

Chapitre 3

Modélisation géométrique

3-1 Introduction :

La modélisation géométrique désigne la représentation des objets du point de vue de leurs formes et propriétés géométriques [44]. Elle occupe une place importante dans les applications de CAO/FAO. En effet, le modèle géométrique est utilisé dans de nombreuses applications, tant au niveau des études de projets que de la fabrication. La connaissance des propriétés géométriques des objets est aussi nécessaire en modélisation par éléments finis.

Le terme "modélisation géométrique" est apparu au début des années 70 avec le développement rapide de la CAO. L'informatique, en modélisation géométrique, est indispensable puisqu'elle sert à assigner à l'objet mathématique une représentation permettant des manipulations par ordinateur. Sans la puissance de l'informatique, il serait actuellement difficile de construire, d'analyser et d'exploiter un modèle sophistiqué.

Un modèle est une imitation d'un objet réel lequel est construit afin de faciliter

l'observation de cet objet réel. On peut distinguer entre les modèles physiques et les modèles mathématiques. Le modèle physique est une représentation à échelle réduite de l'objet réel (maquette). Tandis que le modèle mathématique, qui est largement utilisé en sciences et génie, représente quelques aspects comportementaux d'un phénomène physique à l'aide de données numériques ou d'équations mathématiques.

En conception, analyse et fabrication de systèmes mécaniques assistées par ordinateur, on a besoin de modèles informatiques qui peuvent être définis très simplement comme une collection de données sur fichiers et qu'on peut utiliser pour effectuer des tâches similaires à celles effectuées par d'autres types de modèles. La totalité des données requises pour représenter un objet ou un problème donné constitue *le modèle objet*. Tandis que la partie purement géométrique de ces données définit *le modèle géométrique*.

En CAO/FAO, la géométrie de l'objet contient la partie des informations la plus utile à l'ingénieur. Les techniques de stockage et de traitement des données géométriques sont relativement indépendantes des applications particulières, donc des méthodes identiques peuvent être utilisées pour construire des modèles d'objets les plus divers dans des champs d'application les plus variés.

La modélisation solide est une branche de la modélisation géométrique mettant l'accent sur la flexibilité et le degré d'adaptation des modèles et insistant sur le développement de représentations complètes et exactes des objets physiques solides. Ces représentations doivent permettre de répondre à des questions géométriques d'ordre général de manière purement algorithmique sans l'intervention de l'opérateur humain. Un exemple typique de questions serait :

- A quelle forme connue ressemble cet objet ?
- Quel est son poids, son volume ?
- Etc.

Le processus de modélisation (figure 3-1) peut se subdiviser en trois niveaux différents :

- I. Les objets physiques réels :

Objets de notre intérêt mais impossibles à saisir dans toute leur complexité et leurs détails microscopiques. La difficulté est encore plus accrue, si nous désirons utiliser des machines finies comme les ordinateurs.

II. Les objets mathématiques :

Un objet mathématique est une représentation idéalisée des objets dans l'espace tridimensionnel réel suivant un schéma intuitif de connectivité. Ceci se fait à l'aide d'une classe d'entités géométriques rigoureusement définies dans l'espace de modélisation en utilisant des concepts de base tirés des théories mathématiques sur la topologie géométrique et algébrique.

III. Les modes de représentation :

L'étape finale de l'activité de modélisation est d'assigner aux objets mathématiques un mode de représentation facilitant en particulier les manipulations par ordinateur.

