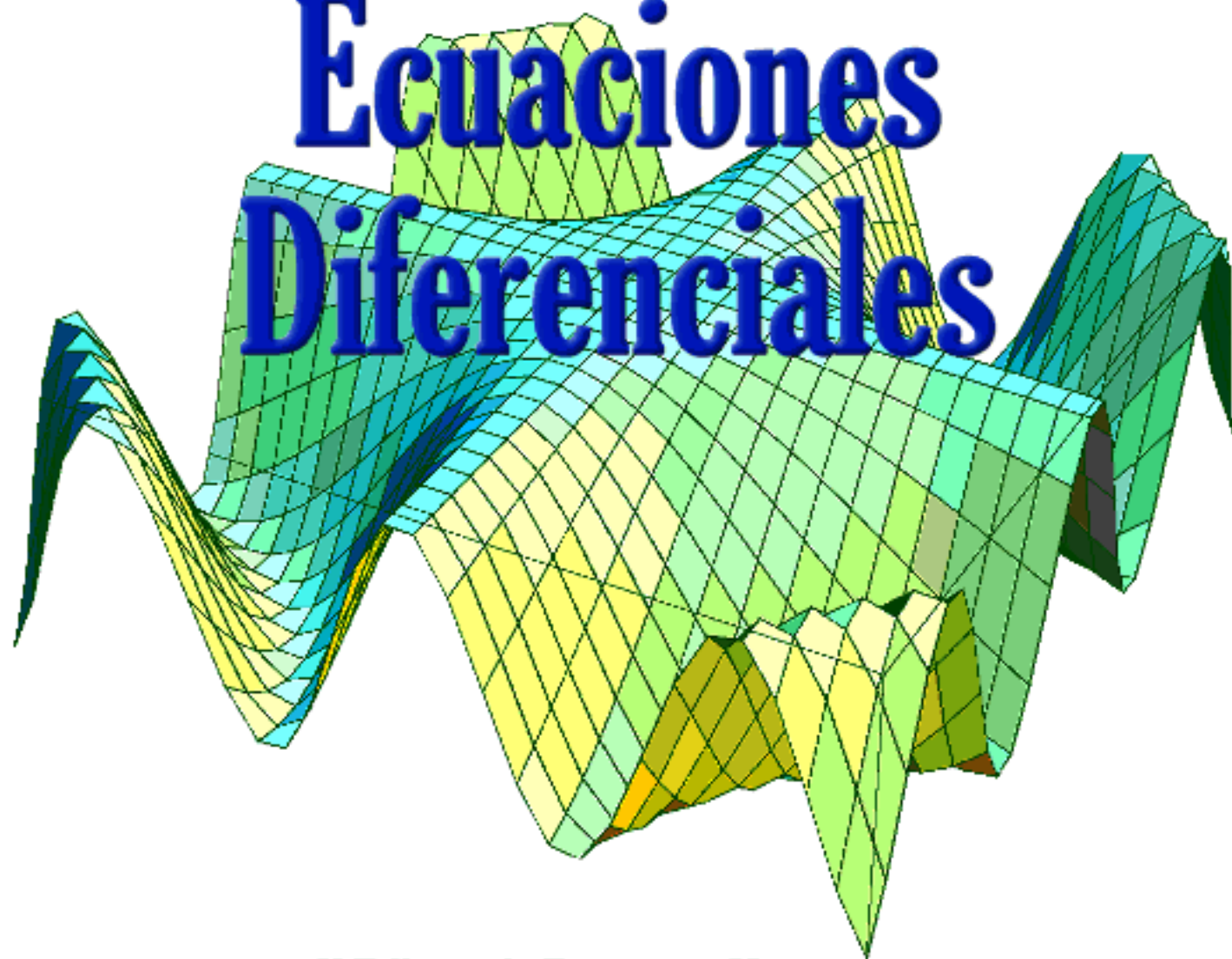




Universidad del Zulia  
Facultad Experimental de Ciencias  
Asociación Matemática Venezolana



# Ecuaciones Diferenciales



V Talleres de Formación Matemática  
Maracaibo, 26 al 31 de Julio de 2004



# V Talleres de Formación Matemática

## Ecuaciones diferenciales ordinarias

Mario Cavani

Maracaibo, 26 al 31 de julio de 2004

# Prefacio

En este libro se aborda la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias desde un punto de vista introductorio. También se presentan algunas nociones básicas del álgebra lineal que resultan necesarias para dar los primeros pasos en el vasto campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

El libro ha sido pensado para ser desarrollado en parte en los Talleres de Formación Matemática, T-ForMa, donde participan estudiantes de la Licenciatura en Matemática de las universidades nacionales que han aprobado al menos el quinto semestre de la carrera. El taller aspira dar a conocer e introducir al estudiante en los temas de matemáticas que son más activos en la República Bolivariana de Venezuela.

Ciertamente las ecuaciones diferenciales ha sido una de las ramas de las matemáticas que mayor impulso ha recibido en nuestro país en los últimos años, tanto en la docencia como en la investigación; y tanto en la teoría como en las aplicaciones.

El contenido de este libro, por supuesto, no contiene todos y cada uno de los temas esenciales para una introducción. Por ejemplo la teoría de estabilidad, de gran importancia, sólo se toca tangencialmente. Sin embargo, es un buen punto inicial para continuar más adelante con el estudio de este vasto tema. El contenido del libro es el siguiente: En el primer capítulo se introducen las notaciones básicas para abordar la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias y algunos conceptos básicos del análisis y del álgebra lineal que se requieren para abordar el tema. Se presenta de forma autocontenida el teorema del punto fijo de Banach-Cacciopoli. En el segundo capítulo, se estudia el teorema de existencia y unicidad de Picard, las prolongaciones de las soluciones y soluciones maximales, así como otros temas relacionados con la teoría general, tales como, la dependencia continua de las soluciones con respecto a las condiciones iniciales y parámetros. En el tercer capítulo se estudia la teoría de los sistemas autónomos, el flujo de una ecuación diferencial, los conjuntos invariantes, el teorema de Poincaré-Bendixson y los criterios de Bendixson y Dulac. Los capítulos cuarto y quinto constituyen una parte de álgebra lineal enfocada al estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. En el capítulo sexto se estudian los sistemas lineales con coeficientes periódicos y de la teoría de Floquet. En el capítulo séptimo se estudian los sistemas no lineales de segundo orden y se busca saber que propiedades se mantienen de los sistemas lineales. Finalmente en el capítulo octavo se presenta un modelo depredador-presa que puede servir como punto inicial para mirar hacia el fascinante mundo de las aplicaciones.

Para la realización de este libro, tengo que agradecer a los colegas de la directiva de la Asociación Matemática Venezolana que me han brindado la oportunidad de participar en los T-ForMa. Debo agradecer también la ayuda que directa o indirectamente me han brindado muchos de mis colegas y amigos con quienes he compartido el estudio de las ecuaciones diferenciales a lo largo de mi vida profesional. En este sentido, debo agradecer especialmente a Miklós Farkas (Budapest Institute of Technology), Marcos Lizana (ULA), Hal L. Smith (Arizona State University), Sael Romero (UDO) y Julio Marín (UDO). Por supuesto que los errores que contenga el libro son de mi entera responsabilidad, de modo que mis colegas y amigos nada tienen que ver con ellos.

El agradecimiento más importante, a mis hijas, Mariela y Mercedes Aida, y a mi esposa Mercedes, quienes con su apoyo continuo me motivan a seguir avanzando permanentemente.

Mario Cavani

Cumaná, Mayo de 2004

# Índice General

<b>Capítulo 1.</b>	<b>Nociones preliminares</b>	<b>1</b>
1.1.	Normas. Funciones vectoriales y matriciales . . . . .	1
1.2.	El teorema de punto fijo de Banach-Cacciopoli . . . . .	2
1.3.	Una primera definición de ecuación diferencial . . . . .	4
1.4.	Funciones lipschitzianas . . . . .	6
<b>Capítulo 2.</b>	<b>Teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias</b>	<b>7</b>
2.1.	Existencia y unicidad de las soluciones . . . . .	7
2.2.	Prolongación de las soluciones y soluciones maximales . . . . .	9
2.3.	Continuidad en las condiciones iniciales y parámetros . . . . .	11
<b>Capítulo 3.</b>	<b>Teoría cualitativa</b>	<b>14</b>
3.1.	El flujo de una ecuación autónoma . . . . .	14
3.1.1.	Orbitas y conjuntos invariantes . . . . .	15
3.1.2.	Conjuntos $\omega$ -límites y $\alpha$ -límites . . . . .	16
3.2.	El teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	19
3.3.	Criterios negativos . . . . .	21
3.3.1.	El criterio negativo de Bendixson . . . . .	21
3.3.2.	El criterio de Dulac . . . . .	23
<b>Capítulo 4.</b>	<b>Algebra lineal</b>	<b>24</b>
4.1.	Formas canónicas de Jordan . . . . .	24
4.2.	La matriz exponencial . . . . .	28
<b>Capítulo 5.</b>	<b>Sistemas lineales</b>	<b>33</b>
5.1.	Matrices fundamentales . . . . .	34
5.1.1.	Solución exponencial del sistema homogéneo . . . . .	36
5.1.2.	Solución del sistema no homogéneo . . . . .	37
5.2.	Sistemas lineales de segundo orden con coeficientes constantes . . . . .	38
5.3.	Autovalores reales y distintos . . . . .	39
5.3.1.	i) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . . . . .	39

5.3.2.	ii) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ . . . . .	39
5.3.3.	iii) Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . . . . .	40
5.4.	Autovalores complejos conjugados . . . . .	40
5.4.1.	$\alpha < 0$ . . . . .	40
5.4.2.	$\alpha = 0$ . . . . .	41
5.4.3.	$\alpha > 0$ . . . . .	41
5.5.	Un autovalor real doble . . . . .	41
<b>Capítulo 6.</b>	<b>Sistemas lineales periódicos</b>	<b>43</b>
6.1.	La teoría de Floquet . . . . .	43
<b>Capítulo 7.</b>	<b>Sistemas no lineales de segundo orden</b>	<b>47</b>
<b>Capítulo 8.</b>	<b>Un modelo depredador-presa</b>	<b>53</b>
8.1.	Análisis del caso bidimensional . . . . .	55
8.2.	Aplicación del criterio de Dulac . . . . .	57
<b>Referencias Bibliográficas</b>		<b>62</b>

# Capítulo 1

## Nociones preliminares

En este capítulo presentamos las notaciones básicas que emplearemos para abordar la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. También recordaremos algunos conceptos básicos del análisis y del álgebra lineal que requeriremos más adelante. Es importante mencionar que presentamos de forma autocontenida el teorema del punto fijo de Banach-Cacciopoli.

### 1.1. Normas. Funciones vectoriales y matriciales

Suponemos conocidos los conceptos de vectores, espacios vectoriales, el concepto de base de un espacio vectorial, además el estudiante debe tener conocimientos de las operaciones y propiedades fundamentales de las matrices, sin embargo, para precisar las notaciones que utilizaremos a lo largo del libro daremos algunos conceptos básicos relacionados con estos temas, lo cual damos inicio a continuación.

Denotaremos por  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , al espacio de todas las  $n$ -tuplas de números reales. Estas  $n$ -tuplas las suponemos en la forma de vectores columna. Es decir, si  $x \in \mathbb{R}^n$  entonces

$$x = \text{col} [x_1, x_2, \dots, x_n] := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

El **vector transpuesto** de  $x$ ,  $x^t$ , es un vector fila y está dado por

$$x^t = [x_1, x_2, \dots, x_n].$$

**Definición 1.1.** Una **norma** en  $\mathbb{R}^n$  es una función,  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , que tiene las siguientes propiedades:

- a.-  $\|x\| \geq 0$ , para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- b.-  $\|x\| = 0$ , si y solo si  $x = 0$ .
- c.-  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ , para toda  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- d.-  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , para toda  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 1.1.** Las siguientes funciones definen normas en  $\mathbb{R}^n$ :

- 1.-  $\|x\|_0 = \text{máx}\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$
- 2.-  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- 3.-  $\|x\|_2 = \left(\sum x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ .

**Ejemplo 1.2.** En el caso del espacio vectorial de las matrices  $n \times n$  con componentes reales, denotado por  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , podemos definir las siguientes normas para  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

$$1.- \|A\|_0 = \max\{|a_{ij}| : 1 \leq i, j \leq n\}$$

$$2.- \|A\|_1 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$3.- \|A\|_2 = \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Ejercicio 1.1.** Demostrar las siguientes propiedades:

$$a.- \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \text{ para } A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

$$b.- \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \text{ para } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n.$$

En el desarrollo de la teoría tendremos que ver con funciones vectoriales y funciones matriciales. Una **función vectorial** de variable real es una función,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con valores en  $\mathbb{R}^n$ . Es decir,

$$f(t) = \text{col}[f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)],$$

donde cada **función componente**,  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , es una función real de variable real.

**Definición 1.2.** La norma de una función acotada,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ , se define por

$$\|f\| = \sup_{x \in D} \|f(t)\|,$$

donde la norma que aparece como argumento en el supremo es alguna norma en  $\mathbb{R}^n$ .

En la definición anterior debemos tener el cuidado de saber distinguir el espacio al cual se refiere cada una de las normas que allí aparecen, la norma a la izquierda de la igualdad se refiere a una norma en un espacio de funciones, mientras que la norma a la derecha es una norma en  $\mathbb{R}^n$ .

Decimos que una función vectorial es **continua (derivable, integrable)** si cada función componente es continua (derivable, integrable). Denotando con el apóstrofe a la derivada con respecto a  $t$ , tenemos la siguientes fórmulas:

$$f'(t) = \text{col}[f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t)],$$

$$\int_a^b f(t)dt = \text{col} \left[ \int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \dots, \int_a^b f_n(t)dt \right].$$

De manera similar, **una función matricial** de variable real es una función  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ , donde  $\mathbb{R}^{n \times n}$  es el conjunto de todas las matrices  $n \times n$  con componentes en  $\mathbb{R}$ . Definimos la continuidad, derivabilidad e integrabilidad componente a componente tal como en el caso de las funciones vectoriales.

## 1.2. El teorema de punto fijo de Banach-Cacciopoli

En la exposición que sigue a continuación suponemos conocidos los hechos básicos sobre la topología elemental de los espacios métricos completos. El siguiente teorema utiliza algunos de estos conceptos y se le conoce como el teorema de punto fijo de Banach-Cacciopoli, el cual será de gran utilidad más adelante.

**Definición 1.3.** A una función de un espacio métrico en si mismo la llamaremos un **mapeo**.

**Definición 1.4.** Un mapeo  $f$ , definido en el espacio métrico  $X$ , se dice que es **contractivo** si existe una constante  $\alpha$  tal que  $0 < \alpha < 1$  y se cumple que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y),$$

para toda  $x, y \in X$ , donde  $d$  representa a la métrica de  $X$ .

**Ejercicio 1.2.** Demuestre que todo mapeo contractivo es continuo.

El siguiente concepto juega un papel fundamental en el teorema de punto fijo de Banach-Cacciopoli.

**Definición 1.5.** A un punto  $x \in X$  se le llama un **punto fijo** del mapeo  $f$  si

$$f(x) = x.$$

**Teorema 1.1 (del punto fijo de Banach-Cacciopoli).** Todo mapeo definido en un espacio métrico completo  $X$ , que sea contractivo, tiene un único punto fijo.

*Demostración.* Sea  $x_0$  cualquier punto de  $X$  que no sea un punto fijo. Es decir,

$$f(x_0) \neq x_0.$$

Definamos  $x_1$  por

$$x_1 = f(x_0),$$

y en general definamos  $x_j$  por

$$x_j = f(x_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Para la sucesión  $\{x_j\}$ , así definida, por aplicación iterada de la desigualdad triangular tenemos la siguiente propiedad

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{j=m+1}^n d(x_j, x_{j-1}). \quad (1.2)$$

Luego haciendo uso de la expresión (1.1) tenemos

$$\begin{aligned} d(x_j, x_{j-1}) &= d(f(x_{j-1}), f(x_{j-2})) \\ &\leq \alpha d(x_{j-1}, x_{j-2}), \end{aligned}$$

donde  $\alpha$  es la constante de contractividad. Aplicando iteradamente esta relación tenemos que

$$d(x_j, x_{j-1}) \leq \alpha^{j-1} d(x_1, x_0).$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (1.2) tenemos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_1, x_0) \sum_{j=m+1}^n \alpha^{j-1}.$$

Donde la suma que aparece en la parte derecha es la diferencia entre la  $m$ -ésima y la  $n$ -ésima suma parcial de una serie geométrica convergente, pues  $0 < \alpha < 1$ . Se deduce de esto que la sucesión  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy, y como  $X$  es un espacio métrico completo, concluimos que tiene que ser convergente a algún  $x \in X$ . Por otra parte, como el mapeo  $f$  es continuo se tiene que la sucesión  $\{f(x_n)\}$  es convergente al valor  $f(x)$ . De la relación dada por (1.1) concluimos que  $f(x) = x$ , y por lo tanto  $x$  es un punto fijo de  $f$ . Este punto fijo es único debido a la contractividad del mapeo  $f$ .  $\square$

### 1.3. Una primera definición de ecuación diferencial

Podemos definir una ecuación diferencial de la siguiente manera.

**Definición 1.6.** Una **ecuación diferencial** es una relación que establecemos por medio de una igualdad entre una variable independiente  $t$  (que a menudo llamaremos **tiempo**), una función desconocida  $x(t)$  y algunas de sus derivadas. Si la función desconocida es de una variable, la ecuación se llama **ordinaria**. La forma general que asume una ecuación diferencial ordinaria es

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0. \quad (1.3)$$

Si la función desconocida depende de varias variables, entonces decimos que es una ecuación en **derivadas parciales**.

**Ejemplo 1.3.** Algunos ejemplos de ecuaciones ordinarias son:

1) La ecuación de crecimiento malthusiano de una población,

$$x'(t) = ax(t), \quad (1.4)$$

2) La ecuación de las vibraciones de una viga,

$$y^{(4)}(t) + ly(t) = 0. \quad (1.5)$$

**Ejemplo 1.4.** La ecuación de la cuerda vibrante,

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = F(t, x),$$

es una ecuación en derivadas parciales.

**Definición 1.7.** Decimos que una ecuación diferencial ordinaria es de **tipo normal** si podemos resolverla con respecto a la derivada de más alto orden. Es decir, podemos escribir la ecuación (1.3) en la forma

$$y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.6)$$

Nos restringiremos al estudio de algunos aspectos de carácter general relacionados con la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias en su forma normal.

En una ecuación diferencial ordinaria aparece la función desconocida y sus derivadas evaluadas en el mismo valor de la variable independiente. Por esta razón, a menudo, omitiremos la variable independiente quedando sobreentendida. Por ejemplo, escribimos la ecuación de Malthus así,

$$x' = ax.$$

**Definición 1.8.** Llamamos **orden** de una ecuación diferencial, al orden más alto de las derivadas que aparecen en ella.

Como podemos ver la ecuación de Malthus (1.4) es de primer orden, mientras que la ecuación de las vibraciones de una viga es de orden cuarto.

**Definición 1.9.** Una **solución o integral** de una ecuación diferencial es una función tantas veces derivable como sea el orden de la ecuación, de modo que al ser sustituida en ésta la convierte en una identidad.

**Observación 1.1.** La función  $x(t) = 0$  satisface la ecuación de Malthus (1.4). Pero también, separando variables, constatamos que cualquier función de la forma

$$x(t) = ke^{at}, k \neq 0,$$

es una solución de la ecuación. A esta expresión, que recoge todas las soluciones de la ecuación, se le llama *solución general*. Para precisar una *solución particular* será necesario imponer además alguna *condición inicial*. Para esto, basta con imponer el valor de la solución en un instante dado: por ejemplo,  $x(0) = 2$ , determina la solución  $x(t) = 2e^{at}$ .

La solución general de una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  contiene  $n$  constantes arbitrarias, pues al tener  $n$  derivadas se obtiene una constante en cada paso de la integración. Por esta razón debemos imponer  $n$  datos proporcionados para un valor específico de la variable independiente, un dato se coloca para la función desconocida y los otros corresponden a las primeras  $n - 1$  derivadas de esa función. A estos datos se les llama **valores iniciales** y permiten determinar los valores de las constantes de integración.

