capítulo 1 se introdujo tanto la noción de distancia del punto x a conjunto no vacío A, $d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, y)\ :\ y \in A\}$, como la definición de bola abierta entorno a un conjunto A y radio δ, $B_\delta(A)$, y que en adelante denotamos por $A + \delta = \{x \in X\ :\ d(x, A) < \delta\}$.

Definición 4.1.1. Sean $A, B \subseteq X$ dos subconjuntos no vacíos. Definimos la *distancia de Hausdorff entre A y B* como

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) = \text{ínf}\,\{\delta > 0 : A \subset B + \delta \ \text{ y } \ B \subset A + \delta\ \}. \tag{4.1}$$

Para muchas personas la definición dada de $\text{dist}_{\mathcal{H}}$ puede resultar difícil de comprenderla y emplearla al momento de realizar cálculos. Por ello mostramos una forma equivalente en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.1. *Para cualquier para de conjuntos no vacíos A, B de X vale la identidad*

$$dist_{\mathcal{H}}(A, B) = \text{máx}\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\}. \tag{4.2}$$

Demostración. Note que $A \subset B + \delta$ si, y sólo si, $d(x, B) < \delta$ para todo $x \in A$. Por tanto, si tomamos $\delta > 0$ tal que $A \subset B + \delta$, entonces $\sup_{x \in A} d(x, B) \leq \delta$; por lo que $\sup_{x \in A} d(x, B) \leq \text{ínf}\{\delta > 0\ :\ A \subset B + \delta\}$.

De hecho tales números son iguales, pues de lo contrario, existiría un $\delta > 0$ tal que $\delta > d(x, B)$ para todo $x \in A$ y sin embargo $A \not\subset B + \delta$. De esta forma,

$$\sup_{x \in A} d(x, B) = \text{ínf}\{\delta > 0 \ : \ A \subset B + \delta\} = \delta_A,$$

y análogamente, $\sup_{y \in B} d(y, A) = \text{ínf}\{\delta > 0 \ : \ B \subset A + \delta\} = \delta_B$. Sigue entonces que

$$\text{máx}\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\} = \text{máx}\{\delta_A, \delta_B\}.$$

Finalmente mostremos que $\text{máx}\{\delta_A, \delta_B\} = \text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B)$. Dado que cada uno de los conjuntos $\{\delta > 0 : A \subset B + \delta\}$ y $\{\delta > 0 : B \subset A + \delta\}$ contienen a $\{\delta > 0 : A \subset B + \delta \text{ y } B \subset A + \delta\}$, entonces $\text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) \geq \text{máx}\{\delta_A, \delta_B\}$. Si esta desigualdad es estricta, podemos elegir $\delta_1 \in (\delta_A, \text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B))$ y $\delta_2 \in (\delta_B, \text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B))$ tales que $A \subset B + \delta_1$ y $B \subset A + \delta_2$. Luego al tomar el máximo de δ_1 y δ_2 tendremos un valor $\delta > 0$ menor que $\text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B)$ para el cual $A \subset B + \delta$ y $B \subset A + \delta$; lo cual es imposible. □

Antes de proseguir es necesario mencionar que el valor $\text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B)$ asociado a dos subconjuntos no vacíos A y B de X puede ser $+\infty$; por ejemplo, en $\mathbb{R}$ considere los intervalos $A = (-\infty, a]$ y $B = [b, +\infty)$, con $a < b$, por lo que no existe un número $\delta > 0$ tal que $A \subset B + \delta$ y $B \subset A + \delta$. Esto significa que dos conjuntos cualesquiera pudiesen estar a distancia de Hausdorff infinita. También puede ocurrir que existan conjuntos no vacíos distintos que estén a distancia de Hausdorff igual a 0; por ejemplo, sean $C \subset X$ no vacío, ni abierto, ni cerrado. Si $A = C^0$ (interior topológico de C) y $B = \overline{C}$ (clausura topológica de C), entonces es simple verificar que para cualquier número $\delta > 0$ siempre se cumple $A \subset B + \delta$ y $B \subset A + \delta$, con lo cual $\text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) = 0$.

Dado que estamos interesados en emplear la función $\text{dist}_{\mathcal{H}}$ para definir una métrica en una “parte amplia” de la colección de los subconjuntos no vacíos de X, consideraremos exclusivamente la colección de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X; tal conjunto lo denotamos por $\mathcal{H}(X)$, y en adelante lo denominaremos *espacio de las formas*, o *espacio de los fractales*.

Teorema 4.1.2. *La función $dist_{\mathcal{H}} : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \to \mathbb{R}^+$ es una métrica y $(\mathcal{H}(X), dist_{\mathcal{H}})$ es completo.*

Previo a la demostración de este resultado debe observarse que la fórmula (4.2) es realizada en un par $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in A \times B$ cuando $A, B \in \mathcal{H}(X)$. En efecto, si $A \in \mathcal{H}(X)$, entonces existe $y \in A$ tal que $d(x, A) = d(x, y)$. Esto es porque la función distancia: $f : A \to [0, +\infty]$ dada por $f(y) = d(x, y)$ para $x \in A$ fijo, es continua y por lo tanto alcanza un valor mínimo en A; ver capítulo 1. De esta forma, para todo $A \in \mathcal{H}(X)$ y todo $x \in X$ se tiene $d(x, A) = \text{mín}\{d(x, y) \ : \ y \in A\}$; en otras palabras, para todo $A \in \mathcal{H}(X)$ y todo $x \in X$, existe $x^* \in A$ tal que $d(x, A) = d(x, x^*)$.

Consideremos $A, B \in \mathcal{H}(X)$, y definamos la función $g : A \to \mathbb{R}^+$ por $g(x) = d(x, B)$. Sabemos que para cada $x \in A$, existe $x^* \in B$ tal que $g(x) = d(x, B) = d(x, x^*)$. Tomemos dos puntos cualesquiera $x, y \in A$, y sean $x^*, y^* \in B$ tales que $d(x, x^*) = d(x, B) = g(x)$ y $d(y, y^*) = d(y, B) = g(y)$. De la axiomática métrica se tiene

$$\begin{cases} d(x, x^*) \leq d(x, y^*) \leq d(x, y) + d(y, y^*) \\ d(y, y^*) \leq d(y, x^*) \leq d(x, y) + d(x, x^*) \end{cases};$$

de donde $|g(x) - g(y)| \leq d(x, y)$. Luego sigue la continuidad de la función g. De la compacidad de A, existe $\widehat{x} \in A$ tal que

$$d(\widehat{x}, B) = \text{máx}\{d(x, B) : x \in A\} = \sup\{g(x) : x \in A\} \in \mathbb{R}^+.$$

PSfrag replacements

x

x^*

$d(x, A)$

A

Fig. 4.1: Distancia del compacto A al punto x realizada en x^*.

Nuevamente por compacidad sigue $\sup_{x\in A} d(x, B) = \max_{x\in A}\{\min_{y\in B} d(x, y)\}$. Análogamente, $\sup_{x\in B} d(x, A) = \max_{x\in B}\{\min_{y\in A} d(x, y)\}$. De donde,

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) = \max\{\max_{x\in A} d(x, B), \max_{y\in B} d(y, A)\}, \tag{4.3}$$

o equivalentemente

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) = \max\{\max_{x\in A}\{\min_{y\in B} d(x, y)\}, \max_{y\in B}\{\min_{x\in A} d(y, x)\}; \tag{4.4}$$

en particular, existen $\widehat{x} \in A$ y $\widehat{y} \in B$ tales que $\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) = d(\widehat{x}, \widehat{y})$.

Además de la propiedad demostrada, la compacidad de los conjuntos A, B en $\mathcal{H}(X)$ y la continuidad de la función $g : A \to \mathbb{R}^+$ con $g(x) = d(x, B)$, implican que si $A \subset B + \epsilon$, entonces existe $0 < \epsilon' < \epsilon$ tal que $A \subset \overline{B + \epsilon'}$, donde $\overline{B + \epsilon'} = \{z : d(z, B) \leq \epsilon'\}$.

El siguiente lema se apoya en esta última propiedad; y deja de ser cierto si los conjuntos A y B no son compactos.

PSfrag replacements

A

B

x

$d(y, A)$

$d(x, B)$

y

Fig. 4.2: Distancia de Hausdorff entre los compactos A y B.

Lema 4.1.1. *Para todo par de conjuntos $A, B \in \mathcal{H}(X)$ y cualquier $\epsilon > 0$ se tiene:*

$$dist_{\mathcal{H}}(A,B) < \epsilon \quad \textit{si, y sólo si,} \quad A \subset B + \epsilon \quad \textit{y} \quad B \subset A + \epsilon.$$

Demostración. Usando las definiciones dadas a $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}$ sigue inmediatamente que si $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(A,B) < \epsilon$, entonces $A \subset B + \epsilon$ y $B \subset A + \epsilon$.

Recíprocamente, si $A \subset B + \epsilon$ y $B \subset A + \epsilon$, entonces del comentario previo al lema podemos elegir $0 < \epsilon' < \epsilon$ tal que $A \subset \overline{B + \epsilon'}$ y $B \subset \overline{A + \epsilon'}$. De donde, para cada $x \in A$ y cada $y \in B$ se tiene $d(x, B) \leq \epsilon'$ y $d(y, A) \leq \epsilon'$. Por tanto, $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(A,B) \leq \epsilon' < \epsilon$. □

Demostración del teorema 4.1.2. Primero veamos que $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}$ es una métrica en $\mathcal{H}(X)$. Observe que por compacidad y la propiedad métrica de d, se tiene que $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(A,B)$ es un número real no negativo para todo $A, B \in \mathcal{H}(X)$; también es obvia la simetría; es decir, $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(A,B) = \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(B,A)$. Por otra parte, como para cualquier conjunto A de X se tiene $\overline{A} = \bigcap_{\delta>0} A_\delta$, concluímos que $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(A,B) = 0$ si, y sólo si, $A \subseteq \overline{B}$ y $B \subseteq \overline{A}$. Dado que cada $A \in \mathcal{H}(X)$ es cerrado, entonces para todo $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(A,B) = 0$ si, y sólo si, $A = B$.

Probemos ahora la desigualdad triangular. Sean A, B, C conjuntos compactos no vacíos de X. Dado que para cada $x \in A$ vale

$$\begin{aligned}
d(x,B) &= \min_{y\in B} d(x,y) \\
&\leq \min_{y\in B} \{d(x,z) + d(z,y)\} \ \text{ para todo } \ z \in C \\
&= d(x,z) + \min_{y\in B} d(z,y) \ \text{ para todo } \ z \in C \\
&= d(x,z) + d(z,B) \ \text{ para todo } \ z \in C
\end{aligned}$$

Luego, $d(x,B) \leq d(x,C) + \max_{z\in C} d(z,B)$. De donde

$$\max_{x\in A} d(x,B) \leq \max_{x\in A} d(x,C) + \max_{z\in C} d(z,B).$$

De forma análoga se muestra

$$\max_{y\in B} d(y,A) \leq \max_{y\in B} d(y,C) + \max_{z\in C} d(z,A).$$

Por tanto, usando (4.3) se tiene

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(A,B) \leq \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(A,C) + \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(C,B),$$

con lo cual $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}$ es una métrica en $\mathcal{H}(X)$.

Mostremos finalmente que $\mathcal{H}(X)$ provisto de $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}$ es completo. Sean $\{K_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(X), \mathrm{dist}_{\mathcal{H}})$ y $\epsilon > 0$, entonces existe un entero positivo N tal que para cada $n, m \geq N$, $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(K_n, K_m) < \epsilon$; en particular, $K_n \subset K_m + \epsilon$ y $K_m \subset K_n + \epsilon$ para todo $n, m \geq N$. Además, $\overline{\bigcup_{m=n}^{+\infty} K_m} \subset K_n + \epsilon$ siempre que $n \geq N$.

Consideremos el conjunto $K = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{\bigcup_{m=n}^{+\infty} K_m}$. De lo anterior, K es la intersección de compactos encajados, por tanto es compacto no vacío; es decir, K es elemento de $\mathcal{H}(X)$; más aun, para el ϵ dado se tiene

$$K \subset K_n + \epsilon \ \text{ para todo } \ n \geq N. \tag{4.5}$$

Por otro lado, sea $x \in K_n$ con $n \geq N$. Dado que $\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(K_m, K_n) < \epsilon$ para todo $m, n \geq N$, entonces $x \in K_m + \epsilon$ para todo $m \geq n$; de donde $x \in \overline{\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} K_m\right)} + \epsilon$, de hecho, $x \in \overline{\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} K_m\right)} + \epsilon$ para todo $n \geq N$ (¿por qué?). Luego es claro que $x \in \overline{\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} K_m\right)} + \epsilon$ para todo $n \geq 1$, por tanto $x \in K + \epsilon$; así, $K_n \subset K + \epsilon$ para todo $n \geq N$. Esto junto a (4.5) y el lema anterior implican que $\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(K, K_n) < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Es decir, K es el límite de la sucesión $\{K_n\}_{n \geq 1}$; con lo cual la demostración del teorema está completa. $\square$

Como se observa, en la demostración de la completitud del espacio de los fractales en un espacio métrico completo, $(\mathcal{H}(X), \operatorname{dist}_{\mathcal{H}})$, se muestra una caracterización del conjunto límite de una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(X), \operatorname{dist}_{\mathcal{H}})$. Obviamente existen otras caraterizaciones, por ejemplo la dada en [1]; que es:
Dada una sucesión de Cauchy $\{K_n\}_{n \geq 1}$ en $(\mathcal{H}(X), dist_{\mathcal{H}})$, entonces el conjunto límite $K = \lim_{n \to +\infty} K_n$ es justamente

$$K = \{x \in X : \exists \{x_n\} \text{ de Cauchy en } X \text{ con } x_n \in K_n, \text{ tal que } x_n \to x\}.$$

Adicionalmente a la propiedad de completitud $(\mathcal{H}(X), \operatorname{dist}_{\mathcal{H}})$, también es cierto el siguiente resultado, cuya demostración dejamos al lector.

Teorema 4.1.3. *Si (X, d) es un espacio métrico completo y compacto, entonces el espacio de los fractales $(\mathcal{H}(X), dist_{\mathcal{H}})$, además de completo, es compacto.*

4.2. Sistema Iterado de Funciones y Operador de Hutchinson

En el capítulo anterior mostramos algunos ejemplos de conjuntos con estructura fractal; los mismos fueron construidos en base a ciertos algoritmos deterministas. Esos algoritmos son casos particulares de una construcción más general para construir conjuntos con esa estructura geométrica. El marco teórico donde se inserta esta construcción es conocida en la actualidad como *"Sistemas Iterado de Funciones"*. Este término, en adelante SIF, fue introducido inicialmente en [2] para describir ciertos patrones dinámicos en determinados espacios de conjuntos compactos. Sin embargo, mucho de los resultados sobre SIF fueron presentados en [8].

Aclaramos que la definición de un SIF varía, puede ser colocada en contextos bastante más generales y abstractos al que presentamos en estas notas, y que para sus fines es suficiente.

Antes recordamos que una contracción en un espacio métrico (X, d) es una aplicación $T : X \to X$ para la cual existe una constante $0 \leq \lambda < 1$, tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda\, d(x, y), \text{ para todo } x, y \in X;$$

a la menor de las constantes λ que satisfaga la desigualdad anterior se le conoce con el nombre de *constante de contracción.* Note en particular que toda contracción en X es continua.

Definición 4.2.1. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Una familia finita $\{T_i\}_{i=1,\cdots,m}$ de contracciones en X se llama un *Sistema Iterado de Funciones* (SIF) en X.

En ocasiones al concepto de SIF no se le exige la condición de contracción a las aplicaciones que lo definen; en tales casos es común encontrar en la literatura el término *hiperbólico* para referirse a los SIF contractivos.

Asociado a cualquier SIF en un espacio métrico completo (X, d) se tiene un operador en el espacio de los fractales en X. Más precisamente:

Definición 4.2.2. Sea $\{T_i\}_{i=1,\cdots,m}$ un SIF en (X, d). Se denomina *operador de Hutchinson* a la transformación τ definida por la ecuación conjuntista:

$$\tau(A) = \bigcup_{i=1}^{m} T_i(A); \tag{4.6}$$

donde $A \in \mathcal{H}(X)$.

Dada la continuidad de las transformaciones T_i en un SIF, sigue que $\tau(A) \in \mathcal{H}(X)$ para todo $A \in \mathcal{H}(X)$; esto es, τ define un operador en el espacio de los fractales. Por tanto, al iterar el operador de Hutchinson en el espacio $\mathcal{H}(X)$ obtenemos sucesiones de conjuntos compactos en X definidas recursivamente por la ecuación conjuntista $\Delta_{n+1} = \tau(\Delta_n)$, $n \geq 0$. De hecho, si $\Delta_0 \in \mathcal{H}(X)$ y $\tau^n := \overbrace{\tau \circ \cdots \circ \tau}^{n-veces}$ es la composición del operador de Hutchinson consigo mismo n veces, entonces $\Delta_n = \tau^n(\Delta_0)$ para todo $n \geq 1$. En particular, si los conjuntos compactos Δ_n forman una sucesión encajada, ellos dan lugar a un *conjunto límite*, definido por el principio de encaje de Cantor. Es importante mencionar que esta no es la generalidad de los casos, aunque para cualquier SIF (como los considerados en estas notas) la sucesión de los iterados del operador de Hutchinson siempre converge a un mismo conjunto compacto de X, tal y como será demostrado luego.

Ejemplo 4.2.1. Consideremos el espacio de los fractales en la recta real $\mathcal{H}(\mathbb{R})$; definamos en $\mathbb{R}$ las contracciones: $T_1(x) = \frac{1}{3}x$ y $T_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Luego el operador de Hutchinson asociado es dado por

$$\tau(A) = T_1(A) \cup T_2(A), \text{ para todo } A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}).$$

En este caso, si hacemos $\mathbb{K}_0 = \mathbb{I} = [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned} \tau(\mathbb{K}_0) = \mathbb{K}_1 &= \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, 1\right] \\ \tau^2(\mathbb{K}_0) = \mathbb{K}_2 &= \left[0, \tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9}, 1\right]; \end{aligned}$$

en general, para cada $n \geq 1$ se tiene que

$$\tau^n(\mathbb{K}_0) = \mathbb{K}_n = \bigcup_{(i_1,\cdots,i_n)\in\{0,1\}^n} I_{i_1\cdots i_n},$$

donde cada $I_{i_1\cdots i_n}$ son los intervalos compactos obtenidos en la construcción del conjunto de Cantor ternario.

