Universidad del Zulia
Facultad Experimental de Ciencias
Asociación Matemática Venezolana

Introducción a la Teoría de Control

V Talleres de Formación Matemática
Maracaibo, 26 al 31 de Julio de 2004

V Talleres de Formación Matemática

Controlabilidad de Sistemas Semi-Lineales

Hugo Leiva y Hichert Zambrano

Maracaibo, 26 al 31 de julio de 2004

Índice General

Introducción

El objetivo de esta nota es introducir de manera rápida y elegante a los estudiantes de los últimos semestres de la licenciatura de matemática en el fascinante mundo de la teoría matemática de los sistemas de control. En tal sentido, concentraremos nuestro estudio en los sistemas de control gobernados por ecuaciones diferenciales lineales y semi lineales, lo que har á mas simple el entendimiento del concepto de controlabilidad.

En primer lugar, se estudia la controlabilidad de un sistema lineal de la forma

$$x' = A(t)x + B(t)u(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

donde $A(t)$ y $B(t)$ son matrices continuas de dimensiones $n \times n$ y $n \times m$ respectivamente y la función de control u pertenece al espacio $L^p(0,T;\mathbb{R}^m)$ $(C(0,T,\mathbb{R}^m))$. Se prueba que la controlabilidad del sistema (0,1) equivale a la sobreyectividad del operador

$G : L^p(0,T;\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$Gu = \int_0^T \Phi^{-1}((s)B(s)u(s))ds, \tag{0.2}$$

donde Φ es la matriz fundamental del sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \tag{0.3}$$

Esta equivalencia nos permite tratar la controlabilidad del sistema (0.1) como un problema de la teoría de operadores lineales en espacios Banach. Así, usando resultados conocidos sobre caracterización de operadores lineales sobreyectivos obtenemos los resultados sobre controlabilidad. Particularmente, para el caso autónomo, se obtiene la conocida condición de Kalman:

$$Rank[B \vdots AB \vdots \ldots A^{n-1}]B = n$$

También, se prueba que la controlabilidad del sistema (0.1) es equivalente a que la matriz

$$W(t) = \int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)B^*(s)\Phi^{-1^*}(s)ds,$$

sea definida positiva, lo cual nos permite hallar explícitamente el control u que transfiere el punto x_0 hasta el punto x_1 en tiempo T, éste control viene dado por la siguiente fórmula

$$u(t) = B^*(t)\Phi^{-1^*}(t)W^{-1}(t)[\Phi^{-1}(t)(x_1 - x_0)], \tag{0.5}$$

En segundo lugar, estudiamos la controlabilidad del siguiente sistema semi-lineal

$$x' = A(t)x + B(t)u(t) + F(t, x(t), u(t)), \tag{0.6}$$

donde $F : [0,t] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función lo suficientemente buena y no necesariamente pequeña, de hecho F puede ser igual a $I(x) = x$. Bajo ciertas hipótesis, se prueba que la controlabilidad del sistema (0.1) se preserva bajo la perturbaci ón nolineal F. Es decir, aquí se prueba la controlabilidad del sistema nolineal (0.6).

Finalmente, estas notas se organizaron de la manera siguiente: En el capítulo 1, se prueba el teorema de la aplicación abierta y como aplicación un teorema de caracterización de operadores sobreyectivos, el cual jugará un papel fundamental en la prueba de los resultados principales del capitulo 2.

En el capítulo 2, se dan criterios de controlabilidad para el sistema lineal (0.1) como aplicación de los resultados sobre operadores sobreyectivo presentado en el capítulo 1.

En el capítulo 3, se demuestra que la controlabilidad del sistema lineal se preserva bajo perturbaciones no lineales, no necesariamente pequeña, esta se lleva a cabo usando el teorema de Arzela-Ascoli y el teorema del punto fijo de Shauder.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, demostraremos un teorema que caracteriza a los operadores lineales, acotados y sobreyectivos definidos entre los espacios de Banach $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$. Incluimos aquí una prueba del teorema de la aplicación abierta, ya que la utilizaremos en la demostración del resultado principal de este capítulo.

A través, de este capítulo, $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ denotarán espacios de Banach con las normas respectivas: $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}, \|\cdot\|_{\mathbb{F}}$.

También denotaremos a las bolas abiertas de radio $r > 0$ y centro 0, mediante:

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{E}}(0,r) &= \{x \in \mathbb{E} : \|x\|_{\mathbb{E}} = \|x\| < r\} \\ B_{\mathbb{F}}(0,r) &= \{x \in \mathbb{F} : \|x\|_{\mathbb{F}} = \|x\| < r\}. \end{aligned}$$

Análogamente, se definen las bolas cerradas o abiertas centradas en otro punto. El espacio de operadores lineales y acotados, que van de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{F}$, lo denotaremos por $L(\mathbb{E},\mathbb{F})$, el cual es un espacio de Banach con la norma de la convergencia uniforme de operadores.

1.1. Teorema de la Aplicación Abierta

Este teorema lo usaremos en la prueba del Teorema 1.2.1.

Teorema 1.1.1 (Teorema de la Aplicación Abierta). *Sean $\mathbb{E},\mathbb{F}$ espacios de Banach y T un operador lineal, continuo y sobreyectivo. Entonces $\exists\, c > 0$ tal que*

$$B_{\mathbb{F}}(0,c) \subset \mathrm{T}(B_{\mathbb{F}}(0,1)).$$

Demostración. Indicaremos la demostración mediante afirmaciones:

Afirmación 1.1.1. *Existe $c > 0$ tal que $B(0,2c) \subset \overline{\mathrm{T}(B(0,1))}$.*

En efecto, pongamos $X_n = n\overline{\mathrm{T}(B(0,1))}$. Dado que T es sobre, entonces $\mathbb{F} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{X}_n$. Como $\mathbb{F}$ es de segunda categoría (ver [6]), entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\overset{\circ}{\overline{\mathrm{X}}}_{n_0} \neq \emptyset$; es decir que $n_0\ \overset{\circ}{\overline{\mathrm{T}B(0,1)}} \neq \emptyset$, pero esto implica que $\overset{\circ}{\overline{\mathrm{T}B(0,1)}} \neq \emptyset$.

Por lo tanto, existe $y_0 \in \overline{\mathrm{T}B(0,1)}$ y $c > 0$ tal que

$$B(y_0, 4c) \subset \overline{\mathrm{T}B(0,1)}.$$

De la convexidad y la simetría de $\overline{\mathrm{T}B(0,1)}$, *se tiene que*

$$B(y_0, 4c) - y_0 = B(0, 4c) \subset 2\overline{\mathrm{T}B(0,1)}.$$

Así, $B(0, 2c) \subset \overline{\mathrm{T}B(0,1)}$.

Afirmación 1.1.2. $B(0, c) \subset \mathrm{T}B(0, 1)$.

En efecto, veamos que para cada $y \in B(0, c)$ *existe* $x \in B(0, 1)$ *tal que* $\mathrm{T}(x) = y$.

Sea y *fijo con* $\|y\| < c$, *luego por definición de clausura y la afirmación* (1.1.1) *anterior, se tiene:* $\forall \varepsilon > 0\ \exists z^*,\ \|z^*\| < 1$ *tal que*

$$\|2y - \mathrm{T}z^*\| < 2\varepsilon.$$

Tomando $z_1 = \frac{1}{2} z^*$, *se tiene que*

$$\|z_1\| < \frac{1}{2} \quad y \quad \|y - \mathrm{T}z_1\| < \varepsilon.$$

Ahora bien, tomando $\varepsilon = \frac{c}{2}$ *obtenemos*

$$\|y - \mathrm{T}z_1\| < \frac{c}{2},\ \|z_1\| < \frac{1}{2}. \tag{1.1}$$

Llamando $y_1 = y - \mathrm{T}z_1$ *tenemos* $4y_1 \in B(0, 2c)$.

Luego existe $z^* \in B(0, 1)$ *tal que* $\|4y - \mathrm{T}z^*\| \leq 4\varepsilon$, *si ponemos* $z_2 = \frac{1}{4} z^* = \frac{1}{2^2} z^*,\quad z^* = 4z_2$, *entonces*

$$\|y - \mathrm{T}z_2\| < \varepsilon = \frac{c}{2} \Longleftrightarrow \|y - (\mathrm{T}z_1 + \mathrm{T}z_2)\| < \frac{c}{2^2},$$

con $\|z_1\| < \frac{1}{2},\ \|z_2\| < \frac{1}{2^2}$.

Siguiendo este procedimiento, obtenemos

$$\|y - \mathrm{T}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)\| < \frac{c}{2^n} \quad con \quad \|z_n\| < \frac{1}{2^n},\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

Ahora, considerando la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$, *se observa que*

$$\|S_n\| < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1. \tag{1.2}$$

Dado que $\mathbb{E}$ *es un espacio de Banach, resulta que* $(S_n)_{n\geq 1}$ *converge a* $x \in \mathbb{E}$, *y de* (1.2) *se tiene que* $\|x\| < 1$.

Entonces,

$$\|y - \mathrm{T}S_n\| < \frac{c}{2^n}.$$

Pasando al límite cuando n *tiende a infinito, obtenemos*

$$\|y - \mathrm{T}x\| = 0 \Longleftrightarrow y = \mathrm{T}x.$$

□

1.2. Caracterización de Operadores Sobreyectivos

Ahora, estamos preparados para probar el resultado principal de este capítulo, el cual ser á aplicado en el capítulo próximo para caracterizar la controlabilidad de los sistemas de control lineal.

Teorema 1.2.1. *Sea $A : D(A) \subset \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ no acotado y cerrado con $\overline{D(A)} = \mathbb{E}$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

a) $R(A) = \mathbb{F}$.

b) Existe $c > 0/\|v\| \leq c\|A^*v\|, \quad \forall v \in D(A^*)$.

c) $N(A^*) = \{0\}$ *y* $R(A^*)$ *es cerrado.*

Demostración. Probemos (a)$\Rightarrow$ (c): Para esto supondremos que $R(A) = \mathbb{F}$. Si $G = G(A)$ y $L = \mathbb{E} \times \{0\}$, entonces

$$\mathbb{E} \times R(A) = G + L.$$

Luego,

$$(\mathbb{E} \times R(A))^{\perp} = (G + L)^{\perp} \Rightarrow \{0\} \times R(A)^{\perp} = G^{\perp} \cup L^{\perp} = \{0\} \times N(A^*).$$

Así,

$$R(A)^{\perp} = N(A^*),$$

pero $R(A)^{\perp} = \{0\}$. Por lo tanto, $N(A^*) = \{0\}$.

Por otra parte, $R(A)$ es cerrado si, y sólo si, $G + L$ es cerrado.

Pero, $G + L$ es cerrado si, y sólo si, $G^{\perp} + L^{\perp}$ es cerrado.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} R(A) \text{ es cerrado} &\iff G + L \text{ es cerrado} \\ &\iff G^{\perp} + L^{\perp} \text{ es cerrado} \\ &\iff R(A^*) \text{ es cerrado.} \end{aligned}$$

Probemos (c)$\Rightarrow$ (a).

Supongamos $N(A^*) = \{0\}$ y $R(A^*)$ es cerrado. Como

$$R(A)^{\perp} = N(A^*) = \{0\},$$

se tiene que $R(A)^{\perp} = \{0\}$. Además,

$$\overline{(R(A))} = \mathbb{F} \Rightarrow R(A) = \mathbb{F}.$$

Probemos (b)$\Rightarrow$ (c).

Supongamo que, existe $c > 0/\|v\| \leq c\|A^*v\|, \quad \forall\, v \in D(A^*)$. Es fácil ver que $N(A^*) = \{0\}$.

Por otra parte, sea $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Efectivamente, consideremos

$$\|v_n - v_m\| \leq c\|A^*(v_n - v_m)\| = c\|A^*v_n - A^*v_m\|.$$

Luego la sucesión es de Cauchy. así, $v_n \to v \in \mathbb{F}$, $n \to \infty$; pero como A^* es cerrado, entonces $A^*v = f$, y $v \in D(A^*)$. Así $f \in R(A^*)$.

Probemos (c) $\Rightarrow$ (b).

Supongamos que $N(A^*) = \{0\}$ y $R(A^*)$ es cerrado. Entonces

$$\begin{aligned} \{0\} \cap N(A^*) &= G^\perp \cup L^\perp \text{ cerrado} \\ R(A^*) \times \mathbb{F}^* &= G^\perp + L^\perp \text{ cerrado.} \end{aligned}$$

Luego $G^\perp \cup L^\perp = \{0\}$ y para todo $z \in G^\perp + L^\perp$ se tiene que

$$z = a + b, \quad \text{con} \quad a \in G^\perp \quad \text{y} \quad b \in L^\perp \quad \text{únicos.}$$

Además, como $G^\perp + L^\perp$ es cerrado; por el Teorema de la Aplicación Abierta. Existe $c > 0$ tal que $\|a\| \leq c\|z\|, \;\; \|b\| \leq c\|z\|$.

Sea $v \in D(A^*)$ y pongamos

$$z = (A^*v, 0) = (A^*v, -v) + (0, v).$$

Si tomamos $a = (A^*v, -v)$ y $b = (0, v)$ obtenemos

$$G^\perp = J(G(A^*)) = \{(-A^*v, -v)\} \quad L^\perp = \{0\} \times \mathbb{F}^*.$$

Entonces

$$\|b\| = \|v\| \leq c\|z\| = c\|A^*v\|$$

$\square$

A continuación, enunciaremos dos corolarios del teorema precedente, los cuales serán de gran utilidad en el capítulo 2 en la prueba de la controlabilidad de los sistemas lineales.

Corolario 1.2.2. *Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$, espacios de Banach y $G \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Entonces tenemos:*

1. $Ran(G) = \mathbb{E} \Leftrightarrow \exists\, \alpha / \; \|G^*x^*\| \geq \alpha\|x^*\|, \quad (x^* \in \mathbb{E}^*)$
2. $\overline{Ran(G)} = \mathbb{E} \Leftrightarrow Ker(G^*) = 0$

Corolario 1.2.3. *Si además de las hipótesis anteriores, se tiene que dim $\mathbb{F} < \infty$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) $Ran(G) = \mathbb{E} \Leftrightarrow \exists\, \alpha / \; \|G^*x^*\| \geq \alpha\|x^*\|, \quad (x^* \in \mathbb{E}^*)$

b) $\overline{Ran(G)} = \mathbb{E} \Leftrightarrow Ker(G^*) = 0$

Capítulo 2

Controlabilidad de Sistemas Lineales

2.1. Controlabilidad de Sistemas Lineales No-Autónomos

En este capítulo estudiaremos el problema de la controlabilidad asociado con el siguiente sistema de control lineal no autónomo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{2.1}$$

donde $A(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ son funciones matriciales localmente integrables y la función control $u(\cdot)$ pertenece al espacio $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^l)$. Es bien conocido que, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la ecuación (2.1), tiene una única solución $x_u(\cdot)$, tal que $x_u(t) = x_0$, la cual es dada por:

$$x_u(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds,$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la matriz fundamental del sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

Es decir, Φ satisface

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) &= A(t)\Phi(t) \\ \Phi(t) &= I. \end{cases}$$

Ahora, presentaremos la definición más importante de este capítulo.

Definición 2.1. *El sistema* (2.1)*, dice que es contable sobre* $[0,T], (T > 0)$*, si dados dos puntos* $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$*, existe un control* $u \in L^2(0;T,\mathbb{R}^m)$*, tal que, la soluci ón correspondiente* $x_u(\cdot)$*, del sistema* (2.1)*, satisface la condición de frontera:*

$$x_u(0) = x_0 \ \ , \ \ x_u(T) = x_1.$$

Consideremos el siguiente operador G, dado por:

$$G(u) = \int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds. \tag{2.2}$$

Dado que $B \in L^2(0;T,\mathbb{R}^m)$, se tiene que G es un operador lineal y acotado.

Lema 2.1.1. *Las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. *El sistema* (2.1) *es controlable sobre* $[0,T]$*,*
2. *Rango*$(G) = \mathbb{R}^n$*),*

3. *Existe* $\alpha > 0$ *tal que,*

$$\|B^*(\cdot)\Phi^{-1}(\cdot)x\|_{L_2} \geq \alpha\|x\|_{\mathbb{R}^n} \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

4. *Si* $B^*(t)\Phi^{-1}(t)x = 0,\ 0 \leq t \leq T \Rightarrow x = 0.$

Demostración. Veamos la equivalencia entre a y b.

(a $\Rightarrow$ b). Supongamos que (2.1) es controlable sobre $[0, T]$. Debemos ver que para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $u \in L^2(0; T, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$G(u) = x.$$

Para esto, consideremos $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ con

i) $x_1 = \Phi(T)(x + x_0)$

Por lo tanto, existe un control $u \in L^2(0 : T, \mathbb{R}^m)$ que satisface la condición de frontera

$$x_u = x_0 \quad \& \quad x_u(T) = x_1.$$

Así:

ii) $x_1 = x_u(T) = \Phi(T)x_0 + \Phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds.$

De aquí, sustituyendo (i) en (ii), obtenemos;

$$\Phi(T)(x + x_0) = \Phi(T)(x_0 + \int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds).$$

Luego, eliminando $\Phi(T)$ tenemos que

$$x = \int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds = G(u).$$

(b $\Rightarrow$ a). Supongamos que el *Rango*$(G) = \mathbb{R}^n$. Probemos que el sistema (2.1) es controlable. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

i) $x = \Phi^{-1}(T)x_1 - x_0$ con $x_1, x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Entonces, existe un control $u \in L^2(0; T, \mathbb{R}^m)$ tal que

ii) $G(u) = x$.

Luego, reemplazando (i) en (ii) y de la definición de G, tenemos;

$$\Phi^{-1}(T)x_1 - x_0 = \int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds.$$

Así,

$$x_u(T) = \Phi(T)x_0 + \Phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds.$$

De esta manera hemos conseguido una solución $x_u(\cdot)$ de (1.1), tal que; $x_u(T) = x_1$ y $x_u(0) = x_0$, con lo cual concluimos que el sistema (1.1) es controlable.

Para probar la equivalencia entre las proposiciones b),c) y d) usaremos el Corolario 1.2.2. Para lo cual debemos calcular el adjunto G^* del operador G, definido entre los espacios

$$G^* : \mathbb{R} \to L_2^*(0; , T, \mathbb{R}^m)$$

pero como

$$\mathbb{R}^{n*} = \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad L_2^*(0, T, \mathbb{R}^m) = L^2(0; T, \mathbb{R}^m),$$

entonces, podemos considerar al operador G^* definido entre los espacios

$$G^* \mathbb{R}^n \to L^2(0; T, \mathbb{R}^m).$$

Además, por definición de operador adjunto, se tiene

$$\langle u, G^* x \rangle_{L_2, L_2} = \langle Gu, x \rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n},$$

pero;

$$\begin{aligned} \langle Gu, x \rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n} &= \left\langle \int_0^t \Phi_{-1}(s) B(s) u(s) ds, x \right\rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n} \\ &= \int_0^T \langle u(s), B^*(s) \Phi^{-1}(s) \rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n} ds. \end{aligned}$$

De la definición de producto interno en L_2, obtenemos

$$\int_0^T \langle u(s), B^*(s) \Phi^*(s) \rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n} ds = \left\langle u(\cdot), B^*(\cdot) \Phi^{-1*}(\cdot) \right\rangle_{L_2, L_2}.$$

Por lo tanto

$$G^*(x) = B^*(\cdot) \Phi^{-1*} x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, del Corolario 1.2.2, existe $\alpha > 0$ tal que;

$$Ran(G) = \mathbb{R}^n \iff \|B^*(\cdot) \Phi^{-1*} x\| \geq \alpha \|x\|, \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

lo cual es equivalente a

$$B^*(t) \Phi^{-1*}(t) x = 0, \quad t \in [0, T] \Rightarrow x = 0.$$

Esto prueba la equivalencia entre b),c) y d), así, terminamos la prueba del lema. □

Seguidamente, damos otra caracterización de la controlabilidad del sistema (2.1) sobre $[0, T]$, para ello consideramos la siguiente matriz:

$$W(T) = \int_0^T \Phi^{-1}(s) B(s) B^*(s) \Phi^{-1*}(s) ds \quad \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Corolario 2.1.2 (Condición de Kalman). *El sistema* (2.1) *es controlable sobre* $[0, T]$*, sí y sólo si,* $W(T)$ *es definida positiva.*

Demostración. Demostraremos la suficiencia. Supongamos que el sistema (2.1) es controlable sobre $[0, T]$. Del Lema 2.1.1 eso es equivalente, a la existencia de $\alpha > 0$ tal que

i) $Ran(G) = \mathbb{R}^n \iff \exists\, \alpha > 0 / \|G^* x\|_{L_2} \geq \alpha \|x\|_{\mathbb{R}^n}, x \in \mathbb{R}^n$.

De la demostración del lema anterior se tiene que, de aquí, la parte derecha de i), se puede escribir como

$$\|B^*(\cdot)\Phi^{-1*}(\cdot)x\|_{L_2} \geq \alpha \|x\|_{\mathbb{R}^n}, \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Luego al tomar cuadrados; se tiene que:

$$\|B^*(\cdot)\Phi^{-1*}(\cdot)x\|_{L_2}^2 \geq \alpha^2 \|x\|_{\mathbb{R}^n}^2, \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

De la definición de la norma L^2, obtenemos

$$\int_0^T \|B^*(s)\Phi^{-1*}(s)x\|_{\mathbb{R}_n}^2 ds \geq \alpha^2 \|x\|_{\mathbb{R}^n}^2, \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

lo cual equivale a

$$\int_0^T \langle B^*(s)\Phi^{-1*}(s)x, B^*(s)\Phi^{-1*}(s)x\rangle ds \geq \alpha^2 \langle x, x\rangle, \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

De la continuidad y la bilinealidad del producto interno, podemos integrar dentro del producto interno. Además, por definición de operador adjunto; obtenemos:

$$\left\langle \int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)B^*(s)\Phi^{-1*}(s)x ds, x \right\rangle \geq \alpha^2 \langle x, x\rangle, \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

De aquí se tiene:

$$\langle W(T)x, x\rangle \geq \alpha^2 \langle x, x\rangle,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

de lo cual concluimos que, $W(T)$ es definida positiva. La parte necesaria es trivial puesto que; todos los argumentos son reversibles.

□

Observación 2.1. *Si $W(T)$ es definida positiva, entonces existe $W^{-1}(T)$.*

Por lo tanto, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ definamos el control

$$u(t) = B^*(t)\Phi^{-1*}(t)W^{-1}(T)x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Gu &= \int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\ &= \int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)B^*(s)\Phi^{-1*}(s)W^{-1}x ds \\ &= W(T)W^{-1}(T)x = x. \end{aligned}$$

Luego, para todo $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, definamos el control

$$u(t) = B^*(t)\Phi^{-1*}(t)W^{-1}[\Phi^{-1}(T)x_1 - x_0].$$

Entonces, despejando x_1, obtenemos:

$$x_1 = \Phi(T)x_0 + \Phi(T)Gu,$$

lo cual es equivalente a

$$x_1 = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds$$

De esta manera hemos exhibido dos controles para el sistema (2.1), los cuales realizan el trabajo de trandferir x_0 a x_1.

2.2. Sistemas de Control Autónomo

Ahora, estudiaremos el siguiente sistema lineal autónomo,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.3}$$

Es decir, $A(t) = A$ y $B(t) = B$ en el sistema (2.1) son constantes. En este caso; el operador definicdo por (2.2), toma la forma:

$$Gu = \int_0^T e^{-sA}Bu(s)ds. \tag{2.4}$$

El teorema siguiente, nos provee de una caracterización algebraica de la controlabilidad del sistema (2.3) sobre $[0, T]$. Dicha caracterización, está dada por las siguientes relaciones equivalentes:

$$\begin{array}{rcl} Rank[B|AB|A^2B|\cdots|A^{n-1}B] & = & n \\ Sp\{B\mathbb{R}^m, AB\mathbb{R}^m, \cdots, A^{n-1}B\mathbb{R}^m\} & = & \mathbb{R}^n, \end{array} \tag{2.5}$$

donde $Sp\{A\}$ denota el espacio vectorial generado por A.

Teorema 2.2.1. *El sistema* (2.3)*, es controlable sobre* $[0, T]$ *con* $(T > 0)$ *si, y sólo si*

$$Rank[B|AB|A^2B|\cdots|A^{n-1}B] = n \tag{2.6}$$

Demostración. Supongamos que (2.3) es controlable sobre $[0, T], (T > 0)$. Entonces por el Lema (2.1.1); $Ran(G) = \mathbb{R}^n$. Por otra parte, del Teorema de Cayley Hamilton; obtenemos:

$$e^{-sA} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(s)A^i, \;\; \alpha_i(s) \in \mathbb{R}, \; i = 0, \cdots t, n-1.$$

Luego, el operador G puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} Gu &= \int_0^T \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(s)A^iBu(s)ds, && (2.7) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} A^iB \int_0^T \alpha_i u(s)ds. && (2.8) \end{aligned}$$

De aquí, definiendo

$$y(i) = \int_0^T \alpha_i u(s)ds, \;\; i = 0, 1, \cdots, n-1,$$

obtenemos:

$$Gu = \sum_{i=0}^{n-1} A^iBy(i), \;\; y(i) \in \mathbb{R}^m.$$

Ahora, si consideremos el operador algebraico:

$$\overline{G} : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}^{\backslash}, \mathcal{Y} = \underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{\backslash - \subseteq]]] \int}$$

definido por

$$\overline{G}y = \sum_{i=0}^{n-1} A^iBy(i), \;\; y = (y(0), \cdots, y(n-1)), \tag{2.9}$$

entonces,

$$Ran(G) \subseteq Ran(\overline{G}).$$

Por lo tanto, $Ran(\overline{G}) = \mathbb{R}^n$, la cual es equivalente a

$$Span\{B\mathbb{R}^m, AB\mathbb{R}^m, \cdots, A^{n-1}B\mathbb{R}^m\} = \mathbb{R}^n.$$

Conversamente, supongamos que la condición (2.6) es cierta, pero el sistema (2.3) no es controlable sobre $[0,T]$. Entonces, del Lema (2.1.1), existe $x_0 \neq 0$ tal que

$$B^* e^{-tA^*} x_0 = 0, \ \ \forall\, t \in [0,T].$$

Luego

$$\langle B^* e^{-tA^*} x_0, \xi \rangle = 0, \ \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Así, de la definición de adjunto, tenemos que

$$\langle x_0, e^{-tA} B\xi \rangle = 0, \ \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Entonces, al tomar la k-esima derivada de esta expresión en $t = 0$, resulta

$$\left.\frac{d^k \langle x_0, e^{-tA} B\xi \rangle}{d^k t}\right|_{t=0} = \langle x_0, (-A)^k B\xi \rangle = 0$$

y de la arbitrariedad de k; se sigue:

$$\langle x_0, A^k B\xi \rangle = 0, \ k = 0, 1, 2, 3, \cdots \ \forall \xi \in \mathbb{R}^m.$$

De aquí

$$\langle x_0, Span\{B\mathbb{R}^m, AB\mathbb{R}^m, \cdots, A^{n-1}B\mathbb{R}^m\} \rangle = 0.$$

Lo cual, contradice el hecho que

$$Span\{B\mathbb{R}^m, AB\mathbb{R}^m, \cdots, A^{n-1}B\mathbb{R}^m\}\rangle = \mathbb{R}^n.$$

Así, concluimos que el sistema (2.3) es controlable; finalizando así la prueba del Teorema. □

Las dos siguientes definiciones, permitiran dar una condición necesaria, para la controlabilidad del sistema (2.3), con controles dados sobre un espacio específico.

Definición 2.2. *Dada la partición π de $[0,T]$ en n intervalos*

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T,$$

definimos la matriz de controlabilidad particionada $C(\pi)$ como sigue

$$C(\pi) = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t_1} \alpha_0(s) ds I & \cdots & \int_{t_0}^{t_1} \alpha_0(s) ds I \\ \int_{t_0}^{t_1} \alpha_1(s) ds I & \cdots & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \alpha_1(s) ds I \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{t_0}^{t_1} \alpha_{n-1}(s) ds I & \cdots & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \alpha_{n-1}(s) ds I \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Definición 2.3. *Definamos el siguiente espacio:*

$$S_\pi = \{u \in L^2(0;T, \mathbb{R}^m) : u(t) = v_i, t \in [t_i, t_{i+1}], i = 0, 1, \cdots, n-1\}$$

Teorema 2.2.2. *Si la condición* (2.6) *es cierta y existe una partición* π *tal que* $C(\pi)$ *es invertible, entonces* (2.3) *es controlable con controles en* S_π.

Demostración. Supongamos la condición (2.6) es cierta y existe una partición π tal que $C(\pi)$ es invertible. Sea $u \in S_\pi$. Entonces, u puede ser escrita de la siguiente manera:

$$u(t) = v_i,\ t \in [t_i, t_{i+1}], i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Por otra parte, Gu puede escribirse como

$$\begin{aligned} Gu &= \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \int_0^T \alpha_i u(s)ds \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \sum_{i=0}^{n-1} \int_j^{j+1} \alpha_i v_j ds. \end{aligned}$$

Así,

$$Gu = \overline{G} \circ C(\pi) \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

Luego, tomando $Ran(G/S_\pi) = GS_\pi$ y de la arbitrariedad de la elección de π, tenemos que:

$$GS_\pi = \overline{G} \circ C(\pi)\mathcal{Y},\ \ \rfloor \wr \backslash\ \ \mathcal{Y} = \mathbb{R}^{\updownarrow} \times \mathbb{R}^{\updownarrow} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\updownarrow}, \backslash - \text{veces}$$

pero como (2.6) es cierto por hipótesis, entonces:

$$\overline{G} \circ C(\pi)\mathcal{Y} = \mathbb{R}^{\backslash},\ \ \rfloor \wr \backslash\ \ \mathcal{Y} = \mathbb{R}^{\updownarrow} \times \mathbb{R}^{\updownarrow} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\updownarrow}, \backslash - \text{veces.}$$

Así, el sistema (2.3), es controlable con controles en S_π. □

También, usaremos el siguiente teorema (que daremos sin demostración), que es consecuencia del Teorema de Cayley-Hamilton.

Teorema 2.2.3. *Sean* $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_n$ *los autovalores de la matriz* $A_{n\times n}$. *Considere una sucesión de polinomios en* A *como sigue:*

$$P_0(A) = I,\ \ P_k(A) = \prod_{j=1}^{k}(A - \lambda_j I), \quad k = 1, 2, \cdots, n-1. \tag{2.11}$$

Entonces,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k+1}(t) P_k(A). \tag{2.12}$$

Donde $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ *son determinados por recurrencia, mediante las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.*

$$\begin{array}{rcll} \dot{\beta}_1(t) &=& \lambda_1\beta_1(t), & \beta_1(0) = 1 \\ \dot{\beta}_2(t) &=& \lambda_2\beta_2(t) + \beta_1(t), & \beta_2(0) = 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ \dot{\beta}_{k+1}(t) &=& \lambda_{k+1}\beta_{k+1}(t) + \beta_k(t), & \beta_{k+1}(0) = 0 \end{array} \tag{2.13}$$

El siguiente lema, es una generalización del Teorema 2.2.1.

Lema 2.2.4. *El sistema* (2.3) *es controlable sobre* $[0, T]$*, si y sólo, si*

$$Span\{P_0(A)B\mathbb{R}^m, P_1(A)B\mathbb{R}^m, \cdots, P_{n-1}(A)B\mathbb{R}^m\} = \mathbb{R}^n \tag{2.14}$$

Demostración. Es similar a la demostración del Teorema (2.2.1) □

Observación 2.2. *Las condiciones* (2.6), (2.5) *y* (2.14) *son equivalentes.*

2.3. Condición del Rango para un Sistema No-Autónomo

Evidentemente que la condición algebraica para examinar la controlabilidad, de los sistemas lienales no autónomos, es muy fácil de aplicar. Motivado a esto, en esta sección consideraremos un sistema lineal no autónomo, en el cual la controlabilidad puede también ser examinada con esta condición algebraica.

Consideremos el sistema lineal no autónomo

$$\dot{x}(t) = a(t)Ax(t) + Bu(t). \tag{2.15}$$

Donde $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es una función escalar.

Demostraremos que bajo ciertas condiciones para $a(t)$, el sistema (2.15) es controlable sí y sólo si,

$$Span\{B\mathbb{R}^m, AB\mathbb{R}^m, \cdots, A^{n-1}B\mathbb{R}^m\} = \mathbb{R}^m. \tag{2.16}$$

Supongamos que:

$$a \in L_1[0, T] \quad \text{y} \quad g(t) = \int_0^t a(s)ds \neq 0, \;\; \forall t \in (0, T] \tag{2.17}$$

Teorema 2.3.1. *Bajo las hipótesis* (2.17)*, tenemos que, el sistema* (2.15) *es controlable sobre* $(0, T]$*, sí, y sólo si, la condición* (2.16)*, es cierta.*

Demostración. Supongamos que el sistema (2.15) es controlable sobre $(0, T]$. Entonces, el operador G dado por

$$\begin{aligned} G(\cdot) \quad &: \quad L_2(0; T, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n \\ Gu \quad &= \quad \int_0^T e^{-g(s)A}Bu(s)ds \end{aligned} \tag{2.18}$$

es sobreyectivo, esto es; $Ran(G) = \mathbb{R}^n$.

Por otra parte, del Teorema de Cayley-Hamilton, obtenemos:

$$e^{-g(s)A} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(-g(s))A^i.$$

Consideremos, el operador algebraico:

$$\begin{aligned} \overline{G} \quad &: \quad \mathcal{Y} \to \mathbb{R}^{\backslash}, \mathcal{Y} = \mathbb{R}^{\updownarrow} \times \mathbb{R}^{\updownarrow} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\updownarrow}, \;\; \backslash - \text{veces} \\ \overline{G}y \quad &= \quad \sum_{i=0}^{n-1} A^iBy(i), \;\; y = (y(0), \cdots, y(n-1)). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Entonces, $Ran(G) \subseteq Ran(\overline{G}) \Rightarrow Ran(\overline{G}) = \mathbb{R}^n$, que es equivalente a la condición (2.16).

Reciprocamente, supongamosque la condición (2.16) es verdadera,pero el sistema, (2.15) no es controlable.Luego, por el lema 2.1.1, existe x_0 tal que

$$B^*\Phi^{-1*}(t)x_0 = B^*e^{-A^*g(t)} = 0,\ t \in [0,T]$$

de la condición (2.17) obtenemos que el rango de g,es un intervalo $[T_1, T_2]$ tal que $0 \in [T_1, T_2]$, $(T_1 < T_2)$ (Rango de $g = [T_1, T_2]$). Así;

$$B^*e^{-A^*\tau} = 0, \ \ \forall\tau \in [T_1, T_2]$$

pero esto , implica que

$$\langle B^*e^{-A^*\tau}x_0, v\rangle = 0, \ \ \forall v \in \mathbb{R}^m, \tau \in [T_1, T_2]$$

y por definición de adjunto, tenemos

$$\langle x_0, e^{-A^*\tau}Bv\rangle = 0, \ \ \forall v \in \mathbb{R}^m, \tau \in [T_1, T_2].$$

Entonces, al tomar la k-ésima derivada en $t = 0$, obtenemos

$$\left.\frac{d^k\langle x_0, e^{-A\tau}Bv\rangle}{d^k\tau}\right|_{\tau=0} = \langle x_0, (-A)^kBv\rangle = 0$$

de la arbitrariedad de k; se sigue que:

$$\langle x_0, A^kBv\rangle = 0, \ \ k = 0, 1, 2, 3, \cdots \ \forall v \in \mathbb{R}^m$$

de aquí,

$$\langle x_0, Span\{B\mathbb{R}^m, AB\mathbb{R}^m, \cdots, A^{n-1}B\mathbb{R}^m\}\rangle = 0$$

lo cual contradice que:

$$Span\{B\mathbb{R}^m, AB\mathbb{R}^m, \cdots, A^{n-1}B\mathbb{R}^m\} = \mathbb{R}^n$$

así, concluimos que el sistema (2.15), es controlable. □

Capítulo 3

Controlabilidad de Sistemas No-lineales

En este capítulo, estudiaremos la controlabilidad del siguiente sistema de control no lineal en $\mathbb{R}^n$.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + F(t, x(t), u(t)), \tag{3.1}$$

donde $A(t)$ y $B(t)$ son matrices continuas de dimensión $n \times n$ y $n \times m$ respectivamente, $I = [t_0, t_1]$.

Si la función F es lo suficientemente buena, entonces para cada control $u(\cdot) \in L^p(I, \mathbb{R}^m)$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la ecuación (3.1) admite una única $x_u(\cdot) = x(\cdot)$, la cual satisface la condición $x(t_0) = x_0$. Dicha solución está dada por la siguiente fórmula

$$\begin{aligned} x(t) = \quad & \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\ & +\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)F(s, x(s), u(s))ds \end{aligned} \tag{3.2}$$

Aunque, la definición de controlabilidad dada en el capítulo anterior, para sistemas lineales, es la misma para los sistemas no lineales, repetiremos aquí la definición. Así, este capítulo, se hace autocontenido. También estaremos considerando aquí, el sistema lineal asociado a (3.1)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad t \in I \tag{3.3}$$

La hipótesis básica en esta parte, es que el sistema lineal (3.3) es controlable sobre I. Se trata de ver que la controlabilidad del sistema (3.3) se preserva bajo perturbaciones no necesariamente pequeñas, como en el caso de $F(t, x, u) = x$.

Observación 3.1. *Dado que el espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(I, \mathbb{R}^n)$, para los efectos de controlabilidad, no importa con cual de estos espacios se trabaje; algunas veces usaremos los controles en L^p o en $\mathcal{C}$ según convenga.*

Definición 3.1. *Diremos que el sistema* (3.1) *es* **controlable** *en I, si para todo $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe $u \in L^p(I; \mathbb{R}^m)$ tal que la solución de* (3.1) *$x(\cdot)$, satisface la condición de frontera*

$$x(t_0) = x_0 \quad y \quad x(t_1) = x_1$$

Definición 3.2. *Diremos que el sistema* (3.2) *es* **controlable al cero** *en I, si para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe $u \in L^p(I; \mathbb{R}^m)$ tal que la solución de* (3.2) *$x(.)$, satisface la condición*

$$x(t_0) = x_0 \quad y \quad x(t_1) = 0$$

A continuación, enunciaremos un resultado que nos permitirá tratar el problema, de la controlabilidad para el proceso, (3.2) en términos de la definición (3.2)

Proposición 3.0.2. *El sistema* (3.2) *es controlable en I, si y sólo si, es controlable al cero en I.*

Demostración. Para la necesidad, es claro que de cualquier punto en $\mathbb{R}^n$, debido a la hipótesis, podemos llegar particularmente al cero de $\mathbb{R}^n$ con algún $u \in L^p(I;\mathbb{R}^m)$.

Recíprocamente, dados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, consideremos el punto

$$z_0 = x_0 - \Phi^{-1}(t_1)x_1,$$

y de la hipótesis, tenemos que, existe $u(\cdot) \in L^p(I;\mathbb{R}^m)$ que lleva z_0 al cero de $\mathbb{R}^n$, así, tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi(t_1)z_0 + \Phi(t_1)\int_I \Phi(t_1)\Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\ +\Phi(t_1)\int_I \Phi(t_1)\Phi^{-1}(s)s(x,u(x),d(x))s = 0\end{aligned}$$

de esta manera, llegamos a que

$$\begin{aligned}\Phi(t_1)x_0 - x_1 + \Phi(t_1)\int_I \Phi(t_1)\Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\ +\Phi(t_1)\int_I \Phi(t_1)\Phi^{-1}(s)s(x,u(x),d(x))s = 0\end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}x_1 = \Phi(t_1)x_0 + \Phi(t_1)\int_I \Phi(t_1)\Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\ +\Phi(t_1)\int_I \Phi(t_1)\Phi^{-1}(s)s(x,u(x),d(x))s,\end{aligned}$$

lo que da por terminada la prueba. □

3.1. Criterios de Controlabilidad con Controles Continuas

En esta sección, demostraremos el resultado más importante de este trabajo. Es decir, probaremos que bajo cierta condición impuesta a la función F y tomando controles en el espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$, un criterio de controlabilidad para el sistema (3.1). Este resultado se apoya en el corolario 2.1.2 del capí tulo anterior, el cual asegura que, el sistema 3.3 es controlable sobre I si, y sólo si, la matriz W dada por:

$$W = \int_I \Phi^{-1}(s)B(s)B^*(s)\Phi^{-1*}(s)ds \tag{3.4}$$

es definida positiva.

El problema de la controlabilidad del sistema (3.1), consiste en los siguientes:

Dado x_0 y $x_1 \in \mathbb{R}^n$, hallar un control u en $\mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{aligned}x_1 &= \Phi(t_1)x_0 + \Phi(t_1)\textstyle\int_I \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\ &\quad +\Phi(t_1)\textstyle\int_I \Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Definamos el punto $\overline{x}$ como sigue, $\overline{x} = \Phi^{-1}(t_1)x_1 - x_0$. Entonces, si definimos el control $\overline{u}(\cdot)$ mediante

$$\overline{u}(t) = B^*(t)\Phi^{-1^*}(t)W^{-1}\overline{x}, \tag{3.6}$$

de la controlabilidad del sistema (3.3), resulta que

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \int_I \Phi^{-1}(s)B(s)\overline{u}(s)ds \\ &= \int_I \Phi^{-1}(s)B(s)B^*(t)\Phi^{-1^*}(t)W^{-1}\overline{x}ds \\ &= WW^{-1}\overline{x} = \overline{x}\end{aligned}$$

De (3.5) obtenemos que

$$\overline{x} = \int_I \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds + \int_I \Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds.$$

Luego

$$\overline{x} - \int_I \Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds = \int_I \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds,$$

de (3.6), es natural elegir el control u como la solución de la ecuación

$$u(t) = B^*(t)\Phi^{-1^*}(t)W^{-1}\left[\overline{x} - \int_I \Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds\right] \tag{3.7}$$

Luego es claro que, el punto x_1 es alcanzable desde x_0, si existen funciones continuas $x(\cdot)$ y $u(\cdot)$ tales que

$$(S_1)\left\{\begin{array}{lcl} u(t) &=& B^*(t)\Phi^{-1^*}(t)W^{-1}\left[\overline{x} - \int_I \Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds\right] \\ x(t) &=& \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_I \Phi^{-1}(s)\left[B(s)u(s) + F(s,x(s),u(s))ds\right]\end{array}\right.$$

Por lo tanto, nuestro objetivo consiste en hallar condiciones para la existencia de funciones $x(\cdot)$ y $u(\cdot)$, que satisfagan el sistema (S_1).

Consideremos la siguiente notación; para $\alpha_i \in L^1(I)$, $\quad i = 1,2,\ldots,q$, usaremos los siguientes símbolos

$$\begin{aligned} K &= \text{máx}\{\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| : t_0 \le s \le t \le t_1\}, && (3.8)\\ k &= \text{máx}\{\|\Phi(t)\| \cdot \|\Phi^{-1}B\|(t_1 - t_0), 1\}, && (3.9)\\ a_i &= 3k\|B^*(\Phi^{-1})^*\| \cdot \|W^{-1}\| \cdot \|\Phi^{-1}\| \cdot \|\alpha_i\|, && (3.10)\\ b_i &= 3K\|\alpha_i\|, && (3.11)\\ c_i &= \text{máx}\{a_i, b_i\}, && (3.12)\\ d_1 &= 3k\|B^*(\Phi^{-1})^*\| \cdot \|W^{-1}\| \cdot \|\overline{x}\|. && (3.13)\\ d_2 &= 3\|\Phi\| \cdot \|x_0\|, && (3.14)\\ d &= \text{máx}\{d_1, d_2\}. && (3.15)\end{aligned}$$

Ahora, estamos listo para probar el resultado más importante de este trabajo.

Teorema 3.1.1. *Sean $\phi_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ funciones medibles y $\alpha_i : I \to \mathbb{R}^+$,funciones integrables, $i = 1,2,\ldots,q$ tales que*

$$\|F(t,x(t),u(t))\| \le \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(t)\phi_i(t,x(t),u(t)), \quad (t,x,u) \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \tag{3.16}$$

Entonces, la controlabilidad del sistema (3.3) *implica la controlabilidad del sistema* (3.1)*; si*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\left(r-\sum_{i=1}^{q}C_i Sup\{\phi(x,u):\|(x,u)\|\leq r\}\right)=+\infty \tag{3.17}$$

Demostración. Motivado por el sistema (S_1), definamos el siguiente operador T :

$$T:\mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)\to\mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$$

como sigue

$$T(x,u)=(z,v),$$

donde

$$v(t) = B^*(t)\left(\Phi^-1(t)\right)^* W^{-1}\left(\overline{x}-\int_I\Phi^{-1}(s)s(x,u(x),d(x))s\right) \tag{3.18}$$

$$z(t) = \Phi(t)x_0+\Phi(t)\int_I\Phi^{-1}(s)(B(s)v(s)+s(x,u(x),(x)))ds \tag{3.19}$$

Claramente vemos que, si F es lo suficientemente suave, el operador T es continuo. Los puntos fijos de T, i.e.,$T(x,u)=(x,u)$ son las soluciones del sistema (S_1). Probaremos la existencia de tales puntos fijos, usando el teorema del punto fijo de Schauder.

Consideremos;

$$\Psi_i(r)=Sup\{\phi_i(x,u):\|(x,u)\|\leq r\}$$

puesto que , (3.17) es cierta. Dado $d>0$, existe $r_0>0$ tal que

$$r_{_0}-\sum_{i=1}^{q}C_i\Psi_i(r_{_0})\geq d \quad \text{ó} \quad \sum_{i=1}^{q}C_i\Psi_i(r_{_0})+d\leq r_{_0}$$

Luego, sea

$$C_{r_{_0}}=\{(x,u)\in\mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m):\|(x,u)\|\leq r_{_0}\}$$

Probemos que, T aplica C_{r_0} en C_{r_0}. Para esto, sea $(u,v)\in C_{r_0}$, luego por (3.18) y (3.19), tenemos;

$$\|v\|\leq\|B^*(\Phi^{-1})^*\|\|W^{-1}\|\left[\|\overline{x}\|+\int_I\|\Phi^{-1}\|\|F(s,x(s),u(s))\|ds\right]$$

pero de (3.16),

$$\|v\|\leq\|B^*(\Phi^{-1})^*\|\|W^{-1}\|\left[\|\overline{x}\|+\int_I\|\Phi^{-1}\|\left(\sum_{i=1}^{q}\alpha_i(s)\phi(x(s),u(s))\right)ds\right]$$

y por la definición de Ψ_i, tenemos:

$$\|v\| \leq \|B^*(\Phi^{-1})^*\|\|W^{-1}\|\left[\|\overline{x}\|+\int_I\|\Phi^{-1}\|\left(\sum_{i=1}^{q}\alpha_i(s)\Psi_i(r_0)\right)ds\right]$$

$$\|v\| \leq \|B^*(\Phi^{-1})^*\|\|W^{-1}\|\|\overline{x}\|+\|B^*(\Phi^{-1})^*\|\|W^{-1}\|\int_I\|\Phi^{-1}\|\left(\sum_{i=1}^{q}\alpha_i(s)\Psi_i(r_0)\right)ds$$

Ahora bien, de (3.13) y (3.14) obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d_1}{3k} &= \|B^*(\Phi^{-1})^*\|\|W^{-1}\|\|\overline{x}\| \\ \frac{a_i}{3k} &= \|B^*(\Phi^{-1})^*\|\|W^{-1}\|\|\Phi^{-1}\|\|\alpha_i\|\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}\|v\| &\leq \frac{d_1}{3k} + \|B^*(\Phi^{-1})^*\|\|W^{-1}\|\|\Phi^{-1}\| \sum_{i=1}^{q} \int_I |\alpha_i \Psi_i(r_0)| ds \\ \|v\| &\leq \frac{d_1}{3k} + \sum_{i=1}^{q} \|B^*(\Phi^{-1})^*\|\|W^{-1}\|\|\Phi^{-1}\|\|\alpha_i\|\Psi_i(r_0) \\ \|v\| &= \frac{d_1}{3k} + \sum_{i=1}^{q} \frac{a_i}{3k}\Psi_i(r_0) \leq \frac{1}{3k}\left(d + \sum_{i=1}^{q} c_i\Psi_i(r_0)\right) \leq \left(\frac{1}{3k}\right) r_0 \leq \frac{r_0}{3},\end{aligned}$$

donde

$$d_1 \leq d, \qquad a_i \leq c_i \quad \text{y} \quad k = \text{máx}\{\|\Phi\|.|\Phi^{-1}B\|(t_1 - t_0), 1\}$$

para z, tenemos;

$$\begin{aligned}\|z\| &\leq \|\Phi\|\|x_0\| + \|\Phi\| \int_I \|\Phi^{-1}B\|\|v\| ds + \|\phi\| \int_I \|\Phi^{-1}\|\|F(s, x(s), u(s))\| ds \\ \|z\| &\leq \|\Phi\|\|x_0\| + \|\Phi\|\|\Phi^{-1}B\|(t_1 - t_0)\|v\| + \int_I K \left[\sum_{i=1}^{q} \alpha_i(s)\phi_i(\alpha(s), u(s))\right] ds\end{aligned}$$

luego; de (3.14) y como $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} |\alpha_i(s)| = \|\alpha_i\|$. Entonces

$$\|z\| \leq \frac{d_2}{3} + k\|v\| + \sum_{i=1}^{q} K\|\alpha_i\|\Psi_i(r_0)$$

Ahora, de (3.11), (3.12) y (3.15) se tiene;

$$\|z\| \leq \frac{d_2}{3} + \sum_{i=1}^{q} \frac{c_i}{3}\Psi_i(r_0) + k\|v\|.$$

Así,

$$\|z\| = \frac{1}{3}\left[d + \sum_{i=1}^{q} c_i\Psi_i(r_0)\right] + k\|v\| \leq \frac{r_0}{3} + k\frac{r_0}{3k} = \frac{2r_0}{3}.$$

Luego, T aplica C_{r_o} en sí mismo. Ahora, demostraremos que, $T(C_r)$ es equicontinuo sobre $I \quad \forall \geq 0$. Para esto, veamos que; para todo $(x, u) \in C_r$ y $\forall s_1, s_2 \in I, s_1 < s_2$, tenemos,

$$\begin{aligned}v(s_1) - v(s_2) &= B^*(s_1)\left(\Phi^{-1}(s_1)\right)^* W^{-1}\left(\overline{x} - \int_I \Phi^{-1}(s)F(s, x(s), u(s))ds\right) \\ &- B^*(s_2)\left(\Phi^{-1}(s_2)\right)^* W^{-1}\left(\overline{x} - \int_I \Phi^{-1}(s)F(s, x(s), u(s))ds\right) \\ v(s_1) - v(s_2) &= \left(B^*(s_1)\left(\Phi^{-1}(s_1)\right)^* W^{-1} - B^*(s_2)\left(\Phi^{-1}(s_2)\right)^* W^{-1}\right) \\ &\left(\overline{x} - \int_I \Phi^{-1}(s)F(s, x(s), u(s))ds\right).\end{aligned}$$

Normalizando tenemos,

$$\begin{aligned}\|v_1(s_1)-v(s_2)\| &\leq \|B^*(s_1)\left(\Phi^{-1}(s_1)\right)^*-B^*(s_2)\left(\Phi^{-1}(s_2)\right)^*\|\|W^{-1}\| \\ &\quad\times\left(\|\overline{x}\|+\int_I\|\Phi^{-1}\|\|F(s,x(s),u(s))\|ds\right)\end{aligned}$$

por (3.16) tenemos

$$\begin{aligned}\|v_1(s_1)-v(s_2)\| &\leq \|B^*(s_1)\left(\Phi^{-1}(s_1)\right)^*-B^*(s_2)\left(\Phi^{-1}(s_2)\right)^*\|\|W^{-1}\| \\ &\quad\times\left(\|\overline{x}\|+\int_I\|\Phi^{-1}\|\sum_{i=1}^{q}\alpha_i(s)\phi_i(x(s),u(s))ds\right)\end{aligned}$$

Luego, por la definición de norma, en L_1 y de Ψ_i, tenemos;

$$\begin{aligned}\|v_1(s_1)-v(s_2)\| &\leq \|B^*(s_1)\left(\Phi^{-1}(s_1)\right)^*-B^*(s_2)\left(\Phi^{-1}(s_2)\right)^*\|\|W^{-1}\| \\ &\quad\times\left(\|\overline{x}\|+\textstyle\int_I\|\Phi^{-1}\|\sum_{i=1}^{q}\|\alpha_i\|\phi_i(r)ds\right)\end{aligned}\tag{3.20}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}z(s_1)-z(s_2) &= \Phi(s_1)x_0+\Phi(s_1)\int_{t_0}^{s_1}\Phi^{-1}(s_1)B(s)v(s)ds \\ &\quad+\Phi(s_1)\int_{t_0}^{s_1}\Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds \\ &\quad-\Phi(s_2)x_0-\Phi(s_2)\int_{t_0}^{s_2}\Phi^{-1}(s)B(s)v(s)ds \\ &\quad-\Phi(s_2)\int_{t_0}^{s_2}\Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}z(s_1)-z(s_2) &= (\Phi(s_1)-\Phi(s_2))x_0+(\Phi(s_1)-\Phi(s_2))\int_{t_0}^{s_1}\Phi^{-1}(s)B(s)v(s)ds \\ &\quad+\Phi(s_2)\int_{s_1}^{s_2}\Phi^{-1}(s)B(s)v(s)ds+(\Phi(s_1) \\ &\quad-\Phi(s_2))\int_{t_0}^{s_1}\Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds \\ &\quad+\Phi(s_2)\int_{s_1}^{s_2}\Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds\end{aligned}$$

Normalizando:

$$\begin{aligned}\|z(s_1)-z(s_2)\| &\leq \|\Phi(s_1)-\Phi(s_2)\|\|x_0\|+\|\Phi(s_1)-\Phi(s_2)\|\int_{t_0}^{s_1}\|\Phi^{-1}\|\|B\|\|v\|ds \\ &\quad+\|\Phi(s_2)\|\int_{s_1}^{s_2}\|\Phi^{-1}\|\|B\|\|v\|ds+\|\Phi(s_1) \\ &\quad-\Phi(s_2)\|\int_{t_0}^{s_1}\|\Phi^{-1}\|\|F(s,x(s),u(s))\|ds \\ &\quad+\|\Phi(s_2)\|\int_{s_1}^{s_2}\|\Phi^{-1}\|\|F(s,x(s),u(s))\|ds\end{aligned}$$

Nuevamente de la definición de norma en L^1 y Ψ_i, además, de (3.16) tenemos:

$$\begin{aligned}\|z(s_1)-z(s_2)\| &\leq \|\Phi(s_1)-\Phi(s_2)\|\|x_0\| + \|\Phi(s_1)-\Phi(s_2)\|\int_{t_0}^{s_1}\|\Phi^{-1}\|\|B\|\|v\|ds \\ &+\|\Phi\|\int_{s_1}^{s_2}\|\Phi^{-1}\|\|B\|\|v\|ds + \|\Phi(s_1)-\Phi(s_2)\|\int_{t_0}^{s_1}\|\Phi^{-1}\|\sum_{i=1}^{q}\alpha_i(s)\Psi_i(r)ds \\ &+\|\Phi\|\int_{s_1}^{s_2}\|\Phi^{-1}\|\sum_{i=1}^{q}\alpha_i(s)\Psi_i(r)ds \\ \|z(s_1)-z(s_2)\| &\leq \|\Phi(s_1)-\Phi(s_2)\|\|x_0\| + \|\Phi(s_1)-\Phi(s_2)\|(t_1-t_0)\|\Phi^{-1}\|\|B\|\|v\| \\ &+\|\Phi\|(s_2-s_1)+\|\Phi^{-1}\|\|B\|\|v\| + \|\Phi(s_1)-\Phi(s_2)\|\sum_{i=1}^{q}\|\alpha_i\|\Psi_i(r)\|\Phi_i\| \\ &+\|\Phi\|\|\Phi^{-1}\|\sum_{i=1}^{q}\|\alpha_i\|\Psi_i(r)(s_2-s_1)ds\end{aligned} \tag{3.21}$$

más aún, para todo $(x,u)\in C_r$

$$\begin{aligned}\|v\| &\leq \|B^*(\Phi^{-1})^*\|\|W^{-1}\|\left[\|\overline{x}\| + \textstyle\int_I \|\Phi^{-1}\|\sum_{i=1}^{q}\alpha_i(s)\Psi_i(r)ds\right] \\ &\quad \|B^*(\Phi^{-1})^*\|\|W^{-1}\|\left[\|\overline{x}\| + \textstyle\int_I \|\Phi^{-1}\|\sum_{i=1}^{q}\|\alpha_i(s)\|\Psi_i(r)ds\right]\end{aligned} \tag{3.22}$$

así, la parte derecha de (3.20)y (3.21), no dependen de la elección particular de (x,u), y de (3.21) resulta que $T(C_r)$ es una familia de funciones continuas, uniformemente acotadas. De aqui, es claro que, $T(C_r)$ es equicontinuo $\forall r>0$. Del Teorema de Ascoli-Arzela, $\overline{T(C_r)}$ es compacto en $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$. Por lo tanto, T es un operador completamente continuo.Además, C_{r_0} es no vacío, cerrado, acotado y convexo; así, por el Teorema del punto fijo de Schauder, T posee un punto fijo. Luego, las soluciones, (3.18) y (3.19) existen. Esto finaliza la demostración. □

3.2. Consecuencia del Teorema 3.1.1

Para aplicar el Teorema 3.1.1, debemos construir $\alpha_i^{'}s$ y $\phi_i^{'}s$ tales que (3.17) sea cierto. Esta construcción depende del problema, que se tenga. Si embargo, una construcción obvia de $\alpha_i^{'}s$ y $\phi_i^{'}s$, se obtiene poniendo $q=1,\alpha_1=\alpha=1$ y

$$\phi_1(x,u)=\phi(x,u)=\sup\{\|f(t,x,u)\| : t\in I\} \tag{3.23}$$

En este caso, (3.17) vale si

$$\lim_{r\to\infty}\inf\left(\frac{1}{r}\right)\sup\{\phi_1(x,u) : \|(x,u)\|\leq r\} < \frac{1}{c_1}, \tag{3.24}$$

donde c_1 está dado por $c_1=\text{máx}a_1b_1,\ \ mboxy\ \ a_1,b_1$ por (3.10) y (3.11) respectivamente.

Es importante hacer notar aquí, que esta construcción es suficiente en muchas situaciones.

Corolario 3.2.1. *Si f es continua y*

$$\lim_{\|(x,u)\|\to\infty}\frac{f(t,x,u)}{\|(x,u)\|}=0, \quad \textit{uniformemente en } t\ \ (t\in I), \tag{3.25}$$

entonces, el sistema semilineal (3.1) *es controlable si el sistema lineal* (3.3) *es controlable.*

Demostración. Sean $q=1, \quad \alpha_1=\alpha=1$ y

$$\phi_i(x,u)=\phi(x,u)=\sup\{\|f(t,x,u)\|:t\in I\}$$

Entonces,

$$\|f(t,x,u)\|\leq\phi(x,u), \quad \text{para todo } (t,x,u)\in I\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$$

en este caso, la condición del teorema 3.1.1 es cierta si

$$\lim_{r\to\infty}\inf\left(\frac{1}{r}\right)\sup\{\phi(x,u):\|(x,u)\|\leq r\}<\frac{1}{c}. \tag{3.26}$$

En particular (3.26), es cierta si

$$\lim_{r\to\infty}\inf\left(\frac{1}{r}\right)\sup\{\phi(x,u):\|(x,u)\|\leq r\}=0. \tag{3.27}$$

Supongamos que (3.27) no es cierto. Entonces, para algún $\varepsilon>0$, existe una sucesión $\{r_j\}, \quad r_j\to\infty$ cuando $j\to\infty$ tal que

$$\frac{1}{r_j}\sup\{\phi(x,u):\|(x,u)\|\leq r_j\}>\varepsilon \quad ,\forall j$$

De aquí, existe una sucesión $\{(x_j,u_j)\}$ con $\|(x_j,u_j)\|\leq r_j$ tal que

$$\frac{\phi(x_j,u_j)}{r_j}>\varepsilon \qquad \forall j \tag{3.28}$$

Veamos que, $\{(x_j,u_j)\}$ es una sucesión no acotada. Con el propósito de hallar una contradicción, supondremos que $\{(x_j,u_j)\}$ es una sucesión acotada, ya que f es continua, tenemos;

$$\phi(x_j,u_j)=\|f(t_j,x_j,u_j)\|, \quad \text{para algún} \quad t_j\in I,$$

pero como $\{(t_j,x_j,u_j)\}$ es acotada en $I\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, existe una subsucesión $\{(t_i,x_i,u_i)\}$ (renombrada si es necesario) de $\{(t_j,x_j,u_j)\}$, tal que, $\{(t_i,x_i,u_i)\}\to\{(t,x,u)\}$ para algún (t,x,u). Así

$$\phi(x_i,u_i)=\|f(t_i,x_i,u_i)\|\to\|f(t,x,u)\|$$

Luego, $\{\phi(x_i,u_i)\}$ es acotada. Esto, contradice (3.28). Concluyendo que, $\{(x_j,u_j)\}$ es no acotada. Como resultado, podemos elegir otra subsucesión $\{(x_p,u_p)\}$ (renombrada, si es necesario) de $\{(x_j,u_j)\}$ tal que;

$$\|(x_j,u_j)\|\to\infty, \qquad \text{cuando } p\to\infty$$

Nuevamente, sea t_p tal que

$$\phi(x_p,u_p)=\|f(t_p,x_p,u_p)\|$$

para esta subsucesión, tenemos;

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty}\frac{\|f(t_p,x_p,u_p)\|}{\|(x_p,u_p)\|} &= \lim_{p\to\infty}\frac{\phi(x_p,u_p)}{\|(x_p,u_p)\|}\\ &\geq \lim_{p\to\infty}\frac{\phi(x_p,u_p)}{r_p}>\varepsilon>0\end{aligned}$$

Lo cual viola la hipótesis del corolario. Así, la condición, (3.26) es cierta. Luego, el sistema semilineal (3.1) es controlable. $\square$

Corolario 3.2.2. *Si $F(t,x,u)$ es continua sobre $I\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, localmente en u, y*

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{\|F(t,x,u)\|}{\|u\|}=0 \quad \textit{uniformemente en } (t,x), \quad (t,x)\in I\times\mathbb{R}^n \tag{3.29}$$

entonces el sistema no lineal (3.1) *es controlable, si el sistema lineal* (3.3) *es controlable*

Demostración. Nuevamente, sea $\phi(x,u)$, definida por (??). Así,

$$\|F(t,x,u)\|\leq\phi(x,u), \quad \forall\ (t,x,u)\in I\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m.$$

Seguidamente,recordemos que, para cualquier $\Psi(y,z)$,

$$\sup_{y,z}\Psi(y,z)=\sup_{y}\sup_{z}\psi(y,z)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sup_{\|(x,u)\|\leq r}\{\phi(x,u)\} &= \sup\{\sup\{\|F(t,x,u)\|:t\in I\}:\|(x,u)\|\leq r\}\\
&\leq \sup\{\|F(t,x,u)\|:t\in I\}:x\in\mathbb{R}^n,\|u\|\leq r\}\\
&\leq \sup\{\|F(t,x,u)\|:t\in I,x\in\mathbb{R}^n,\|u\|\leq r\}\\
&\leq \sup\{\sup\{\|F(t,x,u)\|:\|u\|\leq r\}:(t,x)\in I\times\mathbb{R}^n\}
\end{aligned}$$

$$\sup_{\|(x,u)\|\leq r}\{\phi(x,u)\}\leq\sup\{\sup\{\|F(t,x,u)\|:\|u\|\leq r\}:(t,x)\in I\times\mathbb{R}^n\} \tag{3.30}$$

Demostraremos por contradicción, que el teorema (3.1.1) es satisfecho, demostrando que:

$$\lim_{r\to\infty}(1/r)\sup\{\phi(x,u):\|(x,u)\|\leq r\}=0 \tag{3.31}$$

es cierta. Supongamos (3.31) no se satisface, entonces de (??), para algún $\varepsilon>0$, existe $\{r_j\}$; $r_j\to\infty$ con $j\to\infty$, tal que

$$(1/r_j)\sup\{\sup\{\|F(t,x,u)\|:\|u\|\leq r\}:(t,x)\in I\times\mathbb{R}^n\}>\varepsilon.$$

Más aún, existen $\{t_j,x_j\}$ tal que

$$(1/r_j)\sup\{\|F(t,x,u)\|:\|u\|\leq r\}>\varepsilon,$$

para todo j. Ya que F es continua, existe una sucesión $\{u_j\}$, $\|u_j\|\leq r_j$, tal que

$$(1/r_j)\|F(t_j,x_j,u_j)\|>\varepsilon \tag{3.32}$$

Note que $\{u_j\}$ no debe ser acotada. De otra forma, si $\|u_j\|\leq M$ para algún M, entonces $\|F(t_j,x_j,u_j)\|\leq L$ para algún L, ya que F es localmente acotada en u. Esto contradice (3.32). Luego, tenemos

$$\frac{\|F(t_j,x_j,u_j)\|}{\|u_j\|}\leq\frac{\|F(t_j,x_j,u_j)\|}{r_j}>\varepsilon \quad \forall j.$$

Con $\|u_j\|\to\infty$. Claramente, esto contradice la hipótesis (3.29). De aquí (3.31) es satisfecha. $\square$

3.3. Controlabilidad para Controles en $L^p(I;\mathbb{R}^m)$

En esta sección, consideraremos el sistema de control no lineal (3.1), bajo perturbaciones F tal que, satisfagan,

$$\|F(t,x_1,u_1)\| - \|F(t,x_2,u_2)\| \leq k(t)\left(\|x_1-x_2\| + \|u_1-u_2\|\right), \tag{3.33}$$

con $k(\cdot) \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}^+)$. De tal forma que, caracterizaremos la controlabilidad del sistema de control no lineal (3.1), mediante un operador; no lineal, continuo Λ. Además daremos una condición necesaria para la controlabilidad de dicho sistema. Veamos que, $F(t,x,u) \in L_p(I;\mathbb{R}^n)$. Efectivamente, basta ver que

$$\int_{t_0}^{t_1} \|F(t,x(t),u(t))\|^p dt < +\infty$$

por hipótesis (3.33), tenemos;

$$\|F(t,x_1,u_1)\| - \|F(t,0,0)\| \leq k(t)\left(\|x_1\| + \|u_1\|\right)$$

luego

$$\|F(t,x_1,u_1)\| \leq \|F(t,0,0)\| + k(t)\left(\|(x_1,u_1)\|\right)$$

tomando $a(t) = \|F(t,0,0)\|$, tenemos

$$(\|F(t,x,u)\| \leq a(t) + k(t)\|(x,u)\| \quad \text{con} \;\; a(\cdot),k(\cdot) \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}^+).$$

Veamos que, $\forall x \in L^p(I;\mathbb{R}^n)$ y $\forall u \in L^p(I;\mathbb{R}^n)$, se tiene que, $F(\cdot,x(\cdot),u(\cdot)) \in L^p(I;\mathbb{R}^n)$. Efectivamente, elevando a la p, tenemos:

$$\|F(t,x(t),u(t))\|^p \leq \left(a(t) + k(t)\|(x(t),u(t))\|\right)^p, \quad a(\cdot),\; k(\cdot) \in \mathbb{R}^+$$

pero, sabemos que

$$\|h+g\|^p \leq 2^p(\|h\|^p + \|g\|^p)$$

luego

$$\begin{aligned} \|F(t,x(t),u(t))\|^p &\leq (a(t) + k(t)\|(x(t),u(t))\|)^p \\ &\leq 2^p(a(t))^p + (k(t))^p(\|(x(t),u(t))\|)^p) \end{aligned}$$

así

$$\|F(t,x(t),u(t))\|^p \leq 2^p a(t)^p + 2^p k(t)^p \|(x(t),u(t))\|^p$$

Integrando sobre I, tenemos

$$\int_I \|F(t,x(t),u(t))\|^p \leq 2^p \int_I a(t)^p dt + 2^p \int_I k(t)^p \; \|(x(t),u(t))\|^p < \infty.$$

Nos será de gran utilidad un lema muy conocido, a saber.

Lema 3.3.1 (Lema de Gronwal). *Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $g:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ dos funciones continuas. Sea $y:[a,b]\to\mathbb{R}$, una función continua que satisface*

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)y(s)ds, \quad \forall t \in [a,b].$$

Entonces, se tiene

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)g(s)exp\left(\int_s^t g(u)du\right) ds, \quad \forall t \in [a,b].$$

En el caso particular que $f \equiv C$, es constante, se tiene

$$y(t) \leq C \ \ exp\left(\int_a^t g(s)ds\right)$$

Lema 3.3.2. *Si a las hipótesis del lema* (3.3.1)*, agregamos que, f es monótona creciente, podremos afirmar que;*

$$y(t) \leq f(t) \ \ exp\left(\int_s^t g(s)ds\right).$$

Demostración. Definamos una función G, de la siguiente manera

$$G(s) := exp\left(\int_s^t g(u)du\right),$$

además, como f es monótona creciente y g es no negativa tenemos:

$$f(s)g(s) \ exp\left(\int_s^t g(u)du\right) ds \leq f(t)g(t) \ exp\left(\int_s^t g(u)du\right), \quad (s \in [a,b]) \tag{3.34}$$

luego, usando (3.34) y la continuidad de, f en el lema (3.3.1), obtenemos;

$$y(t) \leq f(t) + f(t)\int_a^t g(s) \ exp\left(\int_s^t g(u)du\right) ds.$$

pero,

$$\begin{aligned} f(t) + f(t)\int_a^t g(s) \ exp\left(\int_s^t g(u)du\right) ds &= f(t)\left[1 - \int_a^t G'(s)ds\right] \\ &= f(t)\left[1 - (G(t) - G(a))\right] \\ &= f(t)\left[1 - (1 - G(a))\right] \\ &= f(t)G(a) \end{aligned}$$

Entonces

$$y(t) \leq f(t) \ exp\left(\int_s^t g(u)du\right)$$

como se quería demostrar. □

Estamos, ahora, en condiciones de enunciar el siguiente lema.

Lema 3.3.3. *Sea $u(\cdot) \in L_p(t_0, t_1; \mathbb{R}^m)$, $\quad x_0 \in \mathbb{R}^n$ y F satisfaciendo la condicón*

$$\|F(t, x_1, u_1) - \|F(t, x_2, u_2)\| \leq k(t)\left(\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|\right), \tag{3.35}$$

con $k(\cdot) \in \mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R}^+)$, entonces, la aplicación de la solución $X(x_0; u)$ del problema, (3.1)-(3.3) *satisface la relación*

$$\begin{aligned} \|X_{(x_0,u)}(\cdot)\|_{L_p(I;\mathbb{R}^m)} &\leq \left[M_1\|x_0\| + M_2\left(\|Bu\|_{L_p} + k\|u\|_{L_p}\right)\right](t_1 - t_0) \\ &+ M_3(t_1 - t_0)^{1+\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{3.36}$$

donde, M_1, M_2 *y* M_3 *son constantes positivas independientes de* x_0 *y* u*; y también para,* $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$ *arbitrarias en* $L^p(t_0, t_1; \mathbb{R}^n)$ *la relación*

$$\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{L_p(t_0,t_1;\mathbb{R}^n)} \leq \left[\|B\|_{L_p} + K\right] M_2(t_1 - t_0)\|u_1(\cdot) - u_2(\cdot)\|_{L_p}, \tag{3.37}$$

aquí

$$x_n(t) = X_{(x_0,u)}(t), \quad (n = 1, 2 \quad y \quad t_0 \leq t \leq t_1)$$

Demostración. De (3.3.3), tenemos:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_I \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds + \Phi(t)\int_I \Phi^{-1}(s)F(s, x(s), u(s))ds.$$

Tomando norma

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \leq \|\Phi(t)\|\|x_0\| + \|\Phi(t)\|\int_I \|\Phi^{-1}(s)\|\|B(s)\|\|u(s)\|ds \\ +\|\Phi(t)\|\int_I \|\Phi^{-1}(s)\|\|F(s, x(s), u(s))\|ds,\end{aligned}$$

por hipótesis

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \leq \|\Phi(t)\|\|x_0\| + \|\Phi(t)\|\int_I \|\Phi^{-1}(s)\|\|B(s)\|\|u(s)\|ds \\ +\|\Phi(t)\|\int_I \|\Phi^{-1}(s)\|(a(s) + k(s)\|x(s), u(s)\|)ds.\end{aligned}$$

Considerando $M = \text{máx}_{t_0 \leq s \leq t \leq t_1} \|\Phi(t)\|\|\Phi^{-1}(s)\|$, tenemos

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \leq M\|x_0\| + M\int_I \|B(s)\|\|u(s)\|ds \\ +M\int_I a(s)ds + M\int_I k(s)\|x(s), u(s)\|ds,\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \leq M\|x_0\| + M\int_I \|B(s)\|\|u(s)\|ds + M\int_I a(s)ds \\ +M\int_I k(s)\|x(s)\|ds + M\int_I k(s)\|u(s)\|ds.\end{aligned}$$

Tomemos $a = \text{máx}_{s\in I a(s)}, \quad \mathcal{K} = \text{máx}_{k\in I k(s)}$ y aplicando *Hölder*

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \leq M\|x_0\| + M\int_I \|Bu\|_{L_p}(t - t_0)^{1/q} + Ma(t - t_0) \\ +M\mathcal{K}\|u\|_{L_p}(t - t_0)^{1/q} + M\int_I k(s)\|x(s)\|ds.\end{aligned}$$

ordenando

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \leq & \quad M\|x_0\| + (\|Bu\|_{L_p} + \mathcal{K}\|u\|)M(t - t_0)^{1/q} + Ma(t - t_0) \\ + & \quad M\textstyle\int_I k(s)\|x(s)\|ds.\end{aligned}$$

observando que la función

$$M\|x_0\| + (\|Bu\|_{Lp} + \mathcal{K}\|u\|_{Lp})M(t-t_0)^{1/q} + Ma(t-t_0)$$

es particularmente continua y monótonamente creciente en $[t_0, t_1]$. Por lo tanto, del lema (3.3.1), obtenemos;

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \quad &\leq \quad \Big[M\|x_0\| + (\|Bu\|_{Lp} + \mathcal{K}\|u\|_{Lp})M(t-t_0)^{1/q} \\ &\quad +aM(t-t_0)\big]\, exp\left(M\int_I k(s)ds\right).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \quad &\leq \quad \Big[M\|x_0\| + (\|Bu\|_{Lp} + \mathcal{K}\|u\|_{Lp})M(t-t_0)^{1/q} \\ &\quad +aM(t-t_0)\big]\exp\left(M\mathcal{K}(t-t_0)\right).\end{aligned}$$

pero como,$(t-t_0)$ es monótonamente creciente en I, tenemos

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \quad &\leq \quad \Big[M\|x_0\| + (\|Bu\|_{Lp} + \mathcal{K}\|u\|_{Lp})M(t-t_0)^{1/q} \\ &\quad +aM(t-t_0)\big]\exp\left(M\mathcal{K}(t_1-t_0)\right).\end{aligned}$$

Luego, elevando a la p, integrando sobre I y elevando este resultado a la $1/p$ obtenemos

$$\begin{aligned}\|x(\cdot)\| \quad &\leq \quad M\|x_0\|\exp\left(M\mathcal{K}(t_1-t_0)(t_1-t_0)\right) \\ &\quad + (\|Bu\|_{Lp} + \mathcal{K}\|u\|_{Lp})\, M\frac{(t_1-t_0)}{p^{1/p}}\exp(M\mathcal{K}(t_1-t_0)) \\ &\quad +aM\exp(M\mathcal{K}(t_1-t_0))\frac{(t_1-t_0)^{1+\frac{1}{p}}}{(p+1)^{1/p}}\end{aligned}$$

Tomando,

$$\begin{aligned}M_1 \quad &= \quad Mexp(M\mathcal{K}(t_1-t_0)); \\ M_2 \quad &= \quad \frac{M_1}{p^{1/p}} = \frac{MexpM\mathcal{K}(t_1-t_0)}{p^{1/p}}; \\ M_3 \quad &= \quad \frac{aMexp(M\mathcal{K}(t_1-t_0))}{(p+1)^{1/p}} = \frac{aM-1}{(p+1)^{1/p}},\end{aligned}$$

tenemos,

$$\|x(\cdot)\|_{Lp} \leq M_1\|x_0\|(t_1-t_0) + M_2(\|Bu\|_{Lp} + \mathcal{K}\|u\|_{Lp})(t_1-t_0) + M_3(t_1-t_0)^{1+\frac{1}{p}}.$$

Así,

$$\|x(\cdot)\|_{Lp} \leq \left[M_1\|x_0\| + M_2(\|Bu\|_{Lp} + \mathcal{K}\|u\|_{Lp})\right](t_1-t_0) + M_3(t_1-t_0)^{1+\frac{1}{p}}$$

obteniendo la relación (3.36).

Para obtener la relación (3.36), consideremos;

$$\begin{aligned}x_1(t) - x_2(t) \quad &= \quad \Phi(t)\left[\int_I \Phi^{-1}(s)B(s)(u_1(s)-u_2(s))ds\right. \\ &\quad + \quad \left.\int_I \Phi^{-1}(s)(F(s),x_1(s),u_1(s) - F(s),x_2(s),u_2(s))ds\right]\end{aligned}$$

tomando norma, resulta que

$$\begin{aligned} \|x_1(t)-x_2(t)\| &\leq \|\Phi(t)\| \left[\int_I \|\Phi^{-1}(s)\| \|B(s)\| \|(u_1(s)-u_2(s)\|)ds \right. \\ &+ \left. \int_I \|\Phi^{-1}(s)\| \|(F(s),x_1(s),u_1(s)-F(s),x_2(s),u_2(s))\|ds \right] \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \|x_1(t)-x_2(t)\| &\leq M \left[\int_I \|B(s)\| \|(u_1(s)-u_2(s)\|)ds \right. \\ &+ \left. \int_I \|\Phi^{-1}(s)\| \|(F(s),x_1(s),u_1(s)-F(s),x_2(s),u_2(s))\|ds \right] \end{aligned}$$

y de la hipótesis (3.35), tenemos

$$\begin{aligned} \|x_1(t)-x_2(t)\| &\leq M \left[\int_I \|B(s)\| \|(u_1(s)-u_2(s)\|)ds \right. \\ &+ \int_I \|\Phi^{-1}(s)\| k(s)(\|u_1(s)-u_2(s)\|)ds \\ &+ \left. \int_I k(s)(\|x_1(s)-x_2(s)\|)ds \right] \end{aligned}$$

por la desigualdad de Hölder, obtenemos;

$$\begin{aligned} \|x_1(t)-x_2(t)\| &\leq M \left[\int_I \|Bu_1(\cdot)-Bu_2(\cdot)\|_{Lp}(t-t_0)^{1/q} + \right. \\ & \left. \mathcal{K}\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{Lp}(t-t_0)^{1/q} \right] + \\ & M \int_I k(s)(\|x_1(s)-x_2(s)\|)ds \end{aligned}$$

Nuevamente, como;

$$M\left[\|Bu_1(\cdot)-Bu_2(\cdot)\|_{_{Lp}} (t-t_0)^{1/q} + \mathcal{K}(t-t_0)^{1/q} \left(\|u_1\|_{_{Lp}} - \|u_2\|_{_{Lp}} \right) \right],$$

es continua y monótonamente creciente en I, por el lema (3.3.2) tenemos;

$$\begin{aligned} \|x_1(t)-x_2(t)\| &\leq M \left[\|Bu_1(\cdot)-Bu_2(\cdot)\|_{_{Lp}} (t-t_0)^{1/q} \right. \\ &+ \left. \mathcal{K}(t-t_0)^{1/q} \|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{_{Lp}} \right] exp\left(M \int_I k(s)ds \right), \end{aligned}$$

luego;

$$\begin{aligned} \|x_1(t)-x_2(t)\| &\leq M \left[\|Bu_1(\cdot)-Bu_2(\cdot)\|_{_{Lp}} (t-t_0)^{1/q} \right. \\ &+ \left. \mathcal{K}(t-t_0)^{1/q} \|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{_{Lp}} \right] exp\left(M\mathcal{K}(t-t_0) \right) \end{aligned}$$

y como, $(t-t_0)$ es monótonamente creciente en I, se sigue:

$$\begin{aligned} \|x_1(t)-x_2(t)\| \leq\; & M \left[\|Bu_1(\cdot)-Bu_2(\cdot)\|_{_{Lp}} (t-t_0)^{1/q} \right. \\ & \left. + \mathcal{K}(t-t_0)^{1/q} \|u_1-u_2\|_{_{Lp}} \right] exp(M\mathcal{K}(t-t_0)) \end{aligned} \tag{3.38}$$

elevando a la p, integrando sobre I, y elevando este resultado a la $1/p$, se tiene

$$\begin{aligned}\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{L^p} &\leq M\|Bu_1(\cdot) - Bu_2(\cdot)\|_{L^p} \frac{(t_1 - t_0)}{p^{1/p}} exp(M\mathcal{K}(t - t_0)) \\ &+M\mathcal{K}\frac{(t_1 - t_0)}{p^{1/p}} exp(M\mathcal{K}(t_1 - t_0))\|u_1 - u_2\|_{L^p}\end{aligned}$$

así,

$$\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{L^p} = \left[\|Bu_1(\cdot) - Bu_2(\cdot)\|_{L^p} + \mathcal{K}\|u_1 - u_2\|_{L^p}\right] M_2(t_1 - t_0)$$

luego;

$$\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{L^p} \leq \left[\|B\|_{L^p} + \mathcal{K}\right] M_2(t_1 - t_0)\|u_1 - u_2\|_{L^p}$$

quedando, así probado la relación (3.36). □

Ahora consideremos, el operador siguiente;

$$\begin{aligned}\Lambda : L_p(t_0, t_1; \mathbb{R}^m) &\rightarrow \mathbb{R}^n) \\ u(\cdot) &\rightarrow \Lambda u(\cdot)\end{aligned}$$

donde;

$$\Lambda u(\cdot) := \int \Phi^{-1}(t)F(t, x(t), u(t))dt + \int \Phi^{-1}(t)B(t)u(t)dt$$

con,

$$x(t) = X(x_0, u)(t), \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

Probaremos a continuación la continuidad del operador Λ.

Proposición 3.3.4. Λ *es un operador continuo*

Demostración. Efectivamente, sean $u_1(\cdot)$ y $u_2(\cdot)$ controles en $L^p(I; \mathbb{R}^m)$ tenemos, entonces, que

$$\begin{aligned}\|\Lambda u_1(\cdot) - \Lambda u_2(\cdot)\| &\leq \int_I \|\Phi^{-1}(t)\|\|B(t)u_1(t) - B(t)u_2(t)\|dt \\ &+ \int_I \|\Phi^{-1}(t)\|\|F(s, x_1(s), u_1(s)) - F(s, x_2(s), u_2(s))\|ds\end{aligned}$$

utilizando la desigualdad de Hölder y la condición (3.35) sobre F, obtenemos;

$$\begin{aligned}\|\Lambda u_1(\cdot) - \Lambda u_2(\cdot)\| &\leq M\|Bu_1(\cdot) - Bu_2(\cdot)\|_{L^p}(t_1 - t_0)^{1/q} \\ &+ M\int_I k(s)\|u_1(s) - u_2(s)\|ds + M\int_I k(s)\|x_1(s) - x_2(s)\|ds\end{aligned}$$

aplicando nuevamente Hölder,

$$\begin{aligned}\|\Lambda u_1(\cdot) - \Lambda u_2(\cdot)\| &\leq M\|Bu_1(\cdot) - Bu_2(\cdot)\|_{L^p}(t_1 - t_0)^{1/q} \\ &+ M\mathcal{K}\|u_1(\cdot) - u_2(\cdot)\|_{L^p}(t_1 - t_0)^{1/q} \\ &+ M\mathcal{K}\int_I \|x_1(s) - x_2(s)\|ds,\end{aligned}$$

considerando (3.38) tenemos;

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u_1(\cdot)-\Lambda u_2(\cdot)\| &\leq \left(\|Bu_1(\cdot)-Bu_2(\cdot)\|_{L^p}\right) M(t_1-t_0)^{1/q}\\
&+ M\mathcal{K}(t)\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}(t_1-t_0)^{1/q}\\
&+ M^2\mathcal{K}\|B\|_{L^p}\frac{(t_1-t_0)^{1/q+1}}{1/q+1}\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}\\
&+ M\mathcal{K}^2e^{M\mathcal{K}(t_1-t_0)}\frac{(t_1-t_0)^{1/q+1}}{1/q+1}\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}
\end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u_1(\cdot)-\Lambda u_2(\cdot)\| &\leq \|B\|_{L^p}\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}M(t_1-t_0)^{1/q}\\
&+ M\mathcal{K}\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}(t_1-t_0)^{1/q}\\
&+ M^2\mathcal{K}\|B\|_{L^p}\frac{(t_1-t_0)^{1/q+1}}{1/q+1}\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}\\
&+ M\mathcal{K}^2e^{M\mathcal{K}(t_1-t_0)}\frac{(t_1-t_0)^{1/q+1}}{1/q+1}\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}
\end{aligned}$$

así;

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u_1(\cdot)-\Lambda u_2(\cdot)\| &\leq \Big[\|B\|_{L^p}M(t_1-t_0)^{1/q}+M\mathcal{K}(t_1-t_0)^{1/q}\\
&+ M^2\mathcal{K}\|B\|_{L^p}\frac{(t_1-t_0)^{1/q+1}}{1/q+1}+\\
&+ M\mathcal{K}^2e^{M\mathcal{K}(t_1-t_0)}\frac{(t_1-t_0)^{1/q+1}}{1/q+1}\Big]\|u_1(\cdot)-u_2(\cdot)\|_{L^p}
\end{aligned}$$

obteniendo,

$$\|\Lambda u_1(\cdot)-\Lambda u_2(\cdot)\| \quad\leq\quad L\|u_1-u_2\|_{L^p(I;\mathbb{R}^m)}$$

donde,

$$\begin{aligned}
L &= \|B\|_{L^p}M(t_1-t_0)^{1/q}+M\mathcal{K}(t_1-t_0)^{1/q}+M^2\mathcal{K}\|B\|_{L^p}\frac{(t_1-t_0)^{1/q+1}}{1/q+1}\\
&\quad +M\mathcal{K}^2e^{M\mathcal{K}(t_1-t_0)}\frac{(t_1-t_0)^{1/q+1}}{1/q+1}
\end{aligned}$$

se obtiene la continuidad del operador Λ ya que $u_1,u_2\in L^p(I;\mathbb{R}^m)$. □

A continuación caracterizaremos la controlabilidad del sistema (3.1), mediante el operador Λ.

Proposición 3.3.5. *El sistema* (3.1) *es totalmente controlable, si, y sólo si, el operador,* Λ *es sobreyectivo; es decir, si*

$$Ran(\Lambda)=\mathbb{R}^n$$

Demostración. Sea $x\in\mathbb{R}^n$ arbitrario, si suponemos que (3.1), es totalmente controlable existe, entonces, un control $u\in L^p(I;\mathbb{R}^m)$ que lleva el punto $-x$ al punto cero, así, tenemos;

$$0=-\Phi(t_1)x+\Phi(t_1)\int_I\Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds+\Phi(t_1)\int_I\Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds$$

o lo que es lo mismo que

$$x = \int_I \Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds + \int_I \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds$$

Recíprocamente, considerando que, Λ es un operador sobreyectivoÇ; para x_1 y x_0 arbitrario en $\mathbb{R}^n$, tomemos el punto

$$z = \Phi^{-1}(t_1)x_1 - x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Luego, por la sobreyectividad de Λ, existe un control $u \in L^p(I;\mathbb{R}^m)$ tal que

$$z = \int_I \Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds + \int_I \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds$$

Así,

$$\Phi^{-1}(t_1)x_1 - x_0 = \int_I \Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds + \int_I \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds,$$

y usando la invertibilidad de Φ, tenemos finalmente que

$$x_1 = \Phi(t_1)x_0 + \Phi(t_1)\int_I \Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds + \Phi(t_1)\int_I \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds,$$

Por lo tanto, el sistema (3.1) es, en efecto, totalmente controlable.

Consideremos la aplicación

$$\varphi(t,s) := \Phi(t)\Phi^{-1}(s), \quad (t,s \in I)$$

Entonces $\varphi(t,t_0) = \Phi(t)$; por consiguiente, la solución de (3.1) con la condición inicial $x_u(t_0) = x_0$ la podemos escribir de la siguiente manera

$$x_u(t_0) = \varphi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(t,s)B(s)u(s)ds, \quad (t_0 \le t \le t_1). \tag{3.39}$$

Definamos a continuación la siguiente matriz

$$W(t_0,t_1) := \int_I \varphi^{-1}(t_1,t)B(t)B^T(t)\varphi(t_1,t)^T dt. \tag{3.40}$$

El siguiente resultado nos servirá para afirmar, bajo ciertas condiciones, cuando el sistema semilineal (3.1), es exactamente controlable. □

Teorema 3.3.6. *Supongamos que el sistema* (3.1) *es controlable en I, la función F, satisface la condición* (3.33) *y vale*

$$M_2\mathcal{K}M^2\|B(\cdot)\|\|W^{-1}(t_0,t_1)\|(t_1-t_0)^{\frac{1+p}{p}} < 1, \tag{3.41}$$

entonces, el sistema no lineal, (3.1) *es controlable en I.*

Demostración. Si $F \in L^p(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, entonces por la controlabilidad de (3.1) existe $u \in L^p(I;\mathbb{R}^m)$ tal que el punto de $\mathbb{R}^n$

$$\int_I \Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds - \int_I \Phi^{-1}(s)B(s)u(s) = 0$$

más aún, el control u se puede determinar ya que

$$\begin{aligned}\int_I \Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds &= W(t_0,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)\int_I \Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds \\ &= \int_I \Phi^{-1}(s)B(t)\left(B^T\Phi^{-1}(t)^T W^{-1}(t_0,t_1)\right. \\ &\quad \left.\int_I \Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds\right)\end{aligned}$$

y de esta manera

$$u(t) = B^T(t)\Phi^{-1^T}W^{-1}(t_0,t_1)\int_I \Phi^{-1}(s)F(s,x(s),u(s))ds$$

podemos, entonces hacer

$$\|u(t)\| = \|B^T(t)\|\|\Phi^{-1}(t)^T\|\|W^{-1}(t_0,t_1)\|\int_I \|\Phi^{-1}(s)\|\|F(s,x(s),u(s))\|ds$$

y de aquí

$$\|u(\cdot)\|_{Lp(I;\mathbb{R}^m)} \le M^2\|w^{-1}(t_0,t_1)\|\|B(\cdot)\|_{Lp(I;\mathbb{R}^m)}\|F(\cdot)\|(t-t_0)^{1/p}$$

escribiendo

$$q_1 = M^2\|B(\cdot)\|\sqrt[p]{t_0-t_1}\|W^{-1}(t_0,t_1)\|$$

obtenemos la relación

$$\|u(\cdot)\|_{Lp(I;\mathbb{R}^m)} \le q_1\|F(\cdot)\|_{Lp(I;\mathbb{R}^m)} \tag{3.42}$$

Sea ahora, $x_{t_1} \in \mathbb{R}^n$ arbitrario y $u_1 \in Lp(I;\mathbb{R}^m)$, entonces, existe $u_2 \in Lp(I;\mathbb{R}^m)$ tal que

$$x_{t_1} - \int_I \Phi^{-1}(s)F(s,x_1(s),u_1(s))ds - \int_I \Phi^{-1}(s)B(s),u_2(s))ds = 0$$

para $u_2(\cdot)$ existe $w_2(\cdot) \in L^p(I;\mathbb{R}^m)$ tal que

$$\int_I \Phi^{-1}(s)\left[F(s,x_2(s),u_2(s)) - F(s,x_1(s),u_1(s))\right]ds - \int_I \Phi^{-1}(s)B(s),w_2(s)ds = 0$$

donde

$$x_1(t) = X(x_0,u_1)(t),$$

y

$$\|w_2(\cdot)\|_{Lp(I;\mathbb{R}^m)} \le q_1\|F(\cdot,x_2(\cdot),u_2(\cdot)) - F(\cdot,x_2(\cdot),u_2(\cdot))\|_{Lp(I;\mathbb{R}^m)}$$

aquí, hemos usado (3.42) con $F(\cdot) = F(\cdot,x_2(\cdot),u_2(\cdot)) - F(\cdot,x_1(\cdot),u_1(\cdot))$. Si usamos la condición (3.35) obtendremos

$$\|w_2(\cdot)\|_{Lp(I;\mathbb{R}^m)} \le q_1\mathcal{K}\left(\|x_2(\cdot)-x_1(\cdot)\|_{Lp(I;\mathbb{R}^n)} + \|u_2(\cdot)-u_1(\cdot)\|_{Lp(I;\mathbb{R}^n)}\right)$$

y usando (3.37), nos queda

$$\begin{aligned}\|w_2(\cdot)\|_{Lp(I;\mathbb{R}^m)} &\le q_1\mathcal{K}\left[\left(\|B\|_{Lp} - \mathcal{K}\right)M_2(t_1-t_0)\|u_2(\cdot)-u_1(\cdot)\|_{Lp(I;\mathbb{R}^n)}\right. \\ &+ \left.\|u_2(\cdot)-u_1(\cdot)\|_{Lp(I;\mathbb{R}^n)}\right]\end{aligned}$$

luego

$$\|w_2(\cdot)\|_{Lp(I;\mathbb{R}^m)} \le q_1\mathcal{K}\left[\left(\|B\|_{Lp} + \mathcal{K}\right)M_2(t_1-t_0) - 1\right]\|u_2(\cdot)-u_1(\cdot)\|_{Lp(I;\mathbb{R}^n)}$$

así, escribiendo $u_3 = u_2 - w_2$, obtenemos que

$$\|w_2(\cdot)\|_{Lp(I;\mathbb{R}^n)} \leq q_1\mathcal{K}\left[\left(\|B\|_{Lp} + \mathcal{K}\right) M_2(t_1 - t_0) + 1\right] \|u_2(\cdot) - u_1(\cdot)\|_{Lp(I;\mathbb{R}^n)}$$

además

$$\begin{aligned} x_{t_1} \quad &- \quad \int_I \Phi^{-1}(s)F(s, x_2(s), u_2(s))ds - \int_I \Phi^{-1}(s)B(s)u_3(s)ds = \\ x_{t_1} \quad &- \quad \int_I \Phi^{-1}(s)F(s, x_1(s), u_1(s))ds \left\{ \int_I \Phi^{-1}(s)\left[F(s, x_2(s), u_2(s)) - \right.\right. \\ &\left.\left. F(s, x_2(s), u_2(s))\right] ds - \int_I \Phi^{-1}(s)B(s)w_2(s)ds \right\} = 0 \end{aligned}$$

$\square$

quedando

$$x_{t_1} - \int_I \Phi^{-1}(s)F(s, x_2(s), u_2(s))ds - \int_I \Phi^{-1}(s)B(s)u_3(s)ds = 0.$$

Reiterando este proceso, obtenemos una sucesión de controles $\{u_n(\cdot)\}_{n\geq 1} \subset L_p(t_0, t_1; \mathbb{R}^n)$ tal que

$$x_{t_1} - \int_I \Phi^{-1}(s)F(s, x_n(s), u_n(s))ds - \int_I \Phi^{-1}(s)B(s)u_{n+1}(s)ds = 0. \tag{3.43}$$

con

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}(\cdot) - u_n(\cdot)\|_{L_p(I;\mathbb{R}^m)} \quad &\leq \quad q_1\mathcal{K}\left[\left(\|B\|_{L_p} + \mathcal{K}\right) M_2(t_1 - t_2) + 1\right] \\ &\quad\quad \|u_n(\cdot) - u_{n-1}(\cdot)\|_{L_p(I;\mathbb{R}^m)} \\ \\ x_n(t) \quad &= \quad X(x_0, u_n(t)), \quad (t_0 \leq t \leq t_1 \;\text{ y }\; n = 2, 3, 4, \cdots) \end{aligned}$$

De la hipótesis (3.41), obtenemos que

$$\begin{aligned} q_1\mathcal{K}[(\|B\|_{L_P} + \mathcal{K})M_2(t_1 - t_0) + 1] \quad &= \quad M^2 M_2(t_1 - t_0)^{\frac{1+p}{p}} \|B\|^2_{L_p}\mathcal{K}\|w^{-1}(t_0, t_1)\| \\ &- \quad M^2 M_2(t_1 - t_0)^{\frac{1+p}{p}} \|B\| L^2_p\mathcal{K}\|w^{-1}(t_0, t_1)\| - 1 < 1. \end{aligned}$$

y así, la sucesión, $\{u_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ es Cauchy en $L_p(I; \mathbb{R}^n)$, esto nos dice que existe $u \in L^p(I; \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(\cdot) = u(\cdot) \in L^p(I; \mathbb{R}^m)$$

debido a que la sucesión de soluciones, $\{x_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $x(\cdot)$, (es lo que se deduce de (3.38)), si pasamos al límite en (3.43) tenemos que;

$$x_{t_1} - \int_I \Phi^{-1}(s)F(s, x(s), u(s))ds - \int_I \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds = 0.$$

Concluyendo la controlabilidad exacta del sistema (3.1) en I.

Referencias Bibliográficas

[1] Do V. N., *Controllability of Semilinear Systems*, Journal of Optimization Theory and Application, Vol. 65, No. 1, 1990.

[2] Aronsson G., *Global Controllability and Bang-Bang Steering of Certain Non-linear Systems*, SIAM Journal on Control, Vol. 15 pp. 607-619, 1973.

[3] Dauer J., *Nonlinear Perturbacions of Quasilinear Control Systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 54, pp. 717-725, 1976.

[4] Lee E. B. and Markus L., *Foundation of Optimal Control Theory*, John Wiley and Sons, New York, New York, 1967.

[5] H. Leiva y H. Zambrano, *Rank Condiction for the controllability of linear time- Varying System*, International Journal of Control, Vol. 72, 920-931, 1999.

[6] Haïm Brézis, *Análisi Funcional Teoría y Aplicaciones*, Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1984.

La reproducción de los textos fue gracias al patrocinio de

PDVSA