



Universidad del Zulia
Facultad Experimental de Ciencias
Asociación Matemática Venezolana



Introducción a la Teoría Espectral



V Talleres de Formación Matemática
Maracaibo, 26 al 31 de Julio de 2004



V Talleres de Formación Matemática

Teoria Espectral

Jaime Bravo & Wilson Pacheco

Maracaibo, 26 al 31 de julio de 2004

Índice General

Capítulo 1.	Teoría Espectral	2
1.1.	Álgebras de Banach, Espectro, Radio Espectral	2
1.2.	Caracteres y Espectro	15
1.3.	Cálculo Funcional de Riesz-Dunford-Gelfand	24
1.4.	Rango Numérico en $\mathcal{L}(H)$	38

Capítulo 1

Teoría Espectral

1.1. Álgebras de Banach, Espectro, Radio Espectral

Conocemos que si X es un Espacio de Banach sobre los complejos, entonces $\mathcal{L}(X) = \{T : X \rightarrow X, \text{ lineales y acotados}\}$ en un espacio vectorial complejo que junto a la norma de operadores es un espacio de Banach. También conocemos que con respecto a la composición de operadores se tiene:

$$(TR)S = T(RS), \forall T, R, S \in \mathcal{L}(X) \quad (1.1)$$

$$T(R + S) = TR + TS, \forall T, R, S \in \mathcal{L}(X) \quad (1.2)$$

$$\alpha(TR) = (\alpha T)R = T(\alpha R), \forall T, R \in \mathcal{L}(X), \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad (1.3)$$

$$\|TR\| \leq \|T\|\|R\|, \forall T, R \in \mathcal{L}(X) \quad (1.4)$$

Definición 1.1.1. Un espacio vectorial sobre los complejo A que tiene un producto $\cdot : A \times A \rightarrow A$, $(x, y) \rightarrow xy$, que satisface

$$(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in A \quad (1.5)$$

$$x(y + z) = xy + xz, \forall x, y, z \in A \quad (1.6)$$

$$\alpha(xy) = x(\alpha y), \forall x, y \in A, \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad (1.7)$$

se llama un **álgebra sobre \mathbb{C}** , o simplemente un **álgebra**. A se le llama un **álgebra normada** si A es un espacio normado sobre \mathbb{C} y A es también un álgebra que satisface:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|, \forall x, y \in A \quad (1.8)$$

Un álgebra se llama **conmutativa** si $xy = yx, \forall x, y \in A$ y el álgebra A es con unidad si hay $1 \in A$ con $1 \neq 0$ tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in A$. Finalmente un **álgebra de Banach** A es un álgebra normada que es de Banach como espacio normado.

Note que se deduce facilmente que el producto de un álgebra normada es una función continua de $A \times A$ en A , donde $A \times A$ tiene operaciones componentes por componentes y está normada por $\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$. Note también que si A es un álgebra con unidad, entonces $A \neq (0)$ y que no necesariamente la unidad tiene norma 1.

Definición 1.1.2. Sea A un álgebra. Un subconjunto (no vacío) B de A se llama una **subálgebra** de A si las operaciones de álgebra de A restringida a B , hacen de B un álgebra.

Note que ésto es equivalente a decir que $x - y, \alpha x, xy \in B, \forall x, y \in B, \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Observemos también que si A es un álgebra de Banach y si B es una subálgebra de A entonces B es un álgebra normada con la norma de A restringida a B y que B es de Banach si y solo si B es cerrado en A .

Definición 1.1.3. Sean A_1 y A_2 dos álgebras y $f : A_1 \rightarrow A_2$ biyectivo, lineal y $f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in A_1$. Entonces, f se llama un **isomorfismo de álgebras** entre A_1 y A_2 . Si A_1 y A_2 son normadas, entonces una función $f : A_1 \rightarrow A_2$ se llama una **isometría** si $\|f(x)\| = \|x\|, \forall x \in A_1$. En este caso también diremos que f es **isométrico**.

Teorema 1.1.4 (Adjunción de la Unidad). *Sea A un álgebra normada. Entonces hay un álgebra normada A_1 con unidad de norma 1 tal que A es isométrico e isomorfo con una subálgebra de A_1*

Demostración. Sea $A_1 = A \times \mathbb{C}$ con operaciones $(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta), \mu(x, \alpha) = (\mu x, \mu \alpha), \forall \mu \in \mathbb{C}, (x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \beta x + \alpha y, \alpha \beta)$ y norma $\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|, \forall x, y \in A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. El lector tiene la fácil tarea de demostrar que A_1 es un álgebra normada con unidad $(0, 1)$ de norma 1 y que $f : A \rightarrow A_1, x \rightarrow (x, 0)$ es un isomorfismo isométrico de A sobre $f(A)$. ■

Teorema 1.1.5. *Toda álgebra de Banach A es isométricamente isomorfa con una subálgebra cerrada de $\mathcal{L}(A)$.*

Demostración. Usando el teorema anterior si es necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que A tiene unidad 1 de norma 1. Para cada $x \in A$, sea $T_x : A \rightarrow A, y \rightarrow xy$. Es fácil demostrar que $B = \{T_x : x \in A\}$ es un subconjunto de $\mathcal{L}(A)$ que es una subálgebra. Para demostrar que B es cerrada, sea (x_n) una sucesión en A tal que $T_{x_n} \rightarrow T$ en $\mathcal{L}(A)$. En particular,

$$T_{x_n}(y) \rightarrow T(y) \text{ en } A, \forall y \in A. \quad (1.9)$$

Por la continuidad del producto en A y por (1.9) tenemos que $T_{x_n}(1)y \rightarrow T(1)y$. Luego, $T_{x_n}(y) = x_n y = T_{x_n}(1)y \rightarrow T(1)y$. Así, $T = T_{T(1)}$. Finalmente $f : A \rightarrow B, x \rightarrow T_x$ es claramente un isomorfismo y como $\|T_x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|xy\| \leq \|x\|$ y $\|T_x\| \geq \|x \cdot 1\| = \|x\|$, entonces f es también isométrico. ■

Definición 1.1.6. Sea A un álgebra con unidad 1. Entonces $x \in A$ se llama **invertible** en A si hay $y \in A$ tal que $xy = yx = 1$.

Se sigue fácil que dicho y es único para el x dado y se denota por x^{-1} .

El conjunto de todos los elementos de A que son invertibles en A se denota por J_A o por J si el contexto es claro.

Teorema 1.1.7. *Sea A un álgebra de Banach con unidad 1. Entonces, $1 - x \in J$ si $\|x\| < 1$. En este caso, $(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, y también $\|1 - (1 - x)^{-1}\| \leq \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}$*

Demostración. Como $\|x\| < 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es absolutamente sumable y como A es de Banach,

$$\text{hay } y \in A \text{ con } y = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \text{ Note ahora que } (1 - x)y = (1 - x) \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N x^n \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 - x) \left(\sum_{n=0}^N x^n \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 - x^{N+1}) = 1.$$

Similarmente $y(1-x) = 1$. Luego, $1-x \in J$ y $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Finalmente, $\|1 - (1-x)^{-1}\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} x^n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}$. ■

Definición 1.1.8. Sea A un álgebra con unidad y sea $x \in A$. Entonces,

$$\rho_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda \cdot 1 \text{ es invertible en } A\}$$

se llama el conjunto **resolvente de x** . Si el álgebra A está subentendida, escribiremos $\rho(x)$ en lugar de $\rho_A(x)$.

Notación: Si A es un álgebra con unidad 1 , si $x \in A$ y si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces escribiremos $x - \lambda$ en lugar de $x - \lambda \cdot 1$, excepto cuando el contexto así lo amerite. Note entonces que $x - \lambda \in A$.

Teorema 1.1.9. Sea A un álgebra de Banach con unidad 1 . Entonces:

1. J es un conjunto abierto en A .
2. $\rho(x)$ es abierto en \mathbb{C} , $\forall x \in A$.
3. $x \in A$ y $\|x\| < |\lambda| \Rightarrow \lambda \in \rho(x)$.
4. $J \rightarrow J$, $x \rightarrow x^{-1}$ es una función continua.

Demostración. 1. Sean $x \in J, y \in A$ con $\|x - y\| < \|x^{-1}\|^{-1}$. Vamos a demostrar que $y \in J$. Para ello note que $\|1 - yx^{-1}\| = \|(x - y)x^{-1}\| \leq \|x - y\|\|x^{-1}\| < 1$. Por el teorema 1.1.7, $yx^{-1} \in J$. Luego, $y \in J$. Por lo tanto, $B(x, \|x^{-1}\|^{-1})$ está contenida en J y así, J es abierto en A .

2. Sean $x \in A, \lambda \in \rho(x)$. Luego, $x - \lambda \in J$ y como J es abierto en A , hay $\varepsilon > 0$ tal que $B(x - \lambda, \varepsilon) \subseteq J$. Pero, como $\lambda \rightarrow x - \lambda$ es continua, entonces hay $\delta > 0$ tal que $\mu \in B(\lambda, \delta) \Rightarrow x - \mu \in B(x - \delta, \varepsilon) \subseteq J$. Así $B(\lambda, \delta) \subseteq \rho(x)$, demostrando que $\rho(x)$ es abierto en \mathbb{C} .

3. Directo del teorema 1.1.7.

4. $\forall x, y \in J$, $\|y^{-1} - x^{-1}\| \leq \|y^{-1}\|\|x - y\|\|x^{-1}\|$. Luego, para demostrar que $x \rightarrow x^{-1}$ es continua en J , debemos demostrar que si los y se mueven suficientemente próximos a x , entonces los correspondientes $\|y^{-1}\|$ se mantienen acotados. En efecto, si $\|y - x\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$, entonces (como en la demostración de (1)) $y \in J$ y $\|1 - yx^{-1}\| \leq \frac{1}{2}$. Por el teorema 1.1.7, $\|1 - (1 - yx^{-1})^{-1}\| \leq \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$. Es decir, $\|1 - xy^{-1}\| \leq 1$. Luego, $\|xy^{-1}\| \leq 2$, de donde (considerando $y^{-1} = x^{-1}(xy^{-1})$), $\|y^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|$.

■

Definición 1.1.10. Sea A un álgebra con unidad 1 y sea $x \in A$. Entonces, el **espectro** $\sigma_A(x)$ de x es el conjunto $\sigma_A(x) = \mathbb{C} \setminus \rho_A(x)$. Es decir:

$$\sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda \text{ no es invertible en } A\}$$

Si el álgebra está subentendida, escribiremos $\sigma(x)$ en lugar de $\sigma_A(x)$.

Note que si A es un álgebra de Banach con unidad, se deduce del teorema 1.1.9 (1) y (2) que $\forall x \in A, \sigma(x)$ es cerrado y que $\sigma(x) \subseteq \overline{B(0, \|x\|)}$ (la barra es clausura). Luego, tenemos el

Teorema 1.1.11. *Si A es un álgebra de Banach con unidad, entonces $\forall x \in A$, $\sigma(x)$ es un conjunto compacto de \mathbb{C} y $\sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| = \max_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| \leq \|x\|$.*

Demostraremos en el teorema 1.1.24, que en un álgebra de Banach con unidad, el espectro de cada uno de sus elementos es no vacío.

Si ahora A es un álgebra con unidad 1 y p es un polinomio de una variable compleja, digamos $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$, $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \dots, n$, entonces para cada $x \in A$, $p(x)$ es el elemento de A definido por $p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. En lo que sigue este último miembro se escribirá por $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$.

Teorema 1.1.12. *Sea A un álgebra con unidad (no necesariamente normada) y sea $x \in A$ tal que $\sigma(x) \neq \emptyset$. Entonces, para cada polinomio complejo p se tiene*

$$p(\sigma(x)) = \sigma(p(x)),$$

donde $p(\sigma(x)) = \{p(\mu) : \mu \in \sigma(x)\}$

Demostración. Notemos que para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, hay $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tales que:

$$p(x) - \lambda = \alpha(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n) \quad (1.10)$$

Si ahora $\lambda \in \sigma(p(x))$, entonces por (1.10) hay j_0 tal que $x - j_0$ no es invertible. Luego, $\lambda_{j_0} \in \sigma(x)$ y así $\lambda = p(\lambda_{j_0}) \in p(\sigma(x))$. Recíprocamente, si $\lambda \in p(\sigma(x))$, entonces hay $\mu \in \sigma(x)$ con $\lambda = p(\mu)$. Por (1.10), μ es uno de los λ_j . Luego, $\lambda \in \sigma(p(x))$. ■

Teorema 1.1.13 (Semicontinuidad Superior del Espectro). *Sea A un álgebra de Banach con unidad 1 y sea $x \in A$. Entonces para cada abierto U que contiene a $\sigma(x)$ hay $\delta > 0$ tal que:*

$$\|y - x\| < \delta \Rightarrow \sigma(y) \subseteq U$$

Demostración. $f : \mathbb{C} \setminus U \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \rightarrow \|(x - \lambda)^{-1}\|$ es continua (vea teorema 1.1.9(4)) y $|\lambda|f(\lambda) = \|(\frac{x}{\lambda} - 1)^{-1}\| \rightarrow 1$, si $|\lambda| \rightarrow \infty$. Luego, $f(\lambda) \rightarrow 0$ si $|\lambda| \rightarrow \infty$, y como el lector deducirá fácilmente, f es acotada.

Sea $M > 0$ tal que $f(\lambda) < M$, $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus U$. Sea $\delta = \frac{1}{M}$. Si $\|y - x\| < \delta$ entonces

$$\|(y - \lambda) - (x - \lambda)\| < \delta < \|(x - \lambda)^{-1}\|^{-1}, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus U.$$

Luego, $y - \lambda$ es invertible en A (ver demostración de (1) en el teorema 1.1.9). Así, si $\|y - x\| < \delta$ entonces $\lambda \notin \sigma(y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus U$. En otras palabras, $\|y - x\| < \delta \Rightarrow \sigma(y) \subseteq U$. ■

Ejemplos 1.1.14.

1. Si X es un espacio métrico compacto, entonces el espacio $C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}, \text{ continuas}\}$ con $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ y operaciones habituales es un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Sea X el disco unitario cerrado de \mathbb{C} y sea $A \subseteq C(X)$ la subálgebra de los polinomios. Note que A no es de Banach. Sea $f \in A$ definida por $F(z) = \frac{z}{2}$. Entonces, $\|f\|_\infty = \frac{1}{2} < 1$. Sin embargo $1 - f = 1 - \frac{z}{2}$ no es invertible en A . Luego, la hipótesis de ser A un álgebra de Banach en el teorema 1.1.7 es necesaria.

2. Cualquier conjunto compacto no vacío de \mathbb{C} es el espectro de un elemento de alguna álgebra de Banach. En efecto, sea $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto no vacío y sea $A = C(X)$. Si $f(z) = z$, entonces $f \in A$ y claramente $\sigma_A(f) = X$.
3. En un álgebra con unidad, el espectro de un elemento puede ser vacío. Por ejemplo, sea $A = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ continuas}\}$. Entonces, A es un álgebra con las operaciones habituales. Si $f \in A$ está definida por $f(z) = z, \forall z \in \mathbb{C}$, entonces claramente $\sigma(f) = \emptyset$.
4. Si X es un espacio vectorial complejo de dimensión finita y si $A = \{T : X \rightarrow X \text{ lineales}\}$, entonces $\forall T \in A, \sigma_A(T)$ es el conjunto de los **valores propios** de T ; es decir, aquellos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\ker(T - \lambda) \neq \{0\}$.
5. Si X es normado de dimensión infinita y si $A = \mathcal{L}(X)$, entonces $\sigma_A(T)$ con $T \in A$ ciertamente contiene al conjunto de los valores propios de T pero no es necesariamente igual a este conjunto.

Por ejemplo, el **operador de desplazamiento unilateral**

$$S : \ell_2(\mathbb{Z}^+) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^+), \{x_1, x_2, \dots\} \rightarrow \{0, x_1, x_2, \dots\}$$

no tiene valores propios. Sin embargo $0 \in \sigma(S)$ pues S no es sobre. Más aun, $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. En efecto, recordar que $S^*\{x_1, x_2, \dots\} = \{x_2, x_3, \dots\}$. Si $|\lambda| < 1$, entonces $x = \{1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n, \dots\} \in \ell_2(\mathbb{Z}^+)$ y $S^*x = \lambda x$. Luego, $\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(S^*)$. Como el espectro es un conjunto cerrado, $\{\lambda : |\lambda| \leq 1\} \subseteq \sigma(S^*)$. Pero, como $\|S^*\| = 1$, entonces por el teorema 1.1.11, $\sigma(S^*) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$. Note ahora que $S - \lambda$ es invertible si y solo si $(S - \lambda)^* = S^* - \bar{\lambda}$ lo es. Luego, $\sigma(S) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$.

6. Sea $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ una base (ortonormal) del espacio de Hilbert H y sea $\lambda_n, n = 1, 2, 3, \dots$ una sucesión acotada de números complejos. Sea $D \in \mathcal{L}(H)$ el **operador diagonal**, con los λ_n en la diagonal principal, con respecto a esta base. Es decir, si $x = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n \rangle e_n$, entonces

$$Dx = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n \rangle \lambda_n e_n.$$

Demostraremos que $\sigma(D) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots\}^-$, donde la barra denota clausura. En efecto, si $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots\}^-$ entonces hay una subsucesión $\{\lambda_{n_i}\}$ de $\{\lambda_n\}$ con $\lambda_{n_i} \rightarrow \lambda$. Luego, si $i \rightarrow \infty$, entonces $\|(D - \lambda)e_{n_i}\| \rightarrow 0$ y así $D - \lambda$ no puede ser invertible en $\mathcal{L}(H)$ (ya que $\|e_{n_i}\| = 1$). Luego, $\lambda \in \sigma(D)$. Recíprocamente, si $\lambda \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots\}^-$ entonces, por un lado, se tiene que $\ker(D - \lambda) = (0)$ y por otro lado hay $\alpha > 0$ tal que $|\lambda_n - \lambda| \geq \alpha, \forall n = 1, 2, \dots$

Si $y \in H$ entonces se tiene que $y = (D - \lambda)x$, donde x está definido por $x = \sum_{n=1}^\infty \langle y, e_n \rangle$

$(\lambda_n - \lambda)^{-1}e_n$. Luego, $D - \lambda$ es sobre. Como $\ker(D - \lambda) = (0)$, entonces por el teorema de la aplicación abierta, $D - \lambda$ es invertible en $\mathcal{L}(H)$. Luego $\sigma(D) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots\}^-$. Note, a propósito, que para todo $X \subseteq \mathbb{C}$ que sea compacto y no vacío, hay un espacio de Hilbert H y un $T \in \mathcal{L}(H)$ con $\sigma(T) = X$ pues como X es compacto entonces X separable. Sea, entonces $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ una sucesión densa en X y sea T el **operador diagonal** definido arriba (note que $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots\}$ es una sucesión acotada y así $T \in \mathcal{L}(H)$). Por lo dicho arriba tenemos que $\sigma(T) = X$.

Sea ahora A un álgebra de Banach con unidad 1 y sea $x \in A$. Como $\sigma(x)$ es un subconjunto compacto de \mathbb{C} , entonces $\sigma(x)$ tiene una única componente conexa no acotada. Se denotará por

$\rho_\infty(x)$ o por $\rho_{A,\infty}(x)$ si necesitamos especificar el álgebra A . Las restantes componentes conexas de $\rho(x)$ (si existen) se llaman los **huecos** de $\sigma(x)$.