En este ejemplo la sucesión formada por los compactos $\tau^n(\mathbb{K}_0) = \mathbb{K}_n$ está encajada, y su límite es justamente el conjunto de Cantor ternario.

4.2.1. El atractor de un SIF

Sea $\{T_i\}_{0=1,\cdots,n-1}$ un SIF definido en el espacio métrico completo (X, d); y sea τ el operador de Hutchinson en $\mathcal{H}(X)$ definido por el SIF.

El propósito fundamental en esta parte de las notas es mostar que el operador de Hutchinson tiene un único punto fijo, el cual es el atractor del sistema dinámico abstracto $\tau : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$. Este es precisamente el caso de los ejemplos de los conjuntos fractales estudiados en el Capítulo 2.

Existen pocos resultados generales que aseguren la existencia de atractores para sistemas dinámicos. De esos, uno de los más importantes por sus aplicaciones en distintas ramas del Análisis es el siguiente:

Teorema 4.2.1 (Teorema de Punto Fijo de Banach). *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \longrightarrow X$ una contracción con constante de contracción $0 \leq \lambda < 1$. Entonces T tiene un único punto fijo $p \in X$; además, p es el atractor de T; esto es, para todo $x \in X$ la sucesión definida recursivamente por $x_{n+1} = T(x_n)$ con $x_0 = x$ converge a p. Más aún, $\{x_n\}$ converge con velocidad exponencial a p:*

$$d(x_n, p) \leq \lambda^n d(x_0, p), \quad \textit{para todo} \quad n > 0.$$

En nuestra discusión sobre el algoritmo sumerio de la raíz cuadrada hicimos referencia este principio y al método de aproximaciones sucesivas que permite calcular puntos fijos $T(p) = p$ como límites de sucesiones definidas recursivamente $x_{n+1} = T(x_n)$. En lo que sigue usaremos las misma idea para probar el principio de contracción de Banach en un espacio métrico completo.

Demostración del Teorema del punto de Banach. Vamos a demostrar que el método de aproximaciones sucesivas mencionado en el Capítulo 2 proporciona un punto fijo de T. Para ello vamos a probar que para cada $x \in X$ la sucesión definida recursivamente

$$x_{n+1} = T(x_n),\ n \geq 0 \ \text{ con } \ x = x_0$$

es de Cauchy. Como (X, d) es completo, $\{x_n\}$ converge a un punto $p \in X$. Como probamos en el Capítulo 2 p es el único punto fijo de T. En efecto,

$$T(p) = T(\lim_{n\to+\infty} x_n) = \lim_{n\to+\infty} T(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = p.$$

Si q es otro punto fijo de T, entonces $d(p, q) = d(T(p), T(q)) \leq \lambda\, d(p, q)$. De donde $d(p, q) = 0$ pues $0 \leq \lambda < 1$, por lo que $p = q$. Luego, basta probar que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Sean $n, m > 0$. Usando la desigualdad triangular tenemos

$$\begin{aligned}
d(x_{n+m}, x_m) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\
&\leq \lambda^{n+m-1} d(x_1, x_0) + \cdots + \lambda^m d(x_1, x_0) \\
&= \left(\sum_{k=m}^{n+m-1} \lambda^k \right) d(x_1, x_0),
\end{aligned}$$

donde hemos usado $x_n = T^n(x_0)$ y $d(T(x), T(y)) \leq \lambda\, d(x, y)$. Como la serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n$ es convergente, podemos escoger $N > 0$ tal que $\sum_{k=m}^{n+m-1} \lambda^k < \epsilon / d(x_1, x_0)$ para todo $n, m \geq N$. Aquí podemos suponer que $d(x_1, x_0) > 0$ pues en caso contrario $T(x_0) = x_0$ sería el punto fijo buscado. Esto concluye la demostración. □

El próximo resultado debido a Hutchinson, ver [8] [5] y [1], es fundamental para el estudio de los SIF, asegura que para cualquier SIF el operador de Hutchinson asociado tiene un único atractor, de hecho su único punto fijo. Su demostración es relativamente simple, pues se fundamenta en el Teorema de punto fijo de Banach. El enunciado es el siguiente:

Teorema 4.2.2. *Sea $\{T_i\}_{i=0,\cdots,n-1}$ un SIF en un espacio métrico completo (X,d). Entonces el operador de Hutchinson τ asociado es una contracción. En particular, si X_∞ es el punto fijo de τ; es decir, $\tau(X_\infty)=X_\infty$, para todo conjunto compacto $K\in\mathcal{H}(X)$ se cumple*

$$dist_{\mathcal{H}}\,(\tau^n(K),X_\infty)\to 0 \quad como \quad n\to+\infty$$

Para demostrar este resultado emplearemos los siguientes lemas:

Lema 4.2.1. *Sea $T:X\longrightarrow X$ es una contracción y $0\leq\lambda<1$ es tal que $d(T(x),T(y))\leq\lambda\,d(x,y)$ para todo $x,y\in X$, entonces*

$$dist_{\mathcal{H}}\,(T(E),T(F))\leq\lambda\,dist_{\mathcal{H}}\,(E,F)$$

para todo $E,F\in\mathcal{H}(X)$.

Demostración. Observe que si $\lambda=0$, entonces la propiedad es trivial. Supongamos por tanto que $\lambda>0$. Afirmamos que $E\subset F+\delta$ entonces $T(E)\subset T(F)+\lambda\delta$ para cualquier $\delta>0$. En efecto, $E\subset F+\delta$ si, y sólo si, para todo $x\in E$ existe $y\in F$ con $d(x,y)<\delta$, luego $d(T(x),T(y))\leq\lambda\,d(x,y)<\lambda\delta$, vale decir: para todo elemento $z\in T(E)$ existe $w\in T(F)$ tal que $d(z,w)\leq\lambda\delta$, probando la afirmación. En particular, dado que

$$\{\lambda\delta>0\ :\ E\subset F+\delta\}\subset\{\gamma>0\ :\ T(E)\subset T(F)+\gamma\}$$

se tiene,

$$\inf_{\gamma>0}\{\gamma>0\ :\ T(E)\subset T(F)+\gamma\}\leq\inf_{\delta>0}\{\lambda\delta>0\ :\ E\subset F+\delta\}.$$

Intercambiando E y F concluímos $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}\,(T(E),T(F))\leq\lambda\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}\,(E,F)$. □

Lema 4.2.2. *Sean A_i,B_i $(i=1,\cdots,n)$ subconjuntos de X. Entonces,*

$$dist_{\mathcal{H}}\,(\bigcup_{i=1}^{n}A_i,\bigcup_{i}B_i)\leq\max_{i=1,\cdots,n}\{dist_{\mathcal{H}}\,(A_i,B_i)\}$$

Demostración. Observe que si $\delta>0$ es tal que $A_i\subset B_i+\delta$ para todo $i=1,\cdots,n$, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i\subset(\bigcup_{i=1}^n B_i)+\delta$, luego:

$$\begin{aligned}\max_{i=1,\cdots,n}\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}\,(A_i,B_i) &\geq \inf\{\delta: A_i\subset B_i+\delta\ \text{ y }\ B_i\subset A_i+\delta\ \forall\ i\}\\ &\geq \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}\,(\bigcup_{i=1}^{n}A_i,\bigcup_{i=1}^{n}B_i)\end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Demostración del Teorema 4.2.2. Sean $\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-1}$ las constantes de contracción de las transformaciones T_i que definen el SIF, y sea λ el máximo de tales constantes. Para todo $E,F\in\mathcal{H}(X)$ se tiene de los lemas anteriores que

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}\,(\tau(E),\tau(F)) &= \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}\,(\bigcup_{i=0}^{n-1}T_i(E),\bigcup_{i=0}^{n-1}T_i(F))\\ &\leq \max_{i=0,\cdots,n-1}\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}\,(T_i(E),T_i(F))\\ &\leq \lambda\,\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}\,(E,F).\end{aligned}$$

Luego $\tau : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ es un operador de contracción es el espacio métrico completo de los subconjuntos compactos de X con la métrica de Hausdorff; por el Principio de Contracción de Banach la demostración sigue. $\square$

Definición 4.2.3. Dados un espacio métrico compacto (X, d) y un SIF $\{T_i\}_{i=0,\cdots,n-1}$ en X, se conoce con el nombre de *atractor del SIF* al punto fijo $X_\infty \in \mathcal{H}(X)$ del operador de Hutchinson asociado.

De la propia demostración del teorema anterior tenemos que para obtener el atractor de un SIF $\{T_i\}_{i=0,\cdots,n-1}$ en X debemos tomar cualquier compacto $K \in \mathcal{H}(X)$ y calcular el límite de la sucesión $\{\tau^m(K)\}_{m\geq 0}$, donde τ es el operador de Hutchinson asociado al SIF considerado. Entonces es necesario conocer como se expresa $\tau^m(K)$ para cualquier entero $m \geq 1$. En primer lugar, sabemos por definición de τ que $\tau(K) = T_0(K) \cup \cdots \cup T_{n-1}(K)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\tau^2(K) &= \tau(\tau(K)) = T_0(\tau(K)) \cup \cdots \cup T_{n-1}(\tau(K))) \\
&= \bigcup_{j=0}^{n-1} T_j(T_0(K) \cup \cdots \cup T_{n-1}(K)) \\
&= \bigcup_{j=0}^{n-1} [(T_j \circ T_0)(K) \cup \cdots \cup (T_j \circ T_{n-1})(K)] = \bigcup_{i,j=0}^{n-1} (T_j \circ T_i)(K).
\end{aligned}$$

Por recurrencia se obtiene la expresión $\tau^m(K) = \bigcup_{J_m} (T_{i_1} \circ \cdots \circ T_{i_m})(K)$, donde J_m, $m \geq 1$, denota el conjunto de todos los m-índices $(i_1, \cdots, i_m)$ con $i_k \in \{0, \cdots, n-1\}$ para todo $k = 1, \cdots, m$. Esto es, $\tau^m(K)$ es la unión de los n^m compactos $T_{i_1} \circ \cdots \circ T_{i_m}(K)$, con $(i_1, \cdots, i_m) \in J_m$.

Esta descripción de $\tau^m(K)$ implica las siguientes afirmaciónes para cada $i = 0, \cdots, n-1$:

1. $T_i(X_\infty) \subset X_\infty$.
2. si $p_i \in X$ es el punto fijo de T_i (recuerde que cada T_i es una contracción en X), entonces $p_i \in X_\infty$.

La demostración de la primera parte sigue del hecho que

$$\tau(X_\infty) = X_\infty = T_0(X_\infty) \cup \cdots \cup T_{n-1}(X_\infty).$$

Para averificar la segunda de las afirmaciones anteriores, tomemos el compacto $K = \{p_0, \cdots, p_{n-1}\}$. Para cada $m \geq 1$ y cada $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ consideremos el m-índice $(i, \cdots, i)$. Luego

$$\begin{aligned}
p_i \in T_i \circ \cdots \circ T_i(K) &= T_i^m(K) \\
&= \{T_i^m(p_1), \cdots, T_i^m(p_{i-1}), p_i, T_i^m(p_{i+1}), \cdots, T_i^m(p_n)\},
\end{aligned}$$

de donde $p_i \in \tau^m(K)$. Esto implica la afirmación 2 pues la sucesión $\{x_m\}_{m\geq 1}$ con $x_m = p_i$ para todo $m \geq 1$, es tal que $x_m \in \tau^m(K)$ y $x_m \to p_i$ cuando $m \to +\infty$.

Ejemplo 4.2.2. En los SIF que consideraremos a continuación estamos tomando la recta $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana.

1. Sean $T_0, T_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las contracciones $T_0(x) = \frac{1}{2}x$ y $T_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Tomemos el compacto $K = [0, 1]$. Entonces

$$\tau(K) = T_0(K) \cup T_1(K) = [0, \tfrac{1}{2}] \cup [\tfrac{1}{2}, 1] = K.$$

Luego el atractor del SIF es $X_\infty = K$; pues punto fijo de τ.

Observe que si hubiesemos elegido a $C = \{0\}$, como el compacto inicial para calcular a X_∞, entonces dado que

$$\tau(C) = \{0, \tfrac{1}{2}\},\ \tau^2(C) = \{0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\} = \{\tfrac{j}{2^2} : j = 0, 1, 2, 3\},$$

en general

$$\tau^m(C) = \{\tfrac{j}{2^m} : j = 0, 1, 2, \cdots, 2^m - 1\}, \text{ para todo } m \geq 1.$$

Por tanto el límite en la métrica de Hausdorff de $\{\tau^m(C)\}_{m\geq 1}$ es $[0,1]$.

2. Para las contracciones $f_0, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_0(x) = \frac{1}{2}x$ y $f_1(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos para el compacto $B = [0,1]$:

$$\tau(B) = f_0(B) \cup f_1(B) = [0, \tfrac{1}{2}] \cup \{1\}$$
$$\tau^2(B) = f_0([0, \tfrac{1}{2}] \cup \{1\}) \cup f_1([0, \tfrac{1}{2}] \cup \{1\}) = [0, \tfrac{1}{4}] \cup \{\tfrac{1}{2}\} \cup \{1\}.$$

En general, se puede demostrar que para cada $m \geq 1$ vale

$$\tau^m(B) = [0, \tfrac{1}{2^m}] \cup \{\tfrac{1}{2^{m-1}}, \cdots, \tfrac{1}{2}, 1\},$$

de donde, $X_\infty = \{0\} \cup \{\frac{1}{2^{-k}} : k \geq 0\}$.

En la búsqueda del atractor de un SIF en X no importa realmente con cual compacto no vacío K de X se inicie el proceso recursivo $\tau^m(K)$. Pero cuando el compacto K elegido es invariante por las contracciones que definen el SIF, entonces el atractor X_∞ es determinado de manera simple.

El siguiente teorema muestra esta simplicidad del cálculo del atractor de un SIF. Recordamos que un conjunto A es invariante por una transformación T si $T(A) \subset A$.

Teorema 4.2.3. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $\{T_i\}_{i=0,\cdots,n-1}$ un SIF en X. Si $K \in \mathcal{H}(X)$ es tal que $T_i(K) \subset K$ para todo i, entonces*

$$X_\infty = \bigcap_{m\geq 1} \tau^m(K) = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{J_m} (T_{i_1} \circ \cdots \circ T_{i_m})(K),$$

donde J_m denota el conjunto de todos los m-índices $(i_1, \cdots, i_m)$ con i_k en $\{0, \cdots, n-1\}$.

Demostración. La demostración de este resultado es una consecuencia inmediata del siguiente lema, pues bajo la hipótesis de invarianza del conjunto K la sucesión $\{\tau^m(K)\}_{m\geq 1}$ es encajada. □

Lema 4.2.3. *Sean (X, d) un espacio métrico completo, y $\mathcal{H}(X)$ dotado con la métrica de Hausdorff inducida por d. Si $\{A_m\}_{m\geq 0}$ es una sucesión encajada en $\mathcal{H}(X)$; esto es, $A_{m+1} \subset A_m$ para todo $m \geq 0$. Entonces, $\{A_m\}_{m\geq 0}$ es de Cauchy en $(\mathcal{H}(X), dist_{\mathcal{H}})$ y $\lim_{m\to+\infty} A_m = \bigcap_{m\geq 0} A_m$.*

Demostración. Se deja al lector. □

Otras interesantes propiedades se desprenden del teorema 4.2.3.

Supongamos que (X, d), $\{T_i\}_{i=0,\cdots,n-1}$ y $K \in \mathcal{H}(X)$ son como en el enunciado del mismo. Para cada m-índice $(i_1 \cdots i_m)$ con $i_k \in \{0, \cdots, n-1\}$ hacemos $K_{i_1\cdots i_m} = (T_{i_1} \circ \cdots \circ T_{i_m})(K)$, sigue entonces que

$$X_\infty = \bigcap_{m\geq 1} \tau^m(K) = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{(i_1\cdots i_m)\in J_m} K_{i_1\cdots i_m} = \bigcup_{\{i_m\}\in B^+(n)} \bigcap_{m\geq 1} K_{i_1\cdots i_m},$$

donde J_m es como antes y $B^+(n)$ es el espacio de la aritmética n-adica. Por otro lado, para toda sucesión $\{i_m\}_{m\geq 1} \in B^+(n)$ la familia de conjuntos compactos $K_{i_1 \cdots i_m}$ es encajada y su diámetro converge a cero, más precisamente, $\operatorname{diam}(K_{i_1 \cdots i_m}) \leq \lambda^n \operatorname{diam}(K)$ para todo $m \geq 1$. Esto se sigue de

$$\operatorname{diam}(T_i(A)) \leq \lambda_i \operatorname{diam}(A) \leq \lambda \operatorname{diam}(A), \quad \text{para todo } \; i = 0, \cdots, n-1;$$

siendo que cada λ_i es la constante de contracción de T_i y λ es el máximo de tales números. Por tanto, para cada $\sigma = \{i_m\}_{m\geq 1} \in B^+(n)$, el conjunto $\bigcap_{m\geq 1} K_{i_1 \cdots i_m}$ es unitario, y su único punto lo denotamos por x_σ. En otras palabras,

$$X_\infty = \bigcup_{\sigma \in B^+(n)} \{x_\sigma\},$$

donde $\{x_\sigma\} = \bigcap_{m\geq 1} K_{i_1 \cdots i_m}$, con $\sigma = \{i_m\}_{m\geq 1} \in B^+(n)$.

Lo que acabamos de mostrar implica que la aplicación $h : B^+(n) \to X_\infty$ que asocia a cada sucesión $\sigma = \{\imath_m\}_{m\geq 1} \in B^+(n)$ el punto $x_\sigma \in X_\infty$ es sobreyectiva; más aun, no es difícil de mostrar que h es también continua y abierta. Es conveniente mencionar que no siempre la aplicación h arriba definida es inyectiva; de hecho pueden construirse ejemplos de manera que algunos puntos en el atractor X_∞ del SIF tenga al menos dos códigos en el espacio $B^+(n)$. Un interesante problema es caracterizar la inyectividad de la aplicación h. Note además que bajo la hipótesis de inyectividad de h, el atractor X_∞ del SIF es un conjunto de Cantor: compacto, perfecto y totalmente disconexo.

placements

K

$T_0(K)$

$T_1(K)$

$T_0^2(K)$

$T_0 \circ T_1)(K)$

$T_1^2(K)$

$T_1 \circ T_0)(K)$

Fig. 4.3: Construcción del atractor de un SIF dado por contracciones T_0 y T_1 que envían el cuadrado K en rectángulos disjustos $T_0(K)$ y $T_1(K)$.

