

3-4 Modèle tridimensionnel :

L'objectif de cette section est la présentation de la modélisation solide utilisée par le mailleur automatique. Actuellement, on peut classer les modeleurs solides utilisés en CAO en trois grandes catégories :

- I. La représentation solide par arbre de construction (CSG : “Constructive Solid Geometry”). On représente un objet quelconque à l'aide de primitives solides élémentaires, que l'on combine à l'aide d'opérations booléennes régularisées (i.e. opération entre 2 solides donne toujours un solide) (modèle constructif). Sa visualisation demande cependant sa conversion en un autre modèle en particulier celui basé sur une représentation par les frontières.
- II. La représentation par les frontières (Brep : “Boundary representation”). Ici on représente un solide par les entités géométrique de frontières (souvent, arêtes et facettes). Cependant, les opérations booléennes sont difficiles à effectuer avec ce modèle.
- III. La Représentation par décomposition spatiale hiérarchique. Elle consiste à énumérer les blocs élémentaires occupés par l'objet. Elle a été utilisée pendant longtemps en éléments finis ; la méthode des quatree/octree est un cas particulier.

Tous ces modes de représentation comportent chacun des avantages et des inconvénients et aucun n'est entièrement satisfaisant. Aussi, les systèmes modernes de modélisation solide comportent-ils des modèles hybrides permettant une conversion automatique d'un mode de représentation à l'autre. La tendance actuelle cependant est d'utiliser la représentation «Brep» comme modèle de base, les autres étant générés à partir de lui. Aussi dans la suite, nous détaillerons plus les éléments servant

dans la définition d'une représentation «Brep».

3-4-1 Représentation par les frontières :

Ici, le modèle décrit l'objet à partir de son enveloppe ou de ses facettes frontières. Les informations tant de nature géométrique que topologique sont conservées afin que les facettes soient identifiables et orientées de telle sorte que l'on puisse distinguer l'intérieur et l'extérieur de l'objet. Le modèle conserve les frontières de l'objet, par exemple les facettes, arêtes et sommets et les relations entre eux.

Les informations requises sont donc de trois types :

- i. *Information géométrique* : Coordonnées des sommets, équations des arêtes ou des facettes. Ces informations sont souvent conservées en représentations homogènes.
- ii. *Information topologique* : L'information géométrique seule ne suffit pas pour avoir une représentation complète de l'objet (sauf pour les objets convexes). Il est donc nécessaire de conserver l'information permettant de connaître la topologie de la forme générale de l'objet.
- iii. *Informations connexes* : Par exemple, la couleur d'une facette, le degré de transparence d'une facette etc..

On sépare souvent la géométrie et la topologie de l'objet dans un but pratique; par exemple, pour effectuer une translation, on multiplie les coordonnées des sommets par la matrice de translation sans modifier la topologie. Mais on doit toujours garder en tête que topologie et géométrie ne sont pas indépendantes.

L'essentiel d'un modèle basé sur la représentation par les frontières de l'objet

est de pouvoir affirmer que le modèle définit un solide ; les surfaces définissant ce solide doivent être fermées, orientées, bornées, constituées d'une seule surface et ne doivent pas s'entrecouper. Dans la suite on résume des principaux modèles de surface utilisés en représentation unifiée de la géométrie des frontières.

3-4-1-1 Surfaces de Bézier :

Ici on fait une extension des principes vus sur les courbes de Bézier on cas de surface produit tensoriel de Bézier. Les surfaces sont définies de la même manière que les courbes. Dans une représentation sous forme paramétrique, l'élément de base est un carreau de surface (ou "patch" en anglais) (figure 3-7).

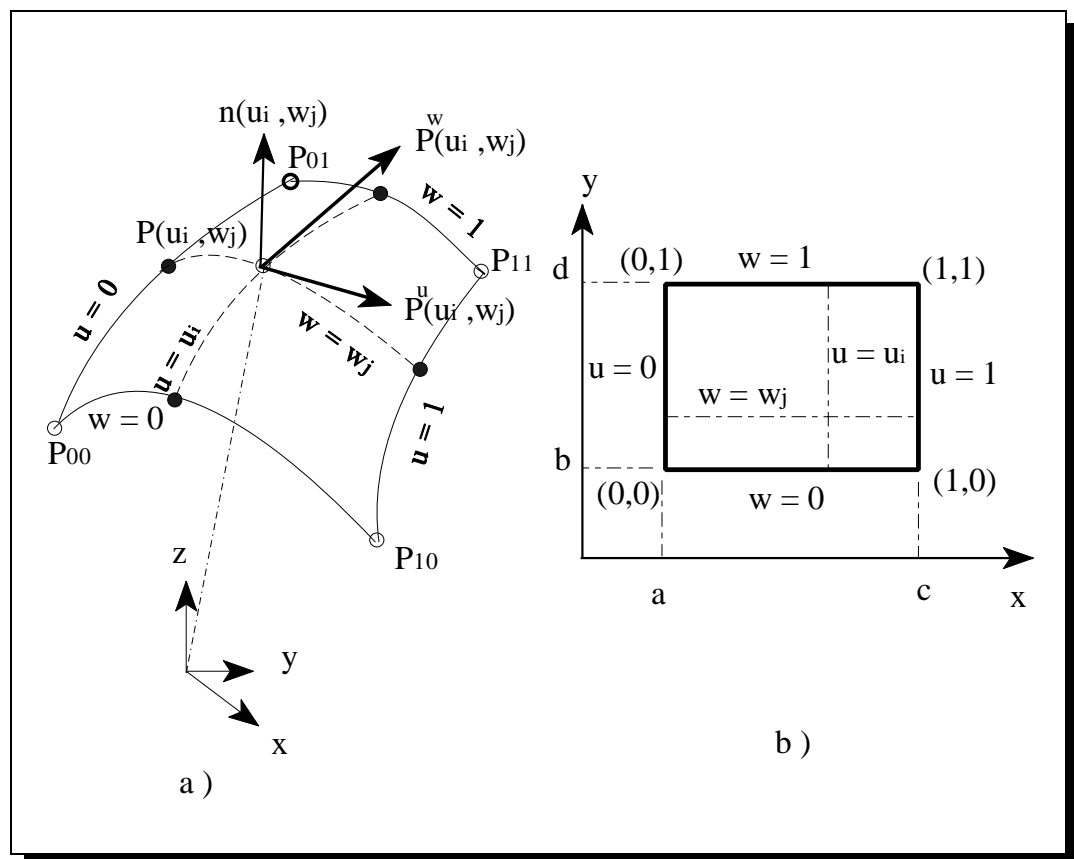


Figure 3-7 : carreau élémentaire, a) coordonnées cartésiennes, b) espace paramétrique.