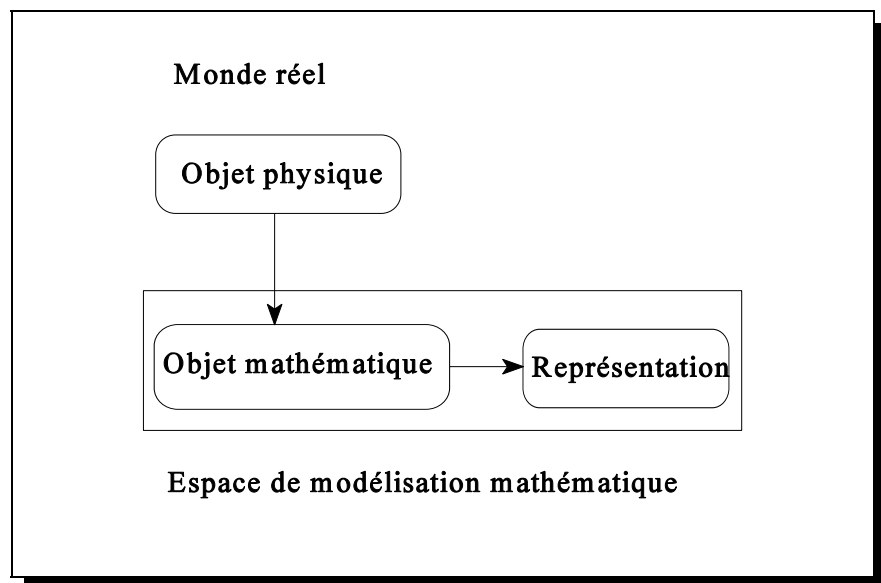


Figure 3-1 : trois niveaux du processus de modélisation

3-2 Conditions d'une bonne modélisation géométrique :

La finalité de la modélisation géométrique est de représenter des objets. Le modèle est d'autant meilleur qu'il permet de prendre en compte un nombre plus important de conditions relatives aux contraintes liées à l'objet réel, à sa fabrication ou à son utilisation. Les conditions à remplir pour une modélisation géométrique de haut niveau sont :

- i. d'assurer que tout modèle constructible peut correspondre à un objet réel (validité du modèle).
- ii. de permettre de construire le modèle de tout objet (puissance du modèle).
- iii. de permettre le calcul d'un certain nombre de grandeurs géométriques telles que le volume, la surface, le rayon de giration, etc.
- iv. de s'assurer que le modèle puisse être utilisé par différentes fonctions comme : le calcul des structures, les gammes de fabrication, la commande numérique, etc. (ouverture).

Un certain nombre de propriétés mathématiques sont impliquées par ces exigences. Ainsi, pour un modèle solide, on devrait satisfaire aux conditions :

- d'homogénéité : Un solide doit avoir un intérieur ;
- et de finitude : Un solide doit avoir une forme invariante quelle que soit sa position et son orientation.

Par ailleurs, le système informatique utilisé devra respecter les propriétés suivantes :

- i. Cohérence des opérateurs : toute opération appliquée sur des solides doit produire des solides (déplacements ou opérations Booléennes) sauf s'il y a demande de l'utilisateur.
- ii. Description : un solide quelconque doit pouvoir être représenté dans l'ordinateur.

- iii. Cohérence de l'information : un point de l'espace doit appartenir ou non à un solide (problème de l'appartenance ou non).

D'autres qualités difficilement formalisables peuvent être demandées à un modèle géométrique, comme :

- La concision : la quantité d'informations nécessaires pour une représentation donnée doit être limitée; (une certaine redondance est parfois utile pour l'efficacité de certains algorithmes).
- L'ouverture aux applications : l'utilisation du ou des modèles géométriques par différents algorithmes et applications doit être possible (éléments finis, calculs d'encombrement, commande numérique, etc.).

Les objets du monde industriel sont souvent de formes très complexes sur lesquelles des calculs de toutes sortes (aérodynamique, résistance mécanique, etc.) doivent être réalisés. La représentation informatique de ces objets a conduit à rechercher des méthodes qui facilitent la manipulation des modèles (modifications, affichage, ...).

3-3 Modèle bidimensionnel :

Le modèle bidimensionnel permet de réaliser et modifier des plans simples et peu coûteux. Il est bien adapté à de nombreux problèmes de l'industrie. Cependant un modèle 2D est souvent peu approprié pour un objet un tant soit peu complexe.