4.2.2. Aproximaciones de X_∞: un algoritmo determinista

Consideremos un SIF $\{T_0, \cdots, T_{n-1}\}$ en el espacio métrico completo (X, d) con atractor X_∞. Sabemos que X_∞ se obtiene como el punto límite de la sucesión $\{\tau^m(K)\}_{m\geq 1}$ para cualquier $K \in \mathcal{H}(X)$, donde τ es el operador de Hutchinson. El teorema 4.2.3 mostró que bajo la hipótesis de invarianza ($T_i(K) \subset K$, $i = 0, \cdots, n-1$), X_∞ se obtiene como la intersección de los compactos encajados $\tau^m(K)$, $m \geq 1$. Esto sin duda representa una forma simplificada de acercarnos a X_∞; además, proporciona un método computacional conocido como *Algoritmo Deterministico*, que permite dibujar aproximaciones cada vez más cercanas del atractor del SIF mediante intersecciones de compactos encajados.

Ciertamente la hipótesis de invarianza es realizada por determinados compactos no vacíos de X; por ejemplo el propio atractor X_∞ la satisface. Pero en ausencia del conocimiento de quién es X_∞, debemos buscar compactos apropiados que satisfagan tal hipótesis. La siguiente proposición muestra que esta hipótesis es satisfecha por ciertas bolas cerradas del espacio métrico (X, d). Así que en espacios métricos completos donde las bolas cerradas son compactos (esto es, espacios métricos localmente Euclideanos), podemos iniciar el proceso algoritmico de aproximaciones hacia X_∞ con una de estas bolas cerradas.

Proposición 4.2.1. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f_1, \cdots, f_n$ contracciones en X, con constantes de contracción $0 \leq \alpha_1, \cdots, \alpha_n < 1$ respectivamente. Entonces para todo $x_0 \in X$ existe una bola cerrada $C(x_0, r)$ tal que $f_i(C(x_0, r)) \subset C(x_0, r)$ para todo $i = 1, \cdots, n$.*

Demostración. Sean $p_1, \ldots, p_n$ los puntos fijos de $f_1, \ldots, f_n$ respectivamente.

Dado que $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$ es compacto, existe un $r_0 > 0$ tal que $A \subset C(x_0, r_0)$; basta tomar $r_0 = \text{máx}\{d(p_i, x_0) : i = 1, \ldots, n\}$. Sea $r \geq r_0$, entonces para cada $i = 1, \ldots, n$ y todo $x \in C(x_0, r)$ vale:

$$\begin{aligned} d(f_i(x), x_0) &\leq d(f_i(x), p_i) + d(p_i, x_0) \\ &\leq \alpha_i\, d(x, p_i) + d(p_i, x_0) \\ &\leq \alpha_i\, d(x, x_0) + (1 + \alpha_i)\, d(p_i, x_0). \end{aligned}$$

Al escoger $r = \text{máx}\{\frac{1+\alpha_1}{1-\alpha_1} d(p_1, x_0), \cdots, \frac{1+\alpha_n}{1-\alpha_n} d(p_n, x_0)\}$ tenemos para cada $x \in C(x_0, r)$ que

$$d(f_i(x), x_0) \leq \alpha_i\, d(x, x_0) + (1 + \alpha_i) \tfrac{r(1-\alpha_i)}{1+\alpha_i} \leq \alpha_i\, r + r(1 - \alpha_i) = r;$$

con lo cual la demostración está completa. □

Apoyados en esta proposición al considerar un SIF $\{T_i\}_{i=0,\cdots,n-1}$ sobre un espacio métrico completo y localmente Euclideano (X, d) y una bola cerrada $C(x_0, r)$ tal que $T_i(C(x_0, r)) \subset C(x_0, r)$ para cada $i = 0, \cdots, n - 1$, podemos aproximarnos al atractor X_∞ tanto como queramos; basta tomar $m \geq 1$ suficientemente grande y estimar $\tau^m(C(x_0, r))$. Este procedimiento se puede colocar en un algoritmo deterministico, que es un finito conjunto de instrucciones que determinan los futuros valores a partir de los iniciales.

- `Paso 1. Introducir el número de iterados` N.
- `Paso 2. Inicializar un contador` $k = 1$.
- `Paso 3. Plotear el conjunto` B.
- `Paso 4. Incrementar el valor de` k `en 1.`
- `Paso 5. Si` $k < N$`, continuar; de lo contrario ir al Paso 8.`
- `Paso 6. Para cada` $i = 0, \cdots, n - 1$`, calcular` $T_i(B)$.
- `Paso 7. Asignar a` B `el valor` $f_1(B) \cup \cdots \cup f_n(B)$ `e ir al Paso 3.`
- `Paso 8. Fin del algoritmo.`

Sin dudas exite un elevado número de códigos en diferentes lenguajes de programación, con herramientas gráficas poderosas, mediante los cuales se expresa el algoritmo anterior para diferentes SIF. Por ejemplo, en [1], el lector podrá encontrar el código fuente escrito en BASIC de un SIF que genera el tapiz de Sierpinski. También pueden visitarse varios sitios web donde con certeza se encontrarán diversos códigos fuentes de varios atractores de SIF.

En `http://library.wolfram.com/infocenter/Demos/4662` el lector encontrará un código en Mathematica del tapiz de Sierpinski.

4.3. Otros ejemplos de atractores de SIF

En esta pate de las notas presentaremos algunos ejemplos de atractores de ciertos SIF. Varios de los cuales se obtienen a partir de SIF afines en $\mathbb{R}^n$; esto es, SIF dados por transformaciones afines del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Por esta razón dedicaremos algunas líneas a recordar las nociones de afinidad.

4.3.1. Transformaciones Afines

Definición 4.3.1. Sean $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada de orden $n \times n$ con entradas reales y $b \in \mathbb{R}^n$. La transformación $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = Ax + b$ con $x \in \mathbb{R}^n$ se conoce con el nombre de *transformación afín en* $\mathbb{R}^n$.

Note que cuando el vector unicolumna $b \in \mathbb{R}^n$ es nulo, entonces T es una transformación lineal; además, una transformación afin es invertible si, y sólo si, $\det(A) \neq 0$.

Existe un conjunto de transformaciones afines que son catalogadas de notables:

1. **Traslaciones:** Fijado un vector $b \in \mathbb{R}^n$, la *traslación dada por* b es definida por $T(x) = x + b$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

2. **Simetrías centrales respecto a un punto $Q \in \mathbb{R}^n$:** Fijado el punto $Q \in \mathbb{R}^n$ se define la *simetría central respecto a* Q por $T(x) = -x + Q$.

3. **Rotaciones del plano de ángulo θ y centro el origen:** Esta es la transformación lineal dada por:
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$
donde $\theta \in [0, 2\pi)$. El efecto geométrico de T sobre el vector x es rotarlo en ángulo θ en sentido antihorario.

4. **Homotecias de centro el origen y razón $\lambda \neq 0$:** Estas son las transformaciones lineales definidas por $T(x) = \lambda\, x$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Claramente, si $\lambda > 1$, la transformación es una *dilatación*; Si $0 < \lambda < 1$, T es una *contración*; y si $\lambda < 0$ y $|\lambda| > 1$, (resp. $|\lambda| < 1$) se trata de una dilatación compuesta con una simetría central respecto al origen.

Las transformaciones afines invertibles preservan las relaciones de incidencia entre puntos, rectas y planos en el espacio y están caracterizadas por esta propiedad, es decir, una biyección T de $\mathbb{R}^n$ en si mismo es una transformación afín si, y sólo si:

1. transforma rectas en rectas, es decir, L es una recta si, y sólo si, $T(L)$ es una recta y

2. preservan el paralelismo: dos rectas L y L' son paralelas si, y sólo si, $T(L)$ y $T(L')$ son paralelas.

Una transformación afin $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ queda determinadas por su valor en un n-simplex; que es la cápsula convexa de $(n+1)$-puntos afinmente independientes. Un 1-simplex es un segmento; un 2-simplex es un triángulo; un 3-simplex es un tetraedro, etc. En particular, sean $\Delta(P_0, \cdots, P_n)$ y $\Delta(Q_0, \cdots, Q_n)$ dos n-simplex en $\mathbb{R}^n$, entonces existe una única transformación afin invertible T tal que:

$$T(P_i) = Q_i \quad (i = 0, \cdots, n) \quad \text{y} \quad T(\Delta(P_0, \cdots, P_n)) = \Delta(Q_0, \cdots, Q_n).$$

Por ejemplo:

- dados dos intervalos (1-simplex) $[a, b]$, $[c, d] \subset \mathbb{R}$ existe una única transformación afín en la recta real: $T(x) = \alpha\, x + \beta$ tal que $T([a, b]) = [c, d]$;

- dados dos triángulos (2-simplex) $\Delta_0 = \Delta(P_0 Q_0 R_0)$ y $\Delta_1 = \Delta(P_1 Q_1 R_1)$ en el plano $\mathbb{R}^2$ existe una única transformación afín del plano T tal que $T(\Delta_0) = \Delta_1$.

Definición 4.3.2. Una transformación afín de $\mathbb{R}^n$, $T(x) = Ax + b$, se denomina *semejanza* o *similaridad* si existe $\lambda > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(y)\| = \lambda\, \|x - y\|, \quad \text{para todo} \;\; x, y \in \mathbb{R}^n.$$

El número λ es el *coeficiente de similaridad* de T.

Entre similaridades tenemos a las traslaciones, rotaciones, simetrías centrales y axiales y homotecias. En plano, éstas transforman triángulos en triángulos semejantes.

Este concepto de similitud puede ser colocado en un contexto más general. De hecho:

Definición 4.3.3. Una transformación $T : X \to X$ de un espacio métrico en si mismo se denomina *semejanza* o *similaridad* si existe $\lambda > 0$ tal que

$$d(T(x), T(y)) = \lambda\, d(x, y), \quad \text{para todo} \;\; x, y \in X.$$

Como antes, el número λ es el *coeficiente de similaridad* de T.

Definición 4.3.4. Una transformación afín de $\mathbb{R}^n$ es una *isometría* si es una semejanza y el coeficiente $\lambda = 1$. En el plano, cuando una isometría que preserva la orientación se le llama un *movimiento rígido.*

Recordemos que dos triángulos $\Delta(PQR)$ y $\Delta(P'Q'R')$ son congruentes si sus lados homólogos son congruentes, es decir,

$$|\overline{PQ}| = |\overline{P'Q'}| \; , \; |\overline{QR}| = |\overline{Q'R'}| \; , \; |\overline{PR}| = |\overline{P'R'}|$$

Traslaciones, rotaciones, simetrías centrales y axiales son isometrías. Se verifica sin mucha dificultad que toda isometría del plano es una composición de traslaciones, rotaciones y simetrías y que toda semejanza es una composición de una isometría y una homotecia.

4.3.2. Variaciones del Cantor ternario

En el ejemplo 4.2.1 mostramos un SIF afin en la recta real cuyo atractor es justamente el conjunto de Cantor ternario. Esas mismas ideas pueden ser extendidas; en efecto, sean $0 < \lambda_1, \cdots, \lambda_p < 1$ tales que $\sum_i \lambda_i < \frac{1}{2}$ y definamos transformaciones afines de la recta:

$$T_i(x) = \lambda_i x + \alpha_i,$$

donde las constantes α_i son tales que los intervalos $I_i = T_i(\mathbb{I})$ son disjuntos. El conjunto de Cantor $\mathbb{K}^\Lambda$, $\Lambda = \{\lambda_i\}$ definido en la sección 3.1 es el límite del SIF definido por las contracciones T_i:

$$\mathbb{K}^\Lambda = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{(i_1,\cdots,i_n)\in\{1,\cdots,k\}^n} I^\Lambda_{i_1\cdots i_n},$$

donde

$$\tau^n_\Lambda(\mathbb{I}) = \bigcup_{(i_1,\cdots,i_n)\in\{1,\cdots,k\}^n} I^\Lambda_{i_1\cdots i_n}$$

es el n-ésimo iterado del operador de Hutchinson asociado al SIF afin.

Observe que el atractor obtenido es en efecto un conjunto de Cantor; esto es, compacto, perfecto y totalmente disconexo. Esto sigue del hecho que la aplicación $h : B^+(p) \to X_\infty$ que asocia a cada sucesión en $B^+(p)$ un punto en el atractor (ver página 35) es un homeomorfismo.

4.3.3. Variaciones del Tapiz de Sierpinski

En la sección 3.2 mostramos la construcción de un tapiz de Sierpinski a partir de un triángulo equilátero; más aun, se mostró el SIF afin que lo genera.

Para la matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ consideremos ahora las siguientes semejanzas afines del plano:

$$f_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ f_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \ \text{ y } \ f_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Es simple verificar que el cuadrado $B = [0,1] \times [0,1]$ es invariante por estas transformaciones afines; esto es, $f_i(B) \subset B$ para todo $i = 1,2,3$. De hecho, B es transformado por f_1, f_2 y f_3, respectivamente, en los cuadrados $f_1(B) = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$, $f_2(B) = [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y $f_1(B) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Así la evaluación del operador de Hutchinson en B es:

$$\tau(B) = ([0, \tfrac{1}{2}] \times [0, \tfrac{1}{2}]) \cup ([0, \tfrac{1}{2}] \times [\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]) \cup ([\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \times [\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]),$$

al repetir este procedimiento una vez más, obtenemos $\tau^2(B)$ que es la unión de 9 cuadrados: cada uno de los cuadrados del paso anterior generan 3 subcuadrados; ver la figura que se muestra a continuación. Al proseguir un elevado número de veces, obtendremos una aproximación del triángulo de Sierpinski, tal y como se muestra a continuación.

Otra figura fractal atribuida a W. Sierpinski se obtiene como el atractor de un SIF definido mediante ocho transformaciones afines en $\mathbb{R}^2$. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ y los vectores

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, b_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, b_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, b_6 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, b_7 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \ \text{ y } \ b_8 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Fig. 4.4: Estas gráficas muestran a B, $\tau(B)$ y $\tau^2(B)$ respectivamente.

Fig. 4.5: $\tau^m(B)$ para m suficientemente grande.

se definen las transformaciones:

$$f_1 : x \to Ax;\ f_2 : x \to Ax + b_2;\ f_3 : x \to Ax + b_3;\ f_4 : x \to Ax + b_4$$
$$f_5 : x \to Ax + b_5;\ f_6 : x \to Ax + b_6;\ f_7 : x \to Ax + b_7;\ f_8 : x \to Ax + b_8.$$

El operador de Hutchinson τ asociado a $\{f_1, \cdots, f_8\}$ transforma el cuadrado unitario B en ocho cuadrados, $f_i(B)$ $(i = 1, \cdots, 8)$, de lado 3^{-1} y cuyos vértices inferior izquierdo están ubicados, respectivamente, en el origen, $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$ y b_8.

Al aplicar nuevamente τ sobre cada uno de estos ocho cuadrados obtenemos 8^2 cuadrados de lado 3^{-2}; al repetir el proceso un determinado número de veces estaremos observando una aproximación del esta alfombra fractal. El atractor de este SIF afin se conoce con el nombre de *Alfombra de Sierpinski*.

Finalizamos las variaciones del tapiz de Sierpinski con la figura fractal que se obtiene como atractor del SIF cuyas contracciones son las transformaciones afines:

$$f_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ f_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix},\ f_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$
$$f_4\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, f_5\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

El proceso de obtención de una aproximación al atractor del SIF es como antes. La siguiente figura

Fig. 4.6: Obtención de la alfombra de Sierpinski

muestra varios iterados del cuadrado unitario mediante el operador de Hutchinson F asociado al SIF; el atractor del SIF se le llama *caja fractal*.

Fig. 4.7: Obtención de la caja fractal.

A diferencia del atractor en la recta real anterior, el tapiz de Sierpinski y las variaciones que acá hemos mostrado son conjuntos conexos del plano. Demostraremos esta afirmación para el tapiz de Sierpinski $\mathbb{S}$ de la sección 3.2.

Recordemos que $\mathbb{S}$ es obtenido como el atractor de un SIF definido por tres transformaciones afines del plano: T_0, T_1, T_2, que transforman el triángulo equilátero Δ de vértices en puntos V_0, V_1 y V_2 en subtriángulos Δ_i $(i = 0, 1, 2)$ que contienen respectivamente el vértice V_i. Dado que cada $\Delta_i \subset \Delta$, entonces el tapiz de Sierpinski (atractor de tal SIF) es dado conjuntistamente por la identidad:

$$\mathbb{S} = \bigcap_{m\geq 1} \tau^m(\Delta) = \bigcup_{\{i_m\}\in B^+(3)} \bigcap_{m\geq 1} \Delta_{i_1\cdots i_m} = \bigcup_{\sigma\in B^+(3)} \{x_\sigma\},$$

donde $\{x_\sigma\} = \bigcap_{m\geq 1} \Delta_{i_1\cdots i_m}$, con $\sigma = \{i_m\}_{m\geq 1} \in B^+(3)$.

Sea ℓ_{01} el lado $\overline{V_0V_1}$ de Δ. Afirmamos que ℓ_{01} es la imagen bajo la aplicación $h : B^+(3) \to \mathbb{S}$ de las sucesiones $\omega \in B^+(3)$ que sólo contienen los dígitos 0 y 1. Esto probaría que $\ell_{01} \subset \mathbb{S}$; análogamente se demuestran las inclusiones $\ell_{12} \subset \mathbb{S}$ y $\ell_{12} \subset \mathbb{S}$.