**Definición 1.10.** Al problema de determinar la solución de una ecuación diferencial con datos iniciales le llamamos **problema de valores iniciales** o **problema de Cauchy**.

También es posible plantearse el problema de resolver un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias. En el caso de ecuaciones de primer orden el sistema sería así:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots \\ x_n' &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_1(t_0) &= x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, \dots, x_n(t_0) = x_{n0}. \end{aligned}$$

Por otra parte, dada una ecuación diferencial de orden  $n$  en su forma normal, tal como la (1.6), siempre será posible representarla como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. A continuación mostramos cuales son los cambios de variable para obtener esta representación

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_1' &= y' = x_2 \\ x_2' &= y'' = x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= y^{(n-1)} = x_n \\ x_n' &= y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \end{aligned}$$

lo que produce el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= g(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

el cual podemos expresar en forma vectorial como

$$x' = f(t, x),$$

donde,  $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y

$$f(t, x) = \text{col}(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, g(t, x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

## 1.4. Funciones lipschitzianas

A continuación recordaremos a las funciones lipschitzianas.

**Definición 1.11.** Sea  $J$  un intervalo y  $D$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Decimos que la función  $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es globalmente lipschitziana, respecto a  $x \in D$ , uniformemente respecto a  $t \in J$ , si existe una constante  $L > 0$ , tal que  $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$ , para todo  $x, y \in D$ ,  $t \in J$ . A la constante  $L$  la llamamos constante de Lipschitz para  $f$ .

**Ejemplo 1.5.** Si  $D = \{(t, x) \mid 1 \leq t \leq 2, -3 \leq x \leq 4\}$  y  $f(t, x) = t|x|$ , entonces para cada  $(t, x), (t, y)$  en  $D$ , tenemos que

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= |t|x| - t|y|| \\ &= |t| \left| |x| - |y| \right| \leq 2|x - y|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f$  satisface una condición de Lipschitz en  $D$  para la variable  $x$  con constante de Lipschitz,  $L = 2$ . En realidad, el valor más pequeño posible para la constante de Lipschitz en este problema es  $L = 2$ , puesto que, por ejemplo,

$$|f(2, 1) - f(2, 0)| = |2 - 0| = 2|1 - 0|.$$

**Definición 1.12.** Decimos que  $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función localmente Lipschitz en  $J \times D$ , si para todo punto  $p \in J \times D$ , existe un entorno  $V_p$  del punto  $p$ , tal que la restricción de  $f$  a  $V_p$  es globalmente Lipschitz.

**Ejercicio 1.3.** Demostrar que toda función lipschitziana,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es uniformemente continua.

**Ejercicio 1.4.** Demostrar que toda función diferenciable  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con derivada acotada es lipschitziana.

## Capítulo 2

# Teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Sea  $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $J \subset \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , una función y consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias representado en forma vectorial por

$$x' = f(t, x), \quad (2.1)$$

sujeto a la condición inicial

$$x(t_0) = x_0, \quad (2.2)$$

donde  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

A continuación damos una definición más precisa de solución de solución del sistema de ecuaciones diferenciales (2.1).

**Definición 2.1.** Una función diferenciable  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ , se dice que es una **solución del problema de valores iniciales** (2.1)-(2.2) si se cumplen las siguientes condiciones:

i) El gráfico de  $\varphi$ , esto es, el conjunto

$$\{(t, \varphi(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t \in I\}, \quad (2.3)$$

está contenido en  $J \times D$ .

ii)  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ , para todo  $t \in I$  (en los puntos extremos del intervalo la derivada se entiende como una derivada lateral).

iii)  $\varphi(t_0) = x_0$ .

**Ejercicio 2.1.** Demostrar que resolver el problema de valores iniciales (2.1)-(2.2) es equivalente a resolver la **ecuación integral (de Volterra)**,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (2.4)$$

donde la equivalencia se interpreta en el sentido que las soluciones de ambos problemas son las mismas.

### 2.1. Existencia y unicidad de las soluciones

A continuación presentamos un teorema que aporta una solución local para el problema de existencia y unicidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. La demostración utiliza el teorema de punto fijo de Banach-Cacciopoli e introduce una metodología que se utiliza con frecuencia en la solución de problemas en el área de las ecuaciones diferenciales.

**Teorema 2.1 (de existencia y unicidad de Picard).** *Supóngase que en el problema de valores iniciales (2.1)-(2.2) la función  $f$  es continua en  $J \times D$ , donde  $J$  es un intervalo abierto y  $D$  es abierto y conexo en  $\mathbb{R}^n$ , y además  $f$  satisface una condición de Lipschitz con respecto a  $x \in D$ , entonces existe una única solución del problema (2.1)-(2.2) en algún intervalo  $I_{t_0}$  que contiene al punto  $t_0$ .*

*Demostración.* Tomando en cuenta que  $J$  y  $D$  son abiertos, entonces existen  $\delta_1 > 0$  y  $b > 0$  tal que el conjunto

$$\Omega_1 = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq \delta_1, \|x - x_0\| \leq b\} \quad (2.5)$$

se encuentra totalmente contenido en  $J \times D$ . Como  $\Omega_1$  es cerrado, las funciones componentes de  $f$  son acotadas en  $\Omega_1$ , por lo tanto la norma de  $f|_{\Omega_1}$ , la restricción de la función  $f$  al conjunto  $\Omega_1$ , existe. Luego, existe un número real  $M > 0$  tal que

$$\|f\|_{(t,x) \in \Omega_1} = \sup_{(t,x) \in \Omega_1} \|f(t, x)\| = M.$$

Sea  $L$  la constante de Lipschitz de la función  $f$ , y sea  $\delta$  un número real positivo menor que el mínimo entre los números  $\delta_1, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}$ . El conjunto

$$\Omega = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq \delta, \|x - x_0\| \leq b\} \quad (2.6)$$

es un subconjunto cerrado de  $\Omega_1$ , por lo tanto

$$\|f(t, x)\|_{(t,x) \in \Omega} \leq M.$$

Denotemos por  $I$  al intervalo  $[t_0 + \delta, t_0 - \delta]$  y por  $\mathbf{T}$  al espacio de todas las funciones continuas definidas en  $I$  y a valores en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $\mathbf{S}$  el subconjunto de  $\mathbf{T}$  definido por

$$\mathbf{S} = \{\varphi \in \mathbf{T} \mid \|\varphi - x_0\| \leq b\}.$$

Veamos que  $\mathbf{S}$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbf{T}$ . Para esto, sea  $\phi \in \mathbf{T} - \mathbf{S}$ . La gráfica de  $\phi$  no puede estar totalmente contenida en  $\Omega$ , por lo tanto, existe un punto  $t_1 \in I$  y un número real positivo  $\varepsilon$  tal que

$$\|\phi(t_1) - x_0\| = b + \varepsilon.$$

Ahora, si  $\varphi$  es cualquier elemento de  $\mathbf{T}$  que pertenece a la bola  $B(\phi, \frac{\varepsilon}{2})$  de  $\phi$ , entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \|\varphi(t_1) - x_0\| &= \|\varphi(t_1) - \phi(t_1) + \phi(t_1) - x_0\| \\ &\geq \|\phi(t_1) - x_0\| - \|\varphi(t_1) - \phi(t_1)\| \\ &\geq b + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= b + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Esto implica que  $\varphi \in \mathbf{T} - \mathbf{S}$  y que  $\phi$  es un punto interior a  $\mathbf{T} - \mathbf{S}$ , por lo tanto el conjunto  $\mathbf{T} - \mathbf{S}$  es abierto, y  $\mathbf{S}$  es cerrado. Como  $\mathbf{T}$  es un espacio de Banach, entonces  $\mathbf{S}$  también es de Banach. Sea  $\Phi$  el mapeo definido en  $\mathbf{S}$  por medio de la expresión

$$(\Phi\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad t \in I.$$

Veamos que la imagen de  $\Phi$  está contenida en  $\mathbf{S}$ :

$$\begin{aligned} \|(\Phi\varphi)(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi(s))\| ds \\ &\leq \|f\|_{\Omega} |t - t_0| \\ &\leq M\delta \\ &\leq b, \end{aligned}$$

puesto que  $|t - t_0| \leq \delta \leq \frac{b}{M}$ . Por lo tanto,  $\Phi$  es un mapeo de  $\mathbf{S}$ . Ahora vamos a demostrar que  $\Phi$  es contractiva. Para esto consideremos dos funciones  $\phi, \varphi \in \mathbf{S}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|\Phi(\phi) - \Phi(\varphi)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, \phi(s)) - f(s, \varphi(s))] ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, \phi(s)) - f(s, \varphi(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t L \|\phi(s) - \varphi(s)\| ds \\ &\leq L \|\phi - \varphi\| |t - t_0| \\ &\leq L\delta \|\phi - \varphi\|, \end{aligned}$$

tomando como  $\alpha = L\delta < 1$ , se obtiene así la contractividad de  $\Phi$ . Utilizando ahora el teorema de punto fijo de Banach-Cacciopoli, se obtiene que existe una única función  $\varphi \in \mathbf{S}$  tal que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad t \in I.$$

Lo que es equivalente a decir que existe una única solución del problema de valores iniciales (2.1)-(2.2) definida en  $I_{t_0} = I$ . Lo que completa la demostración.  $\square$

**Ejercicio 2.2.** Dibuje al conjunto  $\Omega_1$  en  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejercicio 2.3.** Estudie el problema de existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación diferencial

$$x' = 3x^{\frac{2}{3}}$$

para una condición inicial dada.

## 2.2. Prolongación de las soluciones y soluciones maximales

El teorema de existencia y unicidad de Picard solamente provee de un resultado local para el problema de la existencia y unicidad de las soluciones. En tal sentido, solamente nos proporciona un pequeño intervalo  $I_{t_0}$  en el cual la solución está definida. Sin embargo, para cada punto  $t_1 \in I_{t_0}$ , diferente de  $t_0$ , el punto  $(t_1, \varphi(t_1))$  en la gráfica de la solución puede tomarse como una nueva condición inicial, para la cual se puede aplicar nuevamente el teorema de existencia y unicidad. Esta segunda aplicación del teorema provee de otro conjunto que contiene a los puntos de la gráfica de una solución  $\bar{\varphi}$ . Se desprende del teorema de existencia y unicidad que en los puntos comunes a ambos conjuntos, las dos soluciones tienen que coincidir. Los puntos de la gráfica de la solución  $\bar{\varphi}$  para  $t$  fuera del intervalo  $I_{t_0}$  representan lo que se llama una **prolongación** de la solución  $\varphi$ .

**Teorema 2.2.** *Supongamos que el problema de valores iniciales (2.1)-(2.2) posee una única solución para cada punto  $(t_0, x_0) \in J \times D$ , donde  $J$  es un intervalo abierto y  $D$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces a cada punto  $(t_0, x_0) \in J \times D$ , le corresponde una única solución,  $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ , del problema de valor inicial antes señalado, que está definida en un intervalo  $I(t_0, x_0) = (\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$ , el cual tiene la propiedad de ser maximal, en el sentido, que toda solución  $\psi$  del problema (2.1)-(2.2) con intervalo de definición  $I$ , cumple que  $I \subset I(t_0, x_0)$  y  $\psi = \varphi|_I$ , la restricción de  $\varphi$  al intervalo  $I$ .*

*Demostración.* Es suficiente con tomar  $I(t_0, x_0) = \cup I_{t_\psi}$ , donde  $I_{t_\psi}$  recorre todos los intervalos de definición de todas las posibles soluciones prolongadas,  $\psi$ , del problema (2.1)-(2.2). Si  $t \in I_{t_\psi}$  definimos  $\varphi(t) = \psi(t)$ . Esta definición no depende de la  $\psi$  usada. En efecto, el conjunto  $C = \{t \in I_{t_{\psi_1}} \cap I_{t_{\psi_2}} \mid \psi_1(t) = \psi_2(t)\}$  es cerrado, abierto y no vacío respecto a  $I_{t_{\psi_1}} \cap I_{t_{\psi_2}}$ . Es cerrado, por ser  $C = (\psi_1 - \psi_2)^{-1}(0)$ ; y  $C$  es abierto porque para todo punto  $t' \in C$ ,  $C$  contiene un pequeño intervalo  $I_{t'} \cap C$  de la solución con condiciones iniciales en el punto  $(t', \psi_1(t'))$ . Por otra parte, como  $I_{t_{\psi_1}} \cap I_{t_{\psi_2}}$  es conexo, entonces se tiene que  $C = I_{t_{\psi_1}} \cap I_{t_{\psi_2}}$ .  $\square$

**Notación 2.1.** *Dada la unicidad de la solución del problema (2.1)-(2.2) y la prolongación que se obtienen de esta solución, representamos a la solución maximal (no prolongable) por medio de la notación*

$$\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0). \quad (2.7)$$

*Esta representación indica que  $\varphi(t)$  tiene que satisfacer la ecuación (2.1) y además,  $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$ . Esta solución maximal está definida en el intervalo maximal de definición de la solución dado por*

$$I(t_0, x_0) = (\omega_-, \omega_+) = (\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0)). \quad (2.8)$$

**Teorema 2.3.** *Utilizando las notaciones anteriores, sea  $\varphi$  la única solución maximal del problema (2.1)-(2.2), entonces la aplicación*

$$g(t) = (t, \varphi(t))$$

*tiende a la frontera de  $J \times D$ ,  $\partial(J \times D)$ , cuando  $t \rightarrow \omega_\pm$ . Esto es, para todo compacto  $K \subset J \times D$  existe una vecindad  $V$  de  $\omega_\pm$  tal que  $g(t) \notin K$  para todo  $t \in V$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe un conjunto compacto  $K \subset J \times D$  y una sucesión  $\{t_n\}$  tal que  $t_n \rightarrow \omega_+$  y  $g(t_n) \in K$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Podemos pasar a una subsucesión convergente de  $\{g(t_n)\}$ , digamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(t'_n) = (\omega_+, x_1) \in K$ . Ahora bien, tomando en cuenta el conjunto  $\Omega$  definido en (2.6) con  $t_0 = \omega_+$  y  $x_0 = x_1$ , podemos ver que para  $n$  lo suficientemente grande será posible prolongar a  $\varphi$  más allá de  $\omega_+$ . Lo que produce una contradicción. Similarmente se procede con  $\omega_-$ .  $\square$

**Teorema 2.4 (Existencia y unicidad global).** *Supongamos que  $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua y localmente lipschitziana. Sea  $\varphi : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow D$ , la única solución no prolongable del problema (2.1)-(2.2). Si existe un conjunto compacto  $D^* \subset D$ , tal que  $\varphi(t) \in D^*$  para todo  $t \in (\omega_-, \omega_+)$ , entonces  $\varphi$  es global; es decir,  $(\omega_-, \omega_+) = J$ .*

*Demostración.* Designemos por  $J$  al intervalo abierto  $(\alpha, \beta)$  y procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que  $\varphi(t) \in D^*$  para todo  $t \in (\omega_-, \omega_+)$ , pero  $\omega_- > \alpha$  o  $\omega_+ < \beta$ . Si  $\omega_+ < \beta$  entonces  $[t_0, \omega_+] \times D^* \subset J \times D$ . Sea  $M = \max\{\|f(t, x)\| \mid (t, x) \in [t_0, \omega_+] \times D^*\}$ , entonces

$$\|\varphi'(t)\| = \|f(t, \varphi(t))\| \leq M, \quad t \in [t_0, \omega_+].$$

Utilizando el teorema anterior tenemos que  $\lim_{t \rightarrow \omega_+} \varphi(t) = B \in D^*$ , por la compacidad de  $D^*$ . Por lo tanto el punto  $(\omega_+, B) \in J \times D$ . En tal caso la solución se puede prolongar a la derecha de  $\omega_+$ , lo que es contradictorio. De manera similar se procede en el caso que fuera  $\omega_- > \alpha$ .  $\square$

## 2.3. Continuidad en las condiciones iniciales y parámetros

Una solución  $\varphi$  del problema (2.1)-(2.2) no sólo depende de  $t$  sino también de los valores iniciales  $t_0, x_0$ . Tal dependencia ya la hemos dejado en claro con la notación (2.1).

También es común que las ecuaciones diferenciales contengan parámetros involucrados en su formulación, por lo que las soluciones también mantienen una relación de dependencia respecto a estos parámetros. Los resultados que siguen a continuación reflejan el tipo de dependencia que se establece.

Comenzaremos por presentar el célebre lema de Gronwall.

**Lema 2.1 (Gronwall).** Sean  $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ , un intervalo;  $t_0 \in I$ , y  $u, v : I \rightarrow [0, +\infty)$  dos funciones continuas. Si  $c \in [0, +\infty)$  es tal que

$$v(t) \leq c + \left| \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds \right|, \quad t \in I,$$

entonces se tiene que

$$v(t) \leq ce^{\left| \int_{t_0}^t u(s)ds \right|}, \quad t \in I.$$

*Demostración.* Supongamos que  $t \geq t_0$ , y definamos

$$w(t) = c + \left| \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds \right|, \quad t \in [t_0, b),$$

entonces

$$w'(t) = u(t)v(t) \leq u(t)w(t), \quad t \in [t_0, b).$$

Por lo tanto, la función  $w(t)e^{-\int_{t_0}^t u(s)ds}$  tiene derivada positiva para  $t \in [t_0, b)$ , lo que implica que

$$w(t)e^{-\int_{t_0}^t u(s)ds} \leq w(t_0) = c, \quad t \in [t_0, b).$$

En el caso  $t \leq t_0$  hacemos

$$w(t) = c + \int_t^{t_0} u(s)v(s)ds, \quad t \in (a, t_0],$$

y el resto de la demostración procede de manera similar.  $\square$

El siguiente teorema establece que para condiciones iniciales cercanas entonces las soluciones respectivas, también estarán localmente cercanas.

**Teorema 2.5.** Supongamos que se cumplen todas las condiciones dadas para el teorema de existencia y unicidad. Y sea  $\psi$  una solución del problema (2.1)-(2.2). Entonces, dado  $\varepsilon > 0$ , existe un número  $\delta > 0$ , tal que la solución  $\bar{\psi}$  del problema con condiciones iniciales en el punto  $(t_1, x_1) \in B_\delta$ ,

$$B_\delta = \{(t, x) \mid t \in I_{t_0}, \|x - x_0\| < \delta\},$$

cumple que

$$\|\bar{\psi} - \psi\| < \varepsilon,$$

donde esta última norma está referida al espacio de las funciones continuas sobre el intervalo común de definición de  $\psi$  y  $\bar{\psi}$ .

*Demostración.* Sea  $0 < \varepsilon \leq \delta_1$  un número dado, donde  $\delta_1$  define al conjunto  $\Omega_1$  dado en (2.5). Coloquemos  $I_{t_0} = [a, b] = [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ . Vamos a demostrar que el número  $\delta$  al que hace referencia el teorema podemos escogerlo como

$$\delta < \varepsilon e^{-L(b-a)},$$

donde  $L$  es la constante de Lipschitz de la función  $f$ . Ahora denotando a las funciones  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  con su representación integral

$$\begin{aligned}\psi(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds, \\ \bar{\psi}(t) &= x_1 + \int_{t_1}^t f(s, \bar{\psi}(s)) ds,\end{aligned}$$

tenemos que para  $t \geq t_1$ ,

$$\begin{aligned}\|\bar{\psi}(t) - \psi(t)\| &\leq \|x_0 - x_1\| + \int_{t_1}^t \|f(s, \bar{\psi}(s)) - f(s, \psi(s))\| ds \\ &\leq \delta + \int_{t_1}^t L \|\bar{\psi}(t) - \psi(t)\| ds.\end{aligned}$$

Aplicando el lema de Gronwall nos queda que

$$\|\bar{\psi}(t) - \psi(t)\| \leq \delta e^{L(t-t_1)} \leq \delta e^{L(b-a)}.$$

Seleccionando  $\delta$  tal como se indicó al inicio de la demostración, nos queda

$$\|\bar{\psi}(t) - \psi(t)\| < \varepsilon.$$

Lo que demuestra el teorema. □

**Teorema 2.6.** *Bajo las hipótesis del teorema anterior, las soluciones del problema (2.1)-(2.2) dependen continuamente de  $t_0$  y  $x_0$ .*

**Ejercicio 2.4.** *demostrar el teorema anterior utilizando la representación  $\varphi(t, t_0, x_0)$  para la solución del problema (2.1)-(2.2).*

Del teorema anterior se desprende el siguiente corolario.