Nous décrivons ci-dessous les méthodes de construction les plus utilisées en CAO/FAO en deux dimensions à savoir la représentation de courbes à l'aide des modèles géométriques de type Bézier et de type B-splines.

3-3-1 Courbes de Bézier :

Pierre E. Bézier [45, 46], de la compagnie automobile Renault, s'est attaché à concevoir une approche mathématique qui reproduirait la pratique des concepteurs dans les processus de design géométrique des objets. Le fruit de ses recherches est le célèbre système Unisurf, utilisé par Renault depuis 1962, pour dessiner ses profils d'automobile. Il est basé sur les concepts de courbes et de surfaces de Bézier.

Le principe fondamental est que tout point d'un segment de courbe est donné par une fonction paramétrique de la forme :

$$p(u) = \sum_{i=0}^n P_i * f_i(u) \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (3.1)$$

où

les P_i sont les $(n+1)$ points de contrôle, et

les f_i sont les fonctions de pondération ou de forme.

Plusieurs fonctions de pondération f_i respectent ces conditions ; celles que P. Bézier a choisies sont définies par les polynômes de Bernstein $B_{i,n}(u)$ i.e.

$$f_i(u) = B_{i,n} = C_n^i u^i (1-u)^{n-i} \quad (3.2)$$

où C_n^i est le coefficient binomial défini par :

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Notez que pour $n+1$ points de contrôle, $B_{i,n}(u)$ donnent un polynôme de degré n . Et que pour $p(0) = P_0$ et $p(1) = P_n$, le segment de courbe passe bien par les deux points extrémité.

On peut présenter l'équation (3.1) sous forme matricielle suivante :

$$p(u) = \begin{bmatrix} u^n & \dots & u^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} & \dots & m_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n0} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \end{Bmatrix}$$

ou

$$p(u) = [U] [M] [B]$$

où :

$[U]$ vecteur de la base polynomiale d'approximation.

$[M]$ matrice des coefficients algébriques de Bézier

$[B]$ matrice des points de contrôle.

La matrice $[M]$ de composantes m_{ij} décrit le changement de base entre la base de polynômes $B_{i,n}(u)$ et la base des monômes u^i . Les éléments m_{ij} sont donnés en général par :

$$m_{ij} = \binom{n}{j} \binom{j}{i}$$

La courbe de Bézier possède plusieurs propriétés géométriques intéressantes:

- a. Invariance affine : les courbes de Bézier sont laissées invariantes par les cartes affines (déplacer des objets, changer l'échelle, ...).

- b. Invariance par transformations affines du paramètre u (passage d'un intervalle arbitraire $a \leq u \leq b$ à l'intervalle normalisé).

$$\sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}\left(\frac{u-a}{b-a}\right)$$

- c. Propriété de l'enveloppe convexe : car $\forall u \in (0, 1)$ les polynômes $B_{i,n}(u)$ sont positifs et forment une partition de l'unité.
- d. Interpolation des extrémités :
- i. la courbe doit passer par les points de contrôle d'extrémités P_0 et P_n ,
 - ii. sa tangente en P_0 doit être parallèle au segment (P_1-P_0) ,
 - iii. et celle en P_n doit être parallèle au segment (P_n-P_{n-1}) .

- e. Propriété de symétrie :

$$\sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(u) = \sum_{j=0}^n P_{n-j} B_{j,n}(1-u)$$

- f. Invariance par combinaisons barycentriques : on peut construire la moyenne pondérée de deux courbes de Bézier de deux façons :
- i. prendre la moyenne pondérée des points correspondants sur la courbe
ou
 - ii. prendre la moyenne pondérée des points de contrôle de la courbe.