Observe que $\ell_{01} \subset \Delta_0 \cup \Delta_1$. Ahora probaremos por inducción que

$$\ell_{01} \subset \bigcup_{(i_1,\cdots,i_n)\in\{0,1\}^n} \Delta_{i_1\cdots i_n}, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

En efecto, supongamos válida la inclusión para $k = n$. Dado que

$$\begin{aligned} \bigcup_{(i_1,\cdots,i_{n+1})\in\{0,1\}^{n+1}} \Delta_{i_1\cdots i_{n+1}} &= T_0\left(\bigcup_{(i_1,\cdots,i_n)\in\{0,1\}^2n} \Delta_{i_1\cdots i_n} \right) \\ &\cup\ T_1\left(\bigcup_{(i_1,\cdots,i_n)\in\{0,1\}^2n} \Delta_{i_1\cdots i_n} \right), \end{aligned}$$

se sigue entonces

$$\ell_{01} = T_0(\ell_{01}) \cup T_1(\ell_{01}) \quad \subset \bigcup_{(i_1,\cdots,i_{n+1})\in\{0,1\}^{n+1}} \Delta_{i_1\cdots i_{n+1}}$$

lo que demuestra la afirmación y también que $\ell_{01} \subset \mathbb{S}$.

Sea $\partial\Delta = \ell_{01} \cup \ell_{12} \cup \ell_{02}$ el borde de Δ. No es difícil probar, usando la definición del operador de Hutchinson y la observación anterior, que $\tau^n(\partial\Delta)$ es la imagen bajo h de las secuencias *cofinales* $\omega \in B^+(3)$; es decir, aquellas que a partir de un $N > 0$ contiene sólo dos de los tres dígitos $0, 1, 2$. El conjunto $\tau^n(\partial\Delta)$ es conexo, pues es la imagen continua de un conjunto conexo. Así mismo es fácil darse cuenta que los conjuntos $\tau^n(\partial\Delta)$ forman una unión creciente; por lo tanto la unión $\bigcup_n \tau^n(\partial\Delta)$

Fig. 4.8: Varias etapas en la construcción de la curva de Koch

es conexa. Observe que el conjunto de las secuencias cofinales es denso en $B^+(3)$. Eso significa que $\bigcup_n \tau^n(\partial\Delta)$ es denso en $\mathbb{S}$. Como la clausura de un conjunto conexo es conexa, concluímos que el tapiz de Sierpinski es conexo.

4.3.4. Curvas de Koch

La curva de Koch, uno de los ejemplos más populares de fractales, fue introducido por el matemático alemán Helge von Koch en 1904.

Es más fácil entender la naturaleza de la curva de Koch que el conjunto de Cantor o el tapiz de Sierpinski, aunque sus aspectos topológicos y geométricos son de diferente naturaleza. En primer lugar, la curva de Koch, que en adelante denotamos por Γ, es en efecto una curva, aunque esto no sea inmediato a partir de su construcción. En segundo lugar, y es más difícil de probar que de intuir, ella no contiene segmentos suaves, es decir, *no admite una recta tangente en ninguno de sus puntos*. De hecho, la curva de Koch es un ejemplo de curva no rectificable; más aun, es el límite (uniforme) de una sucesión de poligonales planas Γ_n cuyas longitudes $\ell(\Gamma_n)$ divergen a infinito cuando $n \to +\infty$.

La construcción es la siguiente. Tomemos un intervalo inicial, por ejemplo $[0,1]$, al cual denotaremos Γ_0 y divídalo en tres partes. Reemplace ahora el segmento del medio de Γ_0 por un triángulo equilátero y retire su base y llamemos Γ_1 a la figura resultante. Ahora aplicamos el mismo procedimiento a cada uno de los segmentos que forman Γ_1, obteniendo Γ_2. Despúes continúe recursivamente obteniendo Γ_{n+1} a partir de la curva Γ_n aplicando el mismo procedimiento en cada uno de los segmentos que componen Γ_n. La curva de Koch es el conjunto que queda después de repetir infinitas veces el proceso.

La poligonal Γ_n de la etapa n-ésima de la construcción está formada por 4^n segmentos de longitud 3^{-n}. Luego, la longitud de Γ_n es

$$\ell(\Gamma_m) = 4^n 3^{-n} = (4/3)^n$$

que diverge a infinito cuando $n \to +\infty$, como afirmamos anteriormente.

Ahora vamos a construir un SIF definido por tres contracciones afines del plano cuyo conjunto límite es la curva de Koch.

Para ello vamos a definir cuatro similaridades del plano que, aplicadas a Γ_0 generan Γ_1:

$$T_0 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1/3 \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1/3 \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1/3 \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sea τ el operador de Hutchinson asociado al SIF $\{T_0, T_1, T_2, T_3\}$. Por construcción $\Gamma_1 = \tau(\Gamma_0)$. No es difícil convencerse que la fórmula recursiva $\Gamma_{n+1} = \tau(\Gamma_n)$ define las diferentes etapas de la construcción de la curva de Koch; que es el atractor de este SIF afin.

Hay diferencia una fundamental con los casos anteriores: la sucesión Γ_n de aproximaciones sucesivas a la curva de Koch no es una sucesión encajada de compactos. De modo que el argumento del principio de encaje de Cantor no aplica directamente.

Una manera de resolver este problema es definir una sucesión encajada de entornos cerrados $F_n \supset \Gamma_n$ que contienen a las poligonales aproximantes y que convergen a Γ. Para ello tomamos como conjunto inicial F_0 un cuadrado de lado $\ell_0 = 1$ centrado en Γ_0 el intervalo inicial de la construcción. Por la propiedad contractiva del SIF se puede probar que $F_1 = \tau(F_0)$ es una vecindad cerrada de Γ_n formada por cuatro cuadrados de lado $\ell_1 = 3^{-1}$ centrados en los segmentos γ_i de la poligonal Γ_1, la primera etapa de la construcción de la curva de Koch. El conjnto F_1 es compacto y se tiene $F_1 \subset F_0$. Inductivamente, tenemos una secuencia encajada de vecindades compactas $F_n \subset \cdots \subset F_0$, tal que cada F_i con $i = 0, \cdots, n$ es una unión de 4^n cuadrados $\Delta_{i_1 \cdots i_n}$ de lado $\ell_n = 3^{-n}$ centrados en los segmentos $\gamma_{i_1 \cdots i_n}$ que componen la poligonal Γ_n. El teorema 4.2.3, ver página 35, garantiza que $\Gamma = \bigcap_n F_n$.

Por otro lado, para cada $n \geq 1$ podemos definir una biyección continua $h_n : [0,1] \longrightarrow \Gamma_n$ que es una parametrización continua de la poligonal Γ_n. En efecto cada curva Γ_n es una unión de segmentos de recta $\gamma_{i_1 \cdots i_n} = T_{i_n} \circ \cdots \circ T_{i_1}([0,1])$ que son la imagen del intervalo bajo la semejanza afin del plano $T_{i_n} \circ \cdots \circ T_{i_1}$. Sea

$$I_{i_1 \cdots i_n} = \left[\frac{i_1}{4} + \frac{i_2}{4^2} + \cdots + \frac{i_n}{4^n}, \frac{i_1}{4} + \frac{i_2}{4^2} + \cdots + \frac{i_n + 1}{4^n} \right]$$

un segmento 4-ádico y $\phi_{i_1 \cdots i_n} : I_{i_1 \cdots i_n} \longrightarrow [0,1]$ la única transformación afin de la recta que lleva el intervalo $I_{i_1 \cdots i_n}$ sobre $[0,1]$. Entonces, la función $h_n = [0,1] \longrightarrow \Gamma_n$ definida a trozos por

$$h_n \mid I_{i_1 \cdots i_n} := T_{i_n} \circ \cdots \circ T_{i_1} \circ \phi_{i_1 \cdots i_n} : I_{i_1 \cdots i_n} \longrightarrow \gamma_{i_1 \cdots i_n}$$

es una parametrización continua de Γ_n. Para ello basta verificar que h_n es continua a izquierda y a derecha en el extremo común de los intervalos contigüos $I_{i_1 \cdots i_n}$, y $I_{i_1 \cdots i_n + 1}$; esto es inmediato pues, por construcción, la imagen de los extremos de $[0,1]$ bajo $T_{i_n} \circ \cdots \circ T_{i_1}$ son precisamente los extremos de $\gamma_{i_1 \cdots i_n}$ que no son otros que los vértices de la poligonal Γ_n.

La sucesión de funciones continuas $\{h_n\}$ es de Cauchy en la métrica de la convergencia uniforme, y converge a biyección continua $h : [0,1] \longrightarrow \Gamma$, que paramteriza a Γ. En efecto, es claro que

$\Gamma_n = h_n([0,1]) \subset F_n$ para todo n. Como la sucesión es encajada, $h_m([0,1]) \subset F_n$ para todo $m \geq n$. Con un poco de cuidado se puede ver que la distancia de $h_m([0,1])$ a la curva Γ_n, "centro" de la vecindad F_n, es $\leq 3^{-n}$, en otras palabras: $|h_n(x) - h_m(x)| \leq 3^{-n}$ para todo $n \geq m$ y para todo $x, y \in [0,1]$. Esto prueba que la secuencia es de Cauchy; luego Γ es un compacto no vacío y límite uniforme de una sucesión poligonales.

4.3.5. Una función de Weierstrass

Topológicamente una curva se define como la imagen biunívoca continua del intervalo unitario $\mathbb{I} = [0,1]$ o de la circunferencia S^1. Una curva topológica puede ser de longitud infinita o no tener tangente en ningún punto, como muestra el ejemplo de la curva de Koch.

Weierstrass fue el primero en publicar un ejemplo de una curva continua que no tiene tangente en ningún punto, aunque por la época otros matemáticos habían comenzado a estudiar el problema. La curva de Weierstrass está dada por la parametrización:

$$\begin{cases} x = \sin(\theta) \\ y = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\cos(3^n\theta) \end{cases}$$

No es difícil ver $y = y(\theta)$ es una función continua, pues es una serie uniformemente convergente de funciones continuas pues, en efecto, la serie está acotada por la serie númerica convergente $\sum_n 2^{-n}$ y esto implica, por un resultado debido a Weierstrass mismo que la serie converge uniformemente a una función continua. Weierstrass demostró que la derivada $y'(\theta)$ no existe y aunque no es fácil de probar, podemos sospechar que así es efectivamente, porque al derivar formalmente la serie de $y = y(\theta)$ obtenemos una serie divergente.

En lo que sigue daremos un ejemplo de una función continua cuyas gráficas son curvas fractales que no tienen recta tangente en ninguno de sus puntos. Se trata de una variación de la curva de Weierstrass que es el límite de un SIF de transformaciones afines que *no son similaridades*. Sea

$$f_0(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -2x + 2 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

para $x \in [0,1]$ y extendamos f_0 a una función periódica de período 1 en $\mathbb{R}$: $f_0(x+1) = f_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dados $a, b > 1$ definimos

$$f_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^{-n} f_0(a^n x), \quad \text{para } \ x \in [0,1]; \tag{4.7}$$

por el criterio Weierstrass la serie de la derecha es uniformemente convergente y converge a una función continua. El gráfico de la función límite f es el atractor de un SIF definido por dos transformaciones afines del plano.

Para fijar ideas tomaremos $a = 2$ y $b = 4$. Definimos $\Gamma_0 = \{(x, f_0(x)) : x \in [0,1]\}$ la gráfica de f_0 en el intervalo unitario. $\Delta = \Gamma_0 \cup [0,1]$ es un triángulo isósceles de base $[0,1]$ y altura $h = 1$. Si calculamos la primera suma parcial de la serie tenemos la función:

$$S_1(x) = f_0(x) + 4^{-1} f_0(2x), \quad \text{para } \ x \in [0,1]. \tag{4.8}$$

Como f_0 es 1-periódica, entonces

$$f_0(2x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}] \\ -4x+2 & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ 4x-2 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ -4x+2 & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}, \quad \text{para} \ \ x \in [0,1].$$

Luego, $S_1(x)$ puede escribirse como

$$S_1(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}] \\ x+\frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ -x+\frac{3}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ -3x+3 & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}, \quad \text{para} \ \ x \in [0,1].$$

Sea $\Gamma_1 = \{(x, S_1(x) : x \in [0,1]\}$ la gráfica de S_1 sobre el intervalo unitario $[0,1]$. Γ_1 es una poligonal formada por cuatro segmentos con los cuales se forman dos triángulos:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \Gamma_0 \mid_{[0,\frac{1}{2}]} \cup \Gamma_1 \mid_{[0,\frac{1}{2}]} \\ \Delta_1 &= \Gamma_0 \mid_{[\frac{1}{2},1]} \cup \Gamma_1 \mid_{[\frac{1}{2},1]}, \end{aligned}$$

donde $\Gamma \mid_J$ denota la restricción de Γ a J. Sean T_0 y T_1 las dos únicas transformaciones afines del

PSfrag replacements

Δ

Δ_0

Δ_1

Fig. 4.9: Triángulos obtenidos de las curvas Γ_0 y Γ_1

plano tales que $T_0(\Delta) = \Delta_0$ y $T_1(\Delta) = \Delta_1$. Si τ es el operador del Hutchinson asociado al SIF $\{T_0, T_1\}$, por construcción $\Gamma_1 = \tau(\Gamma_0)$. Para $n \geq 1$ consideremos $\Gamma_n = \{(x, S_n(x)) : x \in [0,1]\}$ la gráfica de la función $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 4^{-n} f_0(2^n x)$, que es la n-ésima suma parcial de la serie (4.7) con $x \in [0,1]$. Se puede demostrar por inducción que $\Gamma_{n+1} = \tau(\Gamma_n)$, tal demostración es elemental aunque laboriosa. Con ello se prueba que la gráfica de la función $f_{2,4}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 4^{-n} f_0(2^n x)$ con $x \in [0,1]$, es el atractor del SIF definido arriba.

4.4. Más propiedades de los SIF

En esta sección presentamos algunas propiedades adicionales de los SIF y sus atractores.

El siguiente resultado prueba que los conjuntos auto-similares (atractores de SIF formado por similitudes) son densos en el espacio de las formas de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.4.1. *Sea K un conjunto compacto no vacío en $\mathbb{R}^n$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ es posible construir un SIF $\{T_i\}$ de similaridades de $\mathbb{R}^n$ con razón de contracción $0 \leq \lambda_i < 1$ tales que*

$$dist_{\mathcal{H}}(K, K_\infty) < \epsilon,$$

siendo K_∞ el atractor del SIF $\{T_i\}$.

Demostración. Sea K_0 la clausura de la cápsula convexa del conjunto K; es decir, es el mínimo conjunto cerrado convexo que contiene a K. Descomponiendo a K_0 en un número finito de n-simplex $\Delta_i \subset K_0$ podemos definir contracciones afines $T_i : \Delta_i \to K_0$ tales que $\bigcup_i T_i(K_0)$ cubre K. Sea K_∞ el atractor de ese SIF contractivo y τ el operador de Hutchinson. Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(K, K_\infty) &\leq \operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(K, \tau(K)) + \operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(\tau(K), K_\infty) \\ &= \operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(K, \tau(K)) + \operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(\tau(K), \tau(K_\infty)) \\ &\leq \operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(K, \tau(K_0)) + \lambda \operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(K, K_\infty) \end{aligned}$$

donde $d(T_i(x), T_i(y)) \leq \lambda\, d(x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y para todo i. Despejando, tenemos el siguiente estimado

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(K, K_\infty) \leq \frac{\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(K, \tau(K_0))}{1 - \lambda}.$$

Luego, si escogemos las contracciones afines T_i de manera que

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(K, \tau(K_0)) = \operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(K, \bigcup_i T_i(K_0)) < \epsilon(1 - \lambda),$$

entonces $\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(K, K_\infty) < \epsilon$, lo que prueba el teorema. □

Definición 4.4.1. Sean (X, d) y (Λ, d') dos espacios métricos completos. Decimos que la familia de funciones $\{T_\lambda : X \longrightarrow X\}_{\lambda \in \Lambda}$ es continua si la aplicación:

$$(\lambda, x) \longmapsto (\lambda, T_\lambda(x))$$

es continua como función del espacio $\Lambda \times X$ en si mismo.

El próximo teorema afirma que los puntos fijos de una familia continua de contracciones varian continuamente con el parámetro λ.

Teorema 4.4.2. *Sea $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de operadores de contracción de un espacio métrico completo (X, d) y $p = p(\lambda)$ el único punto fijo del operador $T_\lambda : X \longrightarrow X$. Entonces, la función $\lambda \longmapsto p(\lambda)$ es continua.*

Demostración. En primer lugar observemos que, por la unicidad, la correspondencia $\lambda \longmapsto p(\lambda)$ es en efecto una función. Como $(\lambda, x) \longmapsto (\lambda, T_\lambda(x))$ es continua, entonces, para $\lambda_0 \in \Lambda$ y $x_0 \in X$ y para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta = \delta(x_0, \lambda_0, \epsilon) > 0$ tal que

$$d(x, x_0)\ ,\ d'(\lambda, \lambda_0) < \delta \implies d(T_\lambda(x), T_{\lambda_0}(x_0)) < \epsilon.$$

En particular, si $p_0 = p(\lambda_0)$ entonces

$$d(p(\lambda), p_0) = d(T_\lambda(p(\lambda)), T_{\lambda_0}(p_0)) < \epsilon, \quad \text{siempre que} \quad d(\lambda, \lambda_0) < \delta.$$

Esto demuestra la continuidad de la función $\lambda \longmapsto p(\lambda)$. □

Definición 4.4.2. Sea $\{T_i^\lambda\}_{i\in I^\lambda,\lambda\in\Lambda}$ una familia parametrizada de SIF en un espacio métrico completo (X,d). Decimos que esa familia es continua si el operador de Hutchinson $\tau^\lambda : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ define una familia continua de contracciones en $\mathcal{H}(X)$.

El próximo teorema afirma que los atractores de una familia continua de SIF varian continuamente con el parámetro $\lambda \in \Lambda$.

Teorema 4.4.3. *Sea $\{T_i^\lambda\}_{i\in I^\lambda,\lambda\in\Lambda}$ una familia continua de SIF en un espacio métrico completo (X,d). Entonces, los respectivos atractores, X_λ, varian continuamente con el parámetro; es decir, para cada $\lambda_0 \in \Lambda$ se cumple:*

$$dist_{\mathcal{H}}\,(X_\lambda, X_{\lambda_0}) \to 0 \quad cuando \quad \lambda \to \lambda_0.$$

La demostración de este resultado es inmediata en virtud del teorema anterior. Conviene advertir al lector, sin embargo, que dos conjuntos pueden estar muy cerca en la métrica de Hausdorff, aunque los detalles más finos de su geometría sean fundamentalmente no equivalentes.