**Corolario 2.1.** *La función  $\varphi(t, t_0, x_0)$  es una función continua de sus  $n + 2$  variables.*

**Ejercicio 2.5.** *demostrar el corolario anterior.*

Como señalamos al comienzo de esta sección, es muy común que la parte derecha del sistema de ecuaciones diferenciales (2.1) dependa también de algunos parámetros. Para enfatizar esta situación reescribimos (2.1) de la siguiente manera,

$$x' = f(t, x, p) \tag{2.9}$$

donde  $p \in \mathbb{R}^k$ ,  $k \geq 1$ , es un vector de parámetros. Con estas notaciones presentamos el siguiente teorema.

**Teorema 2.7.** *Supongamos que la función  $f$  que define el sistema de ecuaciones diferenciales (2.9) es continua con respecto a  $p$  y es globalmente lipschitziana en  $x$  uniformemente con respecto a  $t$  y  $p$ . Entonces las soluciones de (2.9) dependen continuamente de  $p$ .*

*Demostración.* Sea  $\psi_0$  la solución de (2.9) para  $p = p_0$  y la condición inicial  $(t_0, x_0) \in \Omega_1$ , donde  $\Omega_1$  está dado en (2.5). Sea  $0 < \varepsilon \leq \delta_1$  y  $L$  la constante de Lipschitz de la función  $f$ . Entonces es posible encontrar un número  $\delta > 0$  tal que

$$\|f(t, \psi_0(t), p) - f(t, \psi_0(t), p_0)\| < \frac{\varepsilon}{b-a} e^{-L(b-a)},$$

para todo  $t \in [a, b] = [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ , siempre que  $\|p - p_0\| < \delta$ . Ahora bien, sea  $p$  tal que  $\|p - p_0\| < \delta$ , y  $\psi$  la solución que correspondiente a este valor de  $p$  y la misma condición inicial  $(t_0, x_0)$ , usando la representación integral tenemos

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s), p) ds$$

y

$$\psi_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi_0(s), p_0) ds.$$

Entonces, para  $t \geq t_0$  se tiene que

$$\begin{aligned} \|\psi(t) - \psi_0(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, \psi(s), p) - f(s, \psi_0(s), p_0)\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, \psi(s), p) - f(s, \psi(s), p_0)\| ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \|f(s, \psi(s), p_0) - f(s, \psi_0(s), p_0)\| ds. \end{aligned}$$

Usando las hipótesis dadas tenemos que

$$\|\psi(t) - \psi_0(t)\| \leq \varepsilon e^{-L(b-a)} + \int_{t_0}^t L \|\psi(s) - \psi_0(s)\| ds,$$

y procediendo como en el teorema de dependencia continua respecto a las condiciones iniciales tenemos que,

$$\|\psi(t) - \psi_0(t)\| < \varepsilon$$

para todo  $t \in [a, b]$ . Lo que completa la demostración.  $\square$

**Ejercicio 2.6 (La ecuación logística).** *La ecuación diferencial*

$$x' = \gamma x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \tag{2.10}$$

*describe el crecimiento logístico de una población, el parámetro  $\gamma$  es la tasa de crecimiento de la población y  $K$  es la capacidad de carga del ambiente, es decir, el máximo de la población que el ambiente puede soportar. Para esta ecuación aplique el teorema de existencia y unicidad, así como los teoremas de dependencia continua con respecto a condiciones iniciales y parámetros. También aplique el teorema de existencia y unicidad global.*

## Capítulo 3

# Teoría cualitativa

En este capítulo describiremos algunas ideas que permiten estudiar desde el punto de vista cualitativo una clase importante de ecuaciones diferenciales denominadas ecuaciones diferenciales autónomas. Aclaremos al lector que la teoría que presentamos supone que la función  $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisface condiciones de existencia y unicidad tales como la del teorema de Picard.

**Definición 3.1.** Se dice que la ecuación (2.1) es **autónoma** si la función  $f(t, x)$ , no depende explícitamente del tiempo  $t$ , es decir,  $f(t, x) = f(x)$ . En tal caso tenemos que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  y la ecuación diferencial es

$$x' = f(x). \quad (3.1)$$

A la función  $f$  le llamaremos el **campo vectorial** asociado a la ecuación (3.1).

**Ejercicio 3.1.** Demostrar que si  $\varphi(t)$  es una solución de la ecuación (3.1) entonces  $\psi(t) = \varphi(t+c)$ , también lo es, para toda constante  $c$ .

**Definición 3.2.** Supongamos que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , al conjunto de puntos  $x$  en  $D$  tal que

$$f(x) = 0,$$

se les llama **puntos críticos** (o **puntos de equilibrio**) de la ecuación (3.1).

**Ejercicio 3.2.** Si  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  es un punto crítico de la ecuación (3.1) entonces  $\psi(t) = \bar{x}$  es una solución de esta ecuación.

**Observación 3.1.** En el caso de las ecuaciones autónomas podemos considerar, sin perder generalidad, los problemas de valores iniciales tomando  $t_0 = 0$ , es decir,

$$x(0) = x_0. \quad (3.2)$$

La representación para las soluciones maximales que empleamos en la notación (2.1), en el caso del problema de valores iniciales (3.1)-(3.2) se puede reducir simplemente a colocar la función  $\varphi(t, x_0)$  para representar a la solución maximal que cumple que  $\varphi(0, x_0) = x_0$ , y representaremos por  $I(x_0)$  a su intervalo maximal de definición.

### 3.1. El flujo de una ecuación autónoma

Cuando se estudia cualitativamente a una ecuación diferencial, interesa conocer tanto el cuadro global de sus soluciones, así como su comportamiento asintótico, es decir, se desea conocer a donde van a terminar las soluciones conforme el tiempo avanza, problema conocido como estabilidad.

El conjunto de todas las soluciones de la ecuación (3.1), es decir, todas las soluciones que se obtienen para todas las posibles condiciones iniciales que se puedan tomar en  $D$ , es de especial interés.

**Definición 3.3.** A la función  $\varphi(t, y)$ , tal que  $\varphi(0, y) = y$ , que representa a la solución de la ecuación (3.1), la llamaremos **el flujo** de la ecuación (3.1).

**Observación 3.2 (Propiedades del flujo).** Como podemos ver, para el flujo de una ecuación diferencial autónoma se tienen las siguientes propiedades:

- i) *Translación:*  $\varphi(t + c, y)$  es solución de la ecuación diferencial (3.1) para toda  $c \in \mathbb{R}$ .
- ii) *Semigrupo:*  $\varphi$  es una función continua en todas sus variables y además cumple: a)  $\varphi(0, y) = y$ , para toda  $y \in D$ ; b)  $\varphi(t + s, y) = \varphi(t, \varphi(s, y))$  para toda  $t, s \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in D$ .

Es importante observar que para la gráfica de las soluciones requerimos puntos de la forma  $(t, \varphi(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Sin embargo, el flujo se considerará en  $\mathbb{R}^n$ , una dimensión menos. Por lo que, obtener la gráfica del flujo nos permite una de obtener información cualitativa acerca de las soluciones del problema.

### 3.1.1. Órbitas y conjuntos invariantes

En el espacio de fases existen una serie de conjuntos que desde el punto de vista geométrico son interesantes de estudiar por la gran cantidad de información que pueden dar. A continuación definiremos algunos de estos conjuntos.

**Definición 3.4.** Sea  $\varphi(t) = \varphi(t, x_0)$  la única solución no prolongable del problema (3.1)-(3.2) y sea  $I(x_0)$  el intervalo maximal de definición de  $\varphi$ . Al conjunto de puntos

$$\mathcal{O}^+(x_0) = \{(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \mathbb{R}^n \mid t > 0\}$$

le llamaremos la **órbita positiva** de la solución  $\varphi(t)$  del sistema por el punto  $x_0$ .

Al conjunto de puntos

$$\mathcal{O}^-(x_0) = \{(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \mathbb{R}^n \mid t < 0\}$$

le llamaremos la **órbita negativa** de la solución  $\varphi(t)$  del sistema por el punto  $x_0$ .

El conjunto

$$\mathcal{O}(x_0) = \{(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \mathbb{R}^n \mid t \in I(x_0)\}$$

le llamaremos la **órbita** de la solución  $\varphi(t)$  del sistema por el punto  $x_0$ .

Es importante observar que las órbitas no son únicas, es decir, problemas con diferentes datos iniciales dan lugar a soluciones distintas. Sin embargo, pueden compartir la misma órbita. Es decir,  $q \in \mathcal{O}(p)$ , es equivalente a que  $\mathcal{O}(q) = \mathcal{O}(p)$ . De hecho, si  $q \in \mathcal{O}(p)$ ,  $q = \varphi(t_1, p)$ , y por el teorema de existencia y unicidad,  $\varphi(t, q) = \varphi(t + t_1, p)$ , y además

$$I(q) = I(p) - t_1 = \{t - t_1 \mid t \in I(p)\}.$$

**Teorema 3.1.** Sea  $\varphi$  una solución maximal de la ecuación (3.1) definida en  $I$ , entonces se verifica solamente una de las siguientes alternativas:

- a)  $\varphi$  es inyectiva.
- b)  $I = \mathbb{R}$  y  $\varphi$  es constante.
- c)  $I = \mathbb{R}$  y  $\varphi$  es periódica, es decir, existe un  $\tau > 0$  tal que  $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , y  $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$  si  $|t_1 - t_2| < \tau$ .

*Demostración.* Si  $\varphi$  no es inyectiva, entonces  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ , para ciertos  $t_1 \neq t_2$ . Haciendo  $c = t_2 - t_1 \neq 0$ , tenemos que  $\psi(t) = \varphi(t + c)$  es solución de la ecuación (3.1), y se tiene que  $\psi(t_1) = \varphi(t_2) = \varphi(t_1)$ . Por la unicidad se tiene que  $\varphi(t) = \varphi(t + c)$  para toda  $t \in [t_1, t_1 + c]$ , y  $[t_1, t_1 + c] \subset I$ . Continuando de esta manera obtenemos que  $\varphi(t) = \varphi(t + c)$  para toda  $t \in \mathbb{R}$ . El conjunto

$$\mathcal{C} = \{c \in \mathbb{R} \mid \varphi(t) = \varphi(t + c) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

es un subgrupo aditivo cerrado de  $\mathbb{R}$ . De hecho,  $\varphi(t + c + d) = \varphi(t + c) = \varphi(t)$  y  $\varphi(t - c) = \varphi(t - c + c) = \varphi(t)$  para  $c, d \in \mathcal{C}$ . Ahora, si  $\{c_n\} \subset \mathcal{C}$  es tal que  $c_n \rightarrow c$ , entonces

$$\varphi(t + c) = \varphi(t + \lim_{n \rightarrow \infty} c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t + c_n) = \varphi(t).$$

Se deduce de esto que  $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}} = \mathbb{R}$  o  $\mathcal{C} = v\mathbb{Z}$ ,  $v > 0$ . Lo que implica los casos b) y c) respectivamente.  $\square$

**Observación 3.3.** *En la clasificación de las órbitas que nos proporciona el teorema anterior, usualmente se utiliza la siguiente terminología: en el caso b) se dice que la órbita es un **punto singular**; mientras que en el caso c) la órbita se llama indistintamente **órbita periódica** u **órbita cerrada**.*

**Ejercicio 3.3.** *Mostrar que todo subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C} \neq \{0\}$ , es de la forma  $v\mathbb{Z}$ ,  $v > 0$ , o sino es denso en  $\mathbb{R}$ .*

**Definición 3.5.** *Al conjunto*

$$\{\varphi(t, y) = (\varphi_1(t, y), \dots, \varphi_n(t, y)) \in \mathbb{R}^n \mid t \in I(y), y \in D\}$$

*dotado de la descomposición en órbitas, lo llamaremos el **espacio de fases** de la ecuación (3.1) (o del campo vectorial  $f$ ). Las órbitas, podemos considerar que están orientadas en el sentido que lo determinan las componentes de las soluciones de la ecuación (3.1) para  $t$  creciente.*

Como podemos ver, el espacio de fases está constituido por todas las órbitas posibles del problema conforme  $y$  varía en  $D$ .

**Ejercicio 3.4.** *Dibuje las soluciones y el espacio de fases de la ecuación logística 2.10.*

Los conjuntos que definimos a continuación también revisten particular importancia.

**Definición 3.6.** *Diremos que un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , tiene la propiedad de ser **positivamente invariante** bajo el flujo de la ecuación (3.1), si  $\varphi(t, y) \in A$ , para todo  $y \in A$  y todo  $t \geq 0$ . Es decir;  $\varphi(t, A) \subset A$ , para todo  $t \geq 0$ . Similarmente, diremos que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es **negativamente invariante** bajo el flujo de la ecuación (3.1) si  $\varphi(t, y) \in A$ , para todo  $y \in A$  y todo  $t \leq 0$ . Es decir;  $\varphi(t, A) \subset A$ , para todo  $t \leq 0$ . Finalmente, diremos que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es **invariante** bajo el flujo de la ecuación (3.1) si  $\varphi(t, y) \in A$ , para todo  $y \in A$  y todo  $t \in I(y)$ . Es decir;  $\varphi(t, A) \subset A$ , para todo  $t \in I(y)$ .*

**Ejercicio 3.5.** *Detecte los conjuntos invariantes de la ecuación logística (2.10).*

### 3.1.2. Conjuntos $\omega$ -límites y $\alpha$ -límites

Los conjuntos que definimos a continuación nos permiten analizar el comportamiento de las soluciones.

**Definición 3.7.** Un punto  $p \in \mathbb{R}^n$ , se dice que es **un punto  $\omega$ -límite** de la solución  $\varphi(t, y)$  si existe una sucesión  $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$  con la propiedad que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  y tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, y) = p.$$

Denotaremos por  $\omega(y)$  al conjunto de todos los puntos  $\omega$ -límites de la solución  $\varphi(t, y)$ . Es decir,

$$\omega(y) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \text{existe } \{t_n\} \subset \mathbb{R}, t_n \rightarrow \infty, \varphi(t_n, y) \rightarrow p\}.$$

**Definición 3.8.** Diremos que un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  es **un punto  $\alpha$ -límite** de  $\varphi(t, y)$  si existe una sucesión  $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\infty$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, y) = p.$$

Denotaremos por  $\alpha(y)$  al conjunto de todos los puntos  $\alpha$ -límite de  $\varphi(t, y)$ . Es decir,

$$\alpha(y) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \text{existe } \{t_n\} \subset \mathbb{R}, t_n \rightarrow -\infty \text{ y } \varphi(t_n, y) \rightarrow p\}.$$

En el siguiente teorema presentamos las propiedades fundamentales de los conjuntos  $\omega$ -límites.

**Teorema 3.2.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$ , un subconjunto compacto y positivamente invariante respecto a (3.1). Entonces para  $y \in M$  se tiene:

- (i)  $\omega(y) \neq \emptyset$ .
- (ii)  $\omega(y)$  es cerrado.
- (iii)  $\omega(y)$  es invariante bajo el flujo de la ecuación (3.1). Es decir,  $\omega(y)$  es una unión de órbitas.
- (iv)  $\omega(y)$  es conexo.

*Demostración.* i) Si  $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$  es tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ , entonces  $\{\varphi(t_n, y)\} \subset M$ . Como  $M$  es compacto, entonces existe una subsucesión  $\{\varphi(t_{n_i}, y)\}$  convergente; digamos que converge a  $y \in M$ . Así, tenemos que

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \varphi(t_{n_i}, y) = y,$$

por definición  $y \in \omega(y)$ , y así  $\omega(y) \neq \emptyset$ .

ii) Vamos a demostrar que el complemento de  $\omega(y)$  es abierto. Sea  $q \notin \omega(y)$ , entonces tiene que existir una vecindad de  $q$  de radio  $\varepsilon > 0$ ,  $B_\varepsilon(q)$ , tal que

$$B_\varepsilon(q) \cap \{\varphi(t, y) \mid t > T\} = \emptyset, \text{ para algún } T > 0. \quad (3.3)$$

Si no fuera así entonces podríamos construir una sucesión de tiempos  $t_n \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$  tal que

$$\varphi(t_n, y) \rightarrow q, \quad n \rightarrow \infty,$$

y  $q$  pertenecería a  $\omega(y)$  lo que es contradictorio. De modo que  $T > 0$  y  $\varepsilon > 0$  deben existir para que la intersección en (3.3) sea vacía. Así, la vecindad  $B_\varepsilon(q)$  no puede contener ningún elemento de  $\omega(y)$  porque existiría una sucesión  $\{t_n\}$  tal que

$$\varphi(t_n, y) \rightarrow \bar{p} \in \omega(y) \cap B_\varepsilon(q), \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

lo que contradiría que

$$B_\varepsilon(q) \cap \{\varphi(t, y) \mid t > T\} = \emptyset.$$

Por lo tanto,

$$B_\varepsilon(q) \cap \omega(y) = \emptyset,$$

y  $B_\varepsilon(q) \subset (\omega(y))^c$ , el complemento de  $\omega(y)$ . Deducimos de esto que  $(\omega(y))^c$  es abierto, y por lo tanto  $\omega(y)$  es cerrado.

iii) Sea  $q \in \omega(y)$ , tenemos que demostrar que:

$$\varphi(t, q) \in \omega(y), \text{ para toda } t.$$

Sea  $\{t_n\}$ , con  $t_n \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$  tal que

$$\varphi(t_n, y) \rightarrow q, \quad n \rightarrow \infty.$$

Por la propiedad de semigrupo,

$$\varphi(t_n + t, y) = \varphi(t, \varphi(t_n, y));$$

luego

$$\varphi(t_n + t, y) \rightarrow \varphi(t, q) \text{ cuando } t_n \rightarrow \infty,$$

es decir,

$$\varphi(t, q) \in \omega(y),$$

de donde deducimos la invarianza de  $\omega(y)$ .

iv) Supongamos que  $\omega(y)$  no es conexo; entonces podemos escoger dos conjuntos abiertos  $U_1$  y  $U_2$  tal que

$$\begin{aligned} \omega(y) &\subset U_1 \cup U_2, \quad V_1 = \omega(y) \cap U_1 \neq \emptyset, \\ V_2 &= \omega(y) \cap U_2 \neq \emptyset \text{ y } V_1 \cap V_2 = \emptyset, \quad V_1 \cup V_2 = \omega(y), \end{aligned}$$

Sea

$$\delta = \inf \{ \|p - q\| / p \in V_1, q \in V_2 \}.$$

Como  $V_1$  y  $V_2$  son cerrados y acotados, entonces  $\delta > 0$ , y existen puntos  $p_0 \in V_1$ ,  $q_0 \in V_2$  tales que  $\|p_0 - q_0\| = \delta$ .

Sean  $\{t'_n\}$  y  $\{t''_n\}$  tales que  $t'_n \rightarrow \infty$ ,  $t''_n \rightarrow \infty$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , y

$$\begin{aligned} \varphi(t'_n) &\rightarrow p_0, \quad n \rightarrow \infty \\ \varphi(t''_n) &\rightarrow q_0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Sean  $V_0$  y  $W_0$  vecindades respectivas de  $p_0$  y  $q_0$  de radio, digamos,  $\frac{\delta}{4}$ . Definamos la sucesión  $\{t_n\}$  de modo que:

- (a)  $t_n = t'_n$  si  $n$  es par y  $t_n = t''_n$  si  $n$  es impar,
- (b)  $\varphi(t_n) \in V_0$  para  $n$  par y  $\varphi(t_n) \in W_0$  si  $n$  es impar.