Si ahora B es una subálgebra cerrada de A , con la misma unidad de A , entonces es claro que $\sigma_A(x) \subseteq \sigma_B(x)$, $\forall x \in B$. Sin embargo, estos conjuntos no son en general iguales. Ahora pasamos a estudiar más profundamente la relación entre $\sigma_B(x)$ y $\sigma_A(x)$.

Arrancamos con el siguiente,

Lema 1.1.15. *Sea A un álgebra de Banach con unidad 1. Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq A$ un conjunto de elementos invertibles en A . Sea $x \in A$ con $x_n \rightarrow x$. Entonces, x es invertible en A si y solo si $\{\|x_n^{-1}\|\}_{n=1}^\infty$ es acotada.*

Demostración. La primera dirección es clara por el teorema 1.1.9 parte 4. Recíprocamente suponemos que $\{\|x_n^{-1}\|\}$ es acotada. Como

$$\|1 - x_n^{-1}x\| = \|x_n^{-1}(x_n - x)\| \leq \|x_n^{-1}\| \|x_n - x\|$$

entonces, hay n_0 tal que $\|1 - x_{n_0}^{-1}x\| < 1$. Por el teorema 1.1.7, $x_{n_0}^{-1}x$ es invertible. Luego, $x = x_{n_0}(x_{n_0}^{-1}x)$ es invertible. ■

Teorema 1.1.16. *Sea A un álgebra de Banach con unidad 1 y sea $B \subseteq A$ una subálgebra cerrada, donde $1 \in B$. Entonces, $Fr\sigma_B(x) \subseteq Fr\sigma_A(x)$, $\forall x \in B$.*

Demostración. Como $\sigma_A(x) \subseteq \sigma_B(x)$, $\forall x \in A$, es suficiente demostrar (por la definición de frontera y porque $\sigma_A(x)$ es cerrado) que $Fr\sigma_B(x) \subseteq \sigma_A(x)$. Para ello, sea $\lambda \in Fr\sigma_B(x)$. Entonces, hay $\{\lambda_n\} \subseteq \rho_B(x)$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Así, $x - \lambda_n \rightarrow x - \lambda$, $x - \lambda_n$ es invertible en B , $\forall n$ y $x - \lambda$ no es invertible en B . Por el lema 1.1.15 aplicado a B tenemos

$$\{\|(x - \lambda_n)^{-1}\|\} \text{ no es acotada} \quad (1.11)$$

Si $x - \lambda$ fuera invertible en A , entonces por el lema 1.1.15 aplicado ahora a A (posible pues $x - \lambda_n$, $\forall n$ es invertible también en A), tenemos que $\{\|(x - \lambda_n)^{-1}\|\}$ es acotada, en contradicción con (1.11). Luego, $\lambda \in \sigma_A(x)$. ■

Corolario 1.1.17. *Bajo las hipótesis del teorema 1.1.16,*

$$\sigma_B(x) = \sigma_A(x) \cup H$$

donde H es la unión de los huecos de $\sigma_A(x)$ que intersectan a $\sigma_B(x)$.

Demostración. Inmediato del teorema 1.1.16. ■

Teorema 1.1.18. *Sea A un álgebra de Banach con unidad 1 y sea $x \in A$. Entonces, $\sigma_A(x)$ no separa el plano si y solo si $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$, para toda subálgebra cerrada B de A tal que $x, 1 \in B$.*

Demostración. De acuerdo con el corolario 1.1.17 solo necesitamos demostrar la segunda dirección. Para ello, notemos que si p es cualquier polinomio de variable compleja, entonces por el teorema del módulo máximo tenemos

$$\max_{\alpha \in \rho_{A,\infty}(x)} |p(\alpha)| \leq \|p(x)\| \quad (1.12)$$

Sea $B = \{p(x) : p \text{ polinomio}\}^-$. Entonces, B es un subálgebra cerrada de A y $1, x \in B$. Sea $\lambda \notin \sigma_B(x)$ y sea $q(x) = x - \lambda + 1$. Entonces, $1 - q(x)$ es invertible en B . Sea $\{p_n(x)\}_{n=1}^\infty \subseteq B$ tal que

$p_n(x) \rightarrow q(x)(1 - q(x))^{-1}$ y sea $q_n(x) = q(x) - p_n(x)(1 - q(x))$. Entonces, $\|q_n(x)\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Por (1.12) tenemos

$$q_n(\mu) \rightarrow 0, \forall \mu \notin \rho_{A,\infty}(x) \quad (1.13)$$

Sin embargo, $q(\lambda) = 1$; en consecuencia $q_n(\lambda) = 1, \forall n$. Por (1.13), $\lambda \in \rho_{A,\infty}(x)$. Luego, $\lambda \notin \sigma_B(x) \Rightarrow \lambda \in \rho_{A,\infty}(x)$. Así, $\sigma_A(x)$ no tiene huecos y por lo tanto $\sigma_A(x)$ no separa el plano. ■

Definición 1.1.19. Sea X un espacio de Banach complejo y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. El **espectro puntual aproximado** de T es el conjunto

$$\pi(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ no es acotado por abajo}\}.$$

Teorema 1.1.20. Sea X un espacio de Banach complejo y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Entonces,

$$\text{Fr}\sigma(T) \subseteq \pi(T).$$

Demostración. Sean $\lambda \in \text{Fr}\sigma(T)$ y $\{\lambda_n\} \subseteq \rho(T)$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Si hubiera $m > 0$ tal que

$$\|(T - \lambda_n)x\| \geq m\|x\|, \forall x \in X, \forall n \geq \text{cierto } N \quad (1.14)$$

entonces $\|(T - \lambda_n)^{-1}x\| \leq \frac{1}{m}\|x\|, \forall x \in X, \forall n \geq N$. Luego, $\{\|(T - \lambda_n)^{-1}\|\}$ es acotada. Por el lema 1.1.15, $T - \lambda$ es invertible, lo cuál es una contradicción (pues $\lambda \in \sigma(T)$). Luego, (1.14) es falso.

Así, $\forall k = 1, 2, 3, \dots$ y $\forall N = 1, 2, 3, \dots$, hay $n \geq N$ y $x_k \in X$ con $\|x_k\| = 1$ y $\|(T - \lambda_n)x_k\| < \frac{1}{k}$. Pero, $\|(T - \lambda)x_k\| \leq \|(T - \lambda_n)x_k\| + \|(\lambda - \lambda_n)x_k\| < \frac{1}{k} + |\lambda - \lambda_n| \rightarrow 0, (n, k \rightarrow \infty)$. Luego, $T - \lambda$ no puede ser acotada por abajo, y en consecuencia $\lambda \in \pi(T)$. ■

Corolario 1.1.21. Bajo las hipótesis del teorema, $\text{Fr}\sigma(T) \subseteq \text{Fr}\pi(T)$ y $\sigma(T) = \pi(T) \cup H$, donde H es la unión de los huecos de $\pi(T)$ que intersectan a $\sigma(T)$.

Demostración. Es fácil ver que $\pi(T)$ es cerrado. Luego, la conclusión es ahora clara del teorema anterior. ■

Corolario 1.1.22. Sean X un espacio de Banach complejo, $T \in \mathcal{L}(X)$ y $M \in \text{lat}T$. Entonces, $\sigma(T_M) \subseteq \sigma(T) \cup H$, donde H es la unión de los huecos de $\sigma(T)$ que intersectan $\sigma(T_M)$. (Aqui $\sigma(T_M)$ es relativo al álgebra $\mathcal{L}(M)$).

Demostración. Claramente $\pi(T_M) \subseteq \pi(T)$ y por el teorema 1.1.20, $\text{Fr}\sigma(T_M) \subseteq \pi(T_M)$. Luego, $\text{Fr}\sigma(T_M) \subseteq \sigma(T)$, $\rho_\infty(T) \cap \sigma(T_M) = \emptyset$ pues $\sigma(T_M)$ es acotado. Luego, $\sigma(T_M) \subseteq \sigma(T) \cup H$, donde H es la unión de los huecos de $\sigma(T)$ que intersectan a $\sigma(T_M)$. ■

Ahora pasamos a demostrar que el espectro de cualquier elemento de un álgebra de Banach con unidad es no vacío. Para ello necesitamos el siguiente

Lema 1.1.23. Sea A un álgebra de Banach con unidad y sea $x \in A$. Entonces $f : \rho(x) \rightarrow \mathbb{C}, \lambda \rightarrow \varphi((x - \lambda)^{-1})$ es analítica, $\forall \varphi \in A^*$ (A^* es el dual de A , considerado A como espacio normado).

Demostración. Notar que si $\lambda, \mu \in \rho(x)$ entonces

$$(x - \lambda)^{-1} - (x - \mu)^{-1} = (\lambda - \mu) \cdot (x - \lambda)^{-1} \cdot (x - \mu)^{-1}$$

(para demostrarlo considere la expresión $(x - \lambda)^{-1}[(x - \mu) - (x - \lambda)](x - \mu)^{-1}$). Luego

$$\frac{(x - \lambda)^{-1} - (x - \mu)^{-1}}{\lambda - \mu} = (x - \lambda)^{-1}(x - \mu)^{-1}$$

Del teorema 1.1.9 parte 4 se deduce que $\lambda \rightarrow (x - \lambda)^{-1}$ es continua.

Luego,

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{(x - \lambda)^{-1} - (x - \mu)^{-1}}{\lambda - \mu} = (x - \lambda)^{-2}$$

Como φ es lineal y continua entonces

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda}$$

existe y es igual a $\varphi((x - \lambda)^{-2})$. ■

Teorema 1.1.24. *Sea A un álgebra de Banach con unidad 1. Entonces, $\sigma(x) \neq \emptyset, \forall x \in A$.*

Demostración. Sea $\lambda_0 \notin \sigma(x)$. Luego, $(x - \lambda_0)^{-1} \neq 0$ y por el teorema de Hahn - Banach, existe $\varphi \in A^*$ tal que $f(\lambda_0) \neq 0$, donde $f : \rho(x) \rightarrow \mathbb{C}, \lambda \rightarrow \varphi((x - \lambda)^{-1})$. Por el lema 1.1.23, f es analítica. Además, $\lambda f(\lambda) = \varphi(\lambda(x - \lambda)^{-1}) = \varphi((\frac{x}{\lambda} - 1)^{-1}) \rightarrow \varphi(-1)$ si $|\lambda| \rightarrow \infty$. Luego,

$$f(\lambda) \rightarrow 0 \text{ si } |\lambda| \rightarrow \infty \quad (1.15)$$

Si $\sigma(x) = \emptyset$ entonces $\rho(x) = \mathbb{C}$ y así por el teorema de Liouville f es constante. Por (1.15), $f(\lambda) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}$, en contradicción con $f(\lambda_0) \neq 0$. ■

Note que si X es un espacio de Banach complejo y $T \in \mathcal{L}(X)$, entonces, del teorema 1.1.20, el teorema anterior, se deduce que $\pi(T) \neq \emptyset$.

Corolario 1.1.25 (Gelfand-Mazur). *Si A es un álgebra de Banach con unidad de norma 1 y si todo elemento no cero de A es invertible, entonces A es (isométricamente isomorfo con) \mathbb{C} .*

Demostración. Sea 1 la unidad de A . Entonces, $f : \mathbb{C} \rightarrow A, \lambda \rightarrow \lambda \cdot 1$ es un isomorfismo de \mathbb{C} sobre $f(\mathbb{C})$. Para demostrar que $f(\mathbb{C}) = A$, sea $x \in A$. Por el teorema 1.1.24, hay $\lambda \in \sigma(x)$. Luego, $x - \lambda \cdot 1$ no es invertible en A . Por hipótesis, $x = \lambda \cdot 1 = f(\lambda)$. ■

Definición 1.1.26. Sea A un álgebra de Banach con unidad y sea $x \in A$. El **radio espectral** $r(x)$ de x en A es

$$r(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|$$

Note que por el teorema 1.1.11, $r(x) \leq \|x\|, \forall x \in A$. Así, como $x^n - \lambda^n = (x - \lambda)(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \dots + \lambda^{n-2}x + \lambda^{n-1})$, entonces $\lambda \in \sigma(x)$ implica $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ (vea ejercicio 1 de 1.1.34). Luego, $|\lambda^n| \leq \|x^n\|, \forall \lambda \in \sigma(x)$, de donde

$$r(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \quad (1.16)$$

Más aún, tenemos el siguiente

Teorema 1.1.27 (Formula de Gelfand). *Sea A un álgebra de Banach con unidad. Entonces, $\forall x \in A, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe y es igual a $r(x)$.*

Demostración. Sea $\varphi \in A^*$. Por el lema 1.1.23, $f(\lambda) = \varphi((x - \lambda)^{-1})$ es analítica en $\rho(x)$. Pero, para $|\lambda| > \|x\|$ tenemos por el teorema 1.1.7 que $(x - \lambda)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} x^n$. Así,

$$\varphi((x - \lambda)^{-1}) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} \varphi(x^n), \quad |\lambda| > \|x\| \quad (1.17)$$

Notemos ahora que el miembro derecho es una serie de potencias en la variable compleja $\mu = \lambda^{-1}$ con coeficientes $\varphi(x^n)$. Pero $\varphi((x - \lambda)^{-1})$ es analítica en la bola $|\mu| < \frac{1}{r(x)}$. Así (1.17) no solo es válida para $|\mu| < \frac{1}{\|x\|}$ sino que también es válida para $|\mu| < \frac{1}{r(x)}$ (es decir para $|\lambda| > r(x)$). Recordemos que lo anterior se debe al hecho que toda función analítica en una vecindad del cero se escribe en serie de potencias en el mayor disco centrado en cero contenido en el dominio de la función, de una única forma. Siguiendo ahora con la demostración, tenemos que $|\lambda^{-(n+1)} \varphi(x^n)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), $\forall \varphi \in A^*$ y $\forall \lambda$ tal que $|\lambda| > r(x)$.

Luego $\{\lambda^{-(n+1)} x^n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada, $\forall \lambda$ tal que $|\lambda| > r(x)$. Sea $M_\lambda > 0$ tal que $\|\lambda^{-n} x^n\| < M_\lambda$, $\forall \lambda$ con $|\lambda| > r(x)$. Luego, $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda| M_\lambda$, $\forall \lambda$ con $|\lambda| > r(x)$. Por lo tanto $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x)$. Este último hecho junto a (1.16) demuestran que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe y es igual a $r(x)$. ■

Corolario 1.1.28. *Sea A un álgebra de Banach con unidad 1 y sea $x \in A$ tal que $r(x) < 1$. Entonces $1 - x$ es invertible en A y $(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.*

Demostración. Como $r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\|$ converge y como A es de Banach, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge en A .

Como $(1 - x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) (1 - x) = 1$, entonces $1 - x$ es invertible y $(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. ■

Ejemplos 1.1.29.

1. El teorema 1.1.18 dice que si $\sigma_A(x)$ separa el plano entonces debe existir una subálgebra cerrada $B \subseteq A$ con $1, x \in B$ tal que $\sigma_A(x) \neq \sigma_B(x)$. Entonces, el corolario 1.1.17 dice que $\sigma_B(x)$ es igual a $\sigma_A(x)$ junto a los huecos de $\sigma_A(x)$ que intersectan a $\sigma_B(x)$. El lector haría bien en pensar sobre algunos ejemplos concretos de esta situación.
2. Sea A un álgebra normada con unidad, no necesariamente de Banach. Entonces, es verdad que $\sigma_A(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in A$. Esta generalización del teorema 1.1.24 puede ser consultada por el lector en el texto de Bourbaki o de Richard de la bibliografía.
3. Note que si A es un álgebra de Banach con unidad y B una subálgebra cerrada de A con $1 \in B$, entonces, aunque en general $\sigma_B(x) \neq \sigma_A(x)$ (como ya sabemos), siempre se tiene que $r_B(x) = r_A(x)$, $\forall x \in B$. Es decir, el radio espectral de $x \in A$ es independiente de la subálgebra cerrada B de A que contenga a 1 y a x .

Esto es inmediato del corolario 1.1.17 o del teorema 1.1.27.

4. El teorema de Gelfand-Mazur (corolario 1.1.25) no vale en álgebras de Banach con unidad de norma distinta de 1. En efecto, si $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}$ entonces A no puede ser isométricamente isomorfo con \mathbb{C} como el lector tiene la fácil tarea de demostrar.
5. No es verdad que el radio espectral sea continuo. En efecto, S. Kakutani encontró operadores de desplazamiento ponderados $T, T_n, n = 1, 2, \dots$ en $\mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{Z}^+))$ tales que $T_n \rightarrow T$ en norma, donde $r(T_n) = 0, n = 1, 2, \dots$, pero $r(T) > 0$. El lector interesado debe consultar los detalles en el libro de Richard o el de Halmos de la bibliografía.

Ahora vamos a completar esta sección con algunas aplicaciones adicionales a la teoría de operadores.

Teorema 1.1.30. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ normal ($TT^* = T^*T$) o más generalmente **hiponormal** ($TT^* \leq T^*T$). Entonces, $r(T) = \|T\|$.

Demostración. De acuerdo con el teorema 1.1.27, es suficiente demostrar que

$$\|T^n\| = \|T\|^n, n = 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

Para ello, notemos primero que

$$\|T^n x\|^2 = \langle T^* T^n x, T^{n-1} x \rangle \leq \|T^* T^n x\| \|T^{n-1} x\| \leq \|T^{n+1} x\| \|T^{n-1} x\|, \forall n = 1, 2, \dots$$

donde en la última desigualdad se usó el hecho de ser T hiponormal. Luego,

$$\|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1}\| \|T^{n-1}\|, n = 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

Para demostrar ahora (1.18) procedemos por inducción. (1.18) es evidente para $n = 1$. Supongamos (1.18) válido para k , con $1 \leq k \leq n$. Usando esta suposición y usando (1.19), tenemos

$$\|T\|^{2n} = \|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1}\| \|T^{n-1}\| = \|T^{n+1}\| \|T\|^{n-1}$$

Luego, $\|T\|^{n+1} \leq \|T^{n+1}\|$ y por lo tanto $\|T\|^{n+1} = \|T^{n+1}\|$. ■

Teorema 1.1.31 (D. Sarason). Sean X un espacio de Banach sobre los complejos y $T \in \mathcal{L}(X)$. Entonces:

1. Si λ_0, λ pertenecen a la misma componente conexa de $\rho(T)$, entonces

$$\text{lat}(T - \lambda_0)^{-1} = \text{lat}(T - \lambda)^{-1}.$$

2. Si $\lambda \in \rho_\infty(T)$, entonces $\text{lat}(T) = \text{lat}(T - \lambda)^{-1}$.

Demostración. 1. Note que si $T - \lambda$ es invertible entonces $1 - (T - \lambda_0)^{-1}(T - \lambda) = 1 - (T - \lambda_0)^{-1}(T - \lambda_0 + \lambda_0 - \lambda) = (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}$. Luego, por el corolario 1.1.28 (con $x = (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}$) y por el ejercicio 18 de 1.1.34 (con $x = T$), tenemos que si $\lambda_0 \in \rho(T)$ y $|\lambda - \lambda_0| < \text{dist}(\lambda_0, \sigma(T))$, entonces

$$(T - \lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (T - \lambda_0)^{-n-1}$$

de donde resulta fácil demostrar que $\text{lat}(T - \lambda_0)^{-1} \subseteq \text{lat}(T - \lambda)^{-1}$.