Además de los teoremas anteriores que muestran propiedades de densidad y continuidad de los atractores de SIF, los siguientes resultados proveen propiedades de conexidad de los atractores de SIF por simple inspección de las transformaciones que lo definen. Estos teoremas pueden ser encontrados en [8].

Teorema 4.4.4. *Sean $\{T_i\}_{i=0,\cdots,N}$ un SIF con atractor X_∞ en en un espacio métrico completo (X,d). Si X_∞ es unión disjunta de sus partes; esto es, si $X_\infty = \bigsqcup_{i=0}^N T_i(X_\infty)$, entonces X_∞ es totalmente disconexo.*

Demostración. Sean x, y puntos distintos en el atractor X_∞ del SIF; sea $d > 0$ la distancia entre ellos. Claramente, o x y y pertenecen a la misma componente, $x, y \in T_i(X_\infty)$, o bien $x \in T_i(X_\infty)$ y $y \in T_j(X_\infty)$ para $i \neq j$. No obstante, x y y no pueden mantenerse en una misma componente $T_{i_1} \circ T_{i_2} \circ \cdots \circ T_{i_k}(X_\infty)$ para toda sucesión $\{i_m\}$ en el espacio de los $(N+1)$-ádicos; pues:

$$\operatorname{diam}(T_{i_1} \circ T_{i_2} \circ \cdots \circ T_{i_k}(X_\infty)) \leq \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k},$$

el cual puede hacerse arbitariamente pequeño cuando k crece. Así, x y y no pueden pertenecer a la misma componente conexa de X_∞. Como x y y son cualesquiera, entonces X_∞ es totalmente disconexo. □

Teorema 4.4.5. *Sean $\{T_i\}_{i=0,\cdots,N}$ un SIF en el espacio métrico completo (X,d). Si las constantes de contracción, λ_i con $i = 0, \cdots, N$ satisfacen $\sum_{i=0}^N \lambda_i < 1$, entonces X_∞ es totalmente disconexo.*

Demostración. De la hipótesis sobre las constantes de contractividad del SIF sigue que la suma de los diámetros de las componentes es menor que el diámetro del atractor; esto es:

$$\sum_{i=0}^N \operatorname{diam}(T_i(X_\infty)) \leq \operatorname{diam}(X_\infty) \sum_{i=0}^N \lambda_i < \operatorname{diam}(X_\infty).$$

Para cada $n \geq 1$ consideremos el iterado n-ésimo del operador de Hutchinson aplicado a X_∞; es decir,

$$\tau^n(X_\infty) = \bigcup_{(i_1\cdots i_n)\in J_n} X_{i_1\cdots i_n};$$

si $\operatorname{diam}_n(X_\infty)$ es el diámetro de tal componente, entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}_n(X_\infty) &\leq \sum_{i_1=0}^{N}\sum_{i_2=0}^{N}\cdots\sum_{i_n=0}^{N} \operatorname{diam}(T_{i_1}\circ T_{i_2}\circ\cdots\circ T_{i_n}(X_\infty)) \\
&\leq \operatorname{diam}(X_\infty)\sum_{i_1=0}^{N}\sum_{i_2=0}^{N}\cdots\sum_{i_n=0}^{N}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_n} \\
&= \operatorname{diam}(X_\infty)\left(\sum_{i=0}^{N}\lambda_i\right)^n;
\end{aligned}$$

esto implica que $\operatorname{diam}_n(X_\infty)\to 0$ cuando $n\to+\infty$. De lo cual se deduce que dos puntos distintos cualesquiera en el atractor no pueden permanecer en la misma componente $(T_{i_1}\circ T_{i_2}\circ\cdots\circ T_{i_n})(X_\infty)$ para todo $n\geq 1$. Esto demuestra que X_∞ es totalemente disconexo. □

4.5. Algoritmos deterministas y el juego del caos

La construcción de conjuntos como límites de familias encajadas de compactos definidos recursivamente nos proporciona un algoritmo determinista para generar fractales. En lo que sigue veremos un algoritmo tipo Monte Carlo más eficiente para generar imágenes de fractales por computador.

Tomemos una hoja de papel y un lápiz y marquemos tres puntos enumerándolos 1,2 y 3. Estos puntos forman los vértices de un triángulo Δ que supondremos es equilátero, para fijar ideas. Sea $\mathcal{B}=\{1,2,3\}$ en conjunto de los vértices de Δ. Ahora arreglemos un dado para que sólo aparezcan los números 1,2, y 3, por ejemplo identificando lados opuestos. Las reglas del juego son las siguientes:

El juego del caos:

- Tomamos al azar un punto cualquiera en triángulo dibujado en la hoja de papel, digamos x_0, y lancemos el dado. Si sale el punto $b_0\in\mathcal{B}$ trazamos una línea del punto x_0 hasta b_0 y llamamos x_1 al punto medio del segmento $\overline{x_0b_0}$.
- Volvemos a lanzar el dado y obtenemos un punto $b_1\in\mathcal{B}$, trazamos el segmento $\overline{x_1b_1}$ y llamamos x_2 al punto medio. Así, recursivamente, formamos una sucesión infinita de puntos en el plano $x_0,x_1,x_2,\cdots$ donde x_{n+1} se obtiene a partir de x_n tomando un punto $b_n\in\mathcal{B}$ al azar y definiendo x_{n+1} como el punto medio del segmento $\overline{x_nb_n}$.

La gráfica muestra la epata n-ésima del juego. Un poco de experimentación permite ver que la figura generada por el juego del caos, tal como lo definimos arriba, es el tapiz de Sierpinski.

La idea del juego del caos fue introducida por Michael Barnsley; permite definir algoritmos rápidos y eficaces para generar conjuntos fractales, además de ser un divertido instrumento pedagógica que ha servido para popularizar la teorí de conjuntos fractales.

El algoritmo Monte Carlo para generar fractales: Sea $\{T_i\}_{i\in I}$ un SIF en un espacio métrico completo (X,d) y suponga que existe $X_0\subset X$ compacto tal que $T_i(X_0)\subset X_0$ para todo i:

`PROCEDIMIENTO`

- `PRIMER PASO`: *elija $x\in X_0$ y un entero $N>0$;*

Fig. 4.10: El juego del caos

- `SEGUNDO PASO`: *elija $i \in I$ con un generador de números aleatorios*;
- `TERCER PASO`: *haga $x = T_i(x)$, $n = n + 1$*;
- `CUARTO PASO`: *repita (2) y (3) mientras $n < N$.*

Este algoritmo tipo Monte Carlo genera una sucesión de puntos $\{x_n\}$ definida recursivamente por la ecuación

$$x_{n+1} = T_{i_n}(x_n) \tag{4.9}$$

es decir, $x_n = T_{i_n} \circ \cdots \circ T_{i_0}(x_0)$, donde los indices $i_0, \cdots, i_N \in I$ han sido escogidos al azar.

No es diíficil ver que el juego del caos de Barnsley nos es otra cosa que el algoritmo Monte Carlo descrito más arriba aplicado al SIF que genera el tapiz de Sierpinski.

Teorema 4.5.1. *Sean X_∞ el conjunto límite de un SIF $\{T_i\}_{i \in I}$, $i_0, i_1, \cdots, \in I$ una sucesión infinita de elementos en I escogidos al azar con ayuda de un generador de números aleatorios y $\{x_n\}$ la secuencia generada recursivamente usando la ecuación (4.9). Entonces*

$$X_\infty \subset \overline{\{x_0, x_1, x_2, \cdots, \}}.$$

La demostración de este teorema usa alguna variante de la ley fuerte de los grandes números, un teorema fundamental de la teoría de probabilidades. En la sección de ejercicios proponemos una demostración "determinista" de un resultado más débil, pero que ilustra bien la naturaleza del problema.

El algoritmo Monte Carlo es usado por Fractint y otros programas de computador para la generación de fractales pues consumen poca memoria y tiempo de ejecución en comparación con los algoritmos deterministas descritos al principio de la sección.

4.6. Ejercicios

1. Sean (X, d) un espacio métrico completo, $\{f_0, \cdots, f_{n-1}\}$ un SIF con atractor X_∞, τ el operador de Hutchinson asociado, $B \in \mathcal{H}(X)$ tal que $f_i(B) \subset B$ para todo $i = 0, \cdots, n-1$, y $h : B^+(n) \to X_\infty$ la aplicación que codifica los puntos del atractor del SIF.

   a) Si existe $m \geq 1$ tal que $\tau^m(B) = \bigcup_{J_m}(f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_m})(B)$ es disjunta, entonces X_∞ es totalmente disconexo. ¿Es cierto que bajo estas hipótesis X_∞ es un conjunto de Cantor?

b) Demostrar que si h es inyectiva, entonces X_∞ es un conjunto de Cantor.

c) Mostrar un ejemplo de un SIF $\{f_1, \cdots, f_n\}$, un compacto $B \in \mathcal{H}(X)$ con $f_i(B) \subset B$ para todo $i = 1, \cdots, n$, y $f_i(B) \cap f_j(B) = \emptyset$ para todo $i \neq j$; pero que el atractor del SIF no sea un conjunto de Cantor.

d) Sean $\sigma, \rho \in B^+(n)$ diferentes y con la propiedad que para algún $m \geq 1$:

$$(\bigstar) \qquad (f_{\sigma(0)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(m)})(B) \cap (f_{\rho(0)} \circ \cdots \circ f_{\rho(m)})(B) = \emptyset.$$

Demostrar que $h(\sigma) \neq h(\rho)$. Concluir que si $\bigstar$ se cumple para toda $\sigma \neq \rho$, entonces X_∞ es un conjunto de Cantor.

2. En $\mathbb{R}^2$ con la métrica Euclidiana considere el SIF dado por las contracciones f_1, f_2, f_3, f_4 que a continuación se definen:

$$f_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \; f_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix},$$
$$f_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \;\text{ y }\; f_4\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix};$$

donde A es la matriz $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$.

a) Verificar que el cuadrado $B = [0,1] \times [0,1]$ es tal que $f_i(B) \subset B$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$.

b) Si τ denota el operador de Hutchinson asociado a tal SIF, hacer diseños de $\tau^m(B)$ para $m = 1, 2, 3, 4$. ¿De cuántos cuadrados se compone cada $\tau^m(B)$ para todo $m \geq 1$?

c) Verificar que $f_1(B) \cap f_2(B)$, $f_1(B) \cap f_3(B)$, $f_2(B) \cap f_4(B)$ y $f_3(B) \cap f_4(B)$ son conjuntos unitarios y que tales puntos no están en el atractor del SIF.

d) Dada cualquier $\sigma \in B^+(4)$ y cualquier $k \geq 0$, demostrar que si $g_k = f_{\sigma(0)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(k)}$, entonces $g_k \circ f_1(B) \cap g_k \circ f_2(B)$, $g_k \circ f_1(B) \cap g_k \circ f_3(B)$, $g_k \circ f_2(B) \cap g_k \circ f_4(B)$ y $g_k \circ f_3(B) \cap g_k \circ f_4(B)$ son conjuntos unitarios y que tales puntos no están en X_∞.

e) Demostrar que la aplicación h que codifica los puntos del atractor es inyectiva, y por tanto X_∞ es un conjunto de Cantor. Compare con el ejercicio anterior.

3. Describa el atractor de los siguientes SIF de $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana:

a) $f_1(x) = \alpha x$ y $f_2(x) = (1-\alpha)x + \alpha$, donde $0 < \alpha < 1$.

b) $f_1(x) = \frac{1}{3}x$ y $f_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

c) $f_1(x) = \frac{1}{2}x$, $f_2(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ y $f_2(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

d) $f_1(x) = a\,x + b$ y $f_2(x) = c\,x + d$, donde $0 < |a|$, $|b| < 1$.

4. Sean $M = [0,2]$ dotado de la métrcia Euclidiana. Verifique que las funciones $f_1(x) = \frac{1}{9}\,x^2$ y $f_2(x) = \frac{3}{4}\,x + \frac{1}{2}$ definen un SIF en M. Encontrar un factor de contractividad del operador de Hutchinson. Demostrar que el atractor de este SIF es un conjunto de Cantor.

5. Considere el espacio métrico $C([0,1], \mathbb{R})$ de todas las funciones continuas del intervalo $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ dotado de la métrica del máximo; esta es:

$$d_\infty(f,g) = \text{máx}\{|f(t) - g(t)| \,:\, t \in [0,1]\}.$$

Se definen $\omega_i : C([0,1], \mathbb{R}) \to C([0,1], \mathbb{R})$, $i = 1, 2$, por $\omega_1(f) = \frac{1}{2}f$ y $\omega_2(f) = \frac{1}{2}f + g_2$, donde $g_2(t) = 2t(1-t)$ para todo $t \in [0,1]$. Demostrar que $\{C([0,1], \mathbb{R}); \omega_1, \omega_2\}$ es un SIF. Determine su atractor.

6. **Conjuntos de Cantor no lineales**: sean $T_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \cdots, p-1$ funciones continuamente diferenciables. Suponga que $|T_i'(x)| \leq \lambda < 1$ para todo $x \in \mathbb{I}$ y que los intervalos $I_i = T_i(\mathbb{I})$ son disjuntos. Pruebe que el SIF $\{T_i\}$ tiene como conjunto límite un cantor homeomorfo a $B^+(p)$.

7. Sea $h : B^+(4) \longrightarrow \Gamma$ el mapa de desarrollos 4-ádicos de la curva de Koch Γ. Pruebe que los elementos cofinales de $B^+(4)$ se mapean en los vértices de la curva de Koch. Concluya que los vértices son densos en Γ y deduzca que la curva de Koch no admite tangente en ningún punto. [1]

8. Sea $\mathbb{I}^n$ en cubo unitario en $\mathbb{R}^n$. Retire un cubo $J_0 = [1/3, 2/3]^n$ de $\mathbb{I}^n$ y repita el proceso de forma recursiva. El conjunto límite de esta construcción se llama esponja de Menger y será denotado $\mathbb{M}$. Defina un SIF para la esponja de Menger y pruebe que es un conjunto compacto, conexo, no vacío.

9. Sea $\mathcal{S} \subset \{0, \cdots, 9\}$ un subconjunto propio. Pruebe que $\Lambda = \Lambda_{\mathcal{S}}$, el conjunto de los $x \in \mathbb{I}$ cuyos desarrollos decimales sólo contiene dígitos $n_i \in \mathcal{S}$ es un conjunto de Cantor.

10. El siguiente ejercicio muestra un SIF infinito numerable usado en el desarrollo en fracciones continuas. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos
$$T_n(x) = \frac{1}{n+x}, \ x \in \mathbb{I}.$$
El SIF $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ permite representar números reales a través de un desarrollo en fracciones continuas:
$$x = \lim_{k\to+\infty} [n_1, \cdots, n_k]$$
donde
$$[n_1, \cdots, n_k] = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{\ddots \quad + \frac{1}{n_k}}}}}.$$

    a) Pruebe que $I_{n_1\cdots n_k} = T_{n_k} \circ \cdots \circ T_{n_1}(\mathbb{I})$ puede representarse como
    $$I_{n_1\cdots n_k} = [\,[n_1, \cdots, n_k + 1]\,, [n_1, \cdots, n_k]\,]$$
    y que, dada una sucesión de números naturales $\{n_k\}$ la familia de intervalos $I_{n_1\cdots n_k}$ decrecen a un único punto.

    b) Pruebe que $B^+(\mathbb{N}) = \{\,\{n_k\} \ : \ n_k \in \mathbb{N}\}$ es un espacio métrico completo con la métrica producto.

    c) Pruebe que la función $h : B^+(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{I}$ definida por
    $$\{h(\omega)\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} X_{i_1\cdots i_n},$$
    donde $\omega = \{i_n\}$ y $X_{i_1\cdots i_n} = T_{i_1} \circ \cdots \circ T_{i_n}(\mathbb{I})$ es continua, abierta y sobreyectiva:
    $$x = \lim_{k\to+\infty} [n_1, \cdots, n_k]$$
    es el desarrollo en fracciones contínuas de x.

[1] Sea $\mathcal{S} \subset \{1, \cdots, p\}$ un subconjunto propio de indices. Un elemento ω de $B^+(p)$ se llama S-cofinal o simplemente cofinal si existe $N > 0$ tal que $\omega_k \in \mathcal{S}$ para todo $k \geq N$

d) Sea $x = \sqrt{2} - 1$ la solución positiva de la ecuación cuadrática $x^2 + 2x - 1 = 0$, reescribimos la ecuación cuadrática como sigue:

$$x = \frac{1}{2 + x}.$$

Determine,usando estos hechos, el desarrollo en fracciones continuas de $\sqrt{2}$.

e) Calcule el desarrollo en fracciones continuas de las raíces positivas de $x^2 + nx - 1 = 0$. Por ejemplo, el número de oro de los griegos $(1 + \sqrt{5})/2$ es la solución de la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$ y admite el siguiente desarrollo en fracciones contínuas:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \lim_{n \to +\infty} \overbrace{[1, \cdots, 1]}^{n-veces}.$$

En general los dígitos del desarrollo en fracciones continuas de las soluciones de ecuaciones algebraicas de segundo grado con coeficientes enteros son *periódicos*. [9].

11. Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ un conjunto finito y defina $\Lambda = \Lambda_{\mathcal{S}} \subset \mathbb{I}$ el conjunto de los x tales que $\{n_k\}$, los digítos de su desarrollo en fracciones continuas, satisfacen $n_k \in \mathcal{S}$. Pruebe que Λ es un conjunto de Cantor.