Un carreau de surface est défini par :

$$P(u,w) = [x(u,w), y(u,w), z(u,w)] \quad u \in [0, 1] , w \in [0, 1] \quad (3.39)$$

et les courbes frontières sont :

$$P(u,0) , P(u,1) , P(0,w) , P(1,w)$$

Une surface de Bézier est définie par :

$$P(u,w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J_{n,i}(u) K_{m,j}(w) \quad (3.40)$$

où $J_{n,i}(u)$ et $K_{m,j}(w)$ sont des fonctions de la forme de Bernstein dans les directions paramétriques u et w définies par :

$$J_{n,i}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \quad (3.41)$$

$$K_{m,j}(w) = \binom{m}{j} w^j (1-w)^{m-j} \quad (3.42)$$

avec :

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} , \quad \binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!} \quad (3.43)$$

Les $B_{i,j}$ sont les sommets du polyèdre de contrôle, et m et n définissent le nombre d'espacements dans les directions u et w respectivement (donc m et n définissent le nombre de lignes et de colonnes du polyèdre de contrôle moins un). Chaque courbe frontière d'un carreau de Bézier est une courbe de Bézier. Pour les surfaces

complexes, il est nécessaire de réunir plusieurs carreaux de surface de Bézier, en prenant soin de s'assurer que les propriétés de continuité sont satisfaites aux interfaces entre des carreaux adjacents.

Dans le cas d'un carreau de surface bicubique de Bézier, celui-ci est défini par un tableau de points de dimension 4x4 d'après la relation :

$$P(u,w) = [(1-u)^3, 3u(1-u)^2, 3u^2(1-u), u^3] [P] \begin{bmatrix} (1-w)^3 \\ 3w(1-w)^2 \\ 3w^2(1-w) \\ w^3 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

où

$$[P] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

i.e. [P] est la matrice contenant les coordonnées des points de contrôle définissant le polyèdre caractéristique et donc la surface de Bézier. La figure (3-8) définit la représentation géométrique d'un carreau de surface bicubique de Bézier, dans laquelle on a introduit les notations suivantes :

- 4 sommets frontières : P_{11} , P_{41} , P_{44} et P_{14} .
- P_{21} , P_{31} , P_{12} , P_{13} , P_{42} , P_{43} , P_{24} et P_{34} contrôlent la pente des tangentes aux extrémités des courbes frontières.

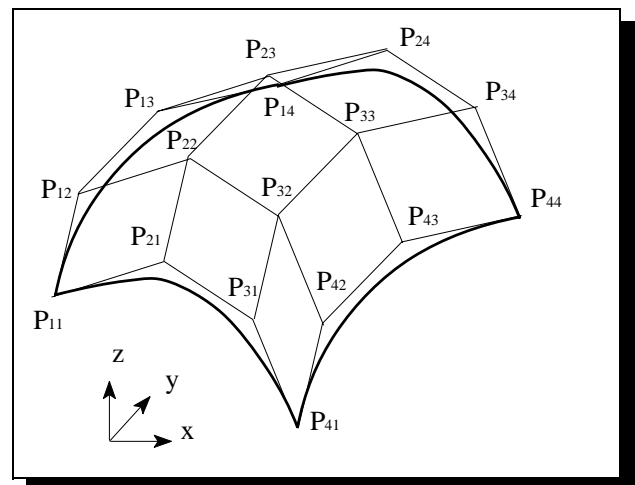


Figure 3-8 : Surface bicubique de Bézier.

- P_{22} , P_{23} , P_{32} et P_{33} contrôlent le vecteur de torsion le long des courbes frontières et la courbure de la surface (figure 3-8).

Les coordonnées de 4 points de contrôle définissant une courbe de Bézier le long d'une ligne $w = w_i$ seront alors données par :

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = [P] \begin{bmatrix} (1-w_i)^3 \\ 3w_i(1-w_i)^2 \\ 3w_i^2(1-w_i) \\ w_i^3 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

où

P_1 est sur la courbe frontière $u = 0$.

P_4 est sur la courbe frontière $u = 1$.

P_2 et P_3 contrôlant les pentes à l'une ou l'autre des extrémités.

Pour trouver un point sur cette ligne correspondant une courbe cubique de Bézier, on utilise la relation :

$$P(u, w_i) = [(1-u)^3, 3u(1-u)^2, 3u^2(1-u), u^3] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

De la même façon, on peut écrire l'équation d'un point sur la ligne $u = u_i$.

$$P(u_i, w) = [P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*] \begin{bmatrix} (1-w)^3 \\ 3w(1-w)^2 \\ 3w^2(1-w) \\ w^3 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

où

$$[P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*] = [(1-u_i)^3, 3u_i(1-u_i)^2, 3u_i^2(1-u_i), u_i^3] [P] \quad (3.49)$$

Les propriétés des surfaces de Bézier sont :

- Le degré de la surface dans chaque direction paramétrique est égal au nombre de points du polyèdre de définition dans cette direction moins un.
- La continuité de la surface dans chaque direction paramétrique est égale au degré de la surface dans cette direction moins un.
- La surface suit généralement la forme du polyèdre de définition.
- Seuls les points des extrémités du polyèdre de définition et de la surface coïncident.
- La surface est contenue dans l'enveloppe convexe du polyèdre de définition.

Les surfaces de Bézier sont en fait des cas spéciaux des surfaces B-splines plus générales qui sont décrites dans la prochaine section.

3-4-1-2 Surfaces B-spline :

Elles sont définies de la même manière que les courbes B-spline, soit :

$$P(u,w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,l}(w) \quad (3.50)$$

où

$N_{i,j}(u)$ est la fonction de forme dans la direction paramétrique u .

$N_{j,l}(w)$ est la fonction de forme dans la direction paramétrique w .

$B_{i,j}$ sont les points du polyèdre de contrôle

Tout comme pour les courbes B-splines, les surfaces B-splines peuvent être définies à l'aide de différents vecteurs nodaux : ouvert, périodique et non-uniforme. Bien que généralement le même type de vecteur nodal soit utilisé dans les deux directions paramétriques, ceci n'est pas nécessaire. Une surface peut être définie par un type de vecteur nodal en direction u et par un autre type de vecteur nodal en direction w .

Étant donné que les courbes frontières, ainsi que les courbes intérieures, sont définies à l'aide de fonctions de forme B-spline, plusieurs caractéristiques des courbes B-spline se transportent au niveau des surfaces B-splines :

- L'ordre maximal de la surface dans chacune des directions paramétriques est égal au nombre de points du polyèdre de définition dans cette direction.
- La continuité dans chacune des directions paramétriques est l'ordre de la surface dans cette direction moins deux (i.e. C^{k-2}).
- La surface est transformée en transformant le polyèdre de définition.
- Si l'ordre de la surface dans chaque direction paramétrique est égal au nombre de points du polyèdre de définition dans cette direction, et qu'il n'y a pas de noeuds intérieurs, alors la surface est une surface de Bézier.
- La surface est incluse dans l'enveloppe convexe définie par le polyèdre de définition formé par les polygones de définition dans les deux directions paramétriques.