Ayant décidé de modéliser nos solides à l'aide d'une géométrie cubique, nous en illustrons le principe par un exemple de courbes à 4 points de contrôle P_0, P_1, P_2, P_3 . Ces courbes sont donc représentées par un polynôme de troisième degré obtenu en développant (3.1) :

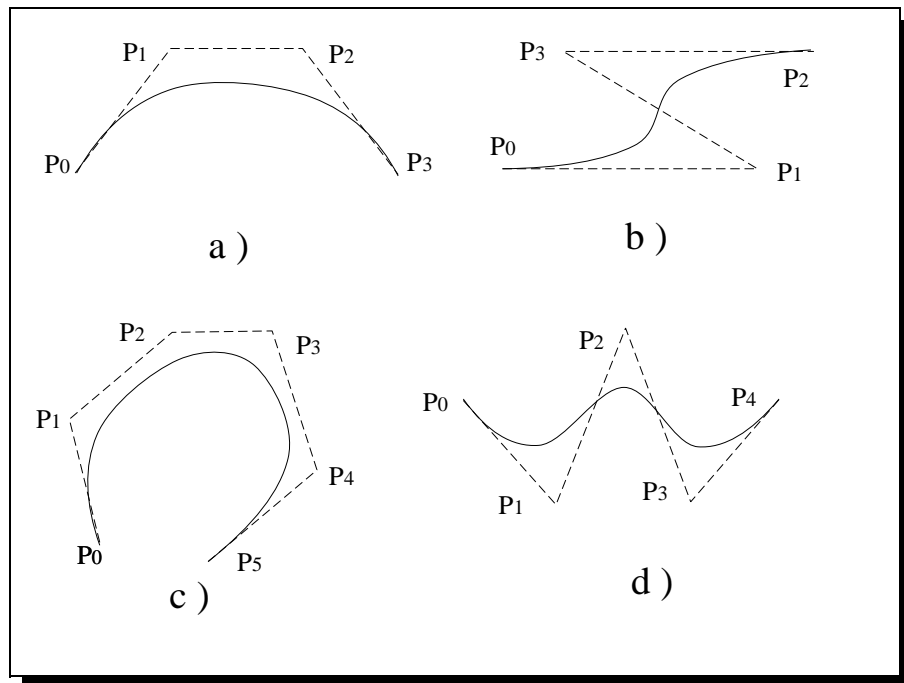


Figure 3-2 : Exemples de courbes de Bézier

$$p(u) = (1-u)^3 P_0 + 3u(1-u)^2 P_1 + 3u^2(1-u) P_2 + u^3 P_3 \quad (3.3)$$

Pour faciliter la mise en oeuvre informatique, il est très pratique d'écrire les équations précédentes sous forme matricielle :

$$p(u) = \begin{bmatrix} (1-u)^3 & 3u(1-u)^2 & 3u^2(1-u) & u^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad (3.4 a)$$

ou encore :

$$p(u) = [F_n] [B_n] \quad (3.4 b)$$

où :

n : degré du polynôme de la courbe de Bézier (fonction de forme).

$[F_n]$: matrice des fonctions de forme (blending functions) de dimension $(n+1)$.

$[B_n]$: matrice des coefficients géométriques (ici les sommets du polygone de contrôle) de dimension $(n+1)$.

En développant (3.4), on obtient :

$$p(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad (3.5 \text{ a})$$

Ou sous forme matricielle :

$$p(u) = [U] [M_n] [B_n] \quad (3.5 \text{ b})$$

où :

$$[U] = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \quad \text{vecteur de la base polynomiale d'approximation.}$$

$$[M_n] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{matrice des coefficients algébriques de Bézier (pour les courbes cubiques } n+1=4\text{).}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}^T \quad \text{matrice des points de contrôle.}$$

Il est donc possible de représenter une courbe paramétrique cubique avec une suite de quatre points : P_0 , P_1 , P_2 et P_3 . Les points P_0 et P_3 sont les points extrémités et les 2 points intérieurs P_1 et P_2 contribuent aux vecteurs tangents requis comme suit:

$$\begin{aligned} T_1 &= k (P_1 - P_0) \\ T_2 &= k (P_3 - P_2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

où k est un facteur d'échelle arbitraire.