12. **La función de Cantor o "devil's staircase"**: En $X = C^0([0,1], \mathbb{R})$, el espacio de las funciones continuas en definidas en $\mathbb{I} = [0,1]$ con la métrica del supremo, se define el operador $T : X \longrightarrow X$ como sigue:

$$T(f)(x) = \begin{cases} \frac{f(3x)}{2} & \text{si } \ x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1/2 & \text{si } \ x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1}{2} + \frac{f(3x-2)}{2} & \text{si } \ x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

a) Pruebe que T está bien definido como operador del espacio de funciones continuas: si f es continua, entonces, $T(f)$ es continua;

b) Pruebe que T es una contracción en el espacio de las funciones continuas. Concluya que T tiene un único punto fijo $f_0 \in X$ $(T(f_0) = f_0)$ tal que, para toda $f \in X$ la sucesión $\{T^n(f)\}$ converge uniformemente a f_0. La función f_0 se llama función de Cantor o "devil's staircase" (escalera del diablo).

c) Pruebe que f_0 es continua no decreciente y es constante en las lagunas U_n del complemento del conjunto de Cantor ternario: $\mathbb{I} - \mathbb{K} = \bigcup_n U_n$. La imagen de $\mathbb{I} - \mathbb{K}$ bajo f_0 son los racionales diádicos. Esto significa que f_0 mapea un conjunto de medida de Lebesgue $= 1$ en un conjunto de medida cero.

d) Pruebe que la gráfica de f_0 es el conjunto límite del siguiente SIF:

$$T_0\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Observe que T_1 es singular: colapsa el cuadrado unitario $\mathbb{I}^2$ sobre el intervalo $[0, 1/3]$ y despúes lo traslada al punto $(1/3, 1/2)$ dando el primer segmento constante de f_0.

El siguiente programa de Maple fue bajado de la página web

http://www.mathcurve.com/fractals

y permite generar aproximaciones de la función de Cantor, como indica la figura

```
escalier:=proc(a,b,c,d,n) local liste;
if n=0 then liste:=[a,b],[c,d] else liste:=
escalier(a, b, (2*a+c)/3, (b+d)/2, n-1),
escalier((2*a+c)/3, (b+d)/2, (a+2*c)/3,
(b+d)/2, n-1),
escalier((a+2*c)/3, (b+d)/2, c, d, n-1) fi;
liste end:
plot([escalier(0,0,1,1,n)]);
```

Fig. 4.11: Gráfica de la función de Cantor generada con Maple

13. Sea $T : X \longrightarrow X$ una transformación continua de un espacio métrico completo en si mismo y suponga que T^N es una contracción para algún entero $N > 0$. Pruebe que T tiene un único punto fijo atractor.

14. Definimos el operador "*shift*" en $B^+(p)$ como el desplazamiento hacia la izquierda, es decir:

$$\sigma : (i_0 i_1 i_2 \cdots) \longmapsto (i_1 i_2 \cdots), \text{ para toda } \{i_n\}_{n\geq 0}.$$

Equivalentemente, $\sigma(\omega)(n) = \omega(n+1)$. Pruebe:

a) el "shift" σ es una función continua;

b) que los puntos periódicos de σ son densos en $B^+(p)$;

c) que los puntos eventualmente periódicos del "shift" son densos. Siendo que un punto p es *eventualmente periódico* si existe $N > 0$ tal que $T^N(p)$ es periódico, es decir: existe $n > 0$ tal que $T^n(T^N(p)) = T^N(p)$ y $T^{N+k}(p) \neq T^N(p)$ para $0 < k < n$.

d) que σ exhibe puntos $\omega \in B^+(p)$ cuya órbita es densa; esto es, existen puntos $\omega \in B^+(p)$ tales que $\overline{\{\sigma^m(\omega) : m \geq 0\}} = B^+(p)$.

15. Sea $\mathbb{I} = [0,1]$. Considere puntos:

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = 1,$$

e intervalos $I_i = [a_i, a_{i+1})$ para $i = 0, \cdots, p-2$ y $I_{p-1} = [a_{p-1}, 1]$. Note que $\{I_i\}$ es una partición de $\mathbb{I}$. Sea $T : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ una función continuamente diferenciable a trozos sobre la partición $\{I_i\}_{i=0,\cdots,p-1}$ de $\mathbb{I}$; esto es, $T \mid I_i = T_i$ es continuamente diferenciable. Suponga que $\overline{T_i(\mathbb{I})} = \mathbb{I}$ y existe $\rho > 1$ tal que

$$\min_i \inf_{x \in I_i} |T_i'(x)| \ \geq \ \rho \ > \ 1;$$

Pruebe lo siguiente:

a) para cada $\omega = \{i_n\} \in B^+(p)$, la familia de intervalos

$$I_{i_0 \cdots i_{n-1}} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \overline{T^{-k} I_{i_k}}$$

define una familia encajada de compactos que converge a un único $x \in \mathbb{I}$. **Indicación**: Pruebe que

$$T^k(I_{i_0 \cdots i_{n-1}}) = I_{i_0 \cdots i_{n-k-1}} \qquad T^n(I_{i_0 \cdots i_{n-1}}) = \mathbb{I}.$$

Como $|T^n(I_{i_0 \cdots i_{n-1}})| = |\mathbb{I}|$, por el Teorema del Valor Medio existe un punto $\xi \in I_{i_0 \cdots i_{n-1}}$ tal que $|(T^n)'(\xi)||I_{i_0 \cdots i_{n-1}}| = 1$ Por hipótesis $|(T^n)'(\xi)| \geq \rho^n$, luego, $|I_{i_0 \cdots i_{n-1}}| \leq \rho^{-n} \to 0$ como $n \to +\infty$.

b) la función $\pi : B^+(p) \longrightarrow \mathbb{I}$ definida por la ecuación conjuntista

$$\{\pi(\omega)\} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} T^{-n} I_{i_n} \tag{4.10}$$

es continua, abierta y sobreyectiva.

c) A cada órbita $\mathcal{O}_T^+(x) = \{T^n(x) : n \geq 0\}$ de T se le asocia un itinerario $\omega \in B^+(p)$ de manera que $T^n(x) \in I_{i_n}$ para todo $n \geq 0$. Pruebe que $\omega = \{i_n\}$ es el itinerario de x si, y sólo si, $\{x\} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} I_{i_0 \cdots i_n}$;

d) que $T \circ \pi = \pi \circ \sigma$. En consecuencia π establece una correspondencia entre las órbitas de σ y las órbitas de T:

$$\pi(\mathcal{O}_\sigma^+(\omega)) = \mathcal{O}_T^+(\pi(\omega));$$

e) Concluya que T tiene un conjunto denso de órbitas periódicas y que es topológicamente transtivo;

16. Sea $T : \bigcup_i I_i \subset \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$ una función como la arriba descrita pero los intervalos I_i son ahora *cerrados y disjuntos dos-a-dos*. Pruebe lo siguiente:

a) El conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{+\infty} T^{-n} \left(\bigcup_i I_i \right)$$

es compacto y no vacío;

b) Λ es invariante bajo T y es maximal respecto a esa propiedad, es decir: si $X \subset \bigcup_i I_i$ es T-invariante, entonces $X \subseteq \Lambda$;

c) Pruebe que el mapa $\pi : B^+(p) \longrightarrow \Lambda$ definido como en (4.10) es un homeomorfismo. Λ es llamado a veces un *conjunto de Cantor definido dinámicamente*. **Indicación**: basta verificar que π es uno-a-uno.

17. Sea $\{T_i\}_{i\in I}$ un SIF en un espacio métrico completo (X, d).

a) Pruebe que el mapa
$$\mathcal{T}(\omega, x) = (\sigma(\omega), T_{\omega(0)}(x))$$
definido en $B^+(I) \times X$ es continuo y sobreyectivo, definiendo así un sistema dinámico en $B^+(I) \times X$, donde $B^+(I)$ es el conjunto de las sucesiones infinitas de elementos en I;

b) Pruebe la siguiente identidad
$$\mathcal{T}^n(\omega, x) = (\sigma^n(\omega), T_{\omega(n-1)} \circ \cdots \circ T_{\omega(0)}(x))$$

c) Suponga que existe $X_0 \subset X$ compacto no vacío tal que $T_i(X_0) \subset X_0$ para todo $i \in I$ y sea X_α es el atractor del SIF. Pruebe que $B^+(I) \times X_\alpha$ es un atractor de $\mathcal{T}$. Concluya que existe un conjunto denso $\mathcal{D} \subset B^+(I)$ tal que, para todo $\omega \in \mathcal{D}$ y para todo $x \in X_0$ y todo $\{i_n\} \in B^+(I)$ se tiene
$$X_\infty \subset \overline{\{T_{i_n} \circ \cdots \circ T_{i_1}(x) : n \geq 1\ \}}$$
Esta es la versión determinista del juego del caos.

Capítulo 5

Medida y dimensión

En este capítulo esbozamos de manera breve las nociones de medida y dimensión de Hausdorff. Para ello usaremos las familias generadoras que quedan definidas recursivamente por el operador de Hutchinson asociado a un SIF.

Entre la variedad de conceptos de dimensiones fraccionarias, la dimensión de Hausdorff es la más antigua y quizas la de más importancia teórica.

5.1. La medida de Hausdorff como extensión de las nociones de longitud, área y volumen

El concepto de dimension fraccionaria está intimanente ligado a la noción de medida de un conjunto. Las nociones más inmediatas e intuitivas de medida son la longitud, área y volumen de figuras elementales de la geometría euclidiana: segmentos, triángulos, rectángulos, cubos, tetraedros y en general k-simplex en $\mathbb{R}^n$. Dada una figura cualquiera nuestro impulso inicial es a descomponerlas en un número finito de figuras simples para las cuales sabemos calcular con exactitud su longitud, área, volumen, etc. Por ejemplo:

- la longitud de una poligonal es la suma de las longitudes de los segmentos que la componen;
- podemos calcular el área de un figura convexa en el plano descomponiéndola en triángulos o rectángulos no yuxtapuestos formando un retículo;
- el volumen de un cuerpo convexo cerrado y acotado en el espacio $\mathbb{R}^3$ se puede obtener mediante descomposiciones en tetraedros o cubos.

Una situación nueva se presenta cuando el objeto es curvilíneo, como una circunferencia o una esfera. De allí nace la necesidad de considerar sucesiones infinitas para obtener la medida de la figura como un límite de aproximaciones sucesivas como lo hicieran griegos, hindúes y chinos.

De allí la noción de *curva rectificable*. Una curva es rectificable si existe una sucesión de poligonales aproximantes que convergen a la curva y cuyas longitudes forman una sucesión convergente. Definimos la longitud de la curva como el valor límite de esas aproximaciones.

La operación de rectificar está relacionada con lo que los griegos llamaron *cuadratura* de una figura geométrica. La cuadratura de una figura plana consiste en construir un cuadrado con igual área que encierra la misma. También Arquímides obtuvo logros importantes en el problema de la cuadratura de figuras curvilíneas llegando a calcular con exactitud el área de un sector parabólico, lo cual era toda una proeza pues los griegos no habian desarrollado el concepto de integral.

Con la creación del cálculo diferencial e integral por Fermat, Newton y Leibniz, hemos transformado el problema de la "cuadratura" en teoría de integración. Por ejemplo, si $\Gamma := \{(x(t), y(t) : t \in [a,b]\}$ es una curva suave parametrizada por dos funciones continuamente diferenciables $x = x(t)$, $y = y(t)$, las aproximaciones por poligonales inscritas convergen a la integral

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Sin embargo, cuando uno trata de extender éste método de aproximación a superficies se llega a lo que se conoce como la *paradoja de Schwarz*. Consideremos para ello el cilindro C de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$ y altura H. Podemos descomponer este cilindro en $n \times m$ rectángulos curvilíneos y unimos sus vértices formando bm superficies poliédricas trianguladas Σ_n de área

$$\begin{aligned} Area(\Sigma_n) &= \pi\, R\, H\, \frac{2n}{\pi} \sin \frac{2n}{\pi} \left\{ 1 + \cos \sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2 \frac{\pi^4 m^2}{n^4} \left(\frac{2n}{\pi} \sin \frac{2n}{\pi}\right)^4} \right\} \\ &\approx \pi\, R\, H \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2 \left(\frac{\pi^2 m}{n^2}\right)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Las áreas $Area(\Sigma_n)$ convergen o divergen a infinito, dependiendo de como hagamos tender $n, m \to +\infty$. Por ejemplo, si $m/n^2 \to 0$ como $n, m \to +\infty$ entonces $Area(\Sigma_n)$ tiende a $\pi\, RH$, el área del cilindro. Pero si $m = \lambda\, n^2$ para una constante $\lambda > 0$ entonces el $Area(\Sigma_n) > \pi\, RH$ para todo $n > 0$. Más aún, si $m = n^\beta$ para algún $\beta > 2$ entonces podemos estimar $Area(\Sigma_n) \approx n^{\beta - 2}$ para $n \to +\infty$ lo que implica que el área de las superficies poliédricas aproximantes diverge a infinito.

La idea es que podemos tener una superficie poliédrica Σ_n muy "arrugada" de área arbitrariamente grande, tal que $\text{dist}_{\mathcal{H}}(\Sigma_n, C) \to 0$ cuando $n \to +\infty$. De hecho, lo que sucede es que estamos aproximando una superficie suave por superficies fractales no rectificables.

Este hecho y el descubrimiento de curvas no rectificables continuas que no tienen tangente en ninguno de sus puntos motivó a principios del siglo XX una revisión del concepto de medida, apoyada en los desarrollos de la teoría de conjuntos de Cantor y la naciente topología conjuntista.

En lo que sigue vamos hacer una presentación al vuelo (¡y poco pedagógica!) de la noción decantada de "medida" de conjuntos que surgió de este exámen crítico, aplicándolo a los conjuntos fractales.

Ante todo, una medida es una función de conjuntos, es decir, es una función μ que le asocia a un conjunto A un número real. Para que esa función tenga sentido como medida ella debe generalizar las propiedades de la longitud, área y volumen ordinarias de figuras en $\mathbb{R}^n$. Para ello debe cumplir lo siguiente:

1. la medida de un conjunto debe ser no negativa: $\mu(A) \geq 0$;
2. la medida del vacío debe ser nula: $\mu(\emptyset) = 0$;
3. dados dos conjuntos disjuntos A y B, la medida de la unión debe ser la suma de las medidas: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Una función de conjuntos con esta propiedad se llama *finitamente aditiva*;
4. como estamos interesados en generalizar el método de exhausión de Arquímides, debemos considerar la posibilidad de aproximar conjuntos por sucesiones infinitas numerables de subconjuntos A_0 , A_1 , A_2 , $\cdots$. Para que eso es necesario extender la propiedad finitamente aditiva

a una una aditividad numerable: si los conjuntos $A_0\,,\,A_1\,,\,A_2\,,\,\cdots$ son disjuntos dos-a-dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i).$$

Una función de conjuntos con esta propiedad se llama σ-aditiva.

Para que esto tenga sentido, el dominio de la función debe er cerrado bajo las operación conjuntistas de uniones finitas o numerables y por intersecciones y diferencias finitas. Estas consideraciones nos motivan a introducir las siguientes definiciones.

Definición 5.1.1. Sea X un conjunto. Una familia de subconjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ se llama una *σ-álgebra* si cumple lo siguiente:

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. si $\{A_i\} \in \mathcal{A}$ una sucesión de elementos en $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$,
3. si $A \in \mathcal{A}$ entonces $X - A \in \mathcal{A}$.

Un *álgebra de conjuntos* es una estructura un poco menos restricta; de hecho $\mathcal{A}$ se dice un álgebra en X si:

1. si $A \in \mathcal{A}$ entonces $X - A \in \mathcal{A}$; y
2. unión finita de elementos de $\mathcal{A}$ está en $\mathcal{A}$.

Claramente toda σ-álgebra es un álgebra de conjuntos; además, satisface las siguientes propiedades:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ es cerrada por intersecciones numerables: si $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_i A_i \in \mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ es cerrada por diferencias finitas: si $A\,,\,B \in \mathcal{A}$ entonces $A - B \in \mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ es cerrada por uniones e intersecciones finitas.

Definición 5.1.2. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de conjuntos. Una medida es una función σ-aditiva, no-negativa $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$.

Sea μ una medida sobre una σ-álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$. Las siguientes propiedades siguen directamente de la definición:

1. *μ es finitamente aditiva*: si $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ son disjuntos dos-a-dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

2. *μ es monótona*: si $A \subset B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. Esto sigue de que $B = A \cup (B - A)$ (unión disjunta).

3. μ es σ-subaditiva: para cualquier secuencia de conjuntos $\{A_i\}$ de $\mathcal{A}$, *no necesariamente disjuntos*, se tiene
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i).$$

4. Si $\{A_i\}$, con A_i en $\mathcal{A}$ es una sucesión creciente de conjuntos, i.e $A_i \subset A_{i+1}$ entonces:
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{i\to+\infty} \mu(A_i).$$
Dualmente, si $\{A_i\}$ es una sucesión decreciente, $A_{i+1} \subset A_i$, entonces $\mu(A_i)$ decrece a $\mu(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i)$. En particular μ es continua en el vacío; es decir, si $A_{i+1} \subset A_i$ es una sucesión decreciente que converge al vacío ($\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \emptyset$) entonces $\mu(A_i) \to 0^+$ cuando $i \to +\infty$.

Una manera natural de construir medidas es tomando una función de conjuntos μ_0 finitamente aditiva definida sobre un álgebra de conjuntos elementales $\mathcal{A}_0$. [1]. Luego podemos extender esa medida a una medida σ-aditiva μ definida sobre una σ-álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ que contiene al álgebra de conjuntos $\mathcal{A}_0$. Este proceso de extensión, introducido por el matemático ruso N. Kolmogorov, es un heredero del método de Arquímides. El proceso de paso al límite en este contexto es, sin embargo, más delicado que los límites de números reales y conjuntos que hemos considerado hasta ahora en estas notas, pues principios de inducción transfinita de la teoría de conjuntos son requeridos. Las implicaciones contra-intuitivas de estos argumentos, tales como la existencia de conjuntos no medibles, despertaron en un principio sospechas y rechazo entre algunos matemáticos, aunque hoy son aceptadas como parte de los fundamentos de la Matemática. La investigación de estos problemas pertenece más bien al dominio de la lógica y la teoría de conjuntos que a la geometría, por eso preferimos omitir cualquier otra mención a los mismos en lo que resta de este trabajo.

Otro enfoque clásico para la definición de medidas es el método de cubrimientos introducido por el matemático francés P. Carathéodory a principios del siglo XX, el cual fue usado por F. Hausdorff para definir la medida que lleva su nombre, extendiendo con ello las nociones de longitud, área, volumen y la de curva rectificable.