3-4-1-3 Lissage par la surface B-spline non-uniforme composite :

Un problème qui se pose souvent dans le domaine de la conception et du graphisme par ordinateur est, comment, à partir de points donnés sur la surface de l'objet à représenter (points donnés ou mesurés), on peut trouver les points de contrôle ayant servi à générer cette surface.

Les caractéristiques géométriques qui sont nécessaires à la définition d'un

carreau de surface B-spline non-uniforme sont :

- Les 16 points de contrôle $\{V_{i,j}, \dots, V_{i+3,j+3}\}$.
- Le vecteur nodal dans la direction u $\{ \dots, s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \dots\}$.
- Le vecteur nodal dans la direction w $\{ \dots, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, \dots\}$.

Le domaine d'un carreau de surface $r^{ij}(u,w)$ est une région rectangulaire définie par :

$$(s,t) \in [s_i, s_{i+1}] * [t_i, t_{i+1}]$$

Étant donné qu'il est préférable de définir le carreau de surface dans un domaine carré unitaire $(u,w) \in [0,1] * [0,1]$, les paramètres doivent être modifiés selon:

$$u = (s - s_i) / \nabla_i \quad \text{et} \quad v = (t - t_i) / \nabla_j \quad (3.51)$$

avec : ∇_i et ∇_j définissant les espacements nodaux en direction u et w respectivement d'après :

$$\nabla_i = (s_{i+1} - s_i) \quad \text{et} \quad \nabla_j = (t_{i+1} - t_i) \quad (3.52)$$

On peut présenter les données d'entrée de la surface sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} X_{00} & S_{00} & S_{01} & S_{02} & \dots & S_{0j} & \dots & S_{0n} & X_{0n} \\ T_{00} & P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0j} & \dots & P_{0n} & T_{0n} \\ T_{10} & P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1n} & T_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ T_{i0} & P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{in} & T_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ T_{m0} & P_{m0} & P_{m1} & P_{m2} & \dots & P_{mj} & \dots & P_{mn} & T_{mn} \\ X_{m0} & S_{m0} & S_{m1} & S_{m2} & \dots & S_{mj} & \dots & S_{mn} & X_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

où :

X : représente les vecteurs de twist (torsion) aux 4 sommets extrémités.

S : représente les vecteurs tangents dans la direction u le long des courbes frontières.

T : représente les vecteurs tangents dans la direction w le long des courbes frontières.

P : représente les points donnés sur la surface.

m,n : le nombre d'espacements en direction u et w respectivement.

Un carreau de surface quelconque bicubique B-spline non-uniforme passant par les 4 points de coins $p_{i,j}$, $p_{i+1,j}$, $p_{i,j+1}$ et $p_{i+1,j+1}$ est alors défini, sous forme matricielle, par :

$$r^{ij}(u,w) = UN_s B^{ij} N_t^T W^T \quad (3.54)$$

où :

$$U = [1 \ u \ u^2 \ u^3]$$

$$W = [1 \ w \ w^2 \ w^3]$$

$$B^{ij} = \begin{bmatrix} V_{i,j} & V_{i,j+1} & V_{i,j+2} & V_{i,j+3} \\ V_{i+1,j} & V_{i+1,j+1} & V_{i+1,j+2} & V_{i+1,j+3} \\ V_{i+2,j} & V_{i+2,j+1} & V_{i+2,j+2} & V_{i+2,j+3} \\ V_{i+3,j} & V_{i+3,j+1} & V_{i+3,j+2} & V_{i+3,j+3} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

est la matrice des points de contrôle inconnus à déterminer qui définissent un carreau de surface passant par les 4 points de coins $p_{i,j}$, $p_{i+1,j}$, $p_{i,j+1}$ et $p_{i+1,j+1}$.

$$N_s, N_t = \begin{bmatrix} \frac{(\nabla_i)^2}{\nabla_{i-1}^2 \nabla_{i-2}^3} & 1 - n_{11} - n_{13} & \frac{(\nabla_{i-1})^2}{\nabla_{i-1}^3 \nabla_{i-1}^2} & 0 \\ -3n_{11} & 3n_{11} - n_{23} & \frac{3\nabla_i \nabla_{i-1}}{\nabla_{i-1}^3 \nabla_{i-1}^2} & 0 \\ 3n_{11} & -(3n_{11} + n_{23}) & \frac{3(\nabla_i)^2}{\nabla_{i-1}^3 \nabla_{i-1}^2} & 0 \\ -n_{11} & n_{11} - n_{43} - n_{44} & n_{43} & \frac{(\nabla_i)^2}{\nabla_i^3 \nabla_i^2} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

définit la matrice caractéristique des coefficients d'une courbe B-spline cubique non uniforme.

$$n_{43} = - \left\{ \frac{1}{3} n_{33} + n_{44} + \frac{(\nabla_i)^2}{\nabla_i^2 \nabla_{i-1}^3} \right\}$$

$$\nabla_i^l = \nabla_i + \nabla_{i+1} \dots + \nabla_{i+l-1}$$

n_{ij} : élément de la rangée i et de la colonne j

On doit noter que pour évaluer les matrices N_s et N_t , N_s utilise les espacements nodaux ∇_i et N_t les espacements nodaux ∇_j .

La procédure pour trouver les points de contrôle de la B-spline comporte les quatre étapes précises suivantes :

- I. Déterminer les espacements nodaux ∇_i et ∇_j .
- II. Déterminer les points de contrôle intermédiaires C_{ij} .
- III. Déterminer les vecteurs de frontière d_i et e_i .
- IV. Déterminer les points de contrôle de la B-spline V_{ij} .