Como  $\varphi$  es continua en  $t$  debe existir un punto  $t_j^*$  entre  $t_j$  y  $t_{j+1}$ , tal que  $\varphi(t_j^*)$  satisface

$$\|\varphi(t_j^*) - p\| \geq \delta/2$$

y

$$\|\varphi(t_j^*) - q\| \geq \delta/2,$$

para toda  $p \in V_1$  y  $q \in V_2$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . La sucesión  $\{\varphi(t_j^*)\}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , tiene una subsucesión convergente, digamos a  $p^*$  y tomando en cuenta la magnitud de las normas descritas antes, tenemos que  $p^*$  no pertenece ni a  $V_1$  ni a  $V_2$  lo que contradice el hecho que  $\omega(y) = V_1 \cup V_2$ , y puesto que  $p^* \in \omega(y)$ . Por lo tanto,  $\omega(y)$  es conexo.  $\square$

### 3.2. El teorema de Poincaré-Bendixson

En esta sección abordaremos el estudio de algunos resultados, los cuales son únicamente válidos para sistemas de ecuaciones diferenciales en  $\mathbb{R}^2$ . Estos resultados permiten obtener información parcial y global acerca de las órbitas de los sistemas mencionados en una gran cantidad de casos. Un primer resultado es el teorema de Poincaré-Bendixson.

Sean  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  dos funciones continuas y globalmente lipschitzianas en  $D$  y consideremos el sistema bidimensional

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\y' &= g(x, y),\end{aligned}\tag{3.4}$$

$(x, y) \in D$ .

Antes de presentar el teorema de Poincaré-Bendixson introduciremos la siguiente definición y requeriremos de algunos lemas previos.

**Definición 3.9.** Sea  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un subconjunto abierto y simplemente conexo (es decir, que no tiene huecos) donde se encuentra definido el sistema bidimensional (3.4). Sea  $\Sigma$  un arco continuo y conexo contenido en  $D$ . Decimos que  $\Sigma$  es un arco transversal al campo vectorial asociado a (3.4) en  $D$ , si el producto escalar del vector normal unitario en cada punto de  $\Sigma$  con el campo vectorial en ese punto, no es cero y no cambia de signo sobre  $\Sigma$ .

En otras palabras el campo vectorial  $f(x)$  no tiene puntos de equilibrio en  $\Sigma$  y no es tangente a  $\Sigma$ .

**Lema 3.1 (del saco de Bendixson).** Sea  $\Sigma \subset M$ ,  $M$  la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^2$ , un arco transversal al campo vectorial (3.4). La órbita positiva a través de un punto  $y \in M$ , denotada por  $\mathcal{O}^+(y)$  interseca a  $\Sigma$  en una sucesión monótona de puntos. Esto quiere decir que, si  $p_i$  es la  $i$ -ésima intersección, entonces  $p_i \in \overline{[p_{i-1}, p_{i+1}]}$ , donde  $\overline{[p_{i-1}, p_{i+1}]}$  es el segmento del arco  $\Sigma$  que une  $p_{i-1}$  con  $p_{i+1}$ .

*Demostración.* Consideremos la órbita  $\mathcal{O}^+(y)$  y sean  $p_{i-1}, p_i$  las intersecciones consecutivas con el arco transversal  $\Sigma$ . Fijemos nuestra atención en el pedazo de órbita que va de  $p_{i-1}$  a  $p_i$  conjuntamente con el segmento de arco  $\overline{[p_{i-1}, p_i]}$ , estas curvas definen una región  $D$  (lo que constituye el llamado saco de Bendixson), la cual es positivamente invariante, en efecto, una órbita que arranca en  $\overset{\circ}{D}$ , el interior de  $D$ , no puede salir por el pedazo de órbita de  $\mathcal{O}^+(y)$  desde  $p_{i-1}$  hasta  $p_i$ , porque al intersecarla debería coincidir enteramente con ella, pues como sabemos, las órbitas o son disjuntas o coinciden. Tampoco puede salir por el pedazo de arco de  $\Sigma$  entre  $p_{i-1}$  y  $p_i$ , porque en tal caso el producto escalar del campo vectorial con un vector unitario ubicado en el segmento de arco  $\Sigma$  cambiaría de signo, lo que no es posible porque  $\Sigma$  es un arco transversal. Por lo tanto, la órbita que arranca de  $p_i$  corta al segmento  $\Sigma$  en un punto  $p_{i+1}$  dentro de la región  $D$  y así  $p_i \in \overline{[p_{i-1}, p_{i+1}]}$ .  $\square$

**Corolario 3.1.** Sea  $\Sigma$  un arco transversal al campo vectorial (3.4) en un punto  $y \in M$ , el conjunto  $\omega$ -límite de  $y$ ,  $\omega(y)$ , interseca a  $\Sigma$  a lo más en un punto.

*Demostración.* Supongamos que  $\omega(y)$  contiene dos puntos  $q_1$  y  $q_2$  de  $\Sigma$ . Designemos por  $\mathcal{O}(y)$  la órbita a través de  $y$ , y por  $\{p_n\}$  la sucesión de las intersecciones de  $\mathcal{O}(y)$  con  $\Sigma$ . Entonces deben existir subsucesiones de  $\{p_n\}$  que convergen a  $q_1$  y  $q_2$ , lo cual conduce a una contradicción debido a la propiedad de monotonía de la sucesión  $\{p_n\}$  establecida en el lema del saco de Bendixson.  $\square$

**Lema 3.2.** *Sea  $q$  un punto interior de un arco transversal  $\Sigma$ . Entonces dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que toda órbita que se encuentre en la bola  $B(q, \delta)$ , debe cruzar  $\Sigma$  en un tiempo  $t$ ,  $|t| < \varepsilon$ .*

*Demostración.* Con el objeto de hacer más sencilla la demostración se puede suponer sin perder la generalidad con suponer que  $\Sigma$  es un segmento de recta y que se ha realizado una traslación de modo que  $q$  es el origen y coincide con el eje  $y$ . Sea  $\varphi(t, z) = (x(t, z), y(t, z))$  la solución que parte de  $z$ . Las componentes de  $\varphi(t, z)$  son continuas en todas sus variables. Además

$$x(t, 0) = 0$$

y

$$\frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{(0,0)} = f(0, 0) \neq 0,$$

puesto que  $\Sigma$  es un segmento transversal que coincide con el eje  $y$ . Por el teorema de la función implícita (ver, [2], página 265) existe una función continua  $t = t(z)$ , tal que  $t(0) = 0$  y  $x(t(z), z) = 0$ . Ahora, como  $t(z)$  es continua en  $z = 0$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $z \in B(0, \delta)$ , entonces  $|t(z)| < \varepsilon$ , de donde obtenemos el resultado.  $\square$

**Lema 3.3.** *Si  $\mathcal{O}^+(y)$  y  $\omega(y)$  tienen intersección no vacía, entonces  $\mathcal{O}^+(y)$  es una órbita cerrada*

*Demostración.* Sea  $q \in \mathcal{O}^+(y) \cap \omega(y)$ . Si  $q$  es un punto de equilibrio, entonces  $\{q\} = \omega(y) = \mathcal{O}^+(y)$  y no hay nada que demostrar. De modo que supongamos que  $q$  no es un punto de equilibrio y sea  $\Sigma$  un arco transversal en  $q$ . Sea  $\varphi(t, y)$  la solución por  $y$ , entonces existe  $t_0 > 0$  tal que  $\varphi(t_0, y) = q$ . Consideramos en el lema anterior  $\varepsilon = 1$ , existe una bola  $B(q, \delta)$  tal que si  $\varphi(t, y)$  pertenece a esta bola para algún  $t = t^*$ , entonces  $\varphi(t, y)$  interseca el arco  $\Sigma$  en un tiempo  $t$  tal que  $|t - t^*| < 1$ . Como  $q \in \mathcal{O}^+(y)$  es claro que existe  $t^* > t_0 + 2$  y  $\varphi(t^*, q) \in B(q, \delta)$ . Por lo tanto, existe  $\bar{t} > t^* + 1$  tal que el arco de curva correspondiente a la solución  $\varphi(t, y)$  comprendido entre  $t^*$  y  $\bar{t}$  interseca nuevamente al arco  $\Sigma$  en un punto  $\bar{q}$ . Si  $\bar{q} = q$  entonces  $\mathcal{O}^+(y)$  es una órbita cerrada. Si  $\bar{q} \neq q$ , sabemos que  $\mathcal{O}^+(y)$  interseca a  $\Sigma$  en una sucesión monótona de puntos que se alejan de  $q$ , lo que contradice el hecho que  $q \in \omega(y)$ . Por lo tanto, debe ser  $\bar{q} = q$ .  $\square$

Ahora estamos en condiciones de ver el teorema de Poincaré-Bendixson.

**Teorema 3.3 (Poincaré-Bendixson).** *Supongamos que  $M$  es un conjunto compacto y positivamente invariante con respecto al sistema (3.4). Si  $y \in M$  es tal que  $\omega(y)$  no contiene puntos de equilibrio, entonces:*

(i)  $\mathcal{O}^+(y) = \omega(y)$  es una órbita cerrada (donde  $\mathcal{O}^+(y)$  es la semiórbita positiva a través de  $y$ )  
ó

(ii)  $\omega(y)$  es una órbita cerrada.

*Demostración.* i) Si  $\mathcal{O}^+(y)$  es cerrada, entonces  $\mathcal{O}^+(y) = \omega(y)$ , puesto que si consideramos  $\varphi(t, y)$  la solución de periodo  $T$  de (3.4) que parte del punto  $y$ , entonces colocando  $t_n = nT$ ,  $\varphi(t_n, y) = y$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , por lo tanto  $y \in \omega(y)$ , y así concluimos que  $\mathcal{O}^+(y) \subset \omega(y)$ . Si  $\mathcal{O}^+(y)$  está contenida propiamente en  $\omega(y)$ , como  $\omega(y)$  es conexo, el conjunto  $\omega(y) \setminus \mathcal{O}^+(y)$ , la diferencia de los conjuntos  $\omega(y)$  y  $\mathcal{O}^+(y)$ , no puede ser un conjunto cerrado, porque si lo fuera, podríamos descomponer a  $\omega(y)$  en dos conjuntos cerrados y disjuntos, lo que es imposible. Deducimos entonces que existe  $q \in \mathcal{O}^+(y)$  y una sucesión  $q_n \in \omega(y) \setminus \mathcal{O}^+(y)$  tal que  $q_n \rightarrow q$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Sea  $\Sigma$  un arco transversal por  $q$ . Sabemos del lema 3.2 que si  $q_n$  está suficientemente cerca de  $q$ , entonces la órbita que pasa por  $q_n$  interseca a  $\Sigma$ . También la órbita que pasa por  $q_n$  está contenida en  $\omega(y)$  puesto que  $\omega(y)$  es

invariante. Entonces  $\omega(y)$  tiene dos puntos en común con  $\Sigma$ ,  $q$  y  $q_n$  lo que es una contradicción de acuerdo con el corolario del lema del saco de Bendixson. Por lo tanto, tiene que ser  $\mathcal{O}^+(y) = \omega(y)$ .

ii) Supongamos que  $\mathcal{O}^+(y)$  está contenida en  $M$ , y sea  $q \in \omega(y)$ , por hipótesis  $q$  no es un equilibrio. Existen dos posibilidades:

(a)  $q \in \mathcal{O}^+(y)$ , en este caso, por el lema anterior  $\mathcal{O}^+(y)$  es una órbita cerrada y  $\mathcal{O}^+(y)$  tiene que coincidir con  $\omega(y)$  por la conexidad. Por lo tanto,  $\omega(y)$  es una órbita cerrada.

(b)  $q \notin \mathcal{O}^+(y)$ . Como  $q \in \omega(y)$ ,  $\mathcal{O}^+(q) \subset \omega(y)$  por la invarianza de  $\omega(y)$ . Además como  $\omega(y)$  es cerrado y acotado, si  $\{t_n\}$  es una sucesión tal que  $t_n \rightarrow \infty$ , entonces  $\{\varphi(t_n, q)\}$  tiene un punto límite  $\bar{q}$  en  $\omega(q)$ . Si  $\bar{q} \in \mathcal{O}^+(q)$  entonces  $\mathcal{O}^+(\bar{q})$  es cerrada por el lema anterior y nuevamente tendríamos que  $\omega(q)$  es una órbita cerrada (tal como hicimos en la parte (a), y como  $q \in \omega(y)$  resulta que  $\omega(y) = \omega(q)$ , por lo tanto  $\omega(y)$  es una órbita cerrada.

Si  $\bar{q} \notin \mathcal{O}^+(q)$ , entonces sea  $\Sigma$  un arco transversal por  $\bar{q}$ . Como  $\bar{q} \in \omega(q)$ ,  $\mathcal{O}^+(q)$  debe intersectar a  $\Sigma$  en puntos  $p_1, p_2, \dots$ , que se acumulan monotonamente en  $\bar{q}$ . Como  $q \in \omega(y)$  entonces  $\mathcal{O}^+(q) \subset \omega(y)$  debido a la invarianza. Por lo tanto  $p_1, p_2, \dots \in \omega(y)$ . Deducimos de esto que  $\mathcal{O}^+(y)$  pasa arbitrariamente cerca de cada uno de los puntos  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , regresando sucesivamente muy cerca de cada uno de estos puntos. Esto contradice la monotonía de las intersecciones de  $\mathcal{O}^+(y)$  con  $\Sigma$ . Por lo tanto,  $\bar{q} \in \mathcal{O}^+(q)$  y  $\omega(y)$  es una órbita cerrada.  $\square$

### 3.3. Criterios negativos

En este capítulo estudiaremos dos criterios que usualmente se les llama criterios negativos, debido a que en la práctica permiten descartar (o negar) la existencia de órbitas o soluciones periódicas para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo autónomo en el plano.

#### 3.3.1. El criterio negativo de Bendixson

El primer criterio que presentamos en el siguiente teorema se le conoce como criterio negativo de Bendixson.

**Teorema 3.4 (Criterio Negativo de Bendixson).** Sean  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dos funciones diferenciables y consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales (3.4). Sea  $D$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ , simplemente conexo (es decir, que no tiene huecos). Si la expresión

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

no es idénticamente cero y no cambia de signo en  $D$ , entonces el sistema dado no puede tener una órbita cerrada completamente contenida en  $D$ .

*Demostración.* Supongamos que existe una órbita cerrada  $\Gamma$  contenida en  $D$ , con  $\Gamma = (x(t), y(t))$  de período  $T$ .

Entonces resulta que

$$\begin{aligned} dx &= f(x(t), y(t)) dt \\ dy &= g(x(t), y(t)) dt \end{aligned}$$

y se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (f(x, y)dy - g(x, y) dx) \\ &= \int_0^T [f(x(t), y(t)) g(x(t), y(t)) - g(x(t), y(t)) f(x(t), y(t))] dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

usando el teorema de Green y teniendo en cuenta la hipótesis acerca de que la expresión  $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)$  no es idénticamente nula en  $D$  y no cambia de signo en  $D$ , resulta claro

$$0 = \int_{\Gamma} [f dy - g dx] = \int_S \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dx dy \neq 0,$$

lo que produce una contradicción. Por lo tanto el sistema dado no puede tener órbitas cerradas, completamente contenidas en  $D$ .  $\square$

**Ejemplo 3.1.** *Veamos que el sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{aligned} x' &= x - xy^2 + y^3 \\ y' &= 3y - yx^2 + x^3 \end{aligned}$$

*no tiene soluciones periódicas en el interior de la región delimitada por la curva  $x^2 + y^2 = 4$ .*

*Demostración.* Por medio del criterio negativo de Bendixson vamos a ver que no existen soluciones periódicas para este sistema.

Hagamos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x - xy^2 + y^3 \\ g(x, y) &= 3y - yx^2 + x^3 \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 1 - y^2$$

y

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 3 - x^2.$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} &= (1 - y^2) + (3 - x^2) \\ &= 4 - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Como se observa, en el interior de la circunferencia,  $x^2 + y^2 = 4$ , la expresión anterior es siempre diferente de cero y no cambia de signo. Por lo tanto, el criterio negativo de Bendixson garantiza que el sistema planteado no puede tener órbitas cerradas completamente contenida dentro de la región delimitada por la circunferencia  $x^2 + y^2 = 4$ .  $\square$

### 3.3.2. El criterio de Dulac

Ahora presentamos una generalización del criterio negativo de Bendixson, el cual se conoce como el criterio de Dulac.

**Teorema 3.5 (Criterio de Dulac).** *Consideremos en el plano el sistema (3.4) donde suponemos que  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables, y sea  $B : D \rightarrow \mathbb{R}$ , una función de clase  $C^1$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , abierto y simplemente conexo. Si la expresión*

$$\left( \frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y} \right)$$

*no es idénticamente cero y no cambia de signo en  $D$ , entonces el sistema no puede tener órbitas cerradas totalmente contenida en  $D$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\Gamma = (x(t), y(t)) \subset D$ , es una órbita cerrada correspondiente a una solución periódica de periodo  $T$  del sistema dado. Tomando en cuenta que

$$\begin{aligned} dx &= f(x(t), y(t)) dt \\ dy &= g(x(t), y(t)) dt \end{aligned}$$

tenemos que

$$\int_{\Gamma} [(Bf) dy - (Bg) dx] = \int_0^T [(Bf) g - (Bg) f] dt = 0. \quad (3.5)$$

Sea  $S$  la región acotada por  $\Gamma$ , utilizando el teorema de Green tenemos que

$$\int_{\Gamma} [(Bf) dy - (Bg) dx] = \int_S \left[ \frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y} \right] dx dy \neq 0. \quad (3.6)$$

Entre (3.5) y (3.6) existe una contradicción, por lo tanto no puede existir una órbita cerrada totalmente contenida en  $D$ .  $\square$

Una aplicación interesante del criterio de Dulac la veremos en el capítulo 8 sobre un modelo depredador-presa.

## Capítulo 4

# Algebra lineal

En este capítulo presentaremos algunos conceptos y resultados sobre espacios vectoriales y matrices que resultan relevantes para el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Muchos de los resultados que aquí planteamos pueden profundizarse en textos tales como [3] y [4].

### 4.1. Formas canónicas de Jordan

Denotamos por  $F^{n \times n}$  al conjunto de todas las matrices  $n \times n$  con componentes en el campo  $F$ . En general nos restringiremos a  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , donde  $\mathbb{R}$  es el campo de los números reales.

Dada una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es interesante investigar los valores reales o complejos de  $\lambda$ , para los cuales la ecuación  $Ax = \lambda x$  tiene solución.

Los conceptos que veremos a continuación están relacionados con este problema.

**Definición 4.1.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , en la ecuación  $Ax = \lambda x$ , al escalar  $\lambda$  se le llama **autovalor o valor propio de la matriz  $A$**  y al vector solución  $x \in \mathbb{R}^n$  se le llama **autovector o vector propio de la matriz  $A$**  asociado al autovalor  $\lambda$ .

**Definición 4.2.** El **polinomio característico** de  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  está dado por

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A),$$

el cual es un polinomio de grado  $n$  en  $\lambda$ .

**Observación 4.1.** Como podemos ver, el término con potencia  $n$  del polinomio característico es  $\lambda^n$  y el término constante es  $(-1)^n \det(A)$ .

**Definición 4.3.** Al conjunto de todos los autovalores de la matriz  $A$  se le denota por  $\sigma(A)$  y se le denomina **espectro de  $A$** .

**Definición 4.4.** Se dice que una matriz cuadrada  $A = (a_{ij})$  es **diagonal** si se cumple:  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$  y  $a_{ii} \neq 0$  para algún  $1 \leq i \leq n$ .

**Observación 4.2.** Si una matriz es diagonal, los elementos de la diagonal son autovalores de la matriz.

**Definición 4.5.** Una matriz  $A$  es **diagonalizable** si existe una matriz invertible  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  es diagonal. En este caso, se dice que la matriz  $P$  diagonaliza a la matriz  $A$ .

El teorema que exponemos a continuación se usa como herramienta para el estudio de la diagonalización y su demostración proporciona la técnica para diagonalizar una matriz.

**Teorema 4.1.** Para  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a)  $A$  es diagonalizable.
- b)  $A$  tiene  $n$  autovectores linealmente independientes.