Les propriétés les plus importantes des courbes de Bézier sont les suivantes:

1. La courbe possède les points extrémités en commun avec le polygone de contrôle (les autres sommets ne sont pas habituellement sur la courbe).
2. La pente des vecteurs tangents aux extrémités est la même que celle du premier et celle du dernier segment du polygone de contrôle.
3. La courbe est entièrement comprise dans l'enveloppe du polygone de contrôle et reproduit grossièrement le polygone, voir figure (3,3 a,b) ; l'enveloppe convexe des points de contrôle renferme ces courbes. Ceci a pour conséquence qu'un polygone de contrôle plane génère toujours une courbe plane.
4. Les courbes de Bézier sont à variation décroissante i.e. elles n'oscillent jamais très loin des points de contrôle. Cette propriété entraîne qu'un polygone convexe génère une courbe convexe (mais l'inverse n'est pas vraie).
5. En comparaison avec les polynômes conventionnels ou les splines, les courbes de Bézier ne requièrent pas l'entrée de données sur les pentes, seulement les coordonnées des points.
6. La formulation paramétrique permet de représenter plusieurs formes de courbe ("multi-valued shapes"). Si le premier et le dernier point coïncident alors la courbe est fermée.
7. Élévation de degré : ajouter des points de contrôle sans changer la forme de

courbe.

- Ceci a une application importante en dessin de courbes et de surfaces (à la limite le polygone de contrôle approche la courbe).
- Utile aussi pour le transfert de données entre systèmes CAO/FAO ou systèmes graphiques (élever le degré des Bézier parabolique en Bézier cubique afin de transférer l'information).

La courbe de Bézier a l'inconvénient que le déplacement d'un point de contrôle produit une perturbation de type global ; ce déplacement se répercute sur toute la courbe (voir figure 3-3 c). De plus le degré de la courbe dépend du nombre de points de contrôle. Cependant un arrangement particulier des points de contrôle permet de limiter le degré de la courbe de Bézier et d'avoir un nombre quelconque de points de contrôle avec contrôle local. Ce n'est pas le cas pour les courbes B-splines que nous allons présenter dans la suite ; celles-ci permettent un contrôle local et assurent automatiquement la propriété de continuité [25,45,47].