Une estimation raisonnable de la grandeur des espacements nodaux est de rendre ces espacements égaux à la longueur des cordes entre les points donnés. Dans ce cas, les espacements nodaux de support dans les directions u et w seront définis respectivement par :

$$\nabla_i = \sum_{j=0}^n |P_{i+1,j} - P_{i,j}| \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.57)$$

$$\nabla_j = \sum_{i=0}^m |P_{i,j+1} - P_{i,j}| \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n-1$$

Le vecteur d'espacements nodaux étendu est complété en fixant les extrémités du vecteur à zéro pour une multiplicité 3, c'est-à-dire :

$$\nabla_{-2} = \nabla_{-1} = 0 = \nabla_m = \nabla_{m+1} = \nabla_n = \nabla_{n+1} \quad (3.58)$$

Pour avoir des vecteurs les points de contrôle intermédiaires, chaque colonne j des données d'entrée est interpolée par une courbe B-spline composite non-uniforme. C'est-à-dire que pour chaque colonne j , il faut interpoler une courbe à partir des points donnés. À cette fin, il suffit de résoudre le système d'équations linéaires suivant, pour ($j = 0, 1, \dots, n-1$) :

$$d_i = 3(V_{il} - V_{i0})$$

$$e_i = 3(V_{in+2} - V_{in+1})$$
(3.61 a)

Les vecteurs tangents à la frontière dans la direction w sont obtenus par calcul des dérivés dans la direction w i.e. :

$$t_{i,0} = \frac{\partial}{\partial w} r^{i,0}(0,0) \text{ et}$$

$$t_{i,n} = \frac{\partial}{\partial w} r^{i,n-1}(0,1)$$
(3.61 b)

Substituant (3.61b) après évaluation dans (3.61a) pour les vecteurs tangents, nous obtenons :

$$f_i d_i + (1 - f_i - g_i) d_{i+1} + g_i d_{i+2} = T_{i0} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, m$$

$$f_i e_i + (1 - f_i - g_i) e_{i+1} + g_i e_{i+2} = T_{in} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, m$$
(3.62)

De plus, à l'aide des vecteurs de torsion et évaluation des produits vectoriels des dérivées partielles dans les directions u et w aux 4 sommets extrémités, nous obtenons :

$$3(d_1 - d_0) = X_{00}$$

$$3(d_{m+2} - d_{m+1}) = X_{m0}$$

$$3(e_1 - e_0) = X_{0n}$$

$$3(e_{m+2} - e_{m+1}) = X_{mn}$$
(3.63)

Ce qui nous ramène exactement au même système d'équations linéaires que précédemment. En fait, les vecteurs frontières seront calculés de la même manière que

3-4-1-4 Lissage par la surface B-spline non-uniforme composite fermée :

Dans ce cas, on peut présenter les données d'entrée de la surface sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0j} & \dots & P_{0n-1} & P_{00} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1n-1} & P_{10} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{in-1} & P_{i0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ P_{m-10} & P_{m-11} & P_{m-12} & \dots & P_{m-1j} & \dots & P_{m-1n-1} & P_{m-10} \\ P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0j} & \dots & P_{0n-1} & P_{00} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

où :

P : représente les points donnés sur la surface.

m,n : le nombre d'espacements dans les directions u et w respectivement.

Un carreau de surface quelconque bicubique B-spline non-uniforme passant par les 4 sommets $p_{i,j}$, $p_{i+1,j}$, $p_{i,j+1}$ et $p_{i+1,j+1}$ est défini, sous forme matricielle, par l'équation (3.45). La procédure pour trouver les points de contrôle de la B-spline comporte les étapes suivantes :

- I. Déterminer les espacements nodaux ∇_i et ∇_j .
- II. Déterminer les points de contrôle intermédiaires C_{ij} .
- III. Déterminer les points de contrôle de la B-spline V_{ij} .

Une estimation raisonnable de la grandeur des espacements nodaux est de

rendre ces espacements égaux à la longueur des cordes entre les points donnés. Dans ce cas, les espacements nodaux de support dans les directions u et w seront définis respectivement par les équations (3.57).

Le vecteur d'espacements nodaux étendu doit être choisi de la façon suivante: en direction i :

$$\nabla_{-1} = \nabla_{n-2}, \nabla_{-2} = \nabla_{n-3}, \nabla_{n+1} = \nabla_2, \nabla_n = \nabla_1 \quad (3.66)$$

en direction j :

$$\nabla_{-1} = \nabla_{m-2}, \nabla_{-2} = \nabla_{m-3}, \nabla_{m+1} = \nabla_2, \nabla_m = \nabla_1 \quad (3.67)$$

Pour obtenir des vecteurs des points de contrôle intermédiaires, chaque colonne j des données d'entrée est interpolée par une courbe B-spline composite non-uniforme fermée. C'est-à-dire que pour chaque colonne j , il faut interpoler une courbe à partir des points donnés. À cette fin, il suffit de résoudre le système d'équations linéaires de l'équation (3.33) pour $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ en remplaçant :

$$\left\{ \begin{array}{c} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n-1} \end{array} \right\} \text{ par } \left\{ \begin{array}{c} C_{0,j} \\ C_{1,j} \\ C_{2,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{m-1,j} \end{array} \right\} \text{ et } \left[\begin{array}{c} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{n-1} \end{array} \right] \text{ par } \left[\begin{array}{c} P_{0,j} \\ P_{1,j} \\ P_{2,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{m-1,j} \end{array} \right]$$

et aussi g_{n-1} par g_{m-1} , f_{n-1} par f_{m-1} et h_{n-1} par h_{m-1}

On considère les espacements ∇_i pour calculer les coefficients g_i , f_i et h_i .

Les conditions de fermeture deviennent dans ce cas :

$$C_{-1,j} = C_{m-1,j} , C_{m,j} = C_{0,j} \text{ et } C_{m+1,j} = C_{1,j} \quad (3.68)$$

L'étape finale consiste à trouver les points de contrôle de la surface B-spline non-uniforme fermée. Pour ce faire, il suffit d'interpoler une courbe B-spline pour chaque rangée i de la matrice C , c'est-à-dire de la matrice des points de contrôle intermédiaires. La méthode utilisée ici est la même que précédemment (résolution d'un système d'équations linéaires), mais cette fois, l'opération est effectuée dans le sens orthogonal (dans la direction des rangées, et non des colonnes comme précédemment). Les conditions de fermeture qui s'appliquent s'écrivent :

$$V_{i,-1} = V_{i,n-1} , V_{i,n} = V_{i,0} \text{ et } V_{i,n+1} = V_{i,1} \quad (3.69)$$

Alors pour chaque rangée i ($i = -1, 1, \dots, m+1$), nous avons donc à résoudre un système d'équations de la forme (3.33) mais en remplaçant :

$$\left\{ \begin{array}{c} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n-1} \end{array} \right\} \text{ par } \left\{ \begin{array}{c} V_{0,i} \\ V_{1,i} \\ V_{2,i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n-1,i} \end{array} \right\} \text{ et } \left[\begin{array}{c} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{n-1} \end{array} \right] \text{ par } \left[\begin{array}{c} C_{0,i} \\ C_{1,i} \\ C_{2,i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{n-1,i} \end{array} \right]$$

Ici, on doit utiliser les espacements ∇_j .

Les variables V_{ij} représentent les points de contrôle recherchés pour une

surface composite B-spline non-uniforme.

3-4-2 Représentation par les solides (primitives) :

C'est une méthode de construction qui emprunte la méthodologie de conception et d'assemblage de pièces mécaniques complexes à partir de modèle de pièces simples. Le principe de base utilisé correspond à la représentation de la forme finale de l'objet : une combinaison d'additions ou de soustractions de solides ou primitives simples (cubes, cylindres, sphères, cônes, etc ...) Réalisées à l'aide d'opérations dites booléennes (union, intersection, différence) et de transformations géométriques.