*Demostración.* Veamos que a) implica b): Debido a que la matriz  $A$  es diagonalizable, existe una matriz invertible

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

tal que  $P^{-1}AP = D$ , donde  $D$  es una matriz diagonal, digamos

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,  $AP = PD$ . Es decir,

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} = PD \quad (4.1)$$

Denotaremos a los vectores columna de la matriz  $P$  por  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ; entonces, de acuerdo con (4.1) las columnas sucesivas de la matriz  $AP$  son  $\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \dots, \lambda_n p_n$ ; sin embargo dichas columnas son  $Ap_1, \dots, Ap_n$ . Así

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, Ap_n = \lambda_n p_n.$$

Como  $P$  es invertible, entonces sus columnas son vectores linealmente independientes. Por lo tanto, ninguna columna de  $P$  se reduce al vector cero. De esto deducimos que,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son autovalores de  $A$  y, por lo tanto,  $p_1, p_2, \dots, p_n$  son sus autovectores correspondientes. Como  $P$  es invertible, se deduce que los vectores  $p_1, p_2, \dots, p_n$  son linealmente independientes.

Veamos ahora que b) implica a): Supongamos que la matriz  $A$  tiene  $n$  valores propios,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  con autovectores correspondientes,  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , linealmente independientes. Sea

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

la matriz cuyos vectores columna son  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Las columnas del producto  $AP$  son  $Ap_1, \dots,$

$AP_n$ , usando (4.1) se tiene

$$\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que  $AP = PD$ , donde  $D$  es la matriz diagonal que tiene los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  en la diagonal principal. Como los vectores de la matriz  $P$  son linealmente independientes,  $P$  es invertible y por lo tanto se tiene que  $P^{-1}AP = D$  y  $A$  es diagonalizable.  $\square$

**Definición 4.6.** Llamaremos *multiplicidad algebraica*  $a(\lambda)$  al número de veces que aparece un mismo autovalor como raíz del polinomio característico. Llamaremos *multiplicidad geométrica*  $g(\lambda)$  al número de vectores propios linealmente independientes que se obtienen para cada valor propio.

Las multiplicidades algebraica y geométrica cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} a(\lambda) &= n \\ \sum_{\lambda} g(\lambda) &\leq n \\ 1 &\leq g(\lambda_i) \leq a(\lambda_i) \end{aligned}$$

Si  $a(\lambda) = g(\lambda)$  para todo  $\lambda$ , entonces la matriz es diagonalizable. Claramente, una matriz es diagonalizable si tiene una base de autovectores. En el caso que la matriz no sea diagonalizable, es posible encontrar una matriz semejante que presenta una forma muy particular. A continuación presentamos el importante teorema de la forma canónica de Jordan de una matriz dada. Cuando  $g(\lambda_i) < a(\lambda_i)$ , entonces la matriz no es diagonalizable y se debe pasar a calcular los llamados vectores propios generalizados que se describen en el siguiente teorema.

**Teorema 4.2 (Forma canónica de Jordan).** Para la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existe una matriz  $P$  invertible tal que,  $J = P^{-1}AP$ , tiene la forma de bloques

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1 \times n_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{n_s \times n_s} \end{bmatrix},$$

donde, el primer bloque es una matriz diagonal donde se encuentran los valores propios distintos y los restantes bloques son de la forma,

$$J_{k_l \times n_l} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix},$$

o bien de la forma

$$J_{k_{n_l} \times n_l} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

Donde  $\lambda_k$  es un autovalor de  $A$  y  $n_l$  es el número de filas y columnas de esta matriz. A la matriz  $J$  se le denomina **la forma canónica de Jordan** de la matriz  $A$ .

*Demostración.* Daremos un esquema de como se contruye la matriz  $P$  que produce la semejanza con la matriz  $J$ . En tal sentido debemos buscar una base de  $\mathbb{R}^n$  para representar a las columnas de la matriz  $P$ . El procedimiento es como se describe a continuación: Para los autovalores distintos, se colocan consecutivamente los autovectores correspondientes en las columnas de la matriz  $P$ . Por otra parte, si existe un autovector repetido  $\lambda_k$  tal que su multiplicidad geométrica coincide con la algebraica entonces aparecen los bloques de Jordan de la forma

$$J_{k_{n_l} \times n_l} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

Los vectores propios correspondientes a autovalores de este tipo se van colocando consecutivamente en las columnas de la matriz  $P$ . Finalmente, para los valores propios repetidos  $\lambda_k$  cuya multiplicidad geométrica sea estrictamente menor que la algebraica, presentamos de manera esquemática un procedimiento que permite encontrar los vectores que producen la forma canónica de Jordan. En este caso, los vectores propios correspondientes a  $\lambda_k$  que son linealmente independientes, digamos que en número son igual a  $p$  se colocan como columnas de la matriz  $P$ , pero aún nos faltan otros  $n_l$  vectores para tener que  $a(\lambda_k) = p + n_l$ . Para determinar los  $n_l$  vectores, de modo que resulten linealmente independientes con los restantes  $p$ , consideremos la siguiente situación: supongamos que el autovalor  $\lambda_k$  tiene multiplicidad algebraica  $m_k$  y multiplicidad geométrica igual a 1 (es decir, estamos colocando  $p = 1$ ) con un vector propio asociado  $v^1$ . Entonces, existen  $m_k$  vectores linealmente independientes de la forma

$$p^1 = v^1, p^2 = v^{12}, p^3 = v^{13}, \dots, p^k = v^{1k}$$

donde los vectores  $v^1, v^{12}, v^{13}, \dots, v^{1k}$  verifican las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} (A - \lambda_k I)v^1 &= 0, \\ (A - \lambda_k I)v^{12} &\neq 0 \quad \text{y} \quad (A - \lambda_k I)^2 v^{12} = 0, \\ (A - \lambda_k I)^2 v^{13} &\neq 0 \quad \text{y} \quad (A - \lambda_k I)^3 v^{13} = 0, \end{aligned}$$

así sucesivamente,

$$(A - \lambda_k I)^{m_k - 1} v^{1m_k} \neq 0 \quad \text{y} \quad (A - \lambda_k I)^{m_k} v^{1m_k} = 0.$$

Se puede comprobar que efectivamente los vectores  $v^1, v^{12}, v^{13}, \dots, v^{1m_k}$  son linealmente independientes. Los vectores  $v^{12}, v^{13}, \dots, v^{1m_k}$  se denominan **vectores propios generalizados** asociados al autovalor  $\lambda_1$ . Los vectores  $v^1, v^{12}, v^{13}, \dots, v^{1k}$  se colocan consecutivamente en las siguientes columnas de la matriz  $P$ .

Este proceso se continúa con todos los autovalores, lo que produce una matriz  $P$  que (como puede comprobarse) lleva la matriz  $A$  a la forma canónica de Jordan  $J$ . Esto culmina el esquema de la demostración.  $\square$

Para una demostración rigurosa y constructiva de la forma canónica de Jordan recomendamos su lectura en [3] y [8].

## 4.2. La matriz exponencial

Dada una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tiene sentido plantearse realizar con ella algunas operaciones más allá de la suma y el producto usual de matrices. Un cálculo de importancia es el de la exponencial de una matriz que definimos a continuación.

**Definición 4.7.** Para cada matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la **matriz exponencial de  $A$** ,  $e^A$ , se define por medio de la expresión

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}. \quad (4.2)$$

**Ejercicio 4.1.** Demostrar que para cada matriz fija  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz exponencial de  $A$  existe (es decir, la serie converge).

**Ejercicio 4.2.** Demostrar que  $e^{\mathbf{0}} = I$ , donde  $\mathbf{0}$  es la matriz nula e  $I$  es la matriz identidad.

**Ejercicio 4.3.** Sean  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que  $AB=BA$ . Demostrar que en ese caso se cumple que  $e^A e^B = e^{A+B}$ .

**Observación 4.3.** El teorema de la forma canónica de Jordan tiene una aplicación inmediata en el cálculo de la exponencial de una matriz. Puesto que para  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existe  $P$  invertible tal que  $J=P^{-1}AP$ . Por lo tanto,  $A = PJP^{-1}$ , lo cual implica que

$$A^2 = PJ^2P^{-1}.$$

En general, se tiene

$$A^k = PJ^kP^{-1}.$$

De aquí que

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{PJ^kP^{-1}}{k!},$$

y así

$$e^A = Pe^JP^{-1}. \quad (4.3)$$

Una expresión para  $e^J$  es más fácil de calcular tal como podemos ver en lo que sigue.

$$\begin{aligned} e^J &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} J_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_s^k \end{bmatrix}}{k!} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_1^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_2^k}{k!} & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_s^k}{k!} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{J_1} & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & e^{J_2} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & e^{J_s} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora bien, como

$$e^{J_s} = e \begin{bmatrix} \lambda_s & 1 & 0 \\ \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \lambda_s \end{bmatrix}_{n_k \times n_k}$$

puede verse que  $J = \lambda I + N$ , donde

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Así

$$e^J = e^{\lambda I} e^N.$$

Podemos ver que

$$e^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}.$$

Es decir,

$$e^N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

y como,

$$e^{\lambda I} = e \begin{bmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} = e \begin{bmatrix} e^\lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & e^\lambda \end{bmatrix}$$

finalmente tenemos que

$$e^J = e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

teniéndose la exponencial de  $A$ , dada por (4.3), en la forma:

$$e^A = e^\lambda P \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Emplearemos el procedimiento antes descrito para calcular la matriz exponencial, en la búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales.

**Definición 4.8.** Decimos que la matriz  $A$  es el logaritmo de la matriz  $B$ , y escribimos  $A = \log B$ , si  $e^A = B$ .

**Observación 4.4.** Por lo general, el logaritmo de una matriz tiene coeficientes complejos, sin embargo, en el caso que exista  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$B = D^2,$$

entonces existe  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$A = \log B.$$

En el siguiente teorema formalizaremos la existencia de la matriz logarítmica.

**Teorema 4.3.** Sea  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz no singular. Entonces existe una matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , que no es única, la cual conmuta con  $B$  y tal que

$$e^A = B.$$

*Demostración.* Haremos la demostración de acuerdo a los siguientes casos:

i) Consideremos en primer lugar el caso particular  $B = J$ , donde  $J$  tiene la forma canónica de Jordan. Entonces

$$J = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix},$$

donde

$$J_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s \end{bmatrix}$$

y

$$J_p = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix},$$

donde  $p = 1, \dots, k$ ;  $\lambda$  es un valor propio de  $B$ . Podemos ver que  $J_p = \lambda I + N$ ,  $I$  la matriz identidad de orden  $m$  y  $N$  es la matriz nilpotente

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

es decir, la matriz  $N$  tiene la propiedad que  $N^m = 0$ . En este caso, la matriz  $A$  tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} \log \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \log \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \log \lambda_s \end{bmatrix}.$$

$A_0 = \log J_0$  es una matriz diagonal con elementos iguales a  $\log \lambda_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) en la diagonal. Claro que  $\log \lambda_i$  está definido por ser  $\lambda_i \neq 0$ . Por otra parte,

$$A_p = \log(\lambda) I + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \lambda^{-j} N^j,$$

$p = 1, \dots, k$ . Así podemos escribir

$$A_p = \begin{bmatrix} \log \lambda & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{2\lambda^2} & +\frac{1}{3\lambda^3} & \cdots & \frac{(-1)^m}{(m-1)\lambda^{m-1}} \\ 0 & \log \lambda & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{2\lambda^2} & \cdots & \frac{(-1)^{m-1}}{(m-2)\lambda^{m-2}} \\ 0 & 0 & \log \lambda & \frac{1}{\lambda} & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \cdots & -\frac{1}{2\lambda^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \log \lambda \end{bmatrix},$$

por lo tanto, obtenemos que

$$e^{A_p} = e^{I \log \lambda} e^{\sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \lambda^{-j} N^j},$$

donde

$$\begin{aligned} e^{\sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \lambda^{-j} N^j} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left( \frac{N}{\lambda} \right)^j \right)^k \\ &= I + \frac{N}{\lambda}, \end{aligned}$$

puesto que para  $|x| < 1$  se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j \right)^k = e^{\log(1+x)} = 1 + x.$$

Así,

$$\begin{aligned} e^{A_p} &= e^{I \log \lambda} \left( I + \frac{N}{\lambda} \right) \\ &= \lambda I \left( I + \frac{N}{\lambda} \right) \\ &= \lambda I + N = J_p. \end{aligned}$$

ii) Ahora, si  $B$  cualquier matriz no singular, entonces existe una matriz no singular  $P$  tal que

$$BP = PJ$$

donde  $J$  tiene la forma canónica de Jordan. Aplicando la parte anterior, sabemos que existe una matriz  $A$  tal que

$$e^A = J.$$

Ahora bien,

$$e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1} = PJP^{-1} = B,$$

es decir,

$$\log B = PAP^{-1} = P \log(J)P^{-1}.$$

iii) Veamos que la matriz  $A$  no es única. Como  $e^A = B$  implica que

$$e^{A+2mi\pi I} = B \text{ para todo } m \in \mathbb{Z};$$

entonces

$$A + 2mi\pi I = \log B.$$

Además,

$$B \log B = e^A A = Ae^A = \log(B)B.$$

Finalmente, supongamos que  $B = D^2$ , para alguna matriz  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no singular. Entonces existe  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tal que  $e^A = D$ . Tomando conjugación compleja nos queda,  $\overline{e^A} = \overline{D}$ , lo que implica

$$e^{\overline{A}} = \overline{e^A} = \overline{D} = D$$

y

$$D^2 = e^A e^{\overline{A}} = e^{\overline{A}} e^A.$$

Por lo tanto,

$$\log B = \log D^2 = A + \overline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

□

## Capítulo 5

# Sistemas lineales

Decimos que un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es **lineal** si podemos escribirlo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\&\vdots \\x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t).\end{aligned}$$

Lo cual, en forma vectorial, tiene la representación

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{5.1}$$

donde,  $A(t) = (a_{ij}(t))$  es una matriz  $n \times n$  y  $b(t) = \text{col}[b_1(t), \dots, b_n(t)]$  es una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^n$ . Cuando  $b(t)$  no es idéntica a la función nula, al sistema (5.1) se le llama **sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneo**. Mientras que en el caso que la función  $b(t)$  sea idénticamente igual a cero, es decir, si tenemos que

$$x' = A(t)x, \tag{5.2}$$

el sistema se llama **sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo**. (Alertamos sobre el hecho que el término homogéneo se usa con diferentes significados en el área de las ecuaciones diferenciales.)

**Teorema 5.1 (Existencia y unicidad).** *Si  $A(t)$  y  $b(t)$  son continuas en un intervalo  $J \subset \mathbb{R}$ , que contiene al punto  $t_0$ , entonces el problema de valores iniciales planteado con la ecuación (5.1) y la condición inicial*

$$x(t_0) = x_0$$

*posee una única solución definida en todo el intervalo  $J$ .*

**Ejercicio 5.1.** *Demostrar el teorema de existencia y unicidad para las ecuaciones lineales.*

Antes de continuar es importante que observemos que para todo  $t \in J$ ,  $\psi(t) = 0$ , es una solución del sistema homogéneo. A esta solución la llamaremos **la solución trivial**.

**Teorema 5.2.** *Las soluciones del sistema (5.2) de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo forman un espacio vectorial de dimensión  $n$ .*

*Demostración.* Sean  $\varphi$  y  $\psi$  dos soluciones del sistema homogéneo. Entonces se verifica que

$$\begin{aligned}\varphi' &= A(t)\varphi \\ \psi' &= A(t)\psi \\ (\alpha\varphi + \beta\psi)' &= \alpha A(t)\varphi(t) + \beta A(t)\psi(t) \\ &= A(t)(\alpha\varphi(t) + \beta\psi(t))\end{aligned}$$

Lo que demuestra que cualquier combinación lineal de soluciones es también solución de la ecuación (5.2). A esta propiedad se le llama comúnmente **el principio de superposición**.

Para demostrar que el espacio vectorial de las soluciones tiene dimensión  $n$  se procede de la siguiente manera: se toma una base  $\{e^1, \dots, e^n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  y se consideran los  $n$  problemas de valores iniciales con cada uno de los elementos de esta base se obtienen  $n$  soluciones linealmente independientes  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$  que generarán al espacio de las soluciones de la ecuación (5.2).  $\square$

**Ejercicio 5.2.** *Completar los detalles de la demostración del teorema anterior.*

## 5.1. Matrices fundamentales

Deducimos del teorema anterior que cualquier solución del sistema lineal homogéneo la podemos representar como combinación lineal de las funciones que conformen una base de las soluciones de la ecuación (5.2). Una tal base la denominaremos **un sistema fundamental de soluciones** del sistema lineal homogéneo. Así pues, la solución general del sistema lineal homogéneo es

$$\varphi(t) = p_1\varphi^1(t) + p_2\varphi^2(t) + \dots + p_n\varphi^n(t),$$

donde  $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}$  y  $\{\varphi^1(t), \varphi^2(t), \dots, \varphi^n(t)\}$  es un sistema fundamental de soluciones.

**Observación 5.1.** *En general si tenemos  $n$  funciones  $\psi^1, \dots, \psi^n$  que sean soluciones de la ecuación (5.2), podemos construir la matriz*

$$\Psi(t) = [\psi^1(t) | \psi^2(t) | \dots | \psi^n(t)],$$

*y es fácil verificar que esta matriz satisface la ecuación (5.2), es decir,*

$$\Psi'(t) = A(t)\Psi(t).$$

**Definición 5.1.** *A una matriz  $\Psi(t) = [\psi^1(t) | \psi^2(t) | \dots | \psi^n(t)]$  que satisfaga la ecuación (5.2) la llamaremos **matriz solución**.*

Para matrices solución se cumple el siguiente teorema.

**Teorema 5.3 (Fórmula de Abel).** *Consideremos una matriz solución  $\Psi$  de la ecuación (5.2) en el intervalo  $J$ , entonces para cualquier punto  $t_0 \in J$ , se cumple que*

$$\det \Psi(t) = \det \Psi(t_0) e^{\int_{t_0}^t (a_{11}(s) + \dots + a_{nn}(s)) ds}$$

*para toda  $t \in J$ .*

*Demostración.* Supongamos que la matriz solución es

$$\Psi(t) = [\psi^1(t) | \psi^2(t) | \dots | \psi^n(t)],$$

entonces cada  $\psi^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , satisface la ecuación (5.2), y por lo tanto, sus componentes cumplen que

$$\psi'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)\psi_{kj}(t), \quad (5.3)$$

para toda  $i, j = 1, \dots, n$ . Ahora, la derivada de  $\det \Psi(t)$  es

$$\begin{aligned} (\det \Psi)' &= \begin{vmatrix} \psi'_{11} & \psi'_{12} & \dots & \psi'_{1n} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \dots & \psi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \psi_{n1} & \psi_{n2} & \dots & \psi_{nn} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & \psi_{1n} \\ \psi'_{21} & \psi'_{22} & \dots & \psi'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \psi_{n1} & \psi_{n2} & \dots & \psi_{nn} \end{vmatrix} + \dots \\ &+ \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & \psi_{1n} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \dots & \psi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \psi'_{n1} & \psi'_{n2} & \dots & \psi'_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

usando ahora (5.3) tenemos

$$\begin{aligned} (\det \Psi)' &= \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}\psi_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{1k}\psi_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k}\psi_{kn} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \dots & \psi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \psi_{n1} & \psi_{n2} & \dots & \psi_{nn} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & \psi_{1n} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}\psi_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{2k}\psi_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{2k}\psi_{kn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \psi_{n1} & \psi_{n2} & \dots & \psi_{nn} \end{vmatrix} + \dots \\ &+ \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & \psi_{1n} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \dots & \psi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}\psi_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{nk}\psi_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{nk}\psi_{kn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Usando ahora operaciones elementales de fila, podemos evaluar cada uno de los determinantes. De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} (\det \Psi)' &= a_{11} \det \Psi + a_{22} \det \Psi + \dots + a_{nn} \det \Psi \\ &= (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) \det \Psi, \end{aligned}$$

para toda  $t \in J$ . Como podemos ver la expresión anterior es una ecuación diferencial escalar lineal de primer orden en la variable  $\det \Psi$  y su solución está dada por la expresión (5.3).  $\square$

Las soluciones que aparecen en las columnas de una matriz solución no tienen por que ser necesariamente linealmente independientes. Pero cuando este sea el caso, encontramos una forma más breve de escribir la solución general de la ecuación (5.2). El procedimiento consiste considerar un vector  $p = \text{col}(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ , y la matriz  $\Phi(t) = [\varphi^1(t) | \varphi^2(t) | \dots | \varphi^n(t)]$  cuyas columnas conforman un sistema fundamental de soluciones. De esta forma podemos representar a la solución general en la forma  $\varphi(t) = \Phi(t)p$ .

**Definición 5.2.** *A una matriz cuyas columnas conformen un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (5.2) la llamaremos **una matriz fundamental**. A la matriz fundamental con la propiedad que  $\Phi(t_0) = I$ , donde  $I$  es la matriz identidad, la llamaremos **la matriz fundamental principal**.*

**Observación 5.2.** *Es importante que observemos que la matriz fundamental no es única, debido a que por el principio de superposición las combinaciones lineales de soluciones también son soluciones, y por esta razón cualquier producto de una matriz fundamental por una matriz constante e invertible  $C$ ,  $\Phi(t)C$ , resulta ser también una matriz fundamental.*

### 5.1.1. Solución exponencial del sistema homogéneo

Para el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo (5.2) bajo condiciones de conmutatividad de la matriz  $A$  con su integral respecto a  $t$ ,  $\int A dt$ , es decir,

$$A(t) \int A(t) dt = \int A(t) dt A(t),$$

se obtiene un método de solución que emplea de manera crucial a la matriz exponencial. En este caso tenemos que

$$\frac{d\left(e^{\int A(t) dt}\right)}{dt} = A(t) e^{\int A(t) dt}.$$

Por lo tanto,  $\Phi(t) = e^{\int A(t) dt}$  es una matriz fundamental del sistema. Deducimos de esto que para la condición inicial

$$x(0) = p \tag{5.4}$$

la solución viene dada por

$$\varphi(t) = \left(e^{\int_0^t A(t) dt}\right) p. \tag{5.5}$$

**Observación 5.3.** *Si la matriz  $A$  no depende del tiempo, entonces se verifica que  $\int A dt = tA$ , la cual, trivialmente conmuta con la matriz  $A$ . Por lo tanto, en razón del resultado planteado en el ejercicio (4.3) obtenemos una matriz fundamental en la forma,*

$$\Phi(t) = e^{tA}. \tag{5.6}$$

Como podemos ver, si la condición inicial está planteada en  $t_0 = 0$ , entonces  $\Phi(0) = I$ , y tenemos la matriz fundamental principal. En el caso de ser  $t_0 \neq 0$ , entonces la matriz fundamental principal es,

$$\Phi(t) = e^{(t-t_0)A}.$$

También podemos observar que, si la condición inicial es  $x(t_0) = x_0$  entonces la solución correspondiente está dada por

$$\varphi(t) = e^{(t-t_0)A} x_0.$$

Finalmente, es importante que observemos que si  $C$  es cualquier matriz, entonces la matriz

$$\Phi(t) = e^{tA}C$$

cumple que  $\Phi(0) = C$ .

### 5.1.2. Solución del sistema no homogéneo

El siguiente teorema nos permite dilucidar como obtener las soluciones del sistema no homogéneo (5.1).

**Teorema 5.4.** Sean  $\psi$  y  $\phi$  soluciones del sistema no homogéneo (5.1), entonces  $\varphi = \psi - \phi$  es solución del sistema homogéneo (5.2).

*Demostración.* Como podemos ver

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \psi'(t) - \phi'(t) \\ &= A(t)\psi(t) + b(t) - A(t)\phi(t) - b(t) \\ &= A(t)(\psi(t) - \phi(t)) \\ &= A(t)\varphi(t).\end{aligned}$$

lo que demuestra el teorema.

**Observación 5.4.** De acuerdo con el teorema anterior  $\varphi = \psi - \phi$  es una solución de la ecuación homogénea siempre que  $\psi$  y  $\phi$  sean soluciones de la ecuación no homogénea. Ahora bien, como cualquier solución de la ecuación homogénea con la condición inicial (5.4) tiene una representación en la forma (5.5), representamos a la solución  $\psi$  de la siguiente manera

$$\psi(t) = \phi(t) + \left( e^{\int_0^t A(t)dt} \right) p.$$

En el caso que la matriz  $A$  sea de coeficientes constantes, de acuerdo con la expresión (5.6) tendremos

$$\psi(t) = \phi(t) + e^{tA} p.$$

La función  $\phi$  que aparece en la parte derecha de la igualdad anterior, recibe el nombre de solución particular de la ecuación no homogénea (5.1). Una manera de determinar una solución particular es por medio de la **fórmula de variación de parámetros** que aparece en el siguiente teorema.

□

**Teorema 5.5.** Una solución particular  $\phi$  de la ecuación no homogénea (5.1) está dada por la fórmula

$$\phi(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds,$$

donde  $\Phi$  es cualquier matriz fundamental de la ecuación homogénea asociada (5.2).

*Demostración.* Sea  $\Phi$  una matriz fundamental del sistema (5.1). Para cualquier vector constante  $p$ , la función vectorial

$$\phi = \Phi p \tag{5.7}$$

es una solución del sistema (5.2). No obstante, consideraremos que  $p$  es una función de  $t$ , y vamos a determinar su valor de modo que  $\phi$  en (5.7) resulte ser solución de (5.1). Para hacer esto sustituimos la expresión de  $\phi$  en el sistema no homogéneo y obtenemos

$$\Phi\phi' + \Phi'\phi = A\Phi\phi + b. \quad (5.8)$$

Como las columnas de  $\Phi$  satisfacen la ecuación homogénea tenemos que  $\Phi' = A\Phi$ , y por lo tanto de la expresión (5.8) nos queda

$$\Phi\phi' = b,$$

de donde

$$\phi' = \Phi^{-1}b.$$

Lo que implica que  $p$  tiene que cumplir con la condición

$$p(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds.$$

Luego,

$$\phi(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds$$

determina una solución de la ecuación (5.1), como en efecto podemos verificarlo por substitución directa en esta ecuación.  $\square$

## 5.2. Sistemas lineales de segundo orden con coeficientes constantes

En el caso de un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes, la matriz  $A$  tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Vamos a aplicar los resultados anteriores a la ecuación (5.2) para la matriz dada en (5.9).

Las órbitas para estas ecuaciones lineales se ubican en el plano  $xy$ . Si la matriz  $A$  es una matriz no singular, entonces el origen  $(0, 0)$  es un punto crítico aislado del sistema (5.2).

Como sabemos a la matriz  $A$  se le asocia su polinomio característico  $P(\lambda)$  dado por

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - cb.$$

Es decir,

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - cb) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(A) + \det A,$$

donde por  $\operatorname{tr}(A)$  y  $\det A$  estamos denotando a la traza y al determinante de la matriz  $A$  respectivamente. Sólo hay tres casos posibles para los autovalores de la matriz  $A$ , dependiendo del discriminante  $\Delta$  del polinomio característico  $P(\lambda)$ ,

$$\Delta = (\operatorname{tr}(A))^2 - 4 \det A.$$

En términos de  $\Delta$  las posibilidades son:

- i* Dos autovalores reales y distintos cuando  $\Delta > 0$ .
- ii* Dos autovalores complejos conjugados cuando  $\Delta < 0$ .
- iii* Un autovalor real doble cuando  $\Delta = 0$ .

En lo que sigue haremos un estudio de las soluciones de la ecuación diferencial (5.2) de acuerdo con sus autovalores.

### 5.3. Autovalores reales y distintos

Si  $\Delta > 0$ , hay dos autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  reales distintos, en este caso sus autovectores correspondientes,  $v^1$  y  $v^2$ , forman una base en  $\mathbb{R}^2$ ; así la solución para (5.2) es

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v^2 \quad (5.10)$$

con  $c_1$  y  $c_2$  constantes reales. La forma canónica de la matriz  $A$  es en este caso

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo a los signos de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se presentan los siguientes casos:

#### 5.3.1. i) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

En este caso, las componentes de las órbitas tienden a 0 cuando  $t \rightarrow +\infty$  y tienden a  $\pm\infty$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

Si  $c_1 \neq 0$  y  $c_2 \neq 0$ ,  $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 e^{\lambda_1 t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c_2}{c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \\ &= \left( \text{signo} \frac{c_1}{c_2} \right) \infty, \end{aligned}$$

Por lo tanto, las órbitas se acercan al origen de forma tangencial al eje  $y$ . También podemos ver que los ejes de coordenadas a su vez son órbitas del sistema. En este caso, el origen de coordenadas, que es la órbita de la solución trivial, decimos que es un **nodo (estable)**.

**Ejercicio 5.3.** Trazar una gráfica de un nodo estable.

#### 5.3.2. ii) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

En este caso, tenemos que cuando  $t \rightarrow +\infty$  las componentes de las órbitas tienden a  $\pm\infty$ . Cuando  $t \rightarrow -\infty$  las componentes de las órbitas tienden a 0. Además, como  $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$ , si  $c_1 \neq 0$

y  $c_2 \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 e^{\lambda_1 t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c_2}{c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \\ &= \left( \text{signo} \frac{c_2}{c_1} \right) \infty \end{aligned}$$

Así, las órbitas se acercan al origen de forma tangencial al eje  $y$ . Podemos ver que los ejes de coordenadas a su vez son órbitas del sistema. En este caso, al origen de coordenadas lo denominamos **nodo (inestable)**.

**Ejercicio 5.4.** *Trazar una gráfica de un nodo inestable.*

### 5.3.3. iii) Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

En este caso, para cualquier solución, podemos ver que las componentes de sus órbitas satisfacen que  $x(t) \rightarrow 0$ ,  $y(t) \rightarrow \pm\infty$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  (salvo en el caso que  $c_1 = 0$ ). En cambio, cuando  $t \rightarrow -\infty$ ,  $x(t) \rightarrow \pm\infty$ ,  $y(t) \rightarrow 0$ . Este caso decimos que el origen es un punto **silla**.

**Ejercicio 5.5.** *Trazar la gráfica de un punto silla.*

## 5.4. Autovalores complejos conjugados

Si los autovalores de la matriz (5.9) son complejos conjugados, digamos  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . La forma canónica de la matriz  $A$  es entonces

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Lo que indica que estamos tratando con el sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha x + \beta y \\ y'(t) &= -\beta x + \alpha y \end{aligned}$$

cuya solución general es

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_1 e^{\alpha t} \text{sen} \beta t \\ y(t) &= -c_1 e^{\alpha t} \text{sen} \beta t + c_2 e^{\alpha t} \cos \beta t \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde,  $c_1$  y  $c_2$  son constantes reales.

Existen tres casos posibles:

### 5.4.1. $\alpha < 0$

Tomando en cuenta las soluciones (5.11) se tiene que,

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= c_1^2 e^{2\alpha t} (\cos^2 \beta t + \operatorname{sen}^2 \beta t) + c_2^2 (\operatorname{sen}^2 \beta t + \cos^2 \beta t) \\ &= (c_1^2 + c_2^2) e^{2\alpha t}.\end{aligned}$$

En tal caso, podemos ver que las órbitas espirales que tienden al origen cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Por lo tanto, las órbitas tienen dirección hacia el origen. En este caso al origen lo denominamos punto **espiral (estable)**.

**Ejercicio 5.6.** *Trazar la gráfica de un punto espiral estable.*

#### 5.4.2. $\alpha = 0$

Usando nuevamente las soluciones dadas en (5.11) tenemos que

$$x^2 + y^2 = c_1^2 + c_2^2.$$

En este caso, las órbitas son circunferencias con centro en el origen y corresponden a soluciones periódicas con período  $\frac{2\pi}{\beta}$ ,  $\beta \neq 0$ . En este caso decimos que el origen es un **centro**.

**Ejercicio 5.7.** *Trazar la gráfica de un centro.*

#### 5.4.3. $\alpha > 0$

De nuevo, usando las soluciones en (5.11) tenemos que

$$x^2 + y^2 = (c_1^2 + c_2^2) e^{2\alpha t}.$$

Si  $t \rightarrow +\infty$ , las órbitas tienden a  $+\infty$ , es decir son espirales con dirección que se aleja del origen. Esta situación la denominamos punto **espiral (inestable)**.

**Ejercicio 5.8.** *Trazar la gráfica de un punto espiral inestable.*

## 5.5. Un autovalor real doble

Cuando la ecuación característica satisfaga la relación  $\Delta = 0$ , tendremos que  $\det A = \frac{1}{4} (\operatorname{tr} A)^2$ , y por lo tanto existe un autovalor repetido. Denotando por  $\lambda$  al autovalor que se repite, la forma canónica de Jordan de la matriz (5.9) puede tener una de las siguientes expresiones:

*i)* La primera forma que presentamos ocurre si al autovalor  $\lambda$  le corresponden dos vectores propios linealmente independientes. En tal caso podemos diagonalizar la matriz en la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

En este caso, la solución es

$$\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (c_1 e^{t\lambda}, c_2 e^{t\lambda}).$$

Las órbitas de estas soluciones cumplen que

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Por lo tanto, las órbitas son rectas con pendientes  $\frac{c_2}{c_1}$ . Si  $\lambda < 0$ , las órbitas tienden al origen cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Mientras que para  $\lambda > 0$  se alejan del origen. Podemos ver que los ejes de coordenadas son a su vez órbitas del sistema. En este caso también decimos que el origen es un **nodo (estable, si  $\lambda < 0$ ; e inestable, si  $\lambda > 0$ )**.

**Ejercicio 5.9.** *Trazar las gráficas de nodos estables e inestables para este caso de un autovalor repetido.*

*ii)* La segunda forma ocurre si el autovalor tiene asociado un solo vector propio. En este caso, para completar el sistema fundamental de soluciones tenemos que buscar un vector propio generalizado. La forma canónica de Jordan adopta la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

En este caso la solución es

$$\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, c_2 t e^{\lambda t}).$$

Podemos observar que, si  $\lambda < 0$  las órbitas tienden al origen cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Mientras que para  $\lambda > 0$ , se alejan del origen. En este caso, sólo el eje  $x$  forma parte de las órbitas. En este caso, también decimos que el origen es un **nodo (estable, si  $\lambda < 0$ ; e inestable, si  $\lambda > 0$ )**.

**Ejercicio 5.10.** *Trazar las gráficas respectivas en este caso.*

## Capítulo 6

# Sistemas lineales periódicos

Consideremos el sistema lineal homogéneo

$$x' = A(t)x, \quad (6.1)$$

donde  $A(t)$  es una matriz  $n \times n$  y sus elementos son funciones continuas definidas en un intervalo abierto,  $J \subseteq \mathbb{R}$ .

**Definición 6.1.** Decimos que la matriz  $A(t)$  es **periódica** si existe  $T > 0$ , tal que

$$A(t) = A(t + T), \quad (6.2)$$

para toda  $t \in J$ . Al mínimo número  $T > 0$  que satisfaga (6.2) lo llamamos el **período** de  $A(t)$ .

Cuando hablemos de matrices periódicas, lo haremos en referencia a matrices no constantes, las cuales son evidentemente periódicas con cualquier período.

**Definición 6.2.** Si la matriz  $A(t)$  que aparece en el sistema lineal (6.1) es periódica entonces decimos que el **sistema lineal** (6.1) es **periódico**.

### 6.1. La teoría de Floquet

El teorema que presentamos a continuación establece que todo sistema lineal periódico puede llevarse a un sistema con coeficientes constantes. Los conceptos y argumentos que utilizamos usualmente se le conoce como la teoría de Floquet.

**Teorema 6.1 (Floquet).** Supongamos que tenemos una matriz cuyos coeficientes son funciones periódicas de período  $T$ ,  $A : J \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $J \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo abierto, entonces cualquier matriz fundamental del sistema (6.1) puede ser escrita como

$$\phi(t) = P(t) e^{Rt}$$

donde  $P : J \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  es no singular y periódica de período  $T$  y  $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es una matriz constante. Además, la matriz  $\phi(t)$  también puede ser escrita en la forma

$$\phi(t) = S(t) e^{Qt}$$

donde  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  es no singular para todo  $t \in \mathbb{R}$  y periódica de período  $2T$  y  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz constante.

*Demostración.* Sea  $\phi(t)$  una matriz fundamental del sistema lineal (6.1) entonces

$$\phi'(t+T) = A(t+T)\phi(t+T) = A(t)\phi(t+T);$$

por lo tanto  $\phi(t+T)$  es una matriz solución de (6.1) y por la fórmula de Abel (5.3),  $\det \phi(t+T) \neq 0$ . De donde  $\phi(t+T)$  es una matriz fundamental de (6.1). Luego, existe una matriz constante no singular  $\mathcal{C}$  (ver la observación 5.2) tal que

$$\phi(t+T) = \phi(t)\mathcal{C}. \quad (6.3)$$

Además por ser  $\mathcal{C}$  no singular existe su logaritmo,  $\log \mathcal{C}$ .

Definamos:

$$R = \frac{1}{T} \log \mathcal{C}.$$

Como se observa,  $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , es una matriz constante, tal que

$$e^{RT} = \mathcal{C}. \quad (6.4)$$

Sea

$$P(t) = \phi(t)e^{-Rt}, \quad (6.5)$$

claramente  $P(t)$ , es no singular por ser el producto de dos matrices no singulares. Ahora bien,

$$\begin{aligned} P(t+T) &= \phi(t+T)e^{-R(t+T)} \\ &= \phi(t)\mathcal{C}e^{-R(t+T)} \\ &= \phi(t)e^{RT}e^{-RT}e^{-Rt} \\ &= \phi(t)e^{-Rt} \\ &= P(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $P(t)$  es periódica y tiene periodo  $T$ . De la relación (6.5) obtenemos que

$$\phi(t) = P(t)e^{Rt},$$

lo que demuestra la primera parte del teorema.

Análogamente, sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $e^{2TQ} = \mathcal{C}^2$ . Además  $S(t) = \phi(t)e^{-Qt}$  es real y no singular. Además

$$\begin{aligned} S(t+2T) &= \phi(t+2T)e^{-Q(t+2T)} \\ &= \phi(t)\mathcal{C}^2e^{-2TQ}e^{-Qt} \\ &= \phi(t)e^{-Qt} \\ &= S(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $S(t)$  es periódica de período  $2T$ , y de la definición de  $S(t)$  queda claro que

$$\phi(t) = S(t)e^{Qt}.$$

□

**Definición 6.3.** A la matriz  $\mathcal{C}$  definida por la relación (6.3) se le llama **matriz de monodromía** del sistema (6.1).

Podemos utilizar el teorema de Floquet para transformar al sistema de coeficientes periódicos (6.1) en un sistema de coeficientes constantes.

**Teorema 6.2.** *La transformación invertible,  $x = P(t)y$ , transforma el sistema lineal periódico (6.1) en un sistema lineal con coeficientes constantes*

$$y' = Ry.$$

donde  $P(t)$  y  $R$  son las matrices dadas en el teorema Floquet.

*Demostración.* Si  $\phi(t)$  es una matriz fundamental de (6.1), entonces sabemos del teorema de Floquet que las matrices  $R$  y  $P(t)$  satisfacen que

$$\phi(t) = P(t)e^{Rt}. \quad (6.6)$$

Haciendo  $x = P(t)y$  en (6.1) tenemos que

$$x' = P(t)y' + P'(t)y,$$

lo que implica que

$$P(t)y' = A(t)P(t)y - P'(t)y. \quad (6.7)$$

Por otro lado tenemos que

$$\phi'(t) = A(t)\phi(t).$$

Por lo tanto,

$$\phi'(t) = P'(t)e^{Rt} + P(t)Re^{Rt}$$

implica

$$P'(t)e^{tR} + P(t)Re^{tR} = A(t)P(t)e^{tR}.$$

Así

$$P'(t) = A(t)P(t) - P(t)R.$$

Sustituyendo en (6.7) se tiene

$$P(t)y' = A(t)P(t)y - A(t)P(t)y + P(t)Ry,$$

lo que conduce a

$$P(t)y' = P(t)Ry,$$

y como  $P(t)$  es invertible tenemos que

$$y' = Ry,$$

que es un sistema de coeficientes constantes por ser  $R$  una matriz constante.  $\square$

**Observación 6.1.** *Es importante que veamos lo siguiente. Como se tiene que  $\phi(t) = P(t)e^{tR}$ , entonces tomando  $\phi(0) = I$ , tenemos que  $I = P(0)$ . Por lo tanto,*

$$P(0) = P(0 + T) = P(T) = I,$$

de lo cual se obtiene

$$\phi(T) = e^{TR}.$$

Tomando en cuenta la expresión (6.4), concluimos que la matriz fundamental que satisface que  $\phi(0) = I$ , tiene la propiedad que  $\phi(T)$  es la matriz de monodromía.

**Definición 6.4.** A los autovalores de  $e^{TR}$  los llamaremos **los multiplicadores característicos** de (6.1).

**Definición 6.5.** A los autovalores de  $R$  los llamaremos **los exponentes característicos** de (6.1).

**Ejemplo 6.1.** Consideremos la matriz

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2 t & 1 - \frac{3}{2} \cos t \sin t \\ -1 - \frac{3}{2} \sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2} \sin^2 t \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Los autovalores  $\mu_1(t)$  y  $\mu_2(t)$  de  $A(t)$  son

$$\mu_1 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}, \quad \mu_2 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{4}$$

y, en particular, la parte real de los autovalores es negativa. Sin embargo, uno puede verificar directamente que el vector

$$(-\cos t, \sin t) \exp\left(\frac{t}{2}\right)$$

es solución de la ecuación (6.1) con  $A(t)$  dada por (6.8). Observemos que esta solución no es acotada  $t \rightarrow \infty$ . El multiplicador correspondiente es  $\lambda_1 = -e^{\pi/2}$  con  $|\lambda_1| > 1$ , es decir,  $\rho_1$  tiene parte real positiva. El otro multiplicador es  $\lambda_2 = -e^{-\pi}$  debido a que el producto de los multiplicadores es  $\lambda_1 \lambda_2 = e^{-\pi/2}$ .

## Capítulo 7

# Sistemas no lineales de segundo orden

En este capítulo estudiaremos lo que ocurre con las órbitas de sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales autónomas en el plano. Basicamente trataremos con sistemas del tipo

$$x' = Ax + R(x) \quad (7.1)$$

donde  $x = (x_1, x_2)^t$ ,  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz de coeficientes constantes y  $R(x) = (R_1(x), R_2(x))^t$  una función real continua en  $x$  definida en algún conjunto abierto del plano. Además suponemos que se cumple que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = 0. \quad (7.2)$$

La interpretación de la ecuación (7.1) supone que se encuentra descompuesta en una parte lineal representada por el término  $Ax$  y una parte no lineal representada por el término  $R(x)$ . El objetivo es el de visualizar si los resultados obtenidos para el caso lineal se mantienen válidos para el caso de la ecuación no lineal.

Es de resaltar que la hipótesis (7.2) implica que  $R((0, 0)) = (0, 0)$ , y por lo tanto, el origen  $(0, 0)$  es un punto crítico de (7.1).

Si representamos el campo vectorial asociado al sistema (7.1) por

$$f(x) = Ax + R(x),$$

entonces podemos interpretar que  $f(x)$  está desarrollada por medio de la fórmula de Taylor de modo que para  $x = (0, 0)$ ,  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  y  $R(x)$  contiene los términos no lineales.

En lo que sigue damos algunas definiciones sugeridas por el estudio de los sistemas lineales en el plano. Por supuesto que estas definiciones se pueden aplicar tanto a los sistemas lineales como a los no lineales.

**Definición 7.1.** Decimos que el origen  $(0, 0)$  es un **atractor positivo (negativo)** para las soluciones del sistema (7.1), si existe una vecindad (del origen) tal que toda solución que está en ella para algún tiempo  $t = t_0$ , está definida para toda  $t \geq t_0$  ( $t \leq t_0$ ) y tiende al origen en norma cuando  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ).

**Definición 7.2.** El origen es un **node** para las órbitas del sistema (7.1), si es un atractor (positivo o negativo) y toda solución que entra (sale del) al origen lo hace en una dirección definida (esto es,  $\frac{x_2}{x_1}$  tiende a un límite definido o bien a  $\infty$ ).

**Observación 7.1.** De acuerdo a la definición anterior podemos decir lo siguiente: Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  y la forma canónica es diagonal, entonces el punto de equilibrio es un **nodo estable** si  $\lambda < 0$ , y es un **nodo inestable** si  $\lambda > 0$ .

**Definición 7.3.** Decimos que el origen es un punto **silla** para las órbitas del sistema (7.1), si existen al menos dos haces de órbitas (un haz puede reducirse a una sola curva) que entran al origen (con  $t \rightarrow +\infty$ ) y dos haces que salen del origen (entran con  $t \rightarrow -\infty$ ) y las demás soluciones se alejan del origen, tanto para  $t$  creciente como para  $t$  decreciente.

**Definición 7.4.** El origen es un **foco o punto espiral** para las órbitas del sistema (7.1), si es un atractor positivo (negativo) y toda solución que entra hacia (sale del) al origen es cortada por cualquier semirecta trazada hacia el origen en una infinidad de puntos que necesariamente tienden a éste si es atractor positivo.

**Observación 7.2.** De acuerdo con la definición anterior podemos decir que: si  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  y  $\alpha \neq 0$  entonces el punto de equilibrio es un **foco o punto espiral**. Encontramos los siguientes casos: si  $\alpha < 0$  el origen es un **punto espiral estable** y si  $\alpha > 0$  es un **punto espiral inestable**.

**Definición 7.5.** El origen es un **centro** para las órbitas del sistema (7.1), si para toda vecindad del origen existen órbitas (periódicas) que lo contienen en su interior.

Nos disponemos a ver como, a partir de los conocimientos sobre los sistemas lineales, podemos obtener conclusiones acerca del comportamiento de las soluciones del sistema no lineal (7.1) en una vecindad del origen. Requeriremos del siguiente lema.

**Lema 7.1.** Con las hipótesis dadas para el sistema (7.1), se cumple la siguiente propiedad

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|Ax + R(x)\|}{\|Ax\|} = 1.$$

*Demostración.* Sea  $h$  definida por medio de la expresión  $\|A^{-1}\| = h^{-1}$ , entonces

$$\frac{\|Ax + R(x)\|}{\|Ax\|} \leq \frac{\|Ax\| + \|R(x)\|}{\|Ax\|} = 1 + \frac{\|R(x)\|}{\|Ax\|} \leq 1 + \frac{\|R(x)\|}{h\|x\|}.$$

Por otro lado,

$$\frac{\|Ax + R(x)\|}{\|Ax\|} \geq \frac{\|Ax\| - \|R(x)\|}{\|Ax\|} = 1 - \frac{\|R(x)\|}{\|Ax\|} \geq 1 - \frac{\|R(x)\|}{h\|x\|}.$$

De donde tenemos que

$$1 - \frac{\|R(x)\|}{h\|x\|} \leq \frac{\|Ax + R(x)\|}{\|Ax\|} \leq 1 + \frac{\|R(x)\|}{h\|x\|}.$$

Tomando límite en cuando  $\|x\| \rightarrow 0$  obtenemos

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|Ax + R(x)\|}{\|Ax\|} = 1$$

lo que demuestra el lema. □

**Lema 7.2.** *Bajo las hipótesis del lema anterior se cumple la siguiente igualdad*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{(Ax)'(Ax + R(x))}{\|Ax\| \|Ax + R(x)\|} = 1.$$

*Demostración.* Como

$$\frac{(Ax)^t(Ax + R(x))}{\|Ax\| \|Ax + R(x)\|} = \frac{\|Ax\|^2}{\|Ax\| \|Ax + R(x)\|} + \frac{(Ax)^t R(x)}{\|Ax\| \|Ax + R(x)\|}$$

usando el lema anterior

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|Ax\|^2}{\|Ax\| \|Ax + R(x)\|} = 1.$$

Utilizando nuevamente el lema anterior, se tiene

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{|(Ax)^t R(x)|}{\|Ax\| \|Ax + R(x)\|} = \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{|(Ax)^t R(x)|}{\|Ax\|^2} \leq \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|Ax\| \|R(x)\|}{\|Ax\|^2} = 0.$$

Lo que completa la prueba. □

**Lema 7.3.** *El origen es un punto de equilibrio aislado para el sistema (7.1). Es decir, existe una vecindad del origen en la cual no existe ningún otro punto de equilibrio del sistema (7.1).*

*Demostración.* Supongamos que existe una sucesión  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  de puntos de equilibrio que convergen al origen, es decir,

$$\begin{aligned} Ax^i + R(x^i) &= 0, \quad i = 1, \dots, \infty, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} x^i &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando la continuidad de la norma tenemos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|Ax_i + R(x_i)\|}{\|Ax_i\|} = 0,$$

lo que contradice el lema 7.1. □

En el siguiente teorema obtenemos algunas conclusiones para el sistema (7.1) a partir del sistema lineal.

**Teorema 7.1.** *Supongamos que para el sistema lineal (5.2) el origen es un atractor positivo (negativo), entonces también lo es para el caso no lineal (7.1).*

*Demostración.* Sea  $\|x\| < \delta$  una vecindad del origen donde la función  $R(x)$  satisface las condiciones establecidas para el sistema (7.1). Sea  $x_0$  un punto tal que  $\|x_0\| < \delta$ , entonces la solución del sistema (7.1) colocando en  $t = 0$  la condición inicial  $x_0$ , utilizando la fórmula de variación de parámetros tenemos

$$x(t) = e^{At} \left[ x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} R(x(\tau)) d\tau \right] \quad (7.3)$$

siempre que  $\|x(\tau)\| < \delta$ . Supongamos que se trata de un atractor positivo, entonces las raíces o autovalores de  $A$  tienen parte real negativa. De aquí, existen constantes positivas  $k$  y  $m$  tales que

$$\|e^{At}\| \leq ke^{-mt}, \quad t \geq 0, \quad k > 1.$$

Usando (7.3) y tomando norma tenemos

$$\|x(t)\| \leq ke^{-mt} \|x_0\| + k \int_0^t e^{-m(t-\tau)} \|R(x(\tau))\| dt. \quad (7.4)$$

Ahora usando el límite (7.2), dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\eta > 0$  tal que

$$\frac{\|R(x)\|}{\|x\|} < \frac{\varepsilon}{k}.$$

si  $\|x\| < \eta$ ; reemplazando en (7.4) se tiene

$$\|x(t)\| e^{mt} \leq k \|x_0\| + \varepsilon \int_0^t e^{m\tau} \|x(\tau)\| d\tau, \quad (7.5)$$

de donde, utilizando el lema de Gronwall, se obtiene que

$$\|x(t)\| \leq k \|x_0\| e^{(\varepsilon-m)t}. \quad (7.6)$$

Tomando  $\varepsilon < m$  y  $\|x_0\| < \frac{\text{mín}(\delta_1, \eta)}{k}$  de la desigualdad anterior se obtiene que

$$\|x(t)\| \leq \text{mín}(\delta_1, \eta) \quad \text{para } t \geq 0.$$

Esto implica que  $x(t)$  está definida para todo  $t \geq 0$ , y además, si en (7.6) hacemos  $t \rightarrow +\infty$  obtendremos que  $\|x(t)\| \rightarrow 0$ , lo que demuestra el teorema.  $\square$

A continuación presentamos un teorema en el que se relacionan las soluciones del caso no lineal con el lineal tomando en cuenta los autovalores de la matriz  $A$ .

**Teorema 7.2.** *Supongamos que la matriz  $A$  que aparece en el sistema (7.1) está en su forma canónica de Jordan y sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  sus autovalores. Entonces se tiene que:*

- a) *Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , el origen es un nodo atractor positivo y las únicas direcciones de aproximación son las de los ejes.*
- b) *Si  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$  tenemos la misma situación que el caso (a) pero el atractor es negativo.*
- c) *Si  $\lambda_1 = \lambda_2$  y  $A$  tiene la forma canónica*

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

*tenemos el caso (a) si  $\lambda_1 < 0$ ; y el caso (b) si  $\lambda_1 > 0$ . d) Si  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , el origen es un punto silla. e) Si los autovalores son complejos conjugados con parte real negativa, tenemos un punto espiral atractor positivo. f) Si los autovalores son complejos conjugados con parte real positiva, tenemos un punto espiral pero el atractor es negativo. g) Si los autovalores son imaginarios puros, el caso es indeterminado y el origen puede ser un centro o un punto espiral atractor positivo o negativo.*

*Demostración.* a) Suponemos aquí que el sistema lineal asociado a (7.1) tiene como forma canónica de Jordan

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

en este caso tenemos un nodo para el sistema lineal y veremos que para el caso no lineal ocurre una situación similar. Del teorema 7.1 el origen es un atractor positivo. Supongamos ahora que alguna solución  $\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t))$  del sistema (7.1) tiende al origen en alguna dirección definida. Entonces se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = M \quad (M \text{ puede ser } \infty).$$

También se tiene

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_2'(t)}{x_1'(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_2 x_2 + R_2(x_1, x_2)}{\lambda_1 x_1 + R_1(x_1, x_2)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_2 R_2(x_1, x_2)}{\lambda_1 R_1(x_1, x_2)},$$

dividiendo por  $\|x\| \neq 0$  y usando el lema 7.3 de aquí observamos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_2(t)}{\|x(t)\|} \neq 0.$$

Usando el teorema de L'Hospital en la expresión anterior se tiene

$$M = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_2 x_2(t)}{\lambda_1 x_1(t)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} M.$$

Como estamos considerando el caso  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  la relación anterior también es válida si  $M = 0$  o  $M = \infty$ . Finalmente si alguna solución del sistema (7.1) tiende al origen con dirección definida, debe hacerlo en alguna de las direcciones de los ejes coordenados. Las demostraciones de (b) y (c) son similares y se dejan como ejercicio.

d) Supongamos que el sistema lineal asociado con (7.1) está en el caso de la forma de Jordan

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

con  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Con los métodos utilizados en el caso anterior puede demostrarse que al menos una solución entra en la dirección del eje  $x_1$  y una sale (o entra con  $t \rightarrow -\infty$ ) en las direcciones del eje  $x_2$ . Aquí ninguna solución puede entrar en dirección distinta a las mencionadas. Considerando una vecindad  $U$  del origen sin puntos críticos también puede verse que en la región  $B$ , determinada por la intersección de la vecindad  $U$  con el interior del primer cuadrante, la función

$$\alpha(t) = \tan^{-1} \left[ \frac{x_2(t)}{x_1(t)} \right]$$

es monótona creciente, y por lo tanto, si una solución  $x_1(t), x_2(t)$  permanece en la sección  $B$  de la vecindad, el  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t)$  existe, y  $x_1(t), x_2(t)$  deberían tender hacia algún punto crítico que por hipótesis no es el origen; esto es una contradicción y la solución debe salir de la vecindad. De aquí se concluye que el origen es un punto silla de (7.1). Invitamos al lector a trabajar las demostraciones de las partes (e), (f) y (g).  $\square$

**Ejercicio 7.1.** *Completar los detalles de la demostración del teorema anterior, así como también, demostrar las partes no analizadas.*

**Ejemplo 7.1.** *La ecuación no lineal de segundo orden*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x + \beta x^3 = 0,$$

*es equivalente al sistema no lineal de segundo orden*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -w^2x - \beta x^3.\end{aligned}$$

*El campo de direcciones está dado por*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{w^2x + \beta x^3}{y}.$$

*Como podemos notar la ecuación anterior es de variables separables y tiene como solución*

$$y^2 + x^2\left(w^2 + \frac{\beta x^2}{2}\right) = C$$

*donde  $C$  es la constante de integración. Para  $\beta > 0$  las soluciones reales existen si y solo si  $C \geq 0$ . El origen es un punto singular (un centro); mientras que las soluciones no triviales estarían representadas por una familia de órbitas cerradas concéntricas. Existen tres puntos singulares representados por el origen y los puntos*

$$y = 0, \quad x = \pm \left(\frac{w^2}{-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

*El origen es un centro mientras que cada una de los otros dos puntos singulares son sillas. Cerca del origen todas las trayectorias son caminos cerrados y corresponden a soluciones periódicas.*

**Ejercicio 7.2.** *Haga un estudio de las órbitas que se describen en el ejercicio anterior.*

## Capítulo 8

# Un modelo depredador-presa

La competencia de varias especies que depredan a una misma población presa es un hecho que se produce con frecuencia en la naturaleza. En las últimas décadas, este aspecto ha sido objeto de estudio desde el punto de vista teórico tanto en área de la Biología como de la Matemática. Mencionamos de manera especial los trabajos realizados por S. B. Hsu, S. P. Hubbell, P. Waltman en [6] y [7] donde se exponen los aspectos teóricos relevantes de un modelo depredador-presa, en el cual se supone que la población presa crece logísticamente en ausencia de depredación y que diferentes especies depredadoras compiten por la explotación de la población presa, sin interferencia entre ellos. Por otra parte, se asume que las tasas de muertes son tales que siempre hay proporcionalidad entre los individuos muertos y los que nacen. Pero lo que caracteriza fundamentalmente a este modelo es la suposición sobre la forma de alimentación de los depredadores sobre su presa, lo cual se plantea con una respuesta funcional que exhibe saturación conforme aumenta la densidad de la presa. Específicamente, se asume que la cinética de Michaelis-Menten, o respuesta funcional del tipo Holling II, gobierna los cambios de las tasas de alimentación y las tasas de crecimiento de los depredadores, cuando se incrementa la densidad de la población presa.

Expliquemos brevemente en que consiste esto último:

Holling ([5]), observó que básicamente existen dos elementos de tiempo-consumo en el “ciclo de ataque” de un depredador:

- 1) tiempo de búsqueda
- 2) tiempo de manipulación (incluye digestión).

Si denotamos por  $s$  la densidad de la población presa,  $T$  el tiempo total de un ciclo de ataque,  $T_s$  el tiempo de búsqueda,  $h$  el tiempo que dura la manipulación individual de cada presa y por  $N_a$  al número total de individuos de la población presa capturados en un ciclo de ataque, entonces

$$T = T_s + hN_a.$$

Holling entonces demostró que el número  $N_a$  es proporcional a la densidad de la población presa  $s$  y al tiempo de búsqueda  $T_s$ ,

$$N_a = csT_s$$

donde  $c$  es la tasa de encuentros por unidad de densidad de presa. Eliminando  $T_s$  entre las dos ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$N_a = \frac{csT}{1 + chs}.$$

La cantidad de presa capturada por unidad de tiempo, viene a constituir **la tasa de alimento ingerido o respuesta funcional**, y está dada por

$$F = \frac{N_a}{T} = \frac{cs}{1 + chs} . \quad (8.1)$$

Ahora bien,  $F$  constituye la tasa de alimento ingerido individualmente por cada depredador. Así, el consumo total de la población depredadora será  $Fx$ , donde  $x$  es el número total de depredadores en la población.

Se deduce de (8.1) que:

a) A baja densidad de la presa, la tasa de alimento ingerido es acotada, y además, proporcional a la densidad de la presa.

b) A altas densidades de la población presa, la tasa de alimento ingerido está acotada por el tiempo de manipulación en la interacción depredador-presa y es independiente de la densidad de la presa.

Respuestas funcionales con estas propiedades se llaman **saturadas**. En este caso, la respuesta funcional saturada  $F$ , pertenece a una clase de tasas de procesos biológicos aceptadas universalmente. Particularmente, a nivel de reacciones enzimáticas, por ejemplo, la ecuación (8.1) es la conocida ecuación de Michaelis-Menten, que usualmente aparece en la forma

$$\nu = \frac{v_m s}{k_m + s} .$$

en ese caso  $\nu$  es la tasa específica del producto de formación (que en nuestro caso asociamos con la cantidad de alimento ingerido),  $v$  es el máximo de la tasa específica del producto de formación,  $s$  es la concentración del sustrato (en nuestro caso será la densidad de la presa),  $k_m$  es la llamada constante de saturación media, que denota la concentración del sustrato en la cual la tasa del producto de formación (en nuestro caso la tasa de alimento ingerido) es igual a la mitad del máximo.

Con las premisas descritas anteriormente y suponiendo que no hay tiempos de retardo significativos para el sistema, el modelo para una población presa y dos poblaciones depredadoras se expresa por medio de las siguientes ecuaciones :

$$\begin{aligned} s'(t) &= \gamma s(t) \left(1 - \frac{s(t)}{K}\right) - \frac{m_1 x_1(t)s(t)}{y_1 a_1 + s(t)} - \frac{m_2 x_2(t)s(t)}{y_2 a_2 + s(t)} \\ x_1'(t) &= \frac{m_1 x_1(t)s(t)}{a_1 + s(t)} - D_1 x_1(t) \\ x_2'(t) &= \frac{m_2 x_2(t)s(t)}{a_2 + s(t)} - D_2 x_2(t) . \end{aligned} \quad (8.2)$$

Con condiciones iniciales,  $s(0) = s_0 > 0$ ,  $x_i(0) = x_{i0} > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Los significados de las variables y coeficientes son los siguientes:

$x_i(t)$  = densidad de la población del  $i$ -ésimo depredador en el tiempo  $t$ .

$s(t)$  = densidad de la población presa en el tiempo  $t$ .

$m_i$  = máxima tasa de crecimiento del  $i$ -ésimo depredador.

$D_i$  = tasa de muerte correspondiente al  $i$ -ésimo depredador.

$y_i$  = es el factor de conversión del rendimiento del  $i$ -ésimo depredador.

$a_i$  = es la constante saturación media, esto es, la densidad de la población presa bajo la cual, la cantidad de alimento ingerido por el  $i$ -ésimo depredador es igual a la mitad del máximo.

$\gamma$  y  $K$  son la tasa intrínseca de crecimiento y la capacidad de carga, respectivamente, correspondientes a la población presa.

**Ejercicio 8.1.** *Demostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (8.2) con las condiciones iniciales señaladas posee una única solución.*

**Ejercicio 8.2.** *Demostrar que las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (8.2) son prolongables a toda la recta.*

## 8.1. Análisis del caso bidimensional

El sistema correspondiente a (8.2) en el caso de sólo un depredador y una presa, es el siguiente:

$$\begin{aligned} s'(t) &= \gamma s(t) \left(1 - \frac{s(t)}{K}\right) - \frac{m x(t)s(t)}{y a + s(t)} \\ x'(t) &= \frac{m x(t)s(t)}{a + s(t)} - D x(t), \end{aligned} \tag{8.3}$$

se supone que todos los parámetros que intervienen en las ecuaciones son positivos.

La primera situación que debemos abordar tiene que ver con la compatibilidad del modelo con la realidad que describe de dos comunidades biológicas. De modo que requerimos saber si todas las soluciones del sistema son positivas y además si cada una de las soluciones es acotada. Esto queda establecido en los siguientes lemas.

**Lema 8.1.** *Sea  $\varphi(t, s_0, x_0) = (s(t), x(t))$  la solución del sistema (8.3), entonces  $s(t)$  y  $x(t)$  son funciones positivas.*

*Demostración.* La positividad de las soluciones resulta de la representación:

$$\begin{aligned} s(t) &= s(0) \exp \left( \int_0^t \left( \left(1 - \frac{s(u)}{K}\right) - \frac{m x(u)}{y a + s(u)} \right) du \right) \\ x(t) &= x(0) \exp \left( \int_0^t \left( \frac{m s(u)}{a + s(u)} - D \right) du \right). \end{aligned}$$

Esto completa la prueba. □

**Ejercicio 8.3.** *Realice una prueba alternativa de la positividad de las soluciones.*

**Ejercicio 8.4.** *Dada la ecuación diferencial escalar  $z' = \gamma z \left(1 - \frac{z}{K}\right)$  con la condición inicial  $z(0) = s_0$ , demostrar que tiene por solución a la función  $z(t) = \frac{K}{1 + C_0 \exp(\gamma t)}$ , donde  $C_0 = \frac{K - s_0}{s_0}$ .*

**Lema 8.2.** *Las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (8.3) con condiciones iniciales positivas es acotada.*

*Demostración.* Por ser

$$s'(t) < s(t) \left(1 - \frac{s(t)}{K}\right), \quad t \geq 0$$

resulta claro que

$$s(t) \leq \frac{K}{1 + C_0 \exp(\gamma t)}$$

y por lo tanto  $s(t)$  es acotada, digamos por  $M$  (justificarlo anterior). Resulta claro, de la última expresión, que existe un tiempo  $t^*$ , tal que si  $t > t^*$ , entonces  $s(t) < K + 1$ . Para demostrar que  $x(t)$  está acotada basta ver que

$$s'(t) + x'(t) = \gamma s(t) \left(1 - \frac{s(t)}{K}\right) - Dx(t),$$

de donde se deduce que

$$s'(t) + x'(t) < \gamma M \left(1 - \frac{s(t)}{K+1}\right) - Dx(t),$$

lo que implica que

$$s'(t) + x'(t) < \gamma M - \frac{M}{K+1} s(t) - Dx(t).$$

De ser necesario redefinimos  $M > K + 1$ , y tenemos

$$s'(t) + x'(t) < \gamma M - h(s(t) + x(t)),$$

donde  $h = \min\{1, D\}$ . De esto se deduce que  $x(t)$  es acotada (Justifique).  $\square$

**Ejercicio 8.5.** *Complete los detalles del acotamiento de  $x(t)$ .*

**Ejercicio 8.6.** *Demuestre que para el sistema (8.3) existe un conjunto compacto tal que toda órbita que entra en él permanece allí para todo tiempo futuro (Un conjunto como el descrito antes se le llama conjunto absorbente y a un sistema con esta propiedad se le llama puntualmente disipativo).*

Para el análisis de las ecuaciones introducimos dos parámetros,

$$b = \frac{m}{D} \tag{8.4}$$

(llamado radio del depredador), y

$$\lambda = \frac{aD}{m - D}. \tag{8.5}$$

Estos parámetros, por su valor relativo asociado al depredador juegan un papel de importancia en los cálculos que se realizan en relación con las propiedades de las soluciones, y particularmente de los puntos de equilibrio.

**Ejercicio 8.7.** *Muestre que los puntos de equilibrio del sistema (8.3) ubicados en el primer cuadrante y los semiejes positivos son:  $E_0 = (0, 0)$ ,  $E_K = (0, K)$ , y  $E_* = (\lambda, \hat{x})$ . Determine el valor de  $\hat{x}$ .*

**Ejercicio 8.8.** Sea  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , una función dos veces diferenciable tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existe y  $f''(t)$  es acotada para todo  $t \geq 0$ . Demostrar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) = 0$ . (Ver [1]).

**Lema 8.3.** Una condición necesaria para que la especie  $x(t)$  sobreviva es  $0 < \lambda < K$ .

*Demostración.* Podemos ver que de la ecuación para  $x(t)$  en (8.3) se tiene que

$$x(t) = x_0 \exp \int_0^t \frac{(m-D)s(\xi) - aD}{a + s(\xi)} d\xi$$

lo cual se puede escribir en la siguiente forma

$$x(t) = x_0 \exp \int_0^t \frac{m-D}{a + s(\xi)} (s(\xi) - \lambda) d\xi$$

Ahora bien, si  $\lambda < 0$  entonces  $m - D < 0$  y resulta claro que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . Por otro lado, si  $\lambda > K$ , de la expresión anterior tenemos que

$$x(t) < x_0 \exp \int_0^t \frac{m-D}{a} (s(\xi) - \lambda) d\xi$$

Pero,

$$\int_0^t \frac{m-D}{a} (s(\xi) - \lambda) d\xi = \int_0^t D\lambda^{-1} (s(\xi) - \lambda) d\xi < \int_0^t D \left( \frac{s(\xi)}{K + \mu} - 1 \right) d\xi,$$

para algún  $\mu > 0$ . De esto se concluye que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  (Justificar). Finalmente si  $K = \lambda$ , tenemos lo siguiente. En el semiplano  $s \geq K$ ,  $s'(t) < 0$ , excepto para el punto crítico  $(K, 0)$  donde  $s'(t) < 0$ . Así que para  $x > 0$  y  $s > K$ ,  $s(t)$  es estrictamente decreciente, por lo tanto ningún punto de la recta  $s = K$  puede pertenecer al conjunto  $\omega$ -límite de una órbita salvo el punto antes mencionado. Además la función  $x'(t)$  cambia de signo a lo más una vez (el caso que estamos analizando hace que el sistema tenga sólo dos puntos de equilibrio, además para  $s(t) > \lambda$ ,  $x(t)$  es creciente y para  $s(t) < \lambda$ ,  $x(t)$  es decreciente) por lo tanto, en el futuro, la función  $x(t)$  es creciente, o bien decreciente. En cualquier caso,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  existe, pues  $x(t)$  es positiva y está acotada. Supongamos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c > 0$ , como  $x''(t)$  es acotada, por el ejercicio 8.8 tendríamos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$ . Lo que implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lambda = K$ , lo que es absurdo, pues tendríamos una órbita que tiene al punto  $(K, c)$  como punto  $\omega$ -límite con  $c > 0$ . Concluimos que ha de ser  $c = 0$ .  $\square$

## 8.2. Aplicación del criterio de Dulac

Para dar una aplicación interesante del criterio de Dulac, consideremos el modelo depredador-presa planteado por medio de las ecuaciones dadas en (8.3).

En relación con este sistema, el siguiente teorema descarta la existencia de soluciones periódicas bajo ciertas hipótesis sobre los parámetros.

**Teorema 8.1.** Sea  $b = \frac{m}{D}$ . Si

$$0 < \frac{a}{b-1} < K \leq a + \frac{2a}{b-1},$$

entonces no existen órbitas periódicas del sistema en el primer cuadrante del plano  $sx$ .

*Demostración.* Para demostrar la no existencia de soluciones periódicas aplicaremos el criterio de Dulac. Para hacer esto denotemos

$$\begin{aligned} f_1(s, x) &= \gamma s \left(1 - \frac{s}{K}\right) - \frac{m}{y} \frac{xs}{a+s} \\ f_2(s, x) &= \frac{mxs}{a+s} - Dx. \end{aligned}$$

y sea  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$B(s, x) = \left(\frac{s}{a+s}\right)^\alpha x^\delta$$

donde  $s > 0$ ,  $x > 0$ ;  $\alpha$  y  $\delta$  son números reales que serán seleccionados adecuadamente para que se cumpla el criterio de Dulac. Sabemos que la no existencia de soluciones periódicas ocurre cuando la expresión

$$\frac{\partial(f_1 B)}{\partial s} + \frac{\partial(f_2 B)}{\partial x},$$

no cambia de signo. Calculemos esta expresión.

En primer lugar tenemos que

$$f_1(s, x)B(s, x) = \left[ \gamma s \left(1 - \frac{s}{K}\right) - \frac{m}{y} \frac{xs}{a+s} \right] \left[ \left(\frac{s}{a+s}\right)^\alpha x^\delta \right],$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f_1 B)}{\partial s}(s, x) &= \left[ \gamma \left(1 - \frac{2s}{K}\right) - \frac{m}{y} \frac{ax}{(a+s)^2} \right] \left[ \left(\frac{s}{a+s}\right)^\alpha x^\delta \right] \\ &\quad + \left[ \gamma s \left(1 - \frac{s}{K}\right) - \frac{m}{y} \frac{xs}{a+s} \right] \left[ \left(\frac{s}{a+s}\right)^{\alpha-1} \frac{a\alpha x^\delta}{(a+s)^2} \right]. \end{aligned}$$

Efectuando los productos respectivos y reagrupando nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f_1 B)}{\partial s}(s, x) &= \left(\frac{s}{a+s}\right)^\alpha x^\delta \gamma \left(1 - \frac{2s}{K}\right) - \frac{mx}{y} \frac{a}{(a+s)^2} (\alpha + 1) \\ &\quad + \frac{a\alpha\gamma}{(a+s)} \left(1 - \frac{s}{K}\right) \end{aligned}$$

De igual manera hacemos

$$\begin{aligned} f_2(s, x)B(s, x) &= \left[ \frac{m}{a+s} \frac{xs}{a+s} - Dx \right] \left[ \left(\frac{s}{a+s}\right)^\alpha x^\delta \right] \\ &= mx^{\delta+1} \left(\frac{s}{a+s}\right)^{\alpha+1} - Dx^{\delta+1} \left(\frac{s}{a+s}\right)^\alpha, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial(f_2 B)}{\partial x}(s, x) = m(\delta + 1) x^\delta \left(\frac{s}{a+s}\right)^{\alpha+1} - (\delta + 1) x^\delta D \left(\frac{s}{a+s}\right)^\alpha.$$

Efectuando los productos y reagrupando nos queda

$$\frac{\partial(f_2 B)}{\partial x}(s, x) = (\delta + 1) x^\delta \left(\frac{s}{a+s}\right)^\alpha \left[ \frac{s(m - D) - aD}{(a+s)} \right].$$

Haciendo

$$Q = \frac{\partial(f_1 B)}{\partial s} + \frac{\partial(f_2 B)}{\partial x},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} Q &= x^\delta \left( \frac{s}{a+s} \right)^\alpha \left[ \gamma \left( 1 - \frac{2s}{K} \right) - \frac{mx}{y} \frac{a}{(a+s)^2} (\alpha+1) \right] \\ &\quad + \frac{a\alpha\gamma}{(a+s)} \left( 1 - \frac{s}{K} \right) \\ &\quad + (\delta+1) x^\delta \left( \frac{s}{a+s} \right)^\alpha \left[ \frac{s(m-D) - aD}{(a+s)} \right] \end{aligned}$$

Para estudiar los cambios de signos de esta expresión y facilitar el cálculo, observemos que podemos escribir la expresión anterior de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{m}{y} ax^{\delta+1} s^\alpha (a+s)^{-\alpha-2} (\alpha+1) + \gamma s^\alpha x^\delta (a+s)^{-\alpha-1} \\ &\quad \cdot \left[ (a+s) \left( 1 - \frac{2s}{K} \right) + a\alpha \left( 1 - \frac{s}{K} \right) + \beta s(m-D) - \beta aD \right], \end{aligned}$$

donde

$$\beta = \frac{\delta+1}{\gamma}.$$

Reagrupando términos en la parte derecha obtenemos la representación

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{m}{y} ax^{\delta+1} s^\alpha (a+s)^{-(\alpha+2)} (\alpha+1) + \gamma s^\alpha x^\delta (a+s)^{-(\alpha+1)} \cdot \\ &\quad \left[ \left( -\frac{2}{K} \right) s^2 + \left( \beta(m-D) + \left( 1 - \frac{(\alpha+2)a}{K} \right) \right) s + a((1+\alpha) - \beta D) \right]. \end{aligned}$$

Introduciendo la notación

$$\begin{aligned} P_{\alpha,\beta}(s) &= \left( -\frac{2}{K} \right) s^2 + \left( \beta(m-D) + \left( 1 - \frac{(\alpha+2)a}{K} \right) \right) s \\ &\quad + a((1+\alpha) - \beta D), \end{aligned}$$

finalmente tenemos que

$$\frac{\partial(f_1 B)}{\partial s} + \frac{\partial(f_2 B)}{\partial x} = \left[ -\frac{m}{y} ax^{\delta+1} s^\alpha (a+s)^{-(\alpha+2)} (\alpha+1) \right] [P_{\alpha,\beta}(s)].$$

Ahora seleccionaremos valores de  $\alpha$  y  $\beta$  de modo que la expresión anterior no cambie de signo. Como podemos ver

$$-\frac{m}{y} ax^{\delta+1} s^\alpha (a+s)^{-(\alpha+2)} (\alpha+1) \leq 0 \quad \text{para} \quad \alpha \geq -1.$$

Por lo tanto, para valores de  $\alpha \geq -1$  buscaremos los valores de  $\beta$  que hacen que  $P_{\alpha,\beta}(s) \leq 0$ . En tal sentido, observamos que  $P_{\alpha,\beta}(s)$  puede verse como el siguiente polinomio de segundo grado con respecto a la variable  $s$ :

$$P_{\alpha,\beta}(s) = As^2 + Bs + C,$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \left(-\frac{2}{K}\right), \\ B &= \left(\beta(m-D) + \left(1 - \frac{(\alpha+2)a}{K}\right)\right), \\ C &= a[(\alpha+1) - \beta D]. \end{aligned}$$

El discriminante de  $P_{\alpha,\beta}(s)$  está dado por

$$\begin{aligned} D_{\alpha}(\beta) &= \left[\beta(m-D) + \left(1 - \frac{(\alpha+2)a}{K}\right)\right]^2 \\ &\quad - 4\left(-\frac{2}{K}\right)[a((\alpha+1) - \beta D)] \\ &= (m-D)^2 \beta^2 + 2\left[(m-D)\left(1 - \frac{(\alpha+2)a}{K}\right) - \frac{4}{K}aD\right]\beta \\ &\quad + \left(1 - \frac{(\alpha+2)a}{K}\right)^2 + \frac{8}{K}a(\alpha+1). \end{aligned}$$

Mirando a  $D_{\alpha}(\beta)$  como un polinomio de segundo grado en la variable  $\beta$ , su discriminante  $D(\alpha)$  está dado por

$$D(\alpha) = 32\frac{a}{K^2} \{\alpha[(m-D)(aD - K(m-D))] + m(2aD - K(m-D))\}.$$

Supongamos que existe un  $\alpha^*$  tal que

$$D(\alpha^*) > 0$$

entonces

$$D_{\alpha^*}(\beta^*) = 0,$$

para dos raíces reales  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . Si  $\beta^*$  es un número real tal que

$$\beta_1 < \beta^* < \beta_2,$$

entonces

$$D_{\alpha^*}(\beta) < 0.$$

Por lo tanto, la ecuación

$$P_{\alpha^*,\beta^*}(s) = 0,$$

respecto a la variable no puede tener raíces reales. En este caso, como el coeficiente de  $s^2$  en la expresión de  $P_{\alpha,\beta}(s)$  es negativo, resultará que  $P_{\alpha^*,\beta^*}(s) < 0$  para todo  $s$ . Deducimos que tomando

$$\delta^* = \gamma\beta^* - 1$$

se obtiene el resultado.

Si

$$K < \frac{2a}{b^* - 1},$$

se puede elegir  $\alpha^* = 0$ . Para

$$K = \frac{2a}{b^* - 1},$$

cualquier  $\alpha^* > 0$  funciona.

Si

$$0 < \frac{2a}{b^* - 1} < K < a + \frac{2a}{b^* - 1},$$

entonces tomamos  $\alpha^*$  de modo que

$$-1 < \alpha^* < \frac{m[2aD - K(m - D)]}{(m - D)[K(m - D) - aD]}$$

y así se cumplirá que  $D(\alpha^*) > 0$ , y a todas las anteriores consideraciones para  $\beta$  siguen siendo válidas.

Finalmente, si

$$K = a + \frac{2a}{b^* - 1},$$

se puede elegir  $\alpha^* = -1$  y podemos ver que

$$D_{\alpha^*}(\beta) = (m - D)^2(\beta - \beta_o)^2$$

donde  $\beta_o$  es la raíz doble de la ecuación  $D_{\alpha^*}(\beta) = 0$ . Eligiendo  $\beta = \beta_o$ , nos queda

$$P_{\alpha^*, \beta^*}(s) = -2 - K(s - s_o)^2,$$

para algún valor  $s_o$  y por lo tanto  $P_{\alpha^*, \beta^*}(s) \leq 0$ . Para los valores que hemos seleccionado de  $\alpha$  y de  $\beta$  resulta claro que se cumple las hipótesis del criterio de Dulac, de lo que deducimos la no existencia de soluciones periódicas para las configuraciones de parámetros dada.  $\square$

# Referencias Bibliográficas

- [1] Coppel W. A., (1965) *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, Heath Mathematical Monographs, Boston.
- [2] Dieudonné J. (1975) *Fundamentos de Análisis Moderno*, Reverté, Barcelona
- [3] Hirsch, M. & Smale, S. (1974) *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York.
- [4] Hoffmann, K & Kunze, R (1974) *Algebra Lineal*, Prentice Hall, Madrid.
- [5] Holling C. S., (1965) *The functional response of predators to prey density and its mimicry and population regulation*, Memoir of the Entomological Society of Canada, **45**, 5-60.
- [6] Hsu, S. B.; Hubbell, S. P. & Waltman, P., (1978) *A contribution to the theory of Competing Predators*, Ecological Monographs, **48** , 337-349.
- [7] Hsu, S. B.; Hubbell, S. P. & Waltman, P., (1978) *Competing Predators*, SIAM J. Appl. Math. **35**, 617-625.
- [8] Imaz C. & Vorel Z., (1975) *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Limusa, Mexico

**La reproducción de los textos  
fue gracias al patrocinio de**