Luego, si $\varepsilon = \min \{\text{dist}(\lambda_0, \sigma(T)), \text{dist}(\lambda, \sigma(T))\}$, entonces

$$\lambda, \lambda_0 \in \rho(T) \text{ y } |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon \Rightarrow \text{lat}(T - \lambda)^{-1} = \text{lat}(T - \lambda_0)^{-1} \quad (1.20)$$

Supongamos ahora que λ_0 y λ pertenecen a la misma componente conexa C de $\rho(T)$. Hay una poligonal P en C uniendo λ_0 con λ . Como P es compacto, hay $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ en P con $|\lambda_i - \lambda_{i+1}| < \text{dist}(P, \sigma(T))$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Por (1.20), $\text{lat}(T - \lambda_i)^{-1} = \text{lat}(T - \lambda_{i+1})^{-1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, y en consecuencia $\text{lat}(T - \lambda_0)^{-1} = \text{lat}(T - \lambda)^{-1}$, demostrando (1).

2. Sea $\lambda \in \rho_\infty(T)$. Por (1) podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $|\lambda| > r(T)$. Por el corolario 1.1.28,

$$(T - \lambda)^{-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n$$

Luego,

$$\text{lat}(T) \subseteq \text{lat}(T - \lambda)^{-1}, \forall \lambda \in \rho_\infty(T) \quad (1.21)$$

Pero, $\lambda \in \rho_\infty(T) \Rightarrow 0 \in \rho_\infty(T - \lambda)$.

Luego, por (1.21), $\text{lat}(T - \lambda)^{-1} \subseteq \text{lat}((T - \lambda)^{-1} - 0)^{-1} = \text{lat}(T - \lambda) = \text{lat}(T)$. Luego, $\lambda \in \rho_\infty(T) \Rightarrow \text{lat}(T) = \text{lat}(T - \lambda)^{-1}$.

■

Teorema 1.1.32 (Rosenthal-Stampfli). *Sea X un espacio de Banach complejo. Sea \mathcal{C} una colección contable de subespacios invariantes de $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que $M \in \mathcal{C}$ y $N \notin \mathcal{C}$ implica $M \subseteq N$ o bien $N \subseteq M$. Entonces, \mathcal{C} consiste de **subespacios hiperinvariantes** de T (es decir, son invariantes para cada S en $\mathcal{L}(X)$ que conmuta con T).*

Demostración. Sea $S \in \mathcal{L}(X)$ tal que $ST = TS$ y sea $M \in \mathcal{C}$. Vamos a demostrar que $SM \subseteq M$. Sea λ con $\|S\| < |\lambda|$. El subespacio $(S - \lambda)M$ es invariante para T (note que $(S - \lambda)M$ es cerrado). Si $(S - \lambda)M \notin \mathcal{C}$ entonces por hipótesis $(S - \lambda)M \subseteq M$ o bien $M \subseteq (S - \lambda)M$. En el primer caso, claramente $SM \subseteq M$, y en el segundo caso $(S - \lambda)^{-1}M \subseteq M$, de donde también $SM \subseteq M$ (por el teorema 1.1.31 parte (2)). Si ahora $(S - \lambda)M \in \mathcal{C}$, $\forall \lambda$ con $\|S\| < |\lambda|$, entonces como \mathcal{C} es contable, hay λ_1, λ_2 con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $|\lambda_1|, |\lambda_2| > \|S\|$, $(S - \lambda_1)M = (S - \lambda_2)M$. Luego, $M = (S - \lambda_1)^{-1}(S - \lambda_2)M = (S - \lambda_1)^{-1}(S - \lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_2)M = (1 + (\lambda_1 - \lambda_2)(S - \lambda_1)^{-1})M$. Luego, $(S - \lambda_1)^{-1}M \subseteq M$ (pues $\text{lat}(\alpha + \beta T) = \text{lat}(T)$, $\forall T \in \mathcal{L}(X)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$). Por el teorema 1.1.31 parte (2), $SM \subseteq M$. ■

Corolario 1.1.33. *Sean X un espacio de Banach complejo y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Entonces:*

1. *Si $\text{lat} T$ es contable, cada subespacio invariante de T es hiperinvariante.*
2. *Si $M \in \text{lat} T$ es comparable con cada $N \in \text{lat} T$, entonces M es hiperinvariante.*
3. *Si T es **unicelular** (es decir, $\text{lat} T$ es totalmente ordenado), entonces cada subespacio invariante de T es hiperinvariante.*

Ejercicios 1.1.34.

1. Sea A un anillo con unidad. Sea $x = uv$ en A con $uv = vu$. Demuestre que si x es invertible, entonces u y v también lo son. Exhiba un contraejemplo si $uv \neq vu$.

2. Sea A un anillo con unidad 1 y sea $x \in A$. Suponer que hay $u, v \in A$ con $ux = 1 = xv$. Demuestre que $u = v$. Exhibir un ejemplo de A y $x \in A$ con un número infinito de $u_n \in A$ con $u_n x = 1$, $n = 1, 2, \dots$
3. Exhiba ejemplos de anillos A y subanillos B de A tales que:
 - a) A tiene unidad pero B no tiene
 - b) B tiene unidad pero A no tiene
 - c) B tiene unidad diferente de la unidad de A
4. Sea A un álgebra de Banach con unidad 1 y norma $\|\cdot\|$. Demostrar que hay una $\|\cdot\|_0$ en A , equivalente a $\|\cdot\|$ tal que $\|1\|_0 = 1$
5. Sea A un álgebra con unidad y sean $x, y \in A$. Demuestre que $\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\}$. Exhiba un ejemplo donde $\sigma(xy) \neq \sigma(yx)$. Exhiba un ejemplo donde $\sigma(xy) \neq \sigma(yx) \cup \{0\}$.
6. Sea A un álgebra con unidad y sean $x, y \in A$ donde y es invertible.
Si $\|y^{-1}\|\|x - y\| < 1$, demuestre que x es invertible.
7. Sea H un espacio de Hilbert y sea X un espacio de Banach complejo. Demostrar
 - a) $U \in \mathcal{L}(H)$ unitario $\Rightarrow \sigma(U) \subseteq \{\lambda : |\lambda| = 1\}$.
 - b) $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto $\Rightarrow \sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$
 - c) $T \in \mathcal{L}(H)$ positivo $\Rightarrow \sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
 - d) $P \in \mathcal{L}(X)$ proyección $\Rightarrow \sigma(P) \subseteq \{0, 1\}$
 - e) $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$, $\forall T \in \mathcal{L}(H)$. (T^* = adjunto de T).
 - f) $\sigma(T') = \sigma(T)$, $\forall T \in \mathcal{L}(X)$. (T' = transpuesto de T).

Exhiba ejemplos para verificar que las implicaciones reciprocas en (a), (b), (c) y (d) no son válidas.

8. Determinar el espectro del operador de desplazamiento bilateral

$$u : \ell_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}), \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \rightarrow \{x_{i-1}\}_{i=-\infty}^{\infty}.$$

9. Sea H un espacio de Hilbert y $V \in \mathcal{L}(H)$ una isometría no unitaria (es decir, $V^*V = I$ pero $VV^* \neq I$). Demuestre que $\sigma(V) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$.
10. Sean H_1, H_2, \dots, H_n espacios de Hilbert y $T_i \in \mathcal{L}(H_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Demuestre que $\sigma\left(\bigcup_{i=1}^n T_i\right) = \bigcup_{i=1}^n \sigma(T_i)$. Exhiba un contraejemplo si la sucesión de los T_i es infinita pero acotada.
11. Determinar el espectro puntual aproximado del operador de desplazamiento unilateral $S \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{Z}^+))$. Hacer lo mismo con S^* .
12. Si H es un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ es normal, demuestre que $\sigma(T) = \pi(T)$. ¿Es esto también verdad si T es hiponormal?
13. Sea X un espacio de Banach complejo y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Demuestre que $\pi(T)$ es un conjunto cerrado.

14. Sea A un álgebra con unidad 1 y $B \subseteq A$ una subálgebra tal que $1 \in B$. Entonces B se llama llena si $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$, $\forall x \in B$. Si A es de Banach demuestre que:

- a) $B \subseteq A$ llena $\Rightarrow \overline{B}$, la clausura de B , es llena en A .
- b) $B \subseteq A$ conmutativa maximal (con respecto a inclusión) $\Rightarrow B$ es llena.

15. Demuestre que la intersección de todas las subálgebras llenas de A que contienen a $L \subseteq A$, es una subálgebra llena de A .

Se llama la subálgebra llena de A generada por L . Demuestre que si $x \in A$, entonces la subálgebra llena de A generada por x es:

$$B = \{p(x)q(x)^{-1} : p, q \text{ son polinomios y } q(x) \text{ es invertible en } A\}$$

16. Sea A un álgebra normada con unidad 1. Demuestre que $\forall x, y \in A$ se tiene que $xy - yx \neq 1$.

17. Sea A un álgebra de Banach con unidad y sea $x \in A$. Demuestre que $r(x) < 1$ si y solo si $x^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

18. Sea A un álgebra de Banach con unidad y sea $\lambda \in \rho(x)$. Demuestre que

$$r((x - \lambda)^{-1}) = \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(x))}$$

19. En un álgebra de Banach con unidad, suponer que $xy = yx$. Demuestre que:

- a) $r(xy) \leq r(x)r(y)$
- b) $r(x + y) \leq r(x) + r(y)$

20. En un álgebra de Banach con unidad, suponer que $x_n \rightarrow x$, x_n invertible, $n = 1, 2, \dots$. Demuestre que x es invertible si y solo si $\{r(x_n^{-1})\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

21. Sea A un álgebra normada y sean $x, y \in A$ con $xy - yx = y$. Demuestre que $y^n = 0$, $\forall n > 2\|x\|$.

22. Sea A un álgebra de Banach con unidad y sea $x \in A$. Demuestre que $r(x) = \inf_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Exhiba un ejemplo donde $\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\}$ no es decreciente.

23. Sea A un álgebra de Banach. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a) $r(x) = \|x\|$, $\forall x \in A$
- b) $\|x^2\| = \|x\|^2$, $\forall x \in A$
- c) $\|x^n\| = \|x\|^n$, $\forall x \in A$, $\forall n = 1, 2, \dots$

24. Sea X un espacio normado complejo. Demostrar que $T \in \mathcal{L}(X)$ tiene radio espectral menor que 1 si y solo si $\sum_{n=0}^{\infty} | \langle T^n x, y \rangle | < \infty$, $\forall x \in X$, $\forall y \in X^*$.

25. Sea A un álgebra de Banach. Demuestre que si $b = \inf_{x \neq 0} \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2}$, entonces

$$b \leq \inf_{x \neq 0} \frac{r(x)}{\|x\|} \leq b^{\frac{1}{2}}$$

26. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. Demuestre que $r(T) = \inf_S \|S^{-1}TS\|$, $S \in \mathcal{L}(H)$ invertible.
27. Demuestre o exhiba un contraejemplo:
- Si A es un álgebra de Banach con unidad y si $x \in A$, entonces hay $\lambda \in \sigma(x)$ con $|\lambda| = r(x)$.
 - Si H es un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ satisface $r(T) = \|T\|$, entonces T es hiponormal.
 - Si A es un álgebra de Banach con unidad, si $x \in A$ y $\varepsilon > 0$, entonces hay $\delta > 0$ tal que $\|x - y\| < \delta \Rightarrow r(y) < r(x) + \varepsilon$.
 - Existe un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ y un conjunto $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ denso en el conjunto $\{\lambda : |\lambda| = r(T)\}$, de modo que $T - \lambda_n$ es invertible $\forall n = 1, 2, \dots$.
 - Si A es un álgebra de Banach con unidad y si $x \in A$, entonces $\sigma(x)$ tiene solo un número contable de huecos.
 - Sea A un álgebra de Banach con unidad. Sea $x \in A$ tales que los polinomios en x son densos en A . Entonces $\rho(x) = \rho_{\infty}(x)$.
 - Si H es un espacio de Hilbert, si $T \in \mathcal{L}(H)$ y si $M \in \text{lat } T$, entonces $\sigma(T) \subseteq \sigma(T_M)$.
 - Si H es un espacio de Hilbert, si $T \in \mathcal{L}(H)$ y si $M \in \text{lat } T$, entonces $\sigma(T_M) \subseteq \sigma(T)$.
 - Si X es un espacio de Banach complejo y si $T \in \mathcal{L}(X)$ es invertible y tiene el espectro en una circunferencia, entonces $\text{lat } T = \text{lat } T^{-1} \Rightarrow \text{lat } T = \text{lat } (T - \lambda)^{-1}$, $\forall \lambda \in \rho(T)$.
 - Si H es un espacio de Hilbert y si $T \in \mathcal{L}(H)$ es autoadjunto, entonces el conjunto de los valores propios de T es no vacío.

Definición: Sea A un álgebra de Banach con unidad, entonces $x \in A$ se llama **casinilpotente** si $\sigma(x) = \{0\}$, o equivalentemente si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$.

28. Demuestre que los siguientes operadores son casinilpotentes:

- $V : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $f(x) \rightarrow \int_0^x f(t)dt$
- $W : \ell_2(\mathbb{Z}^+) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^+)$, $\{x_1, x_2, \dots\} \rightarrow \{0, d_1x_1, d_2x_2, \dots\}$ donde $d_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

29. Sean A un álgebra de Banach con unidad y $x \in A$ casinilpotente. Demuestre que hay una sucesión $\{\alpha_n\}$ de reales positivos tal que $\alpha_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty$, y todavía $\|\alpha_n x^n\|^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).
30. Sea A un álgebra de Banach con unidad. Sean $x, y \in A$ donde x es casinilpotente y donde $xy = yx$. Demuestre que $\sigma(x + y) = \sigma(y)$.
31. Sea A un álgebra de Banach con unidad. Sean $x, y, z \in A$ tales que $z = xy - yx$. Si $zx = xz$, demuestre que z es casinilpotente.

1.2. Caracteres y Espectro

Iniciamos esta sección recordando algunos resultados del curso sobre estructuras algebraicas relativas a ideales maximales en un anillo.

Definición 1.2.1. Sea A un anillo. Un subconjunto no vacío J de A se llama un **ideal** de A si $x - y, ax, xa \in J$, $\forall x, y \in J$, $\forall a \in A$. Un ideal M de A se llama **maximal** si M es propio (s decir $M \neq A$) y si $M \subseteq J$ donde J es un ideal de A , entonces $M = J$ o bien $J = A$

Note que cuando el anillo A tiene unidad $1 \neq 0$, entonces un ideal J de A es propio si y solo si $1 \notin J$.

Teorema 1.2.2. *Sea A un anillo con unidad $\neq 0$ y sea M un ideal de A . Entonces:*

1. *Si A/M es un cuerpo entonces M es maximal.*
2. *Si A es conmutativo y si M es maximal entonces A/M es un cuerpo (conmutativo).*

Demostración. 1. En la definición de cuerpo se postula que la identidad es diferente de cero. Luego A/M no es cero y por lo tanto M es propio. Por otro lado, sea J un ideal de A con $M \subsetneq J$.

Debemos demostrar que $J = A$. En efecto, sea $x \in J$ y $x \notin M$. Entonces $x + M \neq M$ (M es el cero de A/M). Como A/M es un cuerpo, entonces hay $a \in A$ con $(x + M)(a + M) = 1 + M$. Luego, $1 - ax \in M \subseteq J$. Pero, $ax \in J$. Luego, $1 \in J$ y así $J = A$.

2. Es claro que A/M es un anillo conmutativo con unidad y su unidad no es cero pues M es propio. Debemos entonces demostrar que todo elemento no cero de A/M es invertible en A/M . Para ello, sea $x + M \neq M$. Luego, $x \notin M$. Así, $M + \{ax\}_{a \in A}$ es un ideal de A (pues A es un anillo que es conmutativo), que contiene propiamente a M . Como M es maximal, $M + \{ax\}_{a \in A} = A$ y así $1 - ax \in M$, o equivalente $1 + M = (a + M)(x + M)$. Luego, $x + M$ es invertible en A/M .

■

Notemos que si A no es conmutativo, es posible que M sea un ideal maximal de A sin que A/M sea un cuerpo. Vea el ejercicio 1 al final de la sección.

Teorema 1.2.3. *Sea A un anillo con unidad $1 \neq 0$ (no necesariamente conmutativo) y sea J un ideal propio de A . Entonces, J está contenido en un ideal maximal de A . En particular, tomando $J = (0)$, se tiene que todo anillo con unidad distinta de cero tiene un ideal maximal.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{K : J \subseteq K \text{ y } K \text{ es un ideal propio de } A\}$. Ordenar \mathcal{A} por inclusión. Note primero que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ un subconjunto totalmente ordenado. La unión de ideales no es, en general, un ideal pero el lector tiene la fácil tarea de demostrar que la unión de los elementos de \mathcal{C} es un ideal de A . Además, esta unión es propia pues $1 \notin K, \forall K \in \mathcal{A}$. Se satisfacen entonces las hipótesis del lema de Zorn y así hay en \mathcal{A} algún elemento maximal, llamarlo M . Es fácil demostrar ahora que M es un ideal maximal de A . ■

Note que en la demostración anterior hemos usado el hecho de tener A una unidad. Si A no tiene unidad, es en general falso que A tenga un ideal maximal, aún si A es conmutativo.

En efecto, sea

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \left\{ \frac{m}{p^n} : 0 \leq m < p^n, m \in \mathbb{Z}, n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

donde p es un número primo fijo. Con la adición módulo 1, $\mathbb{Z}(p^\infty)$ es un grupo aditivo conmutativo. Sea S un subgrupo de $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Si S es propio, entonces hay un menor entero positivo k tal que $\frac{a}{p^k} \notin S$, para algún número natural a . Luego, a y p son primos entre sí y S contiene a los elementos

$$0, \frac{1}{p^{k-1}}, \frac{2}{p^{k-1}}, \dots, \frac{p^{k-1} - 1}{p^{k-1}} \quad (1.22)$$

En verdad, S es igual al conjunto de estos elementos pues si no fuera así, habría $\frac{b}{p^i} \in S$ con b y p primos entre sí, $k < i$ y $0 \leq b < p$. Sean r y s dos enteros tales que $rb + sp = 1$. Como $\frac{rb}{p^k}$ y $\frac{sp}{p^k}$, reducidos módulo 1, pertenecen a S , entonces $\frac{1}{p^k} = \frac{rb+sp}{p^k} \in S$. Luego $\frac{n}{p^k} \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en contradicción con la definición de k . Si llamamos S_k el conjunto en (1.22), entonces hemos demostrado que los únicos subgrupos propios de $\mathbb{Z}(p^\infty)$ son los S_k , $k = 1, 2, \dots$ y satisfacen

$$\{0\} = S_1 \subsetneq S_2 \subsetneq S_3 \subsetneq \dots \subsetneq S_k \subsetneq \dots$$

Si ahora definimos la multiplicación cero en $\mathbb{Z}(p^\infty)$; es decir, $xy = 0$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}(p^\infty)$, entonces $\mathbb{Z}(p^\infty)$ es un anillo conmutativo cuyos únicos ideales propios son los S_k anteriores. Luego $\mathbb{Z}(p^\infty)$ no tiene ideales maximales.

Definición 1.2.4. Si A es un álgebra sobre \mathbb{C} , entonces un subconjunto no vacío J de A se llama un **ideal** de A si αx , $x - y$, ax y $xa \in J$, $\forall x, y \in J$, $\forall a, \alpha \in \mathbb{C}$.