Le modèle connaît l'objet par les méthodes de construction qui ont servi à le définir ("constructive solid geometry") et qui peuvent être définies soit selon de manière procédurale ou soit avec une structure de données. Les noeuds non-terminaux représentent les opérateurs, les feuilles représentent les objets de base (ou éventuellement des surfaces).

Cette représentation objet implique que les solides décrits dans le langage de la géométrie et de la topologie puissent être rangés dans une base de données en conservant la manière dont ils ont été conçus. Elle définit un arbre de construction dans lequel sont déterminés, de façon précise, l'objet de base, sa place dans l'arbre de

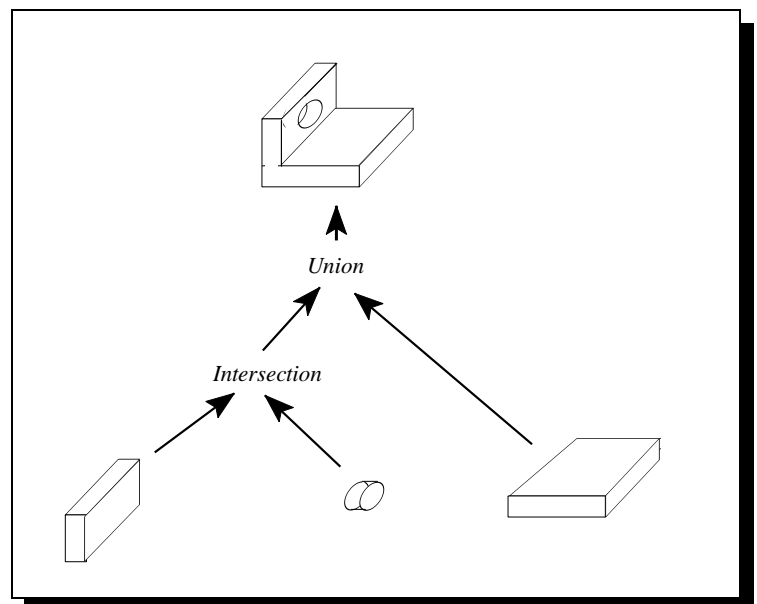


Figure 3-9 : Exemple d'arbre de construction

construction et ses paramètres de placement (figure 3-9).

Ce mode de construction qui utilise surtout des opérateurs ensemblistes peut être défini par :

<arbre de construction> := <objet de base> | <arbre de construction> <noeud opérateur> <arbre de construction> <noeud déplacement> <arguments de placement>

L'arbre de construction est souvent plus compliqué qu'un arbre linéaire du fait que certains sous-arbres peuvent être partagés (hiérarchie). La représentation peut s'arrêter aux solides primitifs ou parfois descendre jusqu'aux demi-espaces. Par exemple, une boîte peut être représentée comme l'intersection régularisée de 6 demi-espaces plan.

L'utilisation de solides primitifs facilite les vérifications des propriétés solides telles que : homogénéité, finitude et rigidité. Dans le cas de demi-espaces, on doit vérifier la propriété "limitée" (qui peut évidemment être étendue à des surfaces non planes). L'utilisation d'un certain nombre de primitives solides bien connus et d'opérateurs régularisés permet de vérifier au niveau syntaxique la validité d'une construction. Dans la plupart des systèmes de modélisation 3D actuels, on met à la disposition de l'utilisateur un nombre fini de primitives dont la grandeur, la forme, la position et l'orientation sont déterminées à partir d'un petit ensemble de paramètres définis par l'utilisateur. Ainsi pour les primitives de type "bloc", l'utilisateur doit spécifier la longueur, la largeur, la hauteur et la position initiale. Le système de modélisation vérifie alors la validité de ces paramètres (nombres réels p. ex.).

Les opérateurs pris en compte dans une représentation par l'arbre de construction sont en général :

- ▶ L'union (opérateur booléen) qui correspond à un ajout de matière,
- ▶ L'intersection (opérateur booléen) qui sert à vérifier l'interférence,
- ▶ La différence (opérateur booléen) qui correspond à une soustraction de matière,
- ▶ Les transformations géométriques ponctuelles.

Les transformations géométriques ne sont pas limitées aux seules translations ou autres mouvements de corps rigides mais comprennent également toute la panoplie des transformations de changement d'échelle, symétrie, cisaillement etc...[69].

En infographie, on utilise surtout des opérateurs "régularisés" i.e. on s'assure qu'un traitement informatique des opérations ci-dessus doit être réalisé de façon qu'une opération sur deux solides ne produise pas un solide "dégénéré". Par exemple, si deux solides sont tangents par une face, le résultat de leur intersection ne doit pas être une face mais doit être nul.

3-5 Modélisation solide unifiée (NURBS) :

Une modélisation solide unifiée, doit offrir à l'utilisateur les caractéristiques suivantes :

1. *Puissance de modélisation élevée* : Pour que le modéleur soit capable de modéliser les diverses applications en CAO/FAO, il doit avoir la capacité de représenter les surfaces complexes et sculptées. Il doit avoir un grand domaine de modélisation et il doit recouvrir un large éventail de modéleurs, i.e. il doit être capable d'accepter n'importe quelle description de forme et il doit générer n'importe quelle forme.
2. *Facilité de conception de forme* : Avec l'augmentation des types d'objets représentables, le modéleur doit être capable d'accepter différentes caractéristiques ("features") (i.e. solide primitive, surface et processus de production) comme les données entrées.
3. *Possibilité d'utilisation en fabrication* : Le modéleur doit être capable de présenter les applications utilisées en fabrication.
4. *L'interface avec d'autres applications* : Pour être bien utile dans le domaine de

CAO/FAO, le modeleur doit être relié à d'autres applications en CAO/FAO, comme la génération de maillage, le générateur des gammes de fabrication et d'assemblage, etc.

5. *Stockage des attributs non géométriques* : Le modeleur doit être capable d'emmagasiner les informations non géométriques qui peuvent être utiles dans les autres applications de CAO/FAO, comme les paramètres de maillage pour le processus de génération de maillage ou les conditions de sollicitation.
6. *Performance élevée* : Pour être utilisé dans l'environnement de CAO/FAO, le paramètre de performance du modeleur est un paramètre critique.

Il existe plusieurs modèles de surface pour représenter les différentes formes de surfaces gauches. Nous nous intéresserons particulièrement aux carreaux de surface de Bézier et B-spline, aux surfaces planes, etc. Chacun de ces modèles de surface a ses avantages et ses inconvénients. Mais l'utilisation de plusieurs types de surface dans la modélisation d'un objet de temps en temps peut causer des problèmes en ce qui a trait à l'architecture du système de modélisation géométrique (multitude de modèles, compatibilité, base de données, ...). Il est donc désirable d'avoir un seul mode de représentation interne de la frontière géométrique des objets.

Actuellement le choix le plus approprié pour une modélisation unifiée de la frontière des objets est la représentation B-spline rationnelle non-uniforme (Non-uniform rational B-spline NURBS). Le modèle de Bézier étant un cas spécial du modèle B-spline, le modèle NURBS peut être donc utilisé pour la représentation géométrique de presque toutes les géométries qu'on peut avoir en CAO/FAO et il a le format de stockage et de transformation le plus flexible [47].

Ainsi dans le cas d'une surface composite NURBS de degré "d" et "e" en direction u et w respectivement, les informations géométriques suivantes :

- $S = \{V_{i,j} : i = 0, \dots, m ; j = 0, \dots, n\}$ points de contrôle.
- $Q = \{q_{i,j} : i = 0, \dots, m ; j = 0, \dots, n\}$ poids homogènes.

- $D_u = \{\Delta_{-d+1}, \dots, \Delta_{-1}, \Delta_0, \dots, \Delta_{m-1}\}$ vecteur nodal dans la direction u.
- $D_w = \{\Delta_{-e+1}, \dots, \Delta_{-1}, \Delta_0, \dots, \Delta_{e-1}\}$ vecteur nodal dans la direction w.

Constituent un ensemble complet de paramètres nécessaire à sa représentation.

Alors si $V_i = (x_i, y_i, z_i)$ est un point de contrôle dans l'espace à 3 dimensions, alors le point de contrôle correspondant en coordonnées homogènes est défini dans l'espace à 4 dimensions par :

$$V_i^h = (q_i x_i, q_i y_i, q_i z_i, q_i) \quad \text{avec } q_i \neq 0 \quad (3.70)$$

Une courbe NURBS de degré "d" peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$R_i^d(u) = UNH \equiv (x(u), y(u), z(u), h(u)) \quad (3.71)$$

avec :

$$\begin{aligned} U &= [1, u, u^2, \dots, u^d] \\ N &: (d+1) * (d+1) \quad \text{matrice des coefficients} \\ H &= [V_i^h, V_{i+1}^h, \dots, V_{i+d}^h]^T \end{aligned}$$

La matrice N (matrice de coefficients de NURBS) pour le cas cubique est donnée à l'équation (3.70).

De la même façon, on peut représenter une surface NURBS de degré "d" et "e" dans les directions u et w respectivement par l'équation matricielle :

$$R_{i,j}^{d,e}(u,w) = UN_u H(N_w)^T W^T \quad (3.72)$$

où :

$$U = [1, u, u^2, \dots, u^d]$$

$$W = [1, w, w^2, \dots, w^e]$$

$$N_u : (d+1) * (d+1) \quad \text{matrice de coefficients avec } \Delta_i$$

$$N_v : (e+1) * (e+1) \quad \text{matrice de coefficients avec } \Delta_j$$

$$H = \{ V_{r,c}^h : r = i, \dots, i+d, c = j, \dots, j+e \}$$

$$V_{r,c}^h = (q_{r,c} x_{r,c}, q_{r,c} y_{r,c}, q_{r,c} z_{r,c}, q_{r,c})$$

$$V_{r,c} = (x_{r,c}, y_{r,c}, z_{r,c})$$

q_{ij} : poids

L'évaluation d'une surface NURBS à partir de sa forme matricielle de la surface NURBS est plus efficace par rapport à l'évaluation directe à partir de l'algorithme Cox-deBoor [49]. Par exemple, si on utilise plus de 100 points de contrôle pour une surface bi-cubique NURBS, le temps d'évaluation matricielle est 12% du temps d'évaluation à partir de la forme directe [49].

3-6 Calcul géométrique :

Dans le processus de génération de maillage, on rencontre souvent des problèmes de calcul géométrique tel que la projection ou l'intersection. Avant d'entrer dans les détails de ces processus (génération de maillage), nous allons présenter les solutions que nous avons jugées appropriées à ces problèmes.

3-6-1 Projection d'un point sur une ligne :

La projection P d'un point Q sur une courbe paramétrique $p(u)$ (figure 3-10), s'obtient par la construction du vecteur $(P - Q)$ en faisant en sorte que $(P - Q)$ devienne perpendiculaire au vecteur tangent p^u à la courbe p au point P. Donc, on peut écrire sous forme mathématique :

$$(P - Q) \cdot p^u(u) = 0 \quad (3.73)$$

Si, on place l'origine du système des coordonnées au point Q, l'équation (3,73) devient :

$$p \cdot p^u = 0 \quad (3.74)$$

Supposons maintenant que $p(u)$ était une courbe paramétrique cubique de la forme : $(p(u) = a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0)$. Cette transformation change $p(u)$ comme suivant :

$$p(u) = a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0 - Q \quad (3.75)$$

Mais les coefficients géométriques de la tangente $p^u(u)$ ne changent pas :

$$p^u(u) = 3a_3 u^2 + 2a_2 u + a_1 \quad (3.76)$$

Si on écrit l'équation (3.73) à partir de ses composantes on a :

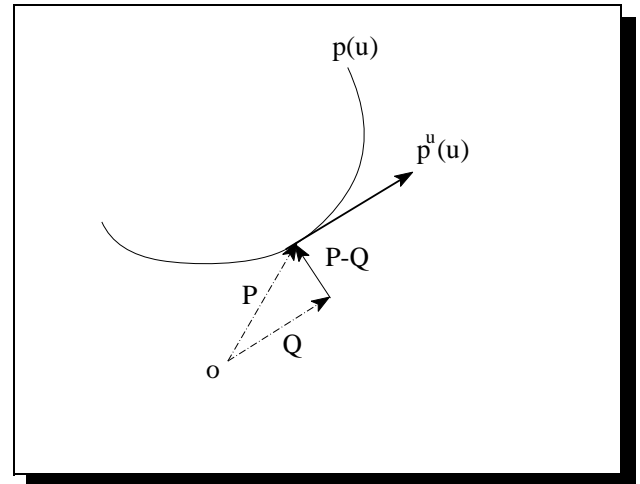


Figure 3-10 : projection d'un point sur une ligne.

$$x(u)x^u(u) + y(u)y^u(u) + z(u)z^u(u) = 0 \quad (3.77)$$

En résolvant cette équation, on trouve les coordonnées du point P sur la courbe $p(u)$ qui est en général le point le plus proche du point Q. Mais, on doit cependant tester toutes les solutions pour ne pas prendre le point situé à une distance maximum.