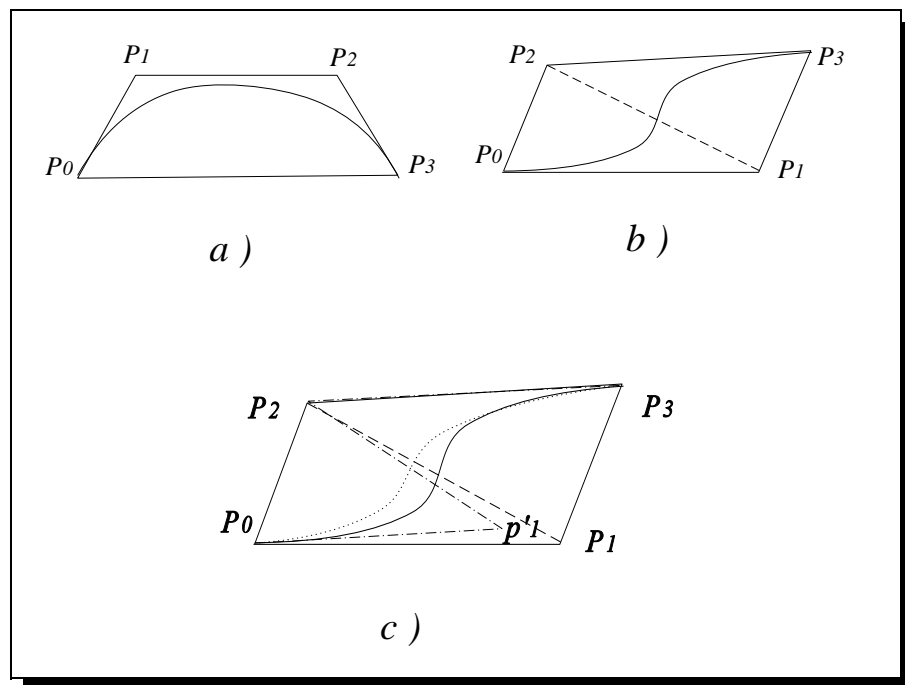


Figure 3-3 : enveloppe convexe de courbes de Bézier

Une des limitations principales des courbes de Bézier est que lorsque la courbe à modéliser a une forme complexe ; son degré sera rédhibitoire. En pratique, tous les degrés au-delà de 10 sont considérés rédhibitoires. Cependant grâce à des courbes de Bézier composites, on peut modéliser des courbes complexes. On utilise le nom de B-spline pour représenter des courbes polynomiales par morceaux.

Alors que les courbes de Bézier simples peuvent être définies comme étant des cartes définies sur l'intervalle $[0, 1]$ à cause de l'invariance des courbes de Bézier par rapport aux transformations affines de paramètres, dans le cas pratique de courbes par morceaux, même si chaque segment B-spline est une carte de l'intervalle $[0, 1]$, la courbe entière est la carte d'un ensemble d'intervalle et leur taille relative joue un rôle important.

Les courbes de Bézier sont en fait des cas spéciaux des courbes B-splines plus générales [qui sont décrites dans la prochaine section].

3-3-2 Courbes B-splines :

Une courbe B-spline est une carte continue d'une collection d'intervalle $t_0 < \dots < t_i$ vers \mathbb{R}^3 , qui applique chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ vers un segment de courbe polynomiale. Chacun des nombres réels t_i est appelé noeud ou point d'arrêt et la suite des t_i définit la suite des noeuds ou vecteur nodal. Pour chaque valeur de t on peut avoir un point correspondant $p(t)$ sur la courbe. Soit alors t la valeur de $t \in [t_i, t_{i+1}]$, on peut introduire une coordonnée locale u de l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ en posant :

$$u = (t - t_{i+1}) / (t_{i+1} - t_i) = (t - t_{i+1}) / \Delta_i$$

Les courbes B-splines paramétriques d'ordre k (degré $k-1$) sont définies de façon générale, (comme c'était le cas pour les courbes de Bézier) par leurs points de

contrôle d'après la formule [45] :

$$p(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) P_i \quad \begin{array}{l} u \in [u_0, u_{\max}] \\ 2 \leq k \leq n+1 \end{array} \quad (3.7)$$

où :

P_i : $i = 0, 1, 2, \dots, n$ sont les $n+1$ points de contrôle, chacun ayant des coordonnées x, y et z . Les points P_i définissent un polygone de contrôle.

$N_{i,k}(u)$: sont les fonctions de base B-spline normalisées (fonctions de forme) définies dans l'espace paramétrique de façon récursive d'après (de Cox-DeBoor [47,50]) :

$$\begin{cases} N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \\ N_{i,k}(u) = \frac{u - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{t_{i+k} - u}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \end{cases} \quad (3.8)$$

Les valeurs de t_i sont des éléments d'un vecteur *nodal* tels que $t_i \leq t_{i+1}$; ces éléments divisent l'espace paramétrique en intervalles :

$$[t_i, t_{i+1}] \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad t_i \leq t_{i+1} \quad (3.9)$$

chacun supportant un segment polynomial de la courbe B-spline.

Le choix des noeuds, ou vecteur nodal T , influence fortement les fonctions de base B-splines $N_{i+1}(u)$ et donc la forme de la courbe résultante. Les valeurs nodales t_i , au nombre de $n+k+1$ valeurs, forment une suite monotone non décroissante de nombres réels tels que : $t_i \leq t_{i+1}$.

On distingue trois types de vecteur nodal :

- Vecteur nodal uniforme : Etant donné l'ordre k de la courbe B-