Veamos entonces como se define la dimensión de Hausdorff. Sea (X, d) un espacio métrico completo.

Definición 5.1.3. Dados $A \subset X$ no vacío y $\delta > 0$. Una colección numerable $\mathcal{U} = \{U_i\}$ se dice un *δ-cubrimiento de A* si $A \subset \bigcup_i U_i$ y para cada i, $\operatorname{diam}(U_i) < \delta$.

Para cada $A \subset X$ y $\delta > 0$ consideremos la familia $\mathcal{F}^\delta(A)$ de todos los δ-cubrimientos de A. Para cada $\alpha \geq 0$ consideremos el número (puede ser incluso $+\infty$):
$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(A) = \inf\left\{\sum_i (\operatorname{diam}(U_i))^\alpha : \mathcal{U} = \{U_i\} \in \mathcal{F}^\delta(A)\right\}. \tag{5.1}$$
Observe que si $0 < \delta < \delta'$, entonces $\mathcal{F}^\delta(A) \subset \mathcal{F}^{\delta'}(A)$. Por tanto, para todo $0 < \delta < \delta'$ siempre se cumple $\mathcal{H}_\alpha^\delta(A) \geq \mathcal{H}_\alpha^{\delta'}(A)$. Esto garantiza que el $\lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}_\alpha^\delta(A)$ existe; de hecho
$$\lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}_\alpha^\delta(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}_\alpha^\delta(A).$$
Por otra parte, al considerar el caso $A = \emptyset$

[1] Por ejemplo, son álgebras de conjuntos las uniones finitas de intervalos, rectángulos, cubos y en general las uniones finitas de k-simplex en $\mathbb{R}^n$

Definición 5.1.4. Sea (X, d) un espacio métrico completo. La *medida de Hausdorff de exponente* $\alpha \geq 0$ es la definida, para cada $A \subset X$, por

$$\mathcal{H}_\alpha(A) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \sum_i (\operatorname{diam}(U_i))^\alpha : \mathcal{U} = \{U_i\} \in \mathcal{F}^\delta(A) \right\}. \tag{5.2}$$

La función de conjuntos $A \to \mathcal{H}_\alpha(A)$ define, en efecto, una medida. Los detalles de esta afirmación se dejan al lector. En particular son válidas:

- $\mathcal{H}_\alpha(\emptyset) = 0$,
- si $B \subset A$, entonces $\mathcal{H}_\alpha(A) \geq \mathcal{H}_\alpha(B)$, y
- $\mathcal{H}_\alpha$ es σ-aditiva.

La medida de Hausdorff de exponente α generaliza las ideas usuales de longitud, área y volumen. Además, satisface la propiedad de escalamiento que tienen estos valores. De hecho:

Teorema 5.1.1. *Para todo conjunto A de $\mathbb{R}^n$ y para todo $\lambda > 0$ se cumple $\mathcal{H}_\alpha(\lambda A) = \lambda^\alpha \mathcal{H}_\alpha(A)$.*

Demostración. Note que si $\mathcal{U} = \{U_i\}$ es un δ-cubrimiento de A, entonces $\lambda\mathcal{U} = \{\lambda U_i\}$ es un $(\lambda\delta)$-cubrimiento de λA, donde λU denota el conjunto $\{\lambda u : u \in U\}$ para cualquier $U \subset \mathbb{R}^n$. Dado que

$$\mathcal{H}_\alpha^{\lambda\delta}(\lambda A) \leq \sum_i (\operatorname{diam}(\lambda U_i))^\alpha = \lambda^\alpha \sum_i (\operatorname{diam}(U_i))^\alpha;$$

como el δ-cubrimiento es cualquiera, sigue que $\mathcal{H}_\alpha^{\lambda\delta}(\lambda A) \leq \mathcal{H}_\alpha^\delta(A)$; de donde $\mathcal{H}_\alpha(\lambda A) \leq \mathcal{H}_\alpha(A)$. La desigualdad recíproca se obtiene reemplazando λ por λ^{-1} y A por λA. $\square$

Otras importantes propiedades de la medida de Hausdorff se expresan en el siguiente lema.

Lema 5.1.1. *Para todo subconjunto A del espacio métrico X se cumplen:*

1. *Si $\mathcal{H}_\alpha(A) > 0$ entonces $\mathcal{H}_\beta(A) = \infty$ para todo $\beta < \alpha$.*
2. *Si $\mathcal{H}_\alpha(A) < +\infty$ entonces $\mathcal{H}_\beta(A) = 0$ para todo $\beta > \alpha$*

Demostración. Sean $0 < \delta < 1$ y $\mathcal{U}$ un δ-cubrimiento de X. Si $0 \leq \beta < \alpha$ entonces:

$$\begin{aligned} \sum_i (\operatorname{diam} U_i)^\beta &= \sum_i (\operatorname{diam} U_i)^{\beta-\alpha} (\operatorname{diam} U_i)^\alpha \\ &\geq \delta^{-(\alpha-\beta)} \sum_i (\operatorname{diam} U_i)^\alpha \end{aligned}$$

Como $\mathcal{H}_\alpha(A) > 0$ y $\alpha - \beta < 0$, entonces $\sum_i (\operatorname{diam} U_i)^\beta \to +\infty$ cuando $\delta \to 0^+$. Análogamente, si $\beta > \alpha$ y $\mathcal{H}_\alpha(A) < +\infty$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_i (\operatorname{diam} U_i)^\beta &\leq \delta^{\beta-\alpha} \sum_i (\operatorname{diam} U_i)^\alpha \\ &\leq C\, \delta^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

para alguna constante $C > 0$. Luego, $\mathcal{H}_\beta(A) = 0$ pues $\delta^{\beta-\alpha} \to 0^+$ cuando $\delta \to 0^+$. $\square$

PSfrag replacements

$+\infty$

α

$\mathcal{H}_\alpha(A)$

α_0

Fig. 5.1: Gráfica de la función $\alpha \longrightarrow \mathcal{H}_\alpha(A)$.

Estas propiedades implican que para cada conjunto X hay un único $0 \leq \alpha_0$ tal que $\mathcal{H}_\alpha(X) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < \alpha_0 \\ 0 & \text{si } \alpha > \alpha_0 \end{cases}$.
Note que la gráfica de la función escalonada $\alpha \longrightarrow \mathcal{H}_\alpha(A)$ es tal que el valor de $\mathcal{H}_{\alpha_0}(A)$ puede ser un número positivo, cero e incluso $+\infty$.

Definición 5.1.5. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto. La *dimensión de Hausdorff* de X se define como

$$\dim_{\mathcal{H}}(X) = \inf\{\alpha \ : \ \mathcal{H}_\alpha(X) = 0\} = \sup\{\alpha \ : \ \mathcal{H}_\alpha(X) = +\infty\}.$$

La dimensión de Hausdorff es un exponente crítico que permite controlar la convergencia a cero de los términos de las series $\sum_i (\mathrm{diam}\,(U_i))^\alpha$ con la esperanza de construir medidas finitas y positivas sobre conjuntos que, como las curvas no rectificables, tiene longitud, área o volumen cero o infinito haciendo que éstas cantidades carezcan de utilidad como medida del conjunto.

Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}^n$, podemos interpretar la medida de Hausdorff como sigue:

- Sea Γ una curva rectificable en $\mathbb{R}^n$. La medida de Haudorff $\mathcal{H}_1(\Gamma)$ es, a menos de una constante que sólo depende de n, la longitud de Γ.
- Sea Σ una superficie continua en $\mathbb{R}^3$. Si $0 < \mathcal{H}_2(\Sigma) < +\infty$ entonces Σ es una superficie rectificable y la medida de Hausdorff es su área.
- Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ es la imagen de una función continua $h : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $0 < \mathcal{H}_k(\Sigma) < +\infty$, entonces Σ es una k-superficie rectificable y la medida de Hausdorff es, a menos de una constante que sólo depende de la dimensión topológica (ver abajo) del espacio ambiente, el k-volumen de Σ.

En general si un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida de Hausdorff $0 < \mathcal{H}_k(X) < +\infty$ donde k es un entero $1 \leq k \leq n$, entonces se puede probar que X es una unión numerable de k-superficies rectificables. Este notable resultado es la culminación de los trabajos de la escuela de Besicovicht, matemático inglés que trabajó en estos difíciles problemas entre 1930 y 1950, mucho antes de que explotara el boom de las exploraciones computacionales de conjuntos auto-similares. El excelente libro de [10] contiene una exposición detallada y auto-contenida de estos resultados caracterizados por el tecnicismo de sus demostraciones .

El próximo resultado dice que la dimensión de Hausdorff es invariante bajo homeomorfismos bi-lipschitzianos.

Definición 5.1.6. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre dos espacios métricos completos (X, d_X) y (Y, d_Y). Decimos que f satisface una condición Lipschitz si existe una constante $C > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq C\, d_X(x, y). \tag{5.3}$$

Llamaremos norma Lipschitz de f a la constante

$$L_f = \sup_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}$$

Por ejemplo, una función continuamente diferenciable $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz: por el Teorema del Valor Medio, para todo para de puntos $x < y$ en $[a, b]$ existe $c \in (x, y)$ tal que $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$. Sea $C = \sup_{z \in [a,b]} |f'(z)|$, entonces $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$.

Toda función lipschitziana es uniformemente continua. Un homeomorfismo $h : X \longrightarrow Y$ es bi-lipschitziano si h y si inversa h^{-1} satisfacen una condición Lipschitz.

Proposición 5.1.1. *Sea $h : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo bi-lipschitziano con constante Lipschitz acotada entre entre dos espacios métricos completos. Entonces* $\dim_{\mathcal{H}}(X) = \dim_{\mathcal{H}}(Y)$.

Demostración. Sea $C = \max\{L_h, L_{h^{-1}}\}$. Si $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un δ-cubrimiento abierto de X, entonces $h\mathcal{U} = \{h(U_i)\}$ es un $C\delta$-cubrimiento de Y y, recíprocamente, si $\mathcal{V} = \{V_i\}$ es un δ-cubrimiento de Y entonces $h^{-1}\mathcal{V} = \{h^{-1}(V_i)\}$ es un $C\delta$-cubrimiento de X. Sea ahora

$$\mathcal{H}_{\alpha,\delta}(X) = \inf_{\substack{\mathcal{U} \\ \operatorname{diam}(U_i) < \delta}} \sum_i (\operatorname{diam} U_i)^\alpha.$$

En virtud de la observación anterior,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\alpha,C\delta}(Y) &= \inf_{\mathcal{V},\, \operatorname{diam}(V_i) < C\delta} \sum_i (\operatorname{diam} U_i)^\alpha \\
&\leq \inf_{h\mathcal{U},\, \operatorname{diam}(U_i) < \delta} \sum_i (\operatorname{diam} h(U_i))^\alpha \\
&\leq C^\alpha \inf_{\mathcal{U},\, \operatorname{diam}(U_i) < \delta} \sum_i (\operatorname{diam} U_i)^\alpha \\
&= C^\alpha \mathcal{H}_{\alpha,\delta}(X).
\end{aligned}$$

Análogamente, $\mathcal{H}_{\alpha,C\delta}(X) \leq C^\alpha \mathcal{H}_{\alpha,\delta}(Y)$ de donde concluímos, pasando al límite $\delta \to 0^+$,

$$C^{-1}\mathcal{H}_\alpha(Y) \leq \mathcal{H}_\alpha(X) \leq C\mathcal{H}_\alpha(Y).$$

Luego, $\mathcal{H}_\alpha(X)$ y $\mathcal{H}_\alpha(Y)$ convergen o divergen juntos, de donde concluímos $\dim_{\mathcal{H}}(x) = \dim_{\mathcal{H}}(Y)$, como queríamos probar. $\square$

En los ejemplos veremos que la dimensión de Hausdorff ofrece un invariante más fino que la dimensión topológica. Tal vez sea conveniente recordar en este punto que el primer intento de definición formal de fractal debido a Mandelbrot era precisamente la de un conjunto auto-similar cuya dimensión de Hausdorff es diferente de su dimensión topológica (ver abajo). Esta definición fue pronto abandonada porque existen ejemplos interesantes de conjuntos auto-afines X que merecen la denominación de fractales, sin embargo sus dimensiones de Hausdorff y topológica coinciden. En efecto, la función tipo Weierstrass $f_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{n} b^{-n} f_0(a^n x)$ con $a, b > 1$ y $ab^{-1} < 1$ es Lipschitz y por tanto su gráfico tiene dimensión de Hausdorff igual a 1 pues la parametrización $x \longmapsto (x, f_{a,b}(x))$ es un homeomorfismo bi-lipschitziano del intervalo unitario $\mathbb{I}$ a la gráfica.

Ahora bien, ¿qué pasa cuando α no es entero? ¿Qué significado geométrico tiene en ese caso la medida de Hausdorff? ¿Existen conjuntos $X \subset \mathbb{R}^n$ con medida de Hausdorff finita y positiva y de exponente α no entero? Al final de este Capítulo veremos que este es precisamente el caso de los conjuntos fractales.

5.2. Particiones generadoras à la Souslin

Para calcular la medida y dimensión de conjuntos fractales usaremos las particiones generadoras para construir una medida equivalente a $\mathcal{H}_\alpha$ que nos permitirá calcular la dimensión de Hausdorff para algunos fractales.

En general, el cálculo de la dimensión de Hausdorff usando la definición es un asunto en extremo difícil. En lo que sigue introducimos la noción particiones generadoras las cuáles serán muy útiles para establecer algunas propiedades topológicas y geométricas de fractales, tales como la dimensión topológica y la dimensión de Hausdorff.

Los conjuntos límites de un SIF están equipados de manera natural con una estructura adicional llamadas particiones generadoras. Esta sección está dedicada a poner de relieve explícitamente esta estructura la cual será usada para calcular la medida y dimensión de Hausdorff de fractales.

Sea $B^+(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de las sucesiones de números naturales dotado con la métrica producto; esta es, con la métrica definida por

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}; \ \{x_n\}, \{y_n\} \in B^+(\mathbb{N}).$$

$B^+(\mathbb{N})$ es un espacio métrico completo.

Introducimos ahora preliminares para definir las particiones generadores à la Souslin. Sea $\Sigma \subset B^+(\mathbb{N})$ un subconjunto cerrado no vacío. Para cada entero positivo n, denotamos por Σ_n al conjunto de todos los puntos $(i_1, \cdots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ tales que $(i_1, \cdots, i_n) = \pi_n(\omega)$ para algún $\omega \in \Sigma$, donde $\pi_n : B^+(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{N}^n$ es la proyección sobre las primeras n-coordenadas; esto es, $\Sigma_n = \pi_n(\Sigma)$.

Definición 5.2.1. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $\Sigma \subset B^+(\mathbb{N})$ un subconjunto cerrado no vacío. Dado $X_0 \subseteq X$, una familia $\wp$ de conjuntos cerrados con interior no vacío

$$C_{i_1 \cdots i_n} \subset X, \ \text{ con } \ (i_1, \cdots, i_n) \in \Sigma_n \ \text{ para todo } \ n \geq 1,$$

se dice una *partición generadora à la Souslin* para X_0 si cumple lo siguiente:

1. para cada $n \geq 1$, los *cilindros generadores de nivel* n; esto es, los conjuntos de $\wp_n = \{C_\alpha : \alpha \in \Sigma_n\}$, cubren X_0: $X_0 \subseteq \bigcup_{(i_1, \cdots, i_n) \in \Sigma_n} C_{i_1 \cdots i_n}$;

2. para cada $n \geq 10$, los interiores de los conjuntos $\wp_n$ son disjuntos dos-a-dos: $int\, C_\alpha \cap int\, C_\beta = \emptyset$ para todo $\alpha, \beta \in \Sigma_n$ con $\alpha \neq \beta$.

3. las descomposiciones $\wp_n$ forman una sucesión decreciente, $\wp_{n+1} \leq \wp_n$ para todo n, en el sentido de que para todo $P \in \wp_{n+1}$ existe $Q \in \wp_n$ tal que $P \subset Q$; y

4. para todo $\omega \in \Sigma$ la secuencia de conjuntos $C_{i_1 \cdots i_n}$ definida por los índices $(i_1, \cdots, i_n) = \pi_n(\omega)$ es decreciente y sus diámetros decaen a cero, vale decir, $C_{i_1 \cdots i_{n+1}} \subset C_{i_1 \cdots i_n}$ para todo $n \geq 1$, y además, $\operatorname{diam}(C_{i_1 \cdots i_n}) \to 0$ como $n \to +\infty$.

Observe que de la misma definición se desprende que si $X_0 \subset X$ admite una partición generadora a la Souslin, entonces:

- para cada $x \in X_0$ existe al menos una sucesión $\omega = \{i_n\}$ en Σ, tal que

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_{i_1 \cdots i_n} \tag{5.4}$$

- la unión de los cilindros de nivel n forman una secuencia encajada de subconjuntos que convergen a X_0; es decir:

$$X_0 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{(i_1, \cdots, i_n) \in \Sigma_n} C_{i_1, \cdots, i_n} \tag{5.5}$$

Un conjunto X_0 que admita una representación del tipo (5.5) se conoce con el nombre de *conjunto de Souslin*. Por definición, un conjunto de Souslin de un espacio métrico (X, d) es la imagen de un subconjunto cerrado $\Sigma \subset X \times B^+(\mathbb{N})$ bajo la proyección $\pi(x, \omega) = \omega$. Se puede demostrar en consecuencia que: *todo espacio métrico completo separable localmente compacto admite un partición generadora a la Souslin.*

Los conjuntos de Souslin son interesantes pues ellos son constructibles, en el sentido de que pueden describirse como resultado de un conjunto numerable de operaciones conjuntistas (uniones, intersecciones y complementos) de conjuntos cerrados. [6].

La existencia de particiones generadoras à la Souslin es muy útil en la investigación de algunas propiedades geométricas de conjuntos fractales, como vimos en el Capítulo **??** en nuestro estudio de las propiedades topológicas del conjunto de Cantor y el tapiz de Sierpinski. En lo que sigue veremos como se puede usar esta herramienta para abordar otros problemas igualmente importantes.

5.3. Dimensión topológica y universalidad

Sierpinski probó en 1916 que el conjunto que lleva su nombre es *universal* en el siguiente sentido: toda curva plana admite una copia homeomorfa dentro del fractal conocido como tapiz o alfombra de Sierpinski. Esto es más sorprendente en vista de la existencia de las llamadas curvas de Peano, que son la imagen de una una aplicación continua sobreyectiva del intervalo unitario $\mathbb{I}$ sobre el rectángulo unitario $R = [0,1] \times [0,1]$; es decir, son curvas que llenan un rectángulo. Conjuntos autosimilares tales como el tapiz de Sierpinski y la esponja de Menger fueron concebidos en el marco de la teoría de la dimensión como ejemplos de conjuntos universales. En lo que sigue revisaremos la noción de dimensión topológica, apoyados en el concepto de partición generadora à la Souslin.

Definición 5.3.1. Sea $\mathcal{F} = \{F_n\}$ un cubrimiento numerable de un espacio métrico (X, d) por conjuntos cerrados. Se dice que $\mathcal{F}$ tiene multiplicidad $m+1$ si todo elemento $x \in X$ está contenido en a lo sumo $m+1$ elementos de $\mathcal{F}$.

Por ejemplo la descomposición del intervalo unitario en intervalos p-ádicos tiene multiplicidad 2.

Definición 5.3.2. La dimensión topológica, $\dim_{top}(X)$, de un espacio métrico (X, d) se define como el menor entero $m > 0$ tal que todo cubrimiento cerrado $\mathcal{F}$ de X tiene un refinamiento cerrado $\mathcal{F}_0$ de multiplicidad $\leq m + 1$.

Recordamos que dado un cubrimiento por conjuntos cerrados $\mathcal{F}$ de X, se entiende por refinamiento cerrado de $\mathcal{F}$, a un cubrimiento por conjuntos cerrados $\mathcal{F}_0$ de X de manera que para todo $F \in \mathcal{F}$ existe $E \in \mathcal{F}_0$ satisfaciendo $E \subset F$.

Una importante propiedad que posee la dimensión topológica es la ser un invariante topológico; es decir, si X y Y son homeomorfos, entonces $\dim_{top}(X) = \dim_{top}(Y)$.

Definición 5.3.3. Sea $\wp = \{X_{i_1 \cdots i_n} : (i_1, \cdots, i_n) \in \Sigma_n, n \geq 1\}$ una partición generadora à la Souslin, indexada por un subconjunto cerrado $\Sigma \subseteq B^+(\mathbb{N})$. Se define la *multiplicidad del elemento* $X_{i_1 \cdots i_n} \in \wp$ como

$$\mathsf{M}(X_{i_1 \cdots i_n}) = \mathrm{Card}\{\alpha \in \Sigma_n \ : \ X_\alpha \cap X_{i_1 \cdots i_n} \neq \emptyset \ \}.$$

Se dice que la partición $\wp$ tiene *multiplicidad finita a nivel* n, si existe $C > 0$ tal que $\mathsf{M}(X_\alpha) \leq C$ para todo $\alpha \in \Sigma_n$. Además, la partición $\wp$ tiene *multiplicidad finita*, si tiene multiplicidad finita a nivel n para todo entero $n > 0$. Finalmente, $\wp$ tiene multiplicidad constante igual a m, si $\mathsf{M}(X_\alpha) = m$ para todo $\alpha \in \Sigma_n$ y cada $n > 0$; en tal caso se denota por $\mathsf{M}(\wp) = m$.

No es difícil verificar que si $\mathsf{M}(\wp) = m$, entonces el mapa de Souslin que nos da los desarrollos p-ádicos generalizados es exactamente m-a-uno. Se entiende por mapa de Souslin a la aplicación $h : \Sigma \to X$ dada por $h(\omega) = x$ siempre que x satisfaga la ecuación (5.4).

El siguiente resultado, que ofrecemos sin demostración, ofrece una herramienta útil para calcular dimensión topológica de un espacio equipado con una partición generadora à la Souslin.

Teorema 5.3.1. *Sea X_0 un subconjunto compacto de espacio métrico compacto X. Si X_0 está equipado con una partición generadora à la Souslin de multiplicidad $m+1$ y tal que todos los átomos; $X_{i_1 \cdots i_n}$, de la partición tienen* $\dim_{top}(X_{i_1 \cdots i_n}) = m + 1$, *entonces* $\dim_{top}(X_0) = m$.

Bajo las hipótesis del teorema se puede probar sin dificultad que todo cubrimiento cerrado tiene un refinamiento cerrado formado por los conjuntos de la partición generadora de un nivel suficientemente profundo. En este punto la compacidad es necesaria. El problema está en probar en que no hay otros refinamientos de multiplicidad menor. En otras palabras hay que demostrar que la descomposición de Souslin es minimal respecto a esta propiedad. Aquí es donde entra la hipótesis sobre la dimensión de los átomos $X_{i_1 \cdots i_n}$, los cuáles podrían ser, por ejemplo, intervalos, cubos y, más generalmente, k-simplex en $\mathbb{R}^n$.

Sorprendemente es difícil probar que un cubo en $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión topológica n, como indica la intuición. La demostración usa el célebre teorema de punto fijo debido al matemático holándes L.E.J. Brouwer, el cual afirma que toda transformación continua T de un n-cubo en si mismo tiene un punto fijo. La invarianza topológica de la dimensión implica que dice $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ con $n \neq m$ no son homeomorfos. Esto es conocido como el *Teorema de Invarianza del Dominio*; ver [12].

Los ejemplos a continuación resaltan la utilidad de este resultado en el cálculo de dimensiones topológicas de fractales.

Ejemplos:

- Como los espacios totalmente disconexos tienen una base de conjuntos abiertos y cerrados disjuntos, podemos construir una partición generadora numerable de multiplicidad constante igual a 1. En particular los conjuntos de Cantor tienen dimensión cero.

- El tapiz de Sierpinski $\mathbb{S}$ tiene dimensión topológica igual a 1. Para ello basta tomamos como partición generadora la formada por los triángulos $\Delta_{i_1\cdots i_n}$ que generan a $\mathbb{S}$, la cual tiene multiplicidad constante igual a 2 y cada conjunto de la partición tiene dimensión topológica igual a 2, como es fácil ver.

- La curva de Koch Σ tiene $\dim_{top}(\Sigma) = 1$. Para ello usamos la partición generadora la formada entornos cerrados de radio $\leq 3^{-n}$ de los segmentos $\gamma_{i_1\cdots i_n}$ que forman las curvas Σ_n que convergen a la curva de Koch.

- La esponja de Menger $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$ tiene $\dim_{top}(\mathbb{M}) = n - 1$.

Las particiones de Souslin también ofrecen una herramienta técnica útil para demostrar que dos espacios de dimensión n son homeomorfos.

Sean (X, d) y (Y, d) dos espacios métricos compactos separables y equipados con particiones generadoras à la Souslin $\{X_{i_1\cdots i_n}\}$ y $\{Y_{i_1\cdots i_n}\}$, respectivamente; ambas indexadas por un mismo subconjunto cerrado $\Sigma \subset B^+(\mathbb{N})$.

Se dice que dos elementos X_α y Y_β con $\alpha, \beta \in \Sigma_n$ son *homólogos*, si $\alpha = \beta$. *Dos particiones son homólogas* si para todo par de familias finitas $X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_k}$ y $Y_{\alpha_1}, \cdots, Y_{\alpha_k}$ de átomos de nivel n se tiene:

$$\bigcap_{\substack{\alpha_i \in \Sigma_n \\ i=1,\cdots,k}} X_{\alpha_i} \neq \emptyset \iff \bigcap_{\substack{\alpha_i \in \Sigma_n \\ i=1,\cdots,k}} X_{\alpha_i} \neq \emptyset.$$

En particular los elementos homólogos de dos particiones homólogas tienen la misma multiplicidad: $\mathsf{M}(X_\alpha) = \mathsf{M}(Y_\alpha)$.

Lema 5.3.1 (Lema de Menger). *Sean $X_0 \subset X$ y $Y_0 \subset Y$ dos subconjuntos compactos de espacios métricos completos equipados con particiones generadoras homólogas indexadas por un mismo subconjunto cerrado $\Sigma \subset B^+(\mathbb{N})$. Entonces X_0 es homeomorfo a Y_0.*

La demostración de que los conjuntos de Cantor, el tapiz de Sierpinski y la esponja de Menger son universales dentro de la clase de espacios compactos de dimensión cero, uno y dos, respectivamente, sigue de este resultado. Ver [4].

Esbozo de la demostración del Lema de Menger. Sea $\Sigma \subset B^+(\mathbb{N})$ un subconjunto cerrado y $h_X : \Sigma \longrightarrow X$, $h_Y : \Sigma \longrightarrow Y$ las funciones definidas por la ecuación de Souslin (5.4). Sean $x \in X$, $\omega \in \Sigma$ y

$$\mathcal{N}_X(\omega) = \{\omega' \in \Sigma : h(\omega) = h(\omega')\ \},$$

el núcleo de no unicidad de h_X. Las particiones generadoras de X_0 y Y_0 son homólogas si, y sólo si, para todo $\omega \in \Sigma$ los núcleos de no unicidad de h_X y h_Y son iguales. Sea $x = h_X(\omega)$. Definimos $H(x) = h_Y(\omega)$. Como los núcleos de no unicidad son iguales esta función está bien definida y es uno-a-uno. Como h_Y es continua, abierta y sobreyectiva, concluímos que es un homeomorfismo. Dejamos los detalles de la prueba a cargo del lector. $\square$

Fig. 5.2: Construcción de la esponja de Menger

Fig. 5.3: Una etapa más avanzada de la construcción de la esponja de Menger

5.4. Cálculo de dimensiones

En la sección anterior usamos particiones generadoras para calcular la dimensión topológica de algunos fractales y esbozar un argumento que prueba la universalidad del conjunto de Cantor, el tapiz de Sierpinski y la esponja de Menger. En esta sección calcularemos dimensiones fractales de algunos ejemplos ya conocidos usando esta misma herramienta.

Para ello introducimos, para cada $\alpha \geq 0$, otra medida que es equivalente a la medida de Hausdorff de exponente α. Antes:

Definición 5.4.1. Sea μ y ν dos medidas definidas sobre una σ-álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$. Se dice que μ y ν son *equivalentes*, si existe una constante $C > 1$ tal que $C^{-1}\nu(A) \leq \mu(A) \leq C\mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$

Sea (X, d) un espacio métrico completo equipado con una partición generadora à la Souslin. La siguiente fórmula define una medida exterior en X:

$$\mathcal{M}_\alpha(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_n)\in I^n \\ X_{i_1\cdots i_n}\cap A\neq\emptyset}} (\operatorname{diam}(X_{i_1\cdots i_n}))^\alpha.$$

El siguiente resultado, también sin demostración, garantiza el comentario anterior.

Teorema 5.4.1. *Sea (X, d) es espacio métrico con $\dim_{top}(X) < +\infty$ equipado con la una partición generadora à la Souslin $\wp = \{X_{i_1\cdots i_n}\}$. Entonces, la medida de Hausdorff de exponente α y $\mathcal{M}_\alpha$*

son equivalentes. Más aún, existe una constante $C = C(n) > 1$ que sólo depende de la dimensión topológica $n = \dim_{top}(X)$ tal que

$$C^{-1}\,\mathcal{H}_\alpha(A) \leq \mathcal{M}_\alpha(A) \leq C\,\mathcal{H}_\alpha(A).$$

Como consecuencia inmediata de este teorema se tiene:

Corolario 5.4.1. *Sea (X, d) es espacio métrico con $\dim_{top}(X) < +\infty$ equipado con la una partición generadora à la Souslin $\wp = \{X_{i_1\cdots i_n}\}$. Entonces,*

$$\dim_{\mathcal{H}}(X) = \inf\{\alpha \ : \ \mathcal{M}_\alpha(X) = 0\} = \sup\{\alpha \ : \ \mathcal{M}_\alpha(X) = +\infty\}.$$

5.4.1. Ejemplos

Finalizamos estas notas calculando la dimensión de Hausdorff de algunos de los conjuntos con estructura fractal mostrados anteriormente.

- **Conjunto de Cantor ternario**: sea $\{I_{i_1\cdots i_n}\}$ la partición generadora de $\mathbb{K}$ el conjunto de Cantor ternario, entonces:

$$\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\{0,1\}^n} |I_{i_1\cdots i_n}|^\alpha = 2^n(3^{-n})^\alpha$$

De aquí concluímos sin dificultad que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{K}) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$

pues, en efecto:

$$\lim_{n\to+\infty}(2^n(3^{-n})^\alpha) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha < \ln(2)/\ln(3) \\ 0 & \text{si} \quad \alpha > \ln(2)/\ln(3) \end{cases},$$

lo que resulta de comparar con una progresión geométrica viendo que:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(2^n(3^{-n})^\alpha) \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad \alpha < \ln(2)/\ln(3) \\ < 0 & \text{si} \quad \alpha > \ln(2)/\ln(3) \end{cases}$$

- **Conjunto de Cantor $\mathbb{K}^\Lambda$**. Recordemos que este conjunto es el generado por p contracciones afines de la recta con coeficientes en el conjunto $\Lambda = \{\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\{0,\cdots,p-1\}^n} |I_{i_1\cdots i_n}|^\alpha &= \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\{0,\cdots,p-1\}^n} (\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_n})^\alpha \\ &= \left(\sum_{i=0\cdots p-1}\lambda_i^\alpha\right)^n. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\{0,\cdots,p\}^n} |I_{i_1\cdots i_n}|^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \sum_{i=0\cdots p-1}\lambda_i^\alpha > 1 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{i=0\cdots p-1}\lambda_i^\alpha < 1 \end{cases}$$

luego, $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{K}^{\Lambda})$ es la única solución $\alpha > 0$ de la ecuación

$$\sum_{i=0\cdots p-1} \lambda_i^{\alpha} = 1. \tag{5.6}$$

Esta se conoce como fórmula de Moran; ver [5]. Este ejemplo se generaliza fácilmente para los atractores de SIF generados por p similaridades T_i de $\mathbb{R}^n$ con razón de contracción λ_i, obteniendo la fórmula (5.6). Recomendamaos al lector, como un ejercicio instructivo, calcular la dimensión de una esponja de Menger en $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$.

Cuando $\Lambda = \{\lambda\}$ el resultado anterior implica que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{K}_{\lambda}) = -\frac{\ln(2)}{\ln(1-\lambda)}.$$

Esto nos da una *familia no numerable de conjuntos de Cantor homeomorfos a* $B^+(2)$ *pero que no son bi-lipschitzianamente homeomorfos.* Escogiendo $0 < \lambda < 1$ podemos construir conjuntos de Cantor $\mathbb{K}_{\lambda}$ con cualquier dimensión prefijada $0 < \dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{K}^{\Lambda}) < 1$. También es posible construir conjuntos de Cantor con dimensión uno y medida cero.

- **Tapiz de Sierpinski**: sea $\{\Delta_{i_1\cdots i_n}\}$ la partición generadora de $\mathbb{S}$. Como las contracciones del SIF que genera el tapiz de Sierpinski tienen razón de contracción constante igual a $1/2$ se chequea fácilmente que:

$$\operatorname{diam}(\Delta_{i_1\cdots i_n}) = 2^{-n}\operatorname{diam}(\Delta)$$

donde Δ es el triángulo inicial de la construcción. Luego,

$$\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\{0,1,2\}^n} |\Delta_{i_1\cdots i_n}|^{\alpha} = 3^n(2^{-n})^{\alpha}$$

y concluimos como lo hicimos arriba que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{S}) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}.$$

- **Curva de Koch**: en este caso tenemos cuatro contracciones de razón $1/3$, lo que da:

$$\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\{0,1,2,3\}^n} (\gamma_{i_1\cdots i_n})^{\alpha} = 4^n(3^{-n})^{\alpha}$$

con lo cual

$$\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}.$$

5.5. Nota final y agradecimientos

El algoritmo sumerio de la raíz cuadrada y las tablas de las aproximaciones de π fueron tomadas del libro [13, Chapter 1]. Las estimaciones e identidades trigonómetricas para la aproximación de π usando el método de exhausión de Arquímides fueron tomadas de [14].

Las observaciones sobre teoría de conjuntos fueron tomadas del libro de Kac y Ulam, Lógica y Matemática.

Lo que aquí llamamos particiones à la Souslin han sido usadas de diferentes maneras y con distintos nombres en otros textos importantes de teoría de la medida.

Muchas de las ilustraciones fueron “bajadas” de distintas fuentes en Internet. Recomendamos, por ejemplo, http://www.mathcurve.com/fractals/.

Expresamos nuestro agradecimiento a los organizadores del TForMa por su paciencia, y al profesor Oswaldo Larreal del Departamento de Matemáticas de la FEC-LUZ, cuyo entusiasmo y apoyo técnico ayudó a terminar este trabajo.

Referencias Bibliográficas

[1] Barnsley, M.F. : Fractals Everywhere. Academic Press, 1990

[2] Barnsley, M.F. and Demko, S.G.: Iterated Functions Systems and the global construction of fractals. Proceedings of the Royal Society. Series A. **399**. 243–275 (1985)

[3] Devaney, Robert L. Introduction to Chaotical Dynamical Systems. Addison-Wesley, 1992

[4] Edgar, G.A : Classics on Fractals.

[5] Falconer, K. : Fractals Geometry, Mathematical Foundations and Its Applications. John Wiley and Sons.

[6] Federer, H. : Geometric Integration Theory. Springer-Verlag, 1969.

[7] Hocking, J. and Young, G. : Topology. Dover Pubne. (1988)

[8] Hutchinson, J. : Fractals and self-similarity. Indiana University Mathematics Journal. **30(5)**. 713–747 (1981).

[9] S. Ulam y M. Kac: Lógica y Matemática. Monte Avila, Caracas, 1971

[10] Mattila, P. : Geometry of sets and measures in euclidena spaces. Fractals and rectifiability. Cambridge University Press. Cambridge, 1995

[11] Moise, E. : Geometric Topolgy in dimensions 2 and 3. Springer Verlag. (1977)

[12] Munkres : Intrododucción a la Topología

[13] Peitgen-Jürgens-Saupe : Fractals for the Classroom. Springer-Verlag, 1992

[14] Varadarajan, V.S. : Algebra in ancient and modern times. Mathematical World, Volume 12. American Mathematical Society, Providence, 1991.

La reproducción de los textos fue gracias al patrocinio de

PDVSA