Pour résoudre cette équation, on peut trouver les racines à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. On suppose donc une valeur u_i comme une estimation initiale de la racine de la fonction $f(u)$ et après, on doit trouver une meilleure estimation u_{i+1} en procédant de façon itérative en utilisant les formule de mise à jour suivante :

$$u_{i+1} = u_i - \frac{f(u_i)}{f^u(u_i)} \quad (3.78)$$

où $f(u_i)$ et $f^u(u_i)$ sont respectivement les valeurs de la fonction et de sa dérivée en $u = u_i$. Dans notre cas, $f(u)$ est donnée par l'équation (3.77) et sa dérivée $f^u(u)$ est donnée par:

$$\begin{aligned} f^u(u) = & x(u)x^{uu}(u) + x^u(u)x^u(u) + \\ & y(u)y^{uu}(u) + y^u(u)y^u(u) + \\ & z(u)z^{uu}(u) + z^u(u)z^u(u) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Les dérivées secondes dans l'équation (3.79) se calculent à partir de l'équation (3.75) d'après la formule :

$$p^{uu}(u) = 6a_3u + 2a_2 \quad (3.80)$$

On répète l'équation (3.78) jusqu'à ce qu'on obtienne une réponse avec une précision désirée.

La solution obtenue ci-dessus n'est pas toujours la bonne à cause des problèmes suivants :

1. Il est possible qu'il existe plusieurs normales à partir du point Q sur la courbe dans l'intervalle $u \in [0, 1]$. Si c'est le cas, on doit trouver toutes les normales et sélectionner le point situé à une distance minimum du point Q.
2. Il est possible qu'il n'existe aucune normale dans l'intervalle $u \in [0, 1]$. Dans ce cas on doit tester les extrémités de la courbe pour trouver le point situé à une distance minimum du point Q.
3. Il est possible que le point Q soit situé sur la courbe, alors la longueur du vecteur normal devient zéro et les points P et Q coïncident.
4. La courbe peut être dégénérée (i.e. elle devient un point). Dans ce cas, il y a un seul point sur la courbe qui est le point recherché.

3-6-2 Projection d'un point sur une surface :

En 3D, on doit souvent trouver la projection d'un point $Q = (x_q, y_q, z_q)$ sur une surface paramétrique $r(u, w)$. Similairement à la section précédente, on utilise l'inverse du Jacobien dans la procédure itérative de Newton-Raphson. Le but est de trouver, le point $r(u_q, w_q)$ sur la surface paramétrique $r(u, w)$, qui soit le plus proche du point Q. Comme précédemment on suppose une valeur (u_i, w_i) comme une estimation initiale de réponse. En introduisant les grandeurs suivantes :

$$\begin{aligned} d &= Q - r(u_i, w_i) & (3.81) \\ e &= r(u_q, w_q) - Q \end{aligned}$$

où d et e représentent respectivement la distance de départ et la distance minimum à trouver. De même si on introduit la notation :

$$\nabla u = (u_q - u_i) \quad (3.82)$$

$$\nabla w = (w_q - w_i)$$

où ∇u et ∇w représentent les incréments paramétriques de déplacement dans l'espace. Alors, on voit qu'on doit minimiser la fonctionnelle suivante :

$$e = [r(u_q, w_q) - r(u_i, w_i)] - d \approx (\nabla u r^u - \nabla w r^w) - d \quad (3.83)$$

où r^u et r^w sont les gradients (vecteurs tangents) évalués en (u_i, w_i) en direction u et w respectivement.

En utilisant la méthode des moindres carrés (i.e. pour minimiser $e.e$) on obtient :

$$\nabla u = \frac{(r^u \cdot d)(r^w \cdot r^w) - (r^w \cdot d)(r^u \cdot r^w)}{(r^u \cdot r^u)(r^w \cdot r^w) - (r^u \cdot r^w)^2} \quad (3.84)$$

$$\nabla w = \frac{(r^w \cdot d)(r^u \cdot r^u) - (r^u \cdot d)(r^u \cdot r^w)}{(r^u \cdot r^u)(r^w \cdot r^w) - (r^u \cdot r^w)^2} \quad (3.85)$$

Donc, à chaque itération, on doit calculer ∇u et ∇w et on trouve une meilleure estimation en mettant à jour u_i et w_i comme suit :

$$u_{i+1} = u_i + \nabla u \quad (3.86)$$

$$w_{i+1} = w_i + \nabla w$$

Si $|\nabla u| \leq \epsilon$ et $|\nabla w| \leq \epsilon$ pour une petite valeur donnée de la tolérance ϵ alors, on est arrivé à la solution :

$$u_q = u_i + \nabla u$$

$$w_q = w_i + \nabla w$$

3-6-3 Intersection d'un quadrant avec une courbe :

Lors de la génération de maillage en utilisant la méthode quadtree modifiée, on rencontre souvent le problème de trouver les quadrants qui coupent les frontières

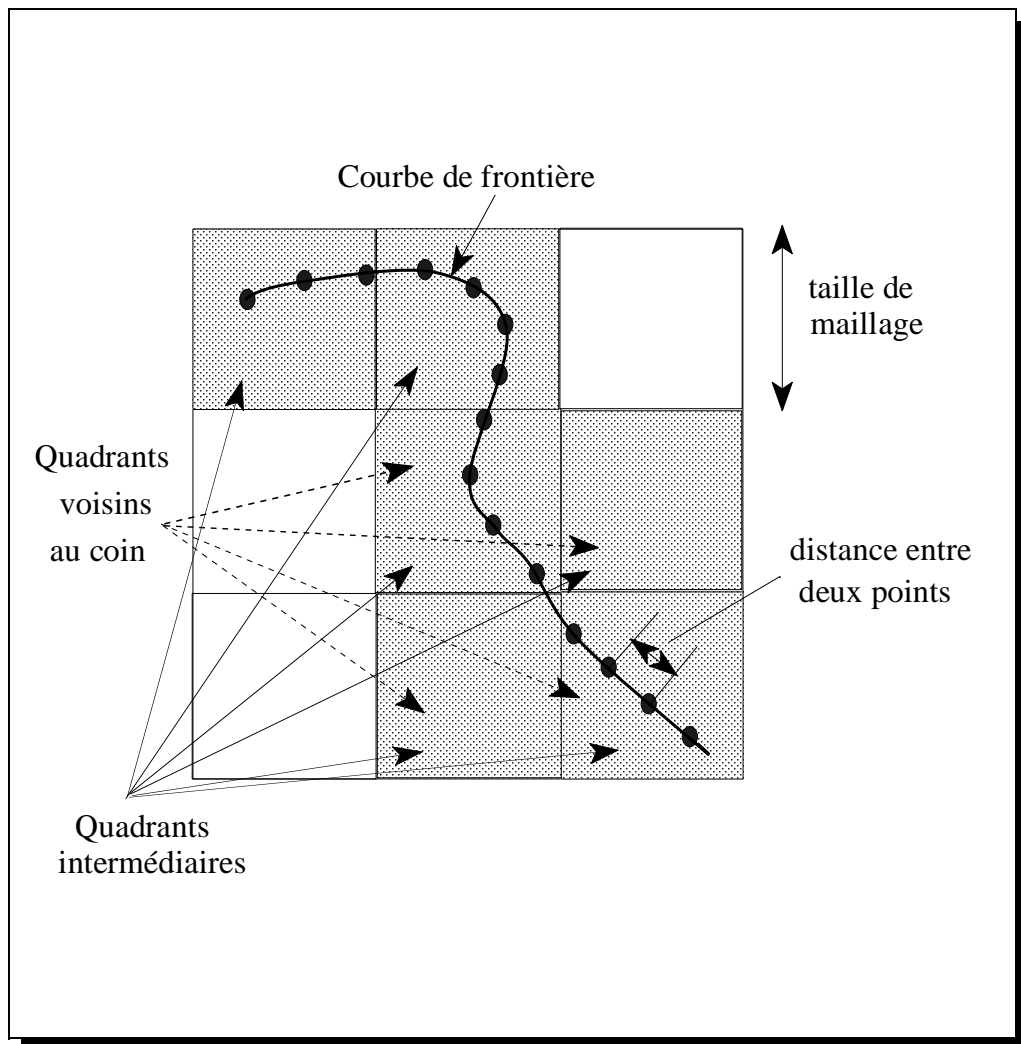


Figure 3-11 : recherche des quadrants intermédiaires.

(voir chapitre 2, section 2-5). Cette situation demande de trouver l'intersection d'un quadrant avec une ou plusieurs courbes frontières pour trouver les quadrants coupés. Mais si on veut trouver les quadrants intérieurs, on n'a pas besoin de quadrants coupés. On peut utiliser la méthode suivante pour distinguer les quadrants extérieurs et les quadrants intérieurs.

On génère sur chaque courbe ou segment de frontière, des points séparés les uns des autres d'une distance plus petite que la taille de maillage calculée à partir des paramètres de maillage (voir figure 3-11). On est sûr que pour les deux points successifs, s'ils ne sont pas dans le même quadrant, ils sont dans les deux quadrants voisins (voisin sur un côté ou un coin).

Si deux points successifs appartiennent à deux quadrants différents voisins d'un sommet, on marque les quatre quadrants voisins de ce sommet. Alors en suivant les points sur les courbes frontière, on peut marquer les quadrants intermédiaires séparant les quadrants intérieurs et les quadrants extérieurs. Ces quadrants peuvent être utilisés dans une méthode de type "ballon gonflable" (voir prochain chapitre) pour marquer tous les quadrants intérieurs. Par rapport aux autres méthodes [2, 3, 20-26], on n'a pas besoin d'utiliser les calculs lourds d'intersection, seulement on détecte si un point appartient à un quadrant ou non.

3-6-4 Intersection d'un octant avec une surface :

De la même façon que dans le cas à deux dimensions, un gros problème dans la génération de maillage en utilisant la méthode octree modifiée est celui de trouver les octants coupés par les frontières du solide (voir chapitre 2, section 2-5). Pour trouver chaque octant coupé, on doit calculer les intersections de l'octant partiel père avec une ou plusieurs surfaces de frontière, ce qui est très lourd à faire et demande beaucoup de calculs d'intersection. Mais si on veut trouver seulement les octants intérieurs, on n'a pas besoin des octants coupés, et on peut utiliser la méthode présentée dans la

section précédente pour distinguer les octants extérieurs et des octants intérieurs.

Ici, on génère les points sur les surfaces frontières [48]. Ces points doivent être séparés d'une distance plus petite que la taille de maillage dans deux directions paramétriques. Donc, on est sûr que pour les deux points successifs, s'ils ne sont pas dans le même octant ils sont dans deux octants voisins (soit voisin de face, voisin d'arête ou voisin de coin). Dans le cas de voisinage d'arête, on marque tous les octants voisins de cette arête, et dans le cas de voisinage de coin, on marque tous les octants voisins de ce point. Donc, en suivant les points sur les surfaces de frontière, on peut marquer les octants intermédiaires entre les octants intérieurs et les octants extérieurs. Ces octants peuvent être utilisés dans une méthode de type "ballon gonflable" pour marquer tous les octants intérieurs. Ici comme dans le cas en deux dimensions, on n'a pas à utiliser des calculs d'intersection, mais seulement, on détecte si un point appartient à un octant ou non.

3-7 Conclusions et rétrospectives :

Avec les courbes de Bézier, un changement dans la position d'un point de contrôle tend à se propager à toute la courbe i.e. "contrôle global". Les courbes B-splines permettent d'éviter ce problème par l'utilisation de fonctions de forme qui ont seulement une influence locale et qui dépendent seulement des points de contrôle avoisinants. Quand les courbes de Bézier sont utilisées pour la modélisation géométrique en CAO, l'objectif n'est pas d'approximer le polygone de Bézier, mais ce polygone doit servir à établir la forme initiale de la courbe et à fournir un cadre de travail pour modifier la courbe.

Si on a beaucoup de points, la méthode de lissage par B-spline devient coûteuse en temps de calcul à cause de l'inversion de matrice.

On peut présenter des oscillations locales par les courbes B-splines, car la courbe est contrôlée localement par un groupe de points et la dérivée troisième est

continue par morceaux.

La méthode de représentation des solides par les primitives solides peut présenter un avantage, si l'on définit rigoureusement la sémantique des opérations de base et qu'on prend soin de ne créer que des solutions acceptables. Elle permet aussi de conserver un aspect "fonctionnel" de la construction et peut ainsi être utilisée pour l'aspect conception. Cependant, elle présente un inconvénient, car elle impose un nombre important de primitives pour créer une maquette de forme très complexe. La représentation par un arbre de construction des opérations booléennes qui semble la plus naturelle pose deux problèmes fondamentaux :

1. *Évaluer une représentation* : par exemple, pour passer de ce modèle à un modèle de visualisation i.e. une représentation par les limites. Ceci revient à réaliser de façon informatique, les opérations booléennes.
2. *Évaluer un certain nombre de caractéristiques* nécessaires pour un traitement donné, par exemple, l'appartenance d'un point P donné à un solide Q qui est un sous ensemble d'un solide S. Ceci peut s'avérer très difficile, voire impossible, sans évaluation préalable du modèle.

Le but final de la modélisation géométrique est de trouver une forme de représentation unifiée. Le modèle NURBS peut être un bon candidat pour ce problème parce que, on peut présenter un solide par une surface NURBS ou un nombre limité de surfaces NURBS et la surface NURBS est capable de présenter n'importe quelle surface. L'outil est encore plus puissant et plus souple, le modèle NURBS (non uniforme rational B-spline) permet de représenter de façon unifiée les coniques et les cubiques.