Teorema 1.2.5. Sea A un álgebra de Banach con unidad 1 de norma 1. Entonces

1. Si J es un ideal cerrado y propio de A , entonces A/J es un álgebra de Banach con unidad $1 + J$ de norma 1.
2. Si J es un ideal propio de A , entonces \bar{J} (la clausura de J) es un ideal propio de A . En particular, si M es un ideal maximal de A , entonces M es cerrado.

Demostración. 1. Sabemos que A/J es un espacio de Banach y del curso de álgebra también sabemos que A/J es un anillo con unidad $1 + J$. Es fácil ver ahora que A/J es un álgebra. Vamos a demostrar ahora que

$$\|(x + J)(y + J)\| \leq \|x + J\| \|y + J\|, \forall x, y \in A \quad (1.23)$$

Para ello, note que si $x, y \in A$, $j \in J$, entonces $\{xj + jy + j^2 : j \in J\} \subseteq J$. Luego, $\inf_{j \in J} \|xy + j\| \leq \inf_{j \in J} \|(x + j)(y + j)\|$. Usando ésto y la desigualdad $\|(x + j)(y + j)\| \leq \|x + j\| \|y + j\|$, resulta fácil demostrar (1.23). Poniendo $x = y = 1$ en (1.23) resulta que $\|1 + J\| \geq 1$ (pues $1 \notin J \Rightarrow 1 + J \neq 0$). Luego, $\|1 + J\| = 1$.

2. Sean $x, y \in J$, $a \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Sean $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq J$ con $x_n \rightarrow x$ y $y_n \rightarrow y$. Luego, $x_n - y_n \rightarrow x - y$, $\alpha x_n \rightarrow \alpha x$, $x_n a \rightarrow xa$ y $a x_n \rightarrow ax$ (por la continuidad de las operaciones). Así $x - y$, ax , xa y $\alpha x \in \bar{J}$, demostrando que \bar{J} es un ideal de A . Si ahora $\bar{J} = A$, entonces hay $x \in J$ con $\|1 - x\| < 1$. Por el teorema 1.1.7, x es invertible en A . Luego $xx^{-1} = 1 \in J$ y así $J = A$.

■

Definición 1.2.6. Sea A un álgebra con unidad 1. Un $\psi \in A^*$ (el dual normado de A) se llama un carácter en A si

$$\psi(1) = 1 \quad (1.24)$$

$$\psi(xy) = \psi(x)\psi(y), \forall x, y \in A. \quad (1.25)$$

Teorema 1.2.7. Sea A un álgebra de Banach con unidad 1. Si $\psi \in A^*$ es un carácter, entonces $\|\psi\| = 1$.

Demostración. $\psi(1) = 1$ implica $\|\psi\| \geq 1$. Pero si $\|\psi\| > 1$, entonces, debido a que $\|\psi\| = \sup_{\|x\| < 1} |\psi(x)|$, hay $x \in A$ tal que $\|x\| < 1$ y $\psi(x) = 1$. Por el teorema 1.1.7, $1 - x$ es invertible en A . Luego, $\psi(1) = \psi((1 - x)(1 - x)^{-1}) = (\psi(1) - \psi(x))\psi((1 - x)^{-1}) = 0$, lo cual es una contradicción ■

Teorema 1.2.8. *Sea A un álgebra conmutativa con unidad 1 de norma 1. Entonces, cada ideal maximal de M de A es el núcleo de un carácter en A .*

Demostración. Como A es conmutativa entonces por el teorema 1.2.2, A/M es un cuerpo. Por el teorema 1.2.5, A/M es un álgebra de Banach con unidad $1 + J$ de norma 1. Por el teorema de Gelfand-Mazur (Corolario 1.1.22), hay una isometría sobre $F : A/M \rightarrow \mathbb{C}$.

Si $\pi : A \rightarrow A/M$, $x \rightarrow x + M$, entonces $\psi = f \circ \pi$ es un carácter en A con núcleo M . ■

Teorema 1.2.9 (I. Gelfand). *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad 1 de norma 1 y sea $x \in A$. Entonces,*

$$\sigma(x) = \{\psi(x) : \psi \text{ es un carácter en } A\}$$

Demostración. Sea $\lambda \notin \sigma(x)$. Entonces, $x - \lambda$ es invertible en A . Si $\psi \in A^*$ es un carácter, entonces $\psi(x - \lambda)\psi((x - \lambda)^{-1}) = 1$. Luego, $\psi(x - \lambda) \neq 0$ y así $\lambda \neq \psi(x)$. Recíprocamente, supongamos que $\lambda \in \sigma(x)$. Como A es conmutativa, entonces $J = \{x(x - \lambda) : a \in A\}$ es un ideal de A . Como $x - \lambda$ no es invertible en A , entonces $1 \notin J$ y por lo tanto J es un ideal propio de A . Como A tiene unidad, entonces por el teorema 1.2.3, hay un ideal maximal M de A que contiene a J .

Por el teorema 1.2.8, hay $\psi \in A^*$ con núcleo M . En particular, $\psi(x - \lambda) = 0$ o bien $\lambda = \psi(x)$. ■

Aunque la caracterización del espectro de un elemento x de A dada en el teorema anterior es válida para álgebras conmutativas de Banach, es también teóricamente útil en álgebras de Banach no conmutativas debido al siguiente lema.

Lema 1.2.10. *Sea A un álgebra de Banach con unidad 1. Sea $x \in A$ y sea B una subálgebra de Banach conmutativa maximal de A que contiene a x y a 1 (la existencia de esta B es una consecuencia del lema de Zorn). Entonces, $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$. Luego,*

$$\sigma_A(x) = \{\psi(x) : \psi \text{ es un carácter en } B\},$$

si la unidad 1 tiene norma 1.

Demostración. Claramente $\sigma_A(x) \subseteq \sigma_B(x)$. Recíprocamente, sea

$$(x - \lambda)y = y(x - \lambda) = 1$$

para algún $y \in A$. Entonces, para cada $xz \in B$ tenemos $yz(x - z\lambda)y = y(x - \lambda)zy$. Luego $yz = zy$. Es decir, y conmuta con cada elemento de B . Por la maximalidad de B se tiene $y \in B$. Luego, $\sigma_B(x) \subseteq \sigma_A(x)$. ■

Ahora vamos a presentar algunas aplicaciones a la teoría de operadores.

Teorema 1.2.11. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador normal. Entonces, para cada polinomio complejo p en dos variables complejas se tiene*

$$\sigma(p(T, T^*)) = \{p(\lambda, \bar{\lambda}) : \lambda \in \sigma(T)\}$$

Demostración. Sea p un tal polinomio y sea B una subálgebra conmutativa maximal que contiene a $p(T, T^*)$ y al operador identidad. Por el lema anterior y el teorema de Gelfand tenemos

$$\begin{aligned} \sigma(p(T, T^*)) &= \sigma_B(p(T, T^*)) = \{\psi(p(T, T^*)) : \psi \text{ es un carácter en } B\} = \\ &= \{p(\psi(T), \psi(T^*)) : \psi \text{ es un carácter en } B\} \end{aligned}$$

Note ahora que como $TT^* = T^*T$, entonces B es también conmutativa maximal que contiene a T y al operador idéntico. Luego, por el teorema de Gelfand y el lema anterior tenemos

$$\sigma(T) = \sigma_B(T) = \{\psi(T) : \psi \text{ es un carácter en } B\}$$

La demostración se completa al demostrar que $\psi(T^*) = \overline{\psi(T)}$, $\forall \psi$ que es un carácter en B y donde la barra denota conjugación compleja. Para demostrarlo sea $\psi(T) = a + bi$, a y b reales y sea $\psi(T^*) = c + di$, c, d reales. Sea $S = T^* + T$. Como $S = S^*$ entonces $\sigma(S)$ es real. Pero, como $\psi(S) = (a + c) + (c + d)i$, entonces $b + d = 0$. Un argumento similar aplicado al operador iT , demuestra que $a = c$. Luego, $\psi(T^*) = \overline{\psi(T)}$ ■

Teorema 1.2.12 (J.- Wermer). *Sea H un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(H)$ normal tal que $\sigma(T)$ no tiene interior y no separa el plano complejo. Entonces, $\text{lat } T \subseteq \text{lat } T^*$ (esto es, todo invariante de T reduce a T).*

Demostración. Como $\sigma(T)$ es compacto, no tiene interior y no separa el plano, entonces por el teorema de Mergelyan (verlo en el capítulo 20 del Rudin *Análisis Real y Complejo*), hay una sucesión de polinomios complejos $\{p_n\}$ tal que $p_n(\lambda) \rightarrow \bar{\lambda}$ uniformemente en $\sigma(T)$. Como $p_n(T) - T^*$ es normal, $\forall n$, entonces por el teorema 1.1.30, $\|p_n(T) - T^*\| = r(p_n(T) - T^*)$. Por el teorema 1.2.11 tenemos $\|p_n(T) - T^*\| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |p_n(\lambda) - \bar{\lambda}|$. Luego $\|p_n(T) - T^*\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, y en particular si

$M \in \text{lat } T$ y si $x \in M$, entonces $\|p_n(T)x - T^*x\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Como $p_n(T)x \in M$ y M es cerrado, entonces $T^*x \in M$. Esto es $\text{lat } T \subseteq \text{lat } T^*$. ■

Corolario 1.2.13. *Sea $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ una base ortonormal del espacio de Hilbert H . Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ el operador diagonal con respecto a $\{e_n\}$ definido por $Te_n = \lambda_n e_n$, $n = 1, 2, \dots$, donde $\{\lambda_n\}$ es una sucesión convergente de números complejos distintos entre sí. Entonces, $\text{lat } T$ es el conjunto de todos los subespacios de la forma $\overline{\text{sg}\{e_n : n \in J\}}$ donde J es un subconjunto no vacío de enteros positivos. La barra es clausura y sg subespacio generado.*

Demostración. Es claro que cada uno de los subespacios así descritos es invariante para T . Recíprocamente, sea $M \in \text{lat } T$. Por (6) de ejemplos 1.1.14, $\sigma(T) = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$ donde $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. Además, T es claramente normal. Luego, por el teorema anterior M reduce a T . Es decir, $TP = PT$ donde P es la proyección ortogonal sobre M . Luego, $TPe_n = \lambda_n Pe_n$ y como los λ_n son distintos entre sí, Pe_n debe ser un múltiplo escalar de e_n , $n = 1, 2, 3, \dots$. Si $Pe_n = \alpha_n e_n$, entonces como $P^2 = P$, tenemos que $\alpha_n = 0$ o bien 1 , $\forall n$. Si ahora $J = \{n : \alpha_n = 1\}$ entonces $M = \overline{\text{sg}\{e_n : n \in J\}}$, como el lector tiene la fácil tarea de demostrar. ■

Teorema 1.2.14. *Sean A un álgebra de Banach con unidad de norma 1 y sean $x, y \in A$ tales que $xy = yx$. Entonces, para cada polinomio complejo p en dos variables, se tiene*

$$\sigma(p(x, y)) \subseteq p(\sigma(x), \sigma(y))$$

en que $p(\sigma(x), \sigma(y)) = \{p(\lambda, \mu) : \lambda \in \sigma(x), \mu \in \sigma(y)\}$.

Demostración. Muy similar a la primera parte de la demostración del teorema 1.2.11 por lo cuál queda a cargo del lector. ■

Teorema 1.2.15 (M. Rosenblum). Sean X e Y dos espacios de Banach complejos, y sean $S \in \mathcal{L}(X)$ y $T \in \mathcal{L}(Y)$. Sea $R : \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$, $Z \rightarrow SZ - ZT$. Entonces, R es un operador acotado y $\sigma(R) \subseteq \sigma(S) - \sigma(T)$ ($= \{\lambda - \mu : \lambda \in \sigma(S), \mu \in \sigma(T)\}$).

Nota: Aunque los espectros se han denotado con la misma letra σ , es claro que $\sigma(S), \sigma(T), \sigma(R)$ son con respecto a las álgebras $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)$ y $\mathcal{L}(\mathcal{L}(Y, X))$ respectivamente.

Demostración. Sean $A, B : \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ definidos por

$$A : Z \rightarrow SZ, \quad B : Z \rightarrow ZT$$

Note que A y B son operadores acotados. Como $R = A - B$, entonces por el teorema 1.2.14, tenemos

$$\sigma(R) \subseteq \sigma(A) - \sigma(B) \tag{1.26}$$

Note ahora que si $S - \lambda$ es invertible en $\mathcal{L}(X)$, entonces $A - \lambda$ es invertible en $\mathcal{L}(\mathcal{L}(Y, X))$ (con inverso $(A - \lambda)^{-1} : Z \rightarrow (S - \lambda)^{-1}Z$). Luego, $\sigma(A) \subseteq \sigma(S)$. Similarmente, $\sigma(B) \subseteq \sigma(T)$. Por (1.26) tenemos que $\sigma(R) \subseteq \sigma(S) - \sigma(T)$. ■

Corolario 1.2.16 (M. Rosenblum). Sean X e Y dos espacios de Banach complejos, $S \in \mathcal{L}(X)$ y $T \in \mathcal{L}(Y)$. Suponer que $\sigma(S) \cap \sigma(T) = \emptyset$. Entonces, $\forall B \in \mathcal{L}(Y, X)$ hay un único $A \in \mathcal{L}(Y, X)$ tal que $SA - ST = B$.

Demostración. Si $\sigma(S) \cap \sigma(T) = \emptyset$ entonces $0 \notin \sigma(S) - \sigma(T)$. Luego, por el teorema anterior, $R : Z \rightarrow SZ - ZT$ es invertible en $\mathcal{L}(\mathcal{L}(Y, X))$. ■

Continuaremos ahora esta sección describiendo los caracteres de dos álgebras particulares.

Teorema 1.2.17. Sea $C(X)$ el álgebra del ejemplo 1 de 1.1.14. Entonces, todo carácter en $C(X)$ es de la forma $\ell_\zeta(f) = f(\zeta)$, $\forall f \in C(X)$ y algún $\zeta \in X$.

Demostración. Si $\zeta \in X$ entonces claramente ℓ_ζ es un carácter en $C(X)$. Recíprocamente, sea ℓ un carácter en $C(X)$. Vamos a demostrar primeramente que hay $\zeta \in X$ tal que

$$\ker \ell \subseteq \ker \ell_\zeta \tag{1.27}$$

En efecto, si esto fuera falso entonces, para cada $\zeta \in X$ habría $f_\zeta \in \ker \ell$ con $f_\zeta(v) \neq 0, \forall v \in B(\zeta)$, donde $B(\zeta)$ es alguna bola abierta que contiene a ζ . Por la compacidad de X , podemos encontrar un número finito de $\zeta \in X$, digamos $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ y respectivas bolas abiertas $B(\zeta_1), B(\zeta_2), \dots, B(\zeta_n)$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^n B(\zeta_i)$$

y

$$|f_{\zeta_i}(v)| > \varepsilon > 0, \text{ cierto } \varepsilon, \forall v \in B(\zeta_i), i = 1, 2, \dots, n$$

Luego, $\sum_{i=1}^n f_{\zeta_i} \bar{f}_{\zeta_i} = \sum_{i=1}^n |f_{\zeta_i}|^2 > 0$ en todo X . En consecuencia, hay $f \in C(X)$ con $\sum_{i=1}^n f_{\zeta_i} \bar{f}_{\zeta_i} f = 1$. Pero, como $f_{\zeta_i} \in \ker \ell$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$0 = \sum_{i=1}^n \ell(f_{\zeta_i}) \ell(\bar{f}_{\zeta_i}) \ell(f) = 1$$

lo cuál es una contradicción y así (1.27) está demostrado. Demostraremos ahora que $\ell = \ell_{\zeta}$.

En efecto, $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\ell(f) \rightarrow \ell_{\zeta}(f)$, $\forall f \in C(X)$ tiene dominio todo \mathbb{C} pues ℓ es sobre. Además, por (1.27), F está bien definida. Como f es lineal, debe ser entonces de la forma $F(\mu) = \alpha\mu$, $\forall \mu \in \mathbb{C}$ y cierto $\alpha \in \mathbb{C}$. Luego, $\ell_{\zeta}(f) = \alpha\ell(f)$, $\forall f \in \mathbb{C}$. Pero, $\ell_{\zeta}(1) = \ell(1) = 1$. Luego, $\ell_{\zeta} = \ell$ en $C(X)$. ■

Conocemos que $\ell_1(\mathbb{Z})$, el espacio de las sucesiones complejas $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ que son absolutamente convergentes es un espacio de Banach complejo para las operaciones habituales de adición y multiplicación por escalar y norma $\|\{a_n\}\|_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|$. Definimos ahora en $\ell_1(\mathbb{Z})$ el producto

$$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} b_k \right\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Entonces, $\ell_1(\mathbb{Z})$ es ahora un álgebra de Banach conmutativa con unidad $e_0 = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, donde $a_n = 1$ si $n = 0$ y $a_n = 0$ si $n \neq 0$.

Si ahora $\delta_{mn} = 1$ si $m = n$ y $\delta_{mn} = 0$ si $m \neq n$ y si $e_n = \{\delta_{mn}\}_{m=-\infty}^{\infty}$, entonces $e_n \in \ell_1(\mathbb{Z})$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ y $e_m e_n = e_{m+n}$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$. Además $e_n = e_1^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, y la subálgebra de $\ell_1(\mathbb{Z})$ generado por $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (es decir la menor subálgebra de $\ell_1(\mathbb{Z})$ que contiene a e_n , $n \in \mathbb{Z}$) es claramente densa en $\ell_1(\mathbb{Z})$.

Teorema 1.2.18. *Todo carácter de $\ell_1(\mathbb{Z})$ es de la forma $\ell_{\zeta}(\{a_n\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n$, donde $\zeta \in \mathbb{Z}$ y $|\zeta| = 1$.*

Demostración. Note que si $\zeta \in \mathbb{C}$ y $|\zeta| = 1$, entonces ℓ_{ζ} definido por

$$\ell_{\zeta}(\{a_n\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n$$

es claramente lineal.

Como $|\sum a_n \zeta^n| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n \zeta^n| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$, entonces $\|\ell_{\zeta}\| \leq 1$, y así ℓ_{ζ} es acotada (y por lo tanto continua). Además, $\ell_{\zeta}(e_n) = \zeta^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, con lo cuál $\ell_{\zeta}(e_0) = 1$ y $\ell_{\zeta}(e_n e_m) = \ell_{\zeta}(e_n) \ell_{\zeta}(e_m)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$.

Debido a que los $\{e_n\}$ generan una subálgebra densa en $\ell_1(\mathbb{Z})$ y debido a que ℓ_{ζ} es continua, entonces ℓ_{ζ} es multiplicativo. Luego, ℓ_{ζ} es un carácter en $\ell_1(\mathbb{Z})$. Recíprocamente, sea ℓ un carácter en $\ell_1(\mathbb{Z})$ y sea $\zeta = \ell(e_1)$. Como $\|\ell\| = 1$, entonces $|\zeta| \leq 1$. Además, $\ell(e_{-1}) = \ell(e_1^{-1}) = \ell(e_1)^{-1} = \zeta^{-1}$. Luego, $|\zeta^{-1}| \leq 1$. Así, $|\zeta| = 1$. Por otro lado, $\ell(e_n) = \ell(e_1^n) = \ell(e_1)^n = \zeta^n = \ell_{\zeta}(e_n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Por densidad de los e_n y por la continuidad de ℓ y de ℓ_{ζ} , tenemos $\ell = \ell_{\zeta}$. ■

Completaremos esta sección con un resultado debido a Kahane-Zelazko, e independientemente Gleason, el cuál asegura que todo funcional lineal ψ (no necesariamente continuo) en un álgebra de Banach conmutativa A tal que $\psi(a) = 1$ y $\psi(x) \neq 0$, $\forall x \in A$ que es invertible, debe ser un carácter.

Más tarde Zelako pudo remover la hipótesis de la conmutatividad de A . La demostración original usa el teorema de factorización de Hadamard, estudiando normalmente en un segundo curso de análisis complejo. Sin embargo, este teorema de Hadamard se puede evitar a través del siguiente lema cuya demostración elemental e ingeniosa se debe a W. Rudin.

Lema 1.2.19. *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ y $0 < |f(\lambda)| \leq e^{|\lambda|}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, donde la prima denota derivada. Entonces, $f(\lambda) = 1$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.*

Demostración. Como f es entera y no se anula, hay una función entera g con $f = e^g$ en \mathbb{C} . Note además que $g(0) = g'(0) = 0$ y que $Re g(\lambda) \leq |\lambda|$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. De esta última desigualdad junto a la igualdad $|2r - g(\lambda)|^2 = 4r^2 - 2r Re g(\lambda) + |g(\lambda)|^2$, resulta que $|g(\lambda)| \leq |2r - g(\lambda)|$, $\forall \lambda$ tal que $|\lambda| \leq 2r$. Y como la serie de potencias de $g(\lambda)$ es de la forma $a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \dots$, entonces

$$h_r(\lambda) = \frac{r^2 g(\lambda)}{\lambda^2 (2r - g(\lambda))} \quad (1.28)$$

es analítica en $\{\lambda : |\lambda| < 2r\}$. Además $|h_r(\lambda)| \leq 1$ si $|\lambda| \leq r$. Fijando λ y haciendo $r \rightarrow \infty$ resulta de (1.28) que $g(\lambda) = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Luego, $f(\lambda) = 1$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. ■

Teorema 1.2.20 (Gleason-Kahane-Zelasko). *Sean A un álgebra de Banach con unidad y $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal tal que $\psi(a1) = 1$ y $\psi(x) \neq 0$, $\forall x \in A$ que sea invertible. Entonces ψ es un carácter.*

Demostración. Debemos demostrar que ψ es continuo y multiplicativo. Como $\ker \psi$ no contiene elementos invertibles, entonces por el teorema 1.1.7, $\|1 - x\| \geq 1$, $\forall x \in \ker \psi$. Luego,

$$\|\lambda + x\| \geq |\lambda| = |\psi(\lambda + x)|, \quad \forall x \in \ker \psi, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (1.29)$$

Como $\psi(1) = 1$, entonces

$$\forall a \in A, a = x + \psi(a) \cdot 1, \quad \text{con } x \in \ker \psi \quad (1.30)$$

Luego, (1.29) implica que ψ es continuo en A y $\|\psi\| \leq 1$. Ahora vamos a demostrar que ψ es multiplicativo. Para ello demostraremos primero que

$$x \in \ker \psi \Rightarrow x^2 \in \ker \psi \quad (1.31)$$

En efecto, sea $x \in \ker \psi$ con $\|x\| = 1$ y definir

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(x^n)}{n!} \lambda^n$$

Como $|\psi(x^n)| \leq \|\psi\| \|x^n\| \leq \|\psi\| \|x\|^n \leq 1$, entonces $f(\lambda)$ tiene radio de convergencia ∞ y $|f(\lambda)| \leq e^{|\lambda|}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Además $f(0) = 1$ y $f'(0) = \psi(x) = 0$. Por otro lado, la serie

$$E(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(x^n)}{n!} \lambda^n$$

converge en norma y como en el caso escalar también se demuestra que $E(\lambda)E(\mu) = E(\lambda + \mu)$. En consecuencia $E(\lambda)$ es invertible en A , $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ (pues $E(\lambda)E(-\lambda) = 1$). Por la continuidad de ψ , $\psi(E(\lambda)) = f(\lambda)$, $\forall \lambda$ y por hipótesis $f(\lambda) = \psi(E(\lambda)) \neq 0$, $\forall \lambda$. Luego, por el lema 1.2.19, $f(\lambda) = 1$, $\forall \lambda$. En particular, $f''(0) = 0$. Es decir $\psi(x^2) = 0$, demostrando (1.31). Por (1.30) y (1.31) tenemos

$$\psi(a^2) = (\psi(a))^2, \quad \forall a \in A \quad (1.32)$$

Sustituyendo $a + b$ por a en (1.32) resulta $\psi(ab + ba) = 2\psi(a)\psi(b)$, $\forall a, b \in A$. Luego,

$$ab + ba \in \ker \psi, \forall a \in \ker \psi, \forall b \in A \quad (1.33)$$

Pero, $(ab - ba)^2 + (ab + ba)^2 = 2(a(bab) + (bab)a)$. Luego, $(ab - ba)^2 \in \ker \psi$, $\forall b \in A$. Por (1.32), $\psi(ab - ba) = 0$, $\forall a \in \ker \psi$, $\forall b \in A$. Esto junto a (1.33) implican

$$xy \in \ker \psi, \forall x \in \ker \psi, \forall y \in \ker \psi. \quad (1.34)$$

Sean ahora $a, b \in A$. Usando (1.30) y (1.34) resulta que $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$, $\forall a, b \in A$. ■

Ejercicios 1.2.21.

1. Sea $M_2(\mathbb{C})$ el anillo de matrices 2×2 sobre \mathbb{C} . Demuestre que los únicos ideales de $M_2(\mathbb{C})$ son los triviales. Note entonces que (0) es el único ideal maximal de $M_2(\mathbb{C})$ y que si $a \neq 0$ es un elemento no invertible de $M_2(\mathbb{C})$, entonces a no está contenido en ideal maximal alguno de $M_2(\mathbb{C})$.
2. Demuestre que los teoremas 1.2.8 y 1.2.9 son en general falsos en álgebras de Banach con unidad de norma 1 que no son conmutativas.
3. Exhiba un ejemplo no trivial de álgebra de Banach A con unidad que no sea conmutativa pero que $\forall x \in A$ se tenga $\sigma(x) = \{\psi(x) : \psi \text{ es un carácter de } A\}$.
4. Demuestre detalladamente la existencia del álgebra B en el enunciado del lema 1.2.10.
5. Sea $A = M_2(\mathbb{C})$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}$. Demuestre que B es subálgebra conmutativa maximal de A que contiene a $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Note que x es la unidad de B . Demuestre sin embargo que $\sigma_A(x) \neq \sigma_B(x)$. ¿No contradice este ejemplo al lema 1.2.10?
6. Sea A un álgebra de Banach con unidad de norma 1. Sean $x, y \in A$ tales que $xy = yx$. Demuestre que
 - a) $\sigma(x + y) \subseteq \sigma(x) + \sigma(y) (= \{\lambda + \mu : \lambda \in \sigma(x), \mu \in \sigma(y)\})$
 - b) $\sigma(xy) \subseteq \sigma(x)\sigma(y) (= \{\lambda\mu : \lambda \in \sigma(x), \mu \in \sigma(y)\})$
7. Exhiba ejemplos donde a) y b) no son igualdades en el ejercicio anterior.
8. Demuestre que a) y b) son en general falsos en el ejercicio 6 anterior si no se supone la conmutatividad de los elementos x e y .
9. Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad de norma uno. Demuestre que $x \in A$ es invertible si y solo si, $\psi(x) \neq 0$, para todo carácter ψ en A . ¿Es ésta verdad si A no se supone conmutativa?
10. Sea A un álgebra conmutativa con unidad de norma 1. Demuestre que la intersección de todos los ideales maximales de A coinciden con sus elementos casinilpotentes.
11. Exhiba un ejemplo de álgebra de Banach sin elementos casinilpotentes.
12. Sea X un espacio métrico compacto. Demuestre que todo ideal maximal de $C(X)$ es de la forma $M_{x_0} = \{f \in C(X) : f(x_0) = 0\}$.

13. Sea X un espacio de Banach complejo y sean $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Si $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, determine los operadores $\begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$ en $\mathcal{L}(X \oplus X)$ que conmutan con $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$
14. Con las hipótesis del ejercicio anterior, demuestre que el operador $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ es similar con $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $\forall C \in \mathcal{L}(X)$.
15. En $\ell_1(\mathbb{Z}^+)$ definir producto mediante $(a_n)_{n=0}^\infty * (b_n)_{n=0}^\infty = \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right)$. Demuestre que $\ell_1(\mathbb{Z}^+)$ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad de norma 1. Determine sus caracteres.
16. Demuestre que cada automorfismo de un álgebra de Banach conmutativa con unidad de norma 1 es continuo.
17. Demuestre el siguiente teorema de N. Wiener: Sea $(a_n)_{n=-\infty}^\infty$ una sucesión compleja absolutamente convergente. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \rightarrow \sum_{n=-\infty}^\infty a_n e^{int}$ nunca se anula, entonces hay una sucesión de complejos absolutamente sumable (b_n) tal que $\frac{1}{f(t)} = \sum_{n=-\infty}^\infty b_n e^{int}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

1.3. Cálculo Funcional de Riesz-Dunford-Gelfand

Sea A un álgebra sobre los complejos y sea $x \in A$. Si $p(\lambda)$ es un polinomio complejo y si $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$, entonces conocemos que $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. En esta sección daremos significado a $p(x)$ en caso de ser $p(\lambda)$ una serie de potencias cuyo círculo de convergencia contiene al espectro de x . Más general, daremos significado a $f(x)$ cuando f es una función analítica cuyo dominio de analiticidad contiene a $\sigma(x)$. Para ello tratamos de extender los métodos del curso de análisis complejo ajustándolos a esta situación. Se puede acortar este tratamiento a través de la definición 1.3.7. Arrancamos del siguiente modo: Sea X un espacio de Banach complejo y sean $F : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow X$, $\alpha : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones. Sea $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea

$$S(F, \alpha, P) = \sum_{i=1}^n F(t'_i)(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$$

con $t'_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Note que $S(F, \alpha, P) \in X$. Si F es continua y α es de variación acotada, se demuestra como en el caso escalar que si $\|P\| = \max_i |t_i - t_{i-1}|$, entonces $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(F, \alpha, P)$ existe; es decir, existe $R \in X$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, hay una partición P_ε con $\|S(F, \alpha, P) - R\| < \varepsilon$, cada vez que P es una partición de $[a, b]$ que refina a P_ε . Este R , el cuál es único, se denota por

$$\int_a^b F(t) d\alpha(t)$$

Si ahora $U \subseteq \mathbb{C}$, si la función $F : U \rightarrow X$ es continua y si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva rectificable en U (esto último es, $\alpha[a, b] \subseteq U$), entonces definimos

$$\int_\alpha F(\lambda) d\lambda = \int_a^b F(\alpha(t)) d\alpha(t)$$

Como siempre se demuestra que esta integral es lineal y que

$$\left\| \int_{\alpha} F(\lambda) d\lambda \right\| \leq \ell(\alpha) \max_{\lambda \in \alpha} \|F(\lambda)\| \quad (1.35)$$

donde $\ell(\alpha)$ es la longitud de α y $\lambda \in \alpha$ significa $\lambda \in \alpha[a, b]$. En lo sucesivo, tanto la curva como su trayectoria o recorrido, serán denotados por el mismo símbolo.

Definición 1.3.1. Sea X un espacio de Banach complejo y sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Una función $F : U \rightarrow X$ se llama analítica en U si $\forall \lambda_0 \in U$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$$

existe; es decir hay $x_0 \in X$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - x_0 \right\| < \varepsilon$$

Teorema 1.3.2. Sea X un espacio de Banach complejo y sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $F : U \rightarrow X$ analítica. Sea α una curva rectificable cerrada contenida en U que es homotópica a una constante en U . Entonces

$$\int_{\alpha} F(\lambda) d\lambda = 0$$

Demostración. Sea $\phi \in X^*$. Entonces, $\phi \circ F : U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica. Como ϕ es continua, conmuta con el límite en norma; luego, $\phi(\int_{\alpha} F(\lambda) d\lambda) = \int_{\alpha} (\phi \circ F)(\lambda) d\lambda$.

Por el teorema de Cauchy visto en el curso de análisis complejo, $\int_{\alpha} (\phi \circ F)(\lambda) d\lambda = 0$, y así $\phi(\int_{\alpha} F(\lambda) d\lambda) = 0$, $\forall \phi \in X^*$. Como una consecuencia del teorema de Hahn-Banach, $\int_{\alpha} F(\lambda) d\lambda = 0$. ■

Teorema 1.3.3. Sea X un espacio de Banach complejo y sea $F : \mathbb{C} \rightarrow X$ analítica. Si F es acotada (es decir, hay $M > 0$ tal que $\|F(\lambda)\| \leq M$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$), entonces F es constante.

Demostración. Sean $\phi \in X^*$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ y $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = x_0$. Por la continuidad y la linealidad de ϕ tenemos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{(\phi \circ F)(\lambda) - (\phi \circ F)(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \phi(x_0)$$

Luego, $\phi \circ F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica. Además $\phi \circ F$ es acotada pues $|(\phi \circ F)(\lambda)| \leq \|\phi\| \|F(\lambda)\| \leq \|\phi\| M$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville, visto en el curso de análisis complejo, $\phi \circ F$ es constante, $\forall \phi \in X^*$. Así, $\phi(F(\lambda)) = \phi(F(0))$, $\forall \phi \in X^*$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. $F(\lambda) = F(0)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. ■

Aunque el siguiente resultado no lo usaremos en el texto, excepto para resolver el ejercicio 5 al final de esta sección, lo incluimos aquí como una información adicional.

Teorema 1.3.4. Sea X un espacio de Banach complejo y sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, Entonces, $F : U \rightarrow X$ es analítica si y solo si, $\phi \circ F : U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica, $\forall \phi \in X^*$.

Demostración. Si $F : U \rightarrow X$ es analítica entonces claramente $\phi \circ F : U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica, $\forall \phi \in X^*$. Recíprocamente, debemos demostrar que $\forall \lambda \in U$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\lambda + h) - F(\lambda)}{h}$$

existe en X . Para ello, es suficiente demostrar que si $\lambda \in U$ y si (h_n) es una sucesión de complejos distintos entre sí, son $h_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\lambda + h_n) - F(\lambda)}{h_n}$ existe en X . Pero, como X es de Banach, es suficiente demostrar que $\left(\frac{F(\lambda + h_n) - F(\lambda)}{h_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Para demostrarlo, sea $\phi \in X^*$. Por hipótesis $\phi \circ F : U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica. Por la fórmula de Cauchy vista en el curso de análisis complejo tenemos, a partir de un cierto n , que:

$$\begin{aligned} \frac{(\phi \circ F)(\lambda + h_n) - (\phi \circ F)(\lambda)}{h_n} &= \frac{1}{h_n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{(\phi \circ F)(\mu)}{\mu - (\lambda + h_n)} - \frac{(\phi \circ F)(\mu)}{\mu - \lambda} \right) d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\phi \circ F)(\mu)}{(\mu - (\lambda + h_n))(\mu - \lambda)} d\mu \end{aligned}$$

donde γ es la frontera del círculo D con centro λ y radio $r > 0$, tal que $\overline{D} \subseteq U$ (note que $\lambda + h_n \in D$ a partir de un cierto n). Luego, el valor absoluto de

$$\frac{\frac{(\phi \circ F)(\lambda + h_n) - (\phi \circ F)(\lambda)}{h_n} - \frac{(\phi \circ F)(\lambda + h_m) - (\phi \circ F)(\lambda)}{h_m}}{h_n - h_m}$$

es

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\phi \circ F)(\mu)}{(\lambda - \mu)(\mu - (\lambda - h_n))(\mu - (\lambda + h_m))} d\mu \right|$$

el cual es $\leq \frac{4}{r^2} \max_{\mu \in \gamma} |(\phi \circ F)(\mu)|$ (note que $|\mu - (\lambda + h_n)| \geq \frac{r}{2}$ si $\mu \in \gamma$). Luego, la sucesión doble con términos

$$\frac{\frac{F(\lambda + h_n) - F(\lambda)}{h_n} - \frac{F(\lambda + h_m) - F(\lambda)}{h_m}}{h_n - h_m}$$

esta débilmente acotada. Esta sucesión está acotada en norma. Es decir, hay $M > 0$ con

$$\left\| \frac{F(\lambda + h_n) - F(\lambda)}{h_n} - \frac{F(\lambda + h_m) - F(\lambda)}{h_m} \right\| \leq M|h_n - h_m|$$

demostrando que $\left(\frac{F(\lambda + h_n) - F(\lambda)}{h_n}\right)$ es una sucesión de Cauchy en X . ■

Lema 1.3.5. *Sea A un álgebra de Banach con unidad 1 y sea $x \in A$ fijo. Entonces, la función $\rho(x) \rightarrow A$, $\lambda \rightarrow (\lambda - x)^{-1}$ es analítica.*

Demostración. Note primero que esta función es continua como una consecuencia del teorema 1.1.9 (4) (pues esta función es la composición $\lambda \rightarrow \lambda \cdot 1 - x \rightarrow (\lambda \cdot 1 - x)^{-1}$). Fijar ahora $\lambda_0 \in \rho(x)$. Entonces, por la mencionada continuidad, tenemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{(\lambda - x)^{-1} - (\lambda_0 - x)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (\lambda - x)^{-1}(\lambda_0 - x)^{-1} = -(\lambda_0 - x)^{-2}$$

(vea la demostración del lema 1.1.23). ■

Note que el lema anterior se puede demostrar también combinando el teorema anterior con el lema 1.1.23.

Lema 1.3.6. *Sea A un álgebra de Banach. Si $F : U \rightarrow A$ y $G : V \rightarrow A$ son analíticas entonces $F + G$ y $F \cdot G$ son analíticas en $U \cap V$*

Demostración. Imitar la correspondiente demostración en el caso complejo. ■

Definición 1.3.7. Sea $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$ donde γ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) es una curva rectificable simple cerrada en \mathbb{C} y $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces, γ se llama un **camino** en \mathbb{C} .

Definición 1.3.8. $S \subseteq \mathbb{C}$ se llama un **dominio de Cauchy** si A es abierto y tiene un número finito de componentes conexas cuyas clausuras son disjuntas de a pares y su frontera $Fr S$ es un camino.

Para los efectos de integración que pronto definiremos, la frontera de un dominio de Cauchy S se orienta del siguiente modo: si $Fr S = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$ como en la definición 1.3.7 entonces γ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) se orienta en el sentido opuesto al movimiento de las agujas del reloj si la clausura de la componente conexa que intersecta a γ_i está contenida en el interior de la curva γ_i y se orienta en el sentido de las agujas del reloj si dicha clausura está contenida en el interior de la curva γ_i .

Definición 1.3.9. Si $F : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow X$ es continua y si A contiene al camino γ , definimos

$$\int_{\gamma} F(\lambda) d\lambda = \int_{\gamma_1} F(\lambda) d\lambda + \dots + \int_{\gamma_n} F(\lambda) d\lambda$$

donde $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$ es la descomposición de γ según la definición 1.3.7.

Motivados por la fórmula de Cauchy vista en el curso de análisis complejo, es que ahora vamos a introducir la siguiente definición, debida a F. Riesz, quien la introdujo para demostrar el teorema 1.3.23 que pronto veremos.

Definición 1.3.10. Sea A un álgebra de Banach con unidad 1 y sean además $x \in A$ y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, donde el abierto U contiene al espectro $\sigma(x)$ de x . Definimos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Fr S} f(\lambda)(\lambda - x)^{-1} d\lambda \quad (1.36)$$

donde S es cualquier dominio de Cauchy tal que $\sigma(x) \subset S \subset \bar{S} \subset U$. (note que el integrando es analítico por el lema 1.3.5 y por un obvio ajuste del lema 1.3.6)

Para que la definición 1.3.10 tenga sentido debemos demostrar dos cosas: primero, que un tal dominio S siempre existe y segundo, que la fórmula (1.36) es independiente de un tal dominio S . Esto lo demostraremos en los siguientes dos lemas.

Lema 1.3.11. Sean $K \subset \mathbb{C}$ compacto y $U \subset \mathbb{C}$ abierto con $K \subset U$. Entonces, existe un dominio de Cauchy S tal que $K \subset S \subset \bar{S} \subset U$.

Demostración. Sea $d = \text{dist}(\mathbb{C} - U, K)$. Entonces, $d > 0$. Como K es compacto, hay un número finito de discos abiertos D_1, \dots, D_n con centros en K y radio $\frac{d}{2}$, que cubren a K . Sea $S = \bigcup_{i=1}^n D_i$. Entonces, S es un dominio de Cauchy (cuidado que su frontera no es necesariamente la unión de las circunferencias correspondientes a cada D_i) y se tiene $K \subset S \subset \bar{S} \subset U$. ■

Lema 1.3.12. Sea A un álgebra con unidad 1 y sea $x \in A$ fijo. Si S_1 y si S_2 son dos dominios de Cauchy que contienen a $\sigma(x)$ y si f , con valores en \mathbb{C} , es analítica en una vecindad de $\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2$, entonces

$$\int_{Fr S_1} f(\lambda)(\lambda - x)^{-1} d\lambda = \int_{Fr S_2} f(\lambda)(\lambda - x)^{-1} d\lambda \quad (1.37)$$

Demostración. Por el 1.3.11, hay un dominio de Cauchy S_0 tal que $\sigma(x) \subset S_0 \subset \overline{S_0} \subset S_1 \cap S_2$. Ahora, es suficiente demostrar que (1.37) es válida al poner S_0 allí en lugar de S_2 . Para ello, sea $\text{ind}(\lambda, \alpha)$ el índice del punto λ con respecto a la curva cerrada α y definamos $\text{ind}(\lambda, \gamma) = \sum_{i=1}^n \text{ind}(\lambda, \gamma_i)$, donde γ y los γ_i son como en la definición 1.3.7. Note, entonces, que $\text{ind}(\lambda, Fr S_1) = \text{ind}(\lambda, Fr S_0)$, $\forall \lambda$ en una vecindad V de $\overline{S_1} \setminus \sigma(x)$.

Del curso de análisis complejo conocemos que entonces $Fr S_1 \setminus Fr S_0$ es homotópica a una constante en V . Luego, el teorema 1.3.2 completa la demostración. ■

Necesitamos ahora el siguiente lema.

Lema 1.3.13. *Sea X un espacio de Banach complejo y sean γ_1 y γ_2 dos caminos en \mathbb{C} . Sea $F : \gamma_1 \times \gamma_2 \rightarrow F(\lambda, \mu)$ una función continua. Entonces*

1. $G(\mu) = \int_{\gamma_1} F(\lambda, \mu) d\lambda$ es continua en γ_2
2. $\int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1} F(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} F(\lambda, \mu) d\mu d\lambda$

Demostración. Es suficiente demostrar el lema en caso de ser γ_1 y γ_2 curvas cerradas.

1. Como $\gamma_1 \times \gamma_2$ es compacto y F es continua, entonces F es uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$ y elegir $\delta > 0$ de modo que:

$$|\lambda_1 - \lambda_2| + |\mu_1 - \mu_2| > \delta \Rightarrow \|F(\lambda_1, \mu_1) - F(\lambda_2, \mu_2)\| < \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma_1)},$$

donde $\ell(\gamma_1)$ es la longitud de γ_1 . Luego, usando (1.35) tenemos $\forall \lambda \in \gamma_1$ que: $\mu, \mu_0 \in \gamma_2$ y $|\mu - \mu_0| < \delta \Rightarrow \|G(\mu) - G(\mu_0)\| < \varepsilon$, demostrando que G es continua en γ_2 .

2. Sean $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ en γ_2 y μ'_i un punto de γ_2 entre μ_{i-1} y μ_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Sea

$$S_n = \sum_{i=1}^n G(\mu'_i)(\mu_i - \mu_{i-1})$$

Si $n \rightarrow \infty$, entonces

$$S_n \rightarrow \int_{\gamma_2} G(\mu) d\mu = \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1} F(\lambda, \mu) d\lambda d\mu \quad (1.38)$$

Por otro lado $S_n = \int_{\gamma_1} \sum_{i=1}^n F(\lambda, \mu'_i)(\mu_i - \mu_{i-1}) d\lambda$. Pero, si δ_i es el segmento de la curva γ_2 que va desde μ_{i-1} hasta μ_i , entonces

$$\sum_{i=1}^n F(\lambda, \mu'_i)(\mu_i - \mu_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \int_{\delta_i} F(\lambda, \mu'_i) d\mu$$

y así

$$\sum_{i=1}^n F(\lambda, \mu'_i)(\mu_i - \mu_{i-1}) - \int_{\gamma_2} F(\lambda, \mu) d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{\delta_i} (F(\lambda, \mu'_i) - F(\lambda, \mu)) d\mu$$

Sea $\varepsilon > 0$ y sean los μ_i elegidos de modo que

$$\max_{\substack{\lambda \in \gamma_1 \\ \mu \in \delta_i}} \|F(\lambda, \mu_i) - F(\lambda, \mu)\| < \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma_1)\ell(\gamma_2)}$$

Entonces por (1.35), tenemos:

$$\begin{aligned} \left\| S_n - \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} F(\lambda, \mu) d\mu d\lambda \right\| &= \left\| \int_{\gamma_1} \left(\sum_{i=1}^n \int_{\delta_i} (F(\lambda, \mu'_i) - F(\lambda, \mu)) d\mu \right) d\lambda \right\| \\ &\leq \ell(\gamma_1) \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma_1)\ell(\gamma_2)} \sum_{i=1}^n \ell(\delta_i) = \varepsilon \end{aligned}$$

De ésto y de (1.38) tenemos que

$$\int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1} F(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} F(\lambda, \mu) d\mu d\lambda$$

■

Teorema 1.3.14 (I. Gelfand). *Sea A un álgebra de Banach con unidad 1. Sea $x \in A$ fijo y sean f y g dos funciones con valores complejos que son analíticas en una vecindad de $\sigma(x)$. Entonces, $f(x)g(x) = (f \cdot g)(x)$. Es decir,*

$$f(x)g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Fr S} f(\lambda)g(\lambda)(\lambda - x)^{-1} d\lambda$$

donde S es cualquier dominio de Cauchy que satisfice:

$$\sigma(x) \subset S \subset \bar{S} \subset \text{Dom } f \cap \text{Dom } g, \quad (\text{Dom } f = \text{dominio de } f)$$

Demostración. Usando el lema 1.3.11, elegir un dominio de Cauchy S_0 tal que $\sigma(x) \subset S_0 \subset \bar{S}_0 \subset S$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{Fr S_0} f(\lambda)(\lambda - x)^{-1} d\lambda \right) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{Fr S} g(\mu)(\mu - x)^{-1} d\mu \right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{Fr S_0} \int_{Fr S} f(\lambda)g(\mu)(\lambda - x)^{-1}(\mu - x)^{-1} d\mu d\lambda \end{aligned}$$

(vea el ejercicio 1 de 1.3.31). Luego,

$$f(x)g(x) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{Fr S_0} \int_{Fr S} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\lambda - \mu} ((\mu - x)^{-1} - (\lambda - x)^{-1}) d\mu d\lambda$$

(vea la demostración del lema 1.1.23). Como $\mu \in Fr S$ y $\bar{S}_0 \subset S$ entonces, para cada $\lambda \in Fr S_0$, $g(\mu)(\lambda - \mu)^{-1}(\lambda - x)^{-1}$ es analítica en $\mu \in Fr S$. Luego, por el teorema 1.3.2, tenemos

$$f(x)g(x) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{Fr S_0} \int_{Fr S} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\lambda - \mu} (\mu - x)^{-1} d\mu d\lambda$$

Por el lema 1.3.13

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{Fr S} \int_{Fr S_0} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\lambda - \mu} (\mu - x)^{-1} d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Fr S} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{Fr S} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda\right) g(\mu)(\mu - x)^{-1} d\mu \end{aligned}$$

Por la fórmula de Cauchy, finalmente tenemos que:

$$f(x)g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Fr S} f(\mu)g(\mu)(\mu - x)^{-1} d\mu$$

■

Sea ahora A un álgebra de Banach con unidad 1. Sea también $x \in A$ fijo. Sea $F(\sigma(x))$ el álgebra de todas las funciones analíticas definidas en una vecindad de $\sigma(x)$ con valores en \mathbb{C} . (La vecindad no necesita ser fija y puede variar con la función). Las operaciones de álgebra para $F(\sigma(x))$ son las habituales; esto es:

$$\begin{aligned} (f + g)(\lambda) &= f(\lambda) + g(\lambda), \quad \forall \lambda \in Dom f \cap Dom g \\ (\alpha f)(\lambda) &= \alpha f(\lambda), \quad \forall \lambda \in Dom f, \alpha \in \mathbb{C} \\ (f \cdot g)(\lambda) &= f(\lambda)g(\lambda), \quad \forall \lambda \in Dom f \cap Dom g \end{aligned}$$

Teorema 1.3.15 (I. Gelfand). *Sea A un álgebra con unidad 1 y sea $x \in A$ fijo. Entonces, $\Phi : F(\sigma(x)) \rightarrow A$, $f \rightarrow f(x)$ es un homomorfismo de álgebras tal que $\Phi(1) = 1$.*

Demostración. Φ es claramente lineal, hecho que unido al teorema anterior implican que Φ es un homomorfismo de álgebras. Que $\Phi(1) = 1$ es una consecuencia directa del siguiente teorema también debido a Gelfand. ■

Teorema 1.3.16. *Sea A un álgebra de Banach con unidad 1 y sea $x \in A$ fijo. Si la función compleja con valores complejos f tiene una serie de potencias $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$, válida en un disco centrado en el origen y que contiene a $\sigma(x)$, entonces $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.*

Demostración. Note que hay un $\varepsilon > 0$, donde la serie de potencias dada converge uniformemente en $D = \{\lambda : |\lambda| \leq r(x) + \varepsilon\}$, donde, como siempre, $r(x)$ es el radio espectral de x . Entonces, si $\gamma = \{\lambda : |\lambda| = r(x) + \frac{\varepsilon}{2}\}$, se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k\right) (\lambda - x)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{\gamma} \lambda^k (\lambda - x)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{\gamma} \lambda^k \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\lambda^{j+1}}\right)^{-1} d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \end{aligned}$$

ya que para $|\lambda| > r(x)$ tenemos que $(\lambda - x)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\lambda^{j+1}}$ (vea el corolario 1.1.28) y ya que del curso de análisis complejo conocemos que $\int_{\gamma} \lambda^n d\lambda$ es cero si $n \neq -1$ y es $2\pi i$ si $n = -1$. ■

El siguiente teorema se debe a N. Dunford.

Teorema 1.3.17 (Teorema de la Aplicación Espectral). *Sea A un álgebra de Banach con unidad 1 y sea $x \in A$ fijo. Si $f \in F(\sigma(x))$ entonces $f(\sigma(x)) = \sigma(f(x))$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(x)$ y sea $g(\mu) = \begin{cases} \frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu}, & \mu \in \text{Dom } f \text{ y } \mu \neq \lambda \\ f'(\lambda), & \mu = \lambda \end{cases}$.

Entonces, g es analítica en una vecindad de $\sigma(x)$ y por el teorema 1.3.15,

$$f(\lambda) - f(x) = (\lambda - x)g(x)$$

Si $f(\lambda) - f(x)$ fuera invertible en A , entonces $\lambda - x$ sería invertible con inversa $g(x)(f(\lambda) - f(x))^{-1}$ (vea ejercicio 8 de 1.3.31), lo cuál estaría en contradicción con $\lambda \in \sigma(x)$. Luego, $f(\lambda) \in \sigma(f(x))$ y por lo tanto $f(\sigma(x)) \subseteq \sigma(f(x))$. Recíprocamente, sea $\lambda \in \sigma(f(x))$. Debemos demostrar que $\lambda \in f(\sigma(x))$. Suponer lo contrario. Luego, $g(\mu) = (f(\mu) - \lambda)^{-1}$ pertenece a $F(\sigma(x))$ y por el teorema 1.3.15, $g(x)(f(x) - \lambda) = 1 = (f(x) - \lambda)g(x)$, contradiciendo la suposición $\lambda \in \sigma(f(x))$. ■

Teorema 1.3.18 (N. Dunford). *Sea A un álgebra de Banach con unidad 1 y sea $x \in A$ fijo. Si $f \in F(\sigma(x))$ y $f \in F(\sigma(f(x)))$, entonces $g \circ f \in F(\sigma(x))$ y se tiene $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Demostración. Por el teorema anterior, $g \in F(f(\sigma(x)))$. Luego, $g \circ f \in F(\sigma(x))$. Para demostrar la igualdad del enunciado, sea S_1 un dominio de Cauchy: $\sigma(f(x)) \subset S_1 \subset \bar{S}_1 \subset \text{Dom } g$ y sea S_2 un dominio de Cauchy: $\sigma(x) \subset S_2 \subset \bar{S}_2 \subset \text{Dom } f$ y $f(\bar{S}_2) \subset S_1$ (esto último es posible gracias al lema 1.3.11 con $K = \sigma(x)$ y $U = f^{-1}(S - 1)$). Luego, $\text{Fr } S_1 \cap f(\bar{S}_2) = \emptyset$, y así, $\mu \rightarrow (\lambda - f(\mu))^{-1}$ es analítica en una vecindad de $\sigma(x)$, $\forall \lambda \in \text{Fr } S_1$. Por la definición 1.3.10,

$$(\lambda - f(x))^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Fr } S_2} (\lambda - f(\mu))^{-1} (\mu - x) d\mu \quad \lambda \in \text{Fr } S_1$$

Usando sucesivamente esta igualdad, el lema 1.3.13 y la fórmula de Cauchy, tenemos:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Fr } S_1} g(\lambda) (\lambda - f(x))^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Fr } S_1} g(\lambda) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Fr } S_2} (\lambda - f(\mu))^{-1} (\mu - x)^{-1} d\mu \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Fr } S_2} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Fr } S_1} \frac{g(\lambda)}{\lambda - f(\mu)} d\lambda \right) (\mu - x)^{-1} d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Fr } S_2} g(f(\mu)) (\mu - x)^{-1} d\mu = (g \circ f)(x) \end{aligned}$$

■

La definición 1.3.10 junto a las propiedades básicas aquí presentadas es lo que llamamos el **cálculo funcional de Riesz-Dunford-Gelfand**. Riesz demostró usando su definición 1.3.10 el teorema conocido con el nombre de teorema de descomposición de Riesz el cuál será enunciado y demostrado en 1.3.23.

Ahora, pasamos a aplicar estos resultados a la teoría de operadores. Pero antes, notemos que si A es un álgebra de Banach con unidad 1 tenemos entonces por el teorema 1.3.16 que:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in A$$

es un elemento de A y como en el caso escalar se demuestra que

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad \forall x, y \in A \text{ con } xy = yx \quad (1.39)$$

En particular, e^x es invertible con inversa e^{-x} , $\forall x \in A$.

Estos hechos los usaremos en el álgebra $A = \mathcal{L}(H)$, donde H es un espacio de Hilbert en el siguiente.

Teorema 1.3.19 (B. Fuglede - C. Putnam). *Sea H un espacio de Hilbert y sean $M, N, T \in \mathcal{L}(H)$ con M y N normales (es decir, conmutan con su propio adjunto). Si $MT = TN$ entonces $M^*T = TN^*$.*

Demostración. (M. Rosenblum) Sea $S \in \mathcal{L}(H)$ y sea $V = S - S^*$. Note que $V^* = -V$. Luego $(e^V)^{-1} = e^{-V} = e^{V^*} = (e^V)^*$ (vea el ejercicio 6 de 1.3.31). Luego, e^V es unitario y en particular,

$$\|e^{S-S^*}\| = 1, \quad \forall S \in \mathcal{L}(H) \quad (1.40)$$

Como $MT = TN$ entonces $M^n T = TN^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ y así $e^M T = T e^N$. Luego, $T = e^{-M} T e^N$, y como M y N son normales, entonces, por (1.39), $e^{M^*} T e^{-N^*} = e^{M^*-M} T e^{N-N^*}$. Usando (1.40) tenemos

$$\|e^{M^*} T e^{-N^*}\| \leq \|T\| \quad (1.41)$$

Sea $f(\lambda) = e^{\lambda M^*} T e^{-\lambda N^*}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces por (1.41) y porque la hipótesis del teorema no se altera al sustituir M por $\bar{\lambda}M$ y N por $\bar{\lambda}N$, tenemos que $\|f(\lambda)\| \leq \|T\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Por el lema 1.3.6 f es analítica en \mathbb{C} . Por el teorema 1.3.3, $f(\lambda) = f(0)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Es decir, $f(\lambda) = T$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ de donde $e^{\lambda M^*} T = T e^{\lambda N^*}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Sea $\phi \in \mathcal{L}(H)^*$. tomando en cuenta la definición de $e^{\lambda M^*}$ y de $e^{\lambda N^*}$, tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(M^{*n}T)}{n!} \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(TN^{*n})}{n!} \lambda^n$$

y por la unicidad de las series de potencias de radio de convergencia mayor que cero, tenemos en particular que $\phi(M^*T) = \phi(TN^*)$. Como $\phi \in \mathcal{L}(H)^*$ fue arbitrario, entonces tenemos $M^*T = TN^*$. ■

Corolario 1.3.20. *Sean $M, N \in \mathcal{L}(H)$ normales. Si M y N son similares (es decir, hay $T \in \mathcal{L}(H)$ invertible con $M = TNT^{-1}$) entonces, M y N son unitariamente equivalentes. (Es decir, hay unitario $U \in \mathcal{L}(H)$ tal que $M = UNU^{-1}$).*

Demostración. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ invertible con $M = TNT^{-1}$ y sea $T = UP$ la descomposición polar de T . U es unitario. Vamos a demostrar que $M = UNU^*$. En efecto, como $MT = TN$ entonces por el teorema anterior $M^*T = TN^*$. Tomando adjuntos y recordando que $P^2 = T^*T$ resulta $NP^2 = P^2N$. Tenemos $NP = PN$. Pero, entonces, $M = TNT^{-1} = UPNP^{-1}U^* = UNU^*$. ■

Nuestra proxima aplicación es un resultado debido a T. Crimmins y P. Rosenthal. Para ello necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.3.21. Sea A un álgebra de Banach con unidad y sea $x \in A$. El **espectro lleno** $\eta(\sigma(x))$ de x es el espectro de x junto a todos sus huecos. Es decir, $\eta(\sigma(x)) = \mathbb{C} \setminus \rho_\infty(x)$.

Por ejemplo, si $\sigma(x) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$, entonces $\eta(\sigma(x)) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$.

Teorema 1.3.22 (T. Crimmins - P. Rosenthal). *Sea X un espacio de Banach complejo y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Si f , con valores en \mathbb{C} , es una función analítica en una vecindad de $\eta(\sigma(T))$, entonces $\text{lat } T \subseteq \text{lat } f(T)$. Si además f es $1 - 1$, entonces $\text{lat } T = \text{lat } f(T)$.*

Demostración. Sea $M \in \text{lat } T$. De acuerdo con el lema 1.3.11, elegir un dominio de Cauchy S tal que:

$$\eta(\sigma(T)) \subset S \subset \bar{S} \subset \text{Dom } f \quad (1.42)$$

Entonces, por 1.36, $f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Fr S} f(\lambda)(\lambda - T)^{-1} d\lambda$.

Si $\lambda \in Fr S$ entonces $\lambda \in \rho_\infty(T)$ (esto se debe a (1.42) ya que S es abierto en el conexo \mathbb{C}). Así, $\lambda \in Fr S$ implica $\lambda \notin S$. Luego, por el teorema 1.1.31, $M \in \text{lat}(\lambda - T)^{-1}$, $\forall \lambda \in Fr S$. Pero, por la definición de integral, $f(T)$ es un límite en norma de combinaciones lineales de la forma $\sum_{j=1}^n \alpha_j (\lambda - T)^{-1}$, de donde se deduce fácilmente que $M \in \text{lat } f(T)$.

Si ahora f es además $1 - 1$, sea U un dominio de Cauchy con $\eta(\sigma(T)) \subset U \subset \bar{U} \subset \text{Dom } f$. Por el teorema 1.3.17, $f(U) \supset \sigma(f(T))$.

Recordemos ahora que un conjunto A del plano no tiene huecos, si y solo si, cada componente conexa de A es homeomorfa con el disco unitario abierto (vea teorema 13.4.1 de W. Rudin: *Análisis Real y complejo*). Luego, como f es $1 - 1$ y $f(U) \supset \sigma(f(T))$, entonces $f(U)$ contiene también a los huecos de $\sigma(f(T))$. Es decir,

$$f(U) \supset \eta(\sigma(f(T))) \quad (1.43)$$

Sea $g = f^{-1} : f(U) \rightarrow U$. Note que g es analítica y $(g \circ f)(\lambda) = \lambda$, $\forall \lambda \in I$. Por el teorema 1.3.18, $g(f(T)) = T$. Por (1.43) y por lo demostrado en la primera parte tenemos que $\text{lat } f(T) \subseteq \text{lat } g(f(T))$. Es decir, $\text{lat } f(T) \subseteq \text{lat } T$. ■

Teorema 1.3.23 (Teorema de Descomposición de Riesz). *Sea X un espacio de Banach complejo y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Suponer que $\sigma(T)$ es desconexo y que $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ con σ_1, σ_2 cerrados, no vacíos y $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$. Entonces, T tiene un par de subespacios hiperinvariantes no triviales M y N que son complementarios y satisfacen $\sigma(T_M) = \sigma_1$ y $\sigma(T_N) = \sigma_2$.*

Demostración. Sean U y V dos abiertos disjuntos tales que $\sigma_1 \subset U$ y $\sigma_2 \subset V$. Definir ahora f mediante

$$f(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \in U \\ 0 & \text{si } \lambda \in V \end{cases}$$

Note que f es analítica en $U \cup V$. como $f^2 = f$ entonces por el teorema 1.3.4, $P = f(T)$ satisface $P^2 = P$. Si $M = \text{Ran } P$ y $N = \ker P (= \text{Ran}(I - P))$, entonces M y N son complementarios y son cerrados. Usando el teorema 1.3.17 tenemos $\sigma(P) = \sigma(f(T)) = f(\sigma(T)) = f(\sigma_1 \cup \sigma_2) = \{0, 1\}$. Luego, $P \neq 0$ y $P \neq I$. Luego, M y N son no triviales (esto es $\neq (0)$ y $\neq X$). Si ahora $ST = TS$ entonces $Sf(T) = f(T)S$ (vea ejercicio 8 de 1.3.31). Luego, $SP = PS$ y así M es invariante para S . Como $S(I - P) = (I - P)S$ entonces N es también invariante para S . Es decir, M y N son hiperinvariantes para T . Resta demostrar que $\sigma(T_M) = \sigma_1$ y $\sigma(T_N) = \sigma_2$. Para ello, sea $\alpha \notin \sigma(T_M) \cup \sigma(T_N)$ y sea

$$R(x + y) = (\alpha - T_M)^{-1}x + (\alpha - T_N)^{-1}y \quad \forall x \in M, \forall y \in N$$

Entonces, R define una función lineal en X . Como

$$\begin{aligned} \|R(x + y)\| &\leq \|(\alpha - T_M)^{-1}\| \|x\| + \|(\alpha - T_N)^{-1}\| \|y\| \\ &= \|(\alpha - T_M)^{-1}\| \|P(x + y)\| + \|(\alpha - T_N)^{-1}\| \|(I - P)(x + y)\| \\ &\leq (\|(\alpha - T_M)^{-1}\| \|P\| + \|(\alpha - T_N)^{-1}\| \|(I - P)\|) \|x + y\| \end{aligned}$$

entonces R es además acotado. Note ahora que como $T(x + y) = T_M x + T_N y$, $\forall x \in M$, $\forall y \in N$ entonces $(\alpha - T)S = I = S(\alpha - T)$. Luego, $\alpha \notin \sigma(T)$. Esto es,

$$\sigma(T) \subseteq \sigma(T_M) \cup \sigma(T_N) \quad (1.44)$$

Pero,

$$\sigma(T_M) \subseteq \sigma_1, \quad \sigma(T_N) \subseteq \sigma_2 \quad (1.45)$$

En efecto, la función

$$g_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - \lambda} & , \text{ si } \lambda \in U \setminus \{\alpha\} \\ 0 & , \text{ si } \lambda \in V \end{cases}$$

es analítica en $(U \setminus \{\alpha\}) \cup V$. Como $(U \setminus \{\alpha\}) \cup V$ contiene a $\sigma(T)$ (pues es igual a $U \cup V$ si $\alpha \in \sigma_2$) y como $(\alpha - \lambda)g_\alpha(\lambda) = f(\lambda)$, entonces por el teorema 1.3.4, $(\alpha - T)g_\alpha(T) = g_\alpha(T)(\alpha - T) = f(T) = P$.

Luego, $(\alpha - T_M)g_\alpha(T)_M = g_\alpha(T)_M(\alpha - TM) = I_M$. Esto implica $\alpha \notin \sigma(T_M)$ y así $\sigma(T_M) \subset \sigma_1$. La segunda inclusión en (1.45) se trata similarmente. Por (1.44), (1.45) y porque $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ con $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$, tenemos finalmente que $\sigma(T_M) = \sigma_1$, $\sigma(T_N) = \sigma_2$. ■

Los subconjuntos σ_1 y σ_2 de $\sigma(T)$ que satisfacen la hipótesis del teorema anterior se llaman conjuntos espectrales de T en el libro de Dunford-Schwartz de la bibliografía. Invitamos al lector a conocer más sobre ellos consultando dicho libro.

Nosotros ahora vamos a introducir otro concepto de conjunto espectral de T debido a J. von Neumann.

Definición 1.3.24. Sea H un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Entonces, $E \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama un **conjunto espectral** de T (según J. von Neumann) si

1. E es cerrado y $\sigma(T) \subseteq E$
2. $\|f(T)\| \leq \sup_{\lambda \in E} |f(\lambda)|$, para toda función racional f con polos fuera de E .

Recuerde que una función racional f se escribe como el cociente de polinomios p y q y si p y q son primos entre sí entonces los polos de f son los ceros de q . Como f tiene un número finito de polos entonces, si sus polos están fuera del cerrado E , existe un abierto que contiene a $\sigma(T)$ en donde f es analítica. Esto es, $f \in F(\sigma(T))$ y así $f(T)$ está definida por el cálculo funcional de Riesz-Dunford-Gelfand y por lo tanto tiene todas las propiedades que de él hemos estudiado.

Ejemplos 1.3.25.

1. \mathbb{C} es un conjunto espectral para cada $T \in \mathcal{L}(H)$. En efecto, una función racional cuyo único polo es ∞ , se reduce a un polinomio y si f no es constante entonces $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |f(\lambda)| = \infty$. Si ahora $f(\lambda) = \lambda_0$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, entonces $f(T) = \lambda_0 I$ y por lo tanto $\|f(T)\| = |\lambda_0| = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |f(\lambda)|$
2. Claramente, si E es un conjunto espectral de T y $F \supseteq E$, entonces \overline{F} (la clausura de F) es también un conjunto espectral de T .
3. Si E es un conjunto espectral de T y f es una función racional con polos fuera de E entonces $\overline{f(E)}$ es un conjunto espectral de $f(T)$, donde la barra es clausura. Para demostrarlo, note

primero que por el teorema 1.3.17, $\sigma(f(T)) \subseteq \overline{f(E)}$. Además, si g es una función racional con polos fuera de $\overline{f(E)}$ entonces $g \circ f$ es una función racional con polos fuera de $\sigma(T)$. Luego

$$\begin{aligned} \|g(f(T))\| &= \|(g \circ f)(T)\| \leq \sup_{\lambda \in E} |(g \circ f)(\lambda)| \\ &= \sup_{\mu \in f(E)} |g(\mu)| \leq \sup_{\mu \in \overline{f(E)}} |g(\mu)| \end{aligned}$$

(La primera igualdad se debe al teorema 1.3.18 y la primera desigualdad al hecho de ser E un conjunto espectral de T).

4. No siempre el espectro de T es un conjunto espectral de T (considere operadores casinilpotentes). Pero, cuando T es normal entonces el espectro es un conjunto espectral de T como se deduce del siguiente teorema.

Teorema 1.3.26. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Entonces, $\sigma(T)$ es un conjunto espectral de T si y solo si $\|f(T)\| = r(f(T))$, para toda función racional f con polos fuera de $\sigma(T)$ (como siempre r es el radio espectral).*

Demostración. Por el teorema 1.3.17, tenemos que para cualquier f del enunciado, $r(f(T)) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |f(\lambda)|$. Luego, si $\sigma(T)$ es un conjunto espectral de T , entonces $r(f(T)) \leq \|f(T)\| \leq \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |f(\lambda)| = r(f(T))$, así $\|f(T)\| = r(f(T))$ para toda función racional f con polos fuera de $\sigma(T)$. El recíproco es claro. ■

Corolario 1.3.27. *Si H es un espacio de Hilbert y si $T \in \mathcal{L}(H)$ es normal, entonces $\sigma(T)$ es un conjunto espectral e T .*

Demostración. Note que $f(T)$ es también normal. Entre paréntesis, si T es hiponormal entonces $f(T)$ no es necesariamente hiponormal donde f es aquí una función racional con polos fuera de $\sigma(T)$.

Usar ahora el teorema 1.1.30 y el teorema anterior para completar la demostración. ■

Ya sabemos que \mathbb{C} es un conjunto espectral para todo $T \in \mathcal{L}(H)$. No es claro, sin embargo, que cada $T \in \mathcal{L}(H)$ tenga un conjunto espectral compacto. Esto es verdad y se deduce del teorema de la **desigualdad de von Neumann**. Para enunciar y demostrar dicha desigualdad necesitamos primero el teorema conocido como el teorema de la **dilatación unitaria fuerte para contracciones**.

Teorema 1.3.28 (B. Sz-Nagy). *Sea H un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(H)$ una contracción ($\|T\| \leq 1$). Entonces, hay un espacio de Hilbert K donde H es un subespacio y hay un operador unitario $U \in \mathcal{L}(K)$ tal que $T^n x = P U^n x$, $\forall n = 0, 1, \dots$, $\forall x \in H$. (P es la proyección ortogonal de K sobre H).*

Demostración. (J. J. Schaffer) Como $\|T\| \leq 1$, entonces $I - T^*T \geq 0$ y $I - TT^* \geq 0$. Luego, $R = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$ y $S = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$ son operadores acotados en H . Sea

$$K = \left(\bigoplus_{n < 0} \overline{\text{Ran} R} \right) \oplus H \oplus \left(\bigoplus_{n > 0} \overline{\text{Ran} S} \right)$$

$$b) \left(\int_{FrS} F(\lambda) d\lambda \right) y = \int_{FrS} F(\lambda) y d\lambda$$

2. Demuestre la fórmula (1.35)
3. Demuestre el lema 1.3.6
4. Sea X un espacio de Banach complejo y sea $F : U \rightarrow X$ analítica, donde $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y conexo. Si F no es constante demuestre que $U \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \rightarrow \|F(\lambda)\|$ no asume máximo en U .
5. Sea X un espacio de Banach complejo y sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Si $F : U \rightarrow X$ es continua y si $\int_{\gamma} F(\lambda) d\lambda = 0$ para cada triángulo γ que junto a su interior está contenido en U , demuestre que F es analítica.
6. Sea X un espacio de Banach complejo y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $f \in F(\sigma(T))$, demuestre que $f(T') = f(T)'$, donde, denota transpuesto.
7. Demuestre que la definición 1.3.10 coincide con la usual en caso de ser f un polinomio.
8. Sea A un álgebra de Banach con unidad 1 y sea además $x \in A$. Sea $f \in F(\sigma(x))$. Demuestre que $yx = xy \Rightarrow yf(x) = f(x)y$.
9. Sea X un espacio de Banach de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Suponer que f , con valores complejos es analítica en una vecindad de $\sigma(T)$. Demuestre que $f(T)$ es un polinomio en T .
10. Sea A un álgebra de Banach con unidad 1 y sea además $x \in A$ un elemento casinilpotente. Si U es una vecindad del cero y si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica con $f(x) = 0$, demuestre que hay $n \in \mathbb{N}$ con $x^n = 0$.
11. Sea A un álgebra de Banach con uidad 1 y sean además $x \in A$ y $f \in F(\sigma(x))$. Si $|f(\lambda)| \leq M, \forall \lambda \in Dom f$, demuestre que $r(f(x)) \leq M$.
12. Sea A un álgebra de Banach con unidad 1 y sea $x \in A$. Suponer que

$$\gamma = \{\lambda : |\lambda| = 1\} \subseteq \rho(x)$$

Sea P la proyección espectral asociada con γ y x ; esto es: $P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - x)^{-1} d\lambda$. Demuestre que $P = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^n)^{-1}$.

13. Sea A un álgebra de Banach con unidad de norma 1 y sea $x \in A$. Sean f_n, f ($n = 1, 2, 3, \dots$) funciones analíticas con valores complejos definidas en una vecindad fija U de $\sigma(x)$. Suponer que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en subconjuntos compactos de U . Demuestre que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ en A .
14. Sea A un álgebra de Banach con unidad de norma 1 y sea $x \in A$. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, donde D es un disco abierto que contiene a $\sigma(x)$. Si f es analítica, demuestre que hay una sucesión (p_n) de polinomios tales que $p_n(x) \rightarrow f(x)$ en A .
15. Sea A un álgebra de Banach con unidad de norma 1. Sean $x \in A, B \subseteq \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $dist(B, \sigma(x)) > \varepsilon$. Demuestre que hay $M > 0$ con $\|(\lambda - x)^{-n}\| < \frac{M}{\varepsilon^n}, \forall n = 1, 2, 3, \dots$ y $\forall \lambda \in B$.

16. Sea A un álgebra de Banach con unidad de norma 1 y sea $x \in A$ tal que $\|x\| < r' < r$. Sea f analítica en una vecindad de $\{\lambda : |\lambda| \leq r\}$ y suponer que $|f(\lambda)| \leq R$ en $|\lambda| = r$. Demuestre que $\|f(x)\| \leq \frac{rR}{r-r'}$.
17. Sea A un álgebra de Banach con unidad de norma 1. Sea $x \in A$ tal que $0 \notin \eta(\sigma(x))$. Demuestre que x tiene un logaritmo y por lo tanto tiene raíces de todos los órdenes.
18. Demuestre la fórmula (1.39)
19. Exhiba ejemplos para verificar que el teorema 1.3.19 y el corolario 1.3.20 no son válidos si M ó N no son normales.
20. Sea X un espacio de Banach complejo y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $M \in \text{lat } T$ y si f es analítica en una vecindad de $\sigma(T) \cup \sigma(T_M)$, demuestre que $M \in \text{lat } f(T)$ y que $f(T_M) = f(T)_M$.
21. Sea E cerrado con $E \supseteq \sigma(T)$. Demuestre que E es un conjunto espectral de T si y solo si, para toda función racional f con polos fuera de E tal que $\sup_{\lambda \in E} |f(\lambda)| \leq 1$, se tiene $\|f(T)\| \leq 1$.
22. Si en la definición de conjunto espectral se suprime la hipótesis de ser E un conjunto cerrado, demuestre que esta definición es equivalente a nuestra definición, demostrando que E es un conjunto espectral de T si y solo si, \overline{E} lo es.
23. Sea f una función racional con polos fuera de E , donde E es un conjunto espectral de $T \in \mathcal{L}(H)$. Si f es el límite uniforme en E de una sucesión de polinomios, demuestre que $f(E)$ es un conjunto espectral de $f(T)$.
24. Demuestre que $U \in \mathcal{L}(H)$ es unitario si y solo si $\{\lambda : |\lambda| = 1\}$ es un conjunto espectral de U .
25. Demuestre que $T \in \mathcal{L}(H)$ es autoadunto si y solo si \mathbb{R} es un conjunto espectral de T . ¿Qué se puede decir al respecto si T es positivo?
26. Suponga que (1.46) es válida solo para polinomios. Demuestre que ella es también válida para funciones racionales con polos fuera de D .
27. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Demuestre que $\sigma(T) = \bigcap \{E : E \text{ es un conjunto espectral de } T\}$.

1.4. Rango Numérico en $\mathcal{L}(H)$

Definición 1.4.1. Sea H un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(H)$. El **rango numérico** $W(T)$ de T es el conjunto

$$W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \langle Tx, x \rangle, \text{ algún } x \in H \text{ con } \|x\| = 1\}$$

Ejemplos 1.4.2.

1. $W(T)$ es claramente un conjunto no vacío y es también acotado pues

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \|T\|$$

si $\|x\| = 1$. Además si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ entonces $W(\alpha T + \beta) = \alpha W(T) + \beta$. (Recuerde que $\alpha T + \beta$ es una notación para $\alpha T + \beta I$, donde I es el operador identidad y $\alpha W(T) + \beta = \{\alpha \lambda + \beta : \lambda \in W(T)\}$).

2. Si S es el operador de desplazamiento unilateral en $\ell_2(\mathbb{Z}^+)$, entonces $W(T) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$. En efecto, como cada complejo de valor absoluto menor que 1 es un valor propio de S^* (vea (5) de ejemplos 1.1.14), entonces el disco unitario abierto está contenido en $W(S)$. Recíprocamente si $\lambda \in W(S)$ entonces hay $x \in H$ con $\|x\| = 1$ y $\langle Sx, x \rangle = \lambda$. Luego $\|Sx - \lambda x\|^2 = \|Sx\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle Sx, x \rangle + |\lambda|^2 = \|Sx\|^2 - |\lambda|^2 \leq 1 - |\lambda|^2$. Como S no tiene valores propios (vea (5) de ejemplos 1.1.14), entonces $\|Sx - \lambda x\|^2 > 0$ y así $|\lambda| < 1$. Luego, $W(S) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$. Note, en particular, que $W(S)$ no es un conjunto cerrado.
3. Si $T \in \mathcal{L}(H)$, conocemos que $\sigma(T) = \sigma(S^{-1}TS)$, $\forall S \in \mathcal{L}(H)$ que es invertible. Sin embargo, en el caso del rango numérico es posible tener $W(T) \neq W(S^{-1}TS)$ para algún invertible S . Por ejemplo en $H = \mathbb{C}^2$ con el producto euclideo, sean $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces con la ayuda del próximo teorema 1.4.3 y su corolario, vemos que $W(T)$ es real. Sin embargo $W(S^{-1}TS)$ contiene valores complejos.
4. En la sección 1.1 hemos visto que el espectro de un operador es un conjunto compacto no vacío y que todo conjunto compacto no vacío es el espectro de algún operador. En el teorema 1.4.3 veremos que el rango numérico de un operador es un conjunto convexo. Debemos preguntarnos si todo conjunto no vacío acotado y convexo es el rango numérico de algún operador. La respuesta es negativa para H separable pues entonces $\mathcal{L}(H)$ tiene la cardinalidad c de los reales. Sin embargo, hay 2^c conjuntos convexos acotados en \mathbb{C} .

Teorema 1.4.3 (O. Toeplitz - F. Hausdorff). *Para cada $T \in \mathcal{L}(H)$, $W(T)$ es un conjunto convexo.*

Demostración. Sean λ_1 y λ_2 dos elementos distintos en $W(T)$. Debemos demostrar que el intervalo $[\lambda_1, \lambda_2]$ está contenido en $W(T)$. Una adecuada transformación del tipo $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \rightarrow \alpha z + \beta$, transforma el intervalo $[\lambda_1, \lambda_2]$ en el intervalo $[0, 1]$. Este hecho junto a (1) de ejemplos 1.4.2 demuestran que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$. Es decir, vamos a demostrar que

$$[0, 1] \subseteq W(T) \quad (1.47)$$

Sean entonces $x, y \in H$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ tales que

$$\langle Tx, x \rangle = 0, \quad \langle Ty, y \rangle = 1 \quad (1.48)$$

Escribir $T = A + iB$ con $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$, $B = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ y note que

$$\langle Ax, x \rangle = \langle By, y \rangle = 0 \quad (1.49)$$

Note que los vectores unitarios x e y que satisfacen (1.48) y (1.49) pueden ser reemplazados por ax y by respectivamente con $a, b \in \mathbb{C}$ tal que $|a| = |b| = 1$ sin afectar a las igualdades (1.48) y (1.49). Haciendo este reemplazo (si es necesario) podemos suponer sin pérdida de generalidad que los vectores unitarios x e y que satisfacen (1.48) y (1.49), también satisfacen

$$\operatorname{Re} \langle By, y \rangle = 0 \quad (1.50)$$

Para demostrar ahora (1.47), sea $g : [0, 1] \rightarrow H$, $t \rightarrow tx + (1-t)y$. Como

$$0 = \langle Tx, x \rangle \neq \langle Ty, y \rangle = 1$$

entonces x e y son linealmente independientes y en consecuencia $g(t)$ nunca es cero. Luego, $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \rightarrow \frac{\langle Tg(t), g(t) \rangle}{\|g(t)\|^2}$ es una función que es continua.

Demostremos ahora que h toma solo valores reales. En efecto, como

$$\langle Bg(t), g(t) \rangle = t^2 \langle Bx, x \rangle + t(1-t) \operatorname{Re} \langle Bx, y \rangle + (1-t)^2 \langle By, y \rangle$$

entonces por (1.49) y (1.50) tenemos que $\langle Bg(t), g(t) \rangle = 0, \forall t \in [0, 1]$. Luego, $\langle Tg(t), g(t) \rangle = \langle Ag(t), g(t) \rangle$ es real $\forall t \in [0, 1]$. Finalmente, como $h(0) = 1$ y $h(1) = 0$, entonces por el teorema de los valores intermedios, el rango de h contiene al intervalo $[0, 1]$ y como el rango de h está contenido en $W(T)$, entonces (1.47) está demostrado. ■

Corolario 1.4.4. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es autoadjunto, entonces $W(T)$ es un intervalo contenido en $[-\|T\|, \|T\|]$.

Demostración. Por el teorema 1.4.3, $W(T)$ es un intervalo de la recta real. Como $|\langle Tx, x \rangle| \leq \|T\|, \forall x \in H$ con $\|x\| = 1$, entonces $W(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$. ■

Teorema 1.4.5. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ entonces

1. $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$ (la barra denota clausura)
2. $\|(\lambda - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \overline{W(T)})}$

Demostración. Sea $\lambda \notin \overline{W(T)}$. Entonces, $d = \operatorname{dist}(\lambda, \overline{W(T)}) > 0$, y $\forall y \in H$ con $\|y\| = 1$ tenemos $|\langle (T - \lambda)y, y \rangle| = |\langle Ty, y \rangle - \lambda| \geq d$. Luego, $|\langle (T - \lambda)x, x \rangle| \geq d\|x\|^2, \forall x \in H$, de donde

$$\|(T - \lambda)x\| \geq d\|x\|, \quad \forall x \in H \quad (1.51)$$

Es decir, $T - \lambda$ es acotado por abajo. Demostremos ahora que $\lambda \notin \sigma(T)$ demostrando que $\operatorname{Ran}(T - \lambda)$ es denso. Debemos demostrar que $\ker(T^* - \bar{\lambda}) = (0)$. Suponer lo contrario. Entonces, hay $x \in H$ con $\|x\| = 1$ y $T^*x = \bar{\lambda}x$. Pero, entonces, $\langle Tx, x \rangle = \langle x, T^*x \rangle = \langle x, \bar{\lambda}x \rangle = \lambda$. Luego, $\lambda \in W(T)$, lo cual es una contradicción. Así, $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$. Finalmente de (1.51) se deduce fácil que $\|(\lambda - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{d}$. ■

Sea ahora $A \subseteq \mathbb{C}$, entonces $\operatorname{co}(A)$ denota la intersección de todos los subconjuntos convexos del plano que contienen a A . Note que $\operatorname{co}(A)$ es, con respecto a la inclusión, el menor convexo que contiene a A . Se llama la **cápsula convexa** de A .

Teorema 1.4.6. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ normal (o más generalmente hiponormal; es decir, $TT^* \leq T^*T$). Entonces,

$$\operatorname{co}(\sigma(T)) = \overline{W(T)}$$

Demostración. De acuerdo con los teoremas 1.4.3 y 1.4.5 (1), debemos solamente demostrar que $\overline{W(T)} \subseteq \operatorname{co}(\sigma(T))$. Note ahora que para ello es suficiente demostrar que cada semiplano cerrado que contiene a $\sigma(T)$, también contiene a $\overline{W(T)}$. Considerando una transformación del tipo $z \rightarrow az + b$, ésto se reduce a demostrar que si $\sigma(T) \subseteq \{z : \operatorname{Re} z \leq 0\}$ entonces $\overline{W(T)} \subseteq \{z : \operatorname{Re} z \leq 0\}$. Es decir, debemos demostrar que

$$\operatorname{Re} \sigma(T) \leq 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \overline{W(T)} \leq 0 \quad (1.52)$$

Para demostrar (1.52), sea $x \in H$ con $\|x\| = 1$. Sea M el subespacio lineal generado por x . Como $H = M \oplus M^\perp$, entonces hay $a \in \mathbb{C}$ y hay $y \in H$ tal que

$$Tx = ax + y, \quad \langle x, y \rangle = 0 \quad (1.53)$$

Sea $b > 0$. Entonces, por el teorema 1.1.30 y por el ejercicio 18 de 1.1.34, tenemos que $\|(T - b)^{-1}\| = \frac{1}{\text{dist}(b, \sigma(T))}$. Luego,

$$\|(T - b)x\| \geq \text{dist}(b, \sigma(T)) \geq b$$

Luego,

$$((\text{Re } a) - b)^2 + (\text{Im } a)^2 + \|y\|^2 = \|(T - b)x\|^2 \geq b^2$$

de donde

$$\frac{|a|^2 + \|y\|^2}{b} \geq 2\text{Re } a$$

Como $b > 0$ fue arbitrario, entonces $\text{Re } a \leq 0$. Es decir, $\text{Re } \langle Tx, x \rangle \leq 0$ (pues de (1.53) se tiene que $\langle Tx, x \rangle = a$). Luego, $\text{Re } \overline{W}(T) \leq 0$. ■

Teorema 1.4.7 (S. Hildebrandt). Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Entonces, $\text{co}(\sigma(T)) = \cap \overline{W}(S^{-1}TS)$, donde la intersección es sobre todos los $S \in \mathcal{L}(H)$ que son invertibles.

Demostración. (J. P. Williams) Sea $S \in \mathcal{L}(H)$ invertible. Por el teorema 1.4.5, $\sigma(S^{-1}TS) \subseteq \overline{W}(S^{-1}TS)$ y como $\sigma(T) = \sigma(S^{-1}TS)$ entonces $\sigma(T) \subseteq \overline{W}(S^{-1}TS)$. Por el teorema 1.4.3, $\text{co}(\sigma(T)) \subseteq \overline{W}(S^{-1}TS)$. Luego, $\text{co}(\sigma(T)) \subseteq \cap \overline{W}(S^{-1}TS)$, S invertible. Recíprocamente, sea D un círculo abierto del plano con centro λ y radio r que contiene a $\text{co}(\sigma(T))$. Entonces, el espectro de $\frac{1}{r}(T - \lambda)$ está contenido en el disco unitario abierto y, en particular, su radio espectral es menor que 1. Por el ejercicio 26 de 1.1.34 tenemos que hay un $S \in \mathcal{L}(H)$ invertible con

$$\left\| \frac{1}{r}(S^{-1}(T - \lambda)S) \right\| < 1 \quad (1.54)$$

Como $|\langle Ax, x \rangle| \leq \|A\|$, $\forall A \in \mathcal{L}(H)$, $\forall x \in H$ tal que $\|x\| = 1$, entonces de (1.54) tenemos que $\overline{W}(\frac{1}{r}(S^{-1}(T - \lambda)S))$ está contenido en el disco unitario abierto, o equivalentemente $\overline{W}(S^{-1}(T - \lambda)S) \subseteq D$. Luego, $\overline{W}(S^{-1}(T - \lambda)S) \subseteq \text{co}(\sigma(T))$, pues como se ve fácilmente, todo conjunto compacto y convexo del plano es la intersección de todos los discos abiertos que lo contienen. ■

Definición 1.4.8. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. El **radio numérico** $w(T)$ de T es el número real no negativo

$$w(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(T)\}$$

Vamos a demostrar ahora el teorema de la desigualdad para potencias que asegura que si $T \in \mathcal{L}(H)$ entonces $w(T^n) \leq w(T)^n$, $n = 1, 2, \dots$. Pero, antes, observemos que si $p(z)$ es un polinomio complejo de grado n con n raíces distintas entre sí, entonces

$$p(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$$

y

$$p'(a_i) = (a_i - a_1) \cdots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_n)$$

donde la prima denota la derivada.

Luego, el polinomio de grado $n - 1$

$$1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{p'(a_i)} \prod_{j \neq i} (z - a_j) \quad (1.55)$$

se anula para las n raíces a_1, \dots, a_n y por lo tanto es el polinomio cero. De esto resulta que

$$1 = \sum_{i=1}^n \frac{p(z)}{p'(a_i)(z - a_i)}$$

o bien

$$\frac{1}{p(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p'(a_i)(z - a_i)}. \quad (1.56)$$

Dicho esto, ahora pasamos a demostrar el siguiente:

Teorema 1.4.9 (C. A. Berger). *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ entonces*

$$w(T^n) \leq w(T)^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.57)$$

Demostración. Note primero que (1.57) es equivalente a

$$w(T) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad w(T^n) \leq 1 \quad (1.58)$$

Para demostrar (1.58), observemos primero que

$$w(T) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}(1 - \lambda T)^{-1} \geq 0, \quad \forall \lambda : |\lambda| < 1 \quad (1.59)$$

En efecto, notar que si $w(T) \leq 1$ entonces $r(T) \leq 1$ y así, $r(\lambda T) < 1$, $\forall \lambda : |\lambda| < 1$. Luego, $1 - \lambda T$ es invertible para estos λ . Además, si $x \in H$ y si $y = (1 - \lambda T)^{-1}x$, entonces $\langle \operatorname{Re}(1 - \lambda T)x, x \rangle = \operatorname{Re} \langle y, (1 - T)y \rangle = \|y\|^2 - \operatorname{Re} \lambda \langle Ty, y \rangle = \left(1 - \operatorname{Re} \lambda \langle T \frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|} \rangle\right) \|y\|^2$, de donde resulta que $\operatorname{Re}(1 - \lambda T)^{-1} \geq 0$, $\forall \lambda : |\lambda| < 1$. La implicación recíproca en (1.59) resulta también de las desigualdades anteriores. Sea ahora u una raíz primitiva de la unidad de orden n ; es decir $u \in \mathbb{C}$ y n es el menor entero positivo con $u^n = 1$. Entonces, al poner $p(z) = 1 - z^n$ en (1.56) (y notando que u, u^2, \dots, u^n son las n raíces distintas de $1 - z^n$) tenemos que

$$\frac{1}{1 - z^n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - u^i z} \quad (1.60)$$

Por el cálculo funcional tenemos que

$$(1 - \lambda^n T^n)^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - \lambda u^i T^n)^{-1}, \quad \forall \lambda : |\lambda| < 1 \quad (1.61)$$

Como $w(T) \leq 1$ implica $w(uT) \leq 1$ entonces, por (1.59), el miembro derecho de (1.61) tiene su parte real positiva. Luego, $\operatorname{Re}(1 - \lambda^n T^n)^{-1} \geq 0$. Por (1.59), $w(T^n) \leq 1$. ■

Teorema 1.4.10 (J. P. Williams). *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ y sea $C \subset \mathbb{C}$ un conjunto convexo compacto tal que $\sigma(T) \subseteq C^\circ$ (el interior topológico de C). Entonces, hay $S \in \mathcal{L}(H)$ invertible con $\overline{W}(S^{-1}TS) \subset C$.*

Demostración. Vamos a demostrar primero que si E es un conjunto espectral convexo para T , entonces $\overline{W}(T) \subset E$. Note que es suficiente demostrar ésto para el caso de ser E un semiplano cerrado. Sustituyendo T por $aT + b$ para ciertos $a, b \in \mathbb{C}$ podemos suponer que el semiplano E es $E = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$. Debemos demostrar entonces que $\operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle \geq 0$, $\forall x$. Para demostrarlo,

note que como la transformación $\lambda \rightarrow \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, transforma el semiplano E en el disco cerrado unitario, entonces $|(1-\lambda)(1+\lambda)^{-1}| \leq 1, \forall \lambda \in E$. Así, por la definición de conjunto espectral tenemos que

$$\|(1-\lambda)(1+\lambda)^{-1}\| \leq 1$$

Si $x \in H$ y si $x = (1+T)^{-1}y$, entonces

$$\|(1-T)x\| = \|(1-T)(1+T)^{-1}y\| \leq \|y\| = \|(1+T)x\|$$

Luego, elevando al cuadrado esta desigualdad y expandiendo

$$\|(1-T)x\|^2 \text{ y } \|(1+T)x\|^2$$

obtenemos que $Re \langle Tx, x \rangle \geq 0, \forall x \in H$.

Hecho esto, sea ahora (de acuerdo con el teorema de la aplicación de Riemann-Koebe) $f : U \rightarrow C^\circ$ conforme inyectiva y sobre, donde U es el disco unitario abierto. Note que U contiene al espectro de $f^{-1}(T)$ (vea teorema 1.3.17). Por el ejercicio 26 de 1.1.34, hay $S \in \mathcal{L}(H)$ invertible con $\|S^{-1}f^{-1}(T)S\| = r < 1$. Sea D_r el disco cerrado con centro en cero y radio r . Por el teorema 1.3.29 D_r es un conjunto espectral de $S^{-1}f^{-1}(S^{-1}TS)$ (el lector tiene la fácil tarea de demostrar esta igualdad usando el cálculo funcional). Como D_r está contenido en el dominio de f , entonces por el teorema de Mergelyan (verlo en el capítulo 20 del Libro W Rudin: *Análisis Real y Complejo*), f es el límite uniforme de una sucesión de polinomios en D_r . Luego, $f(D_r)$ es un conjunto espectral para $f(f^{-1}(S^{-1}TS)) = S^{-1}TS$ (vea el ejercicio 23 de 1.3.31). Como C contiene a $f(D_r)$, entonces C es también un conjunto espectral de $S^{-1}TS$ y como es convexo entonces por lo demostrado al inicio de la demostración, tenemos que $\overline{W}(S^{-1}TS) \subseteq C$. ■

Ejercicios 1.4.11.

1. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ y sea $U \in \mathcal{L}(H)$ unitario. ¿Es verdad que $W(T) = W(U^*TU)$?
2. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ con $W(T) = (0)$. ¿Que puede decir de T ?
3. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es invertible, ¿es verdad que $0 \notin W(T)$?
4. Si $0 \notin W(T)$, ¿es verdad que T es invertible?
5. Si H es de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(H)$, demuestre que $W(T)$ es cerrado.
6. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ y sea $\lambda \in W(T)$ con $|\lambda| = \|T\|$. Demuestre que λ es un valor propio de T .
7. Determine el rango numérico de $diag\{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ en $\ell_2(\mathbb{Z}^+)$.
8. Determine los rangos numéricos de los operadores T, S y $S^{-1}TS$ del ejemplo (3) en 1.4.2.
9. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ invertible. Suponer que $0 \notin W(T)$. Demuestre que $lat T = lat T^{-1}$.
10. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Demuestre que $W(T) = W(T^{(n)})$, donde $T^{(n)} = T \oplus \dots \oplus T$, n sumandos, está definido en $H^{(n)} = H \oplus \dots \oplus H$
11. Más generalmente, demuestre que si $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n$ con $T_i \in \mathcal{L}(H)$, entonces $W(T) = co(\bigcup_{i=1}^n W(T_i))$. ¿Se puede generalizar esto a una familia infinita de operadores donde las normas de operadores envueltos forman una sucesión que es acotada?

12. Si $T = T_1 \oplus T_2$ en $H \oplus H$ y si $co(\sigma(T_2)) = \overline{W(T_2)} \supseteq W(T_1)$, demuestre que $co(\sigma(T)) = \overline{W(T)}$.
13. Exhiba un ejemplo de un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ con $r(T) = \|T\|$, pero $co(\sigma(T)) \neq \overline{W(T)}$.
¿No contradice esto la demostración del teorema 1.4.6?
14. Demuestre que si $T \in \mathcal{L}(H)$ entonces $\frac{1}{2}\|T\| \leq w(T) \leq \|T\|$.
15. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ y si $w(1 - T) < 1$, ¿es verdad que T es invertible?
16. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ y si $w(T) \leq 1$, demuestre que $\|T^n\| \leq 2$, $n = 1, 2, 3, \dots$
17. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ con $w(T) \leq 1$. Si $Tx = x$, demuestre que $T^*x = x$.
18. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Demuestre que hay $S \in \mathcal{L}(H)$ invertible de modo que $W(S^{-1}TS)$ es un conjunto cerrado.
19. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ con $w(T) \leq 1$. Demuestre que T es similar a una contracción.

**La reproducción de los textos
fue gracias al patrocinio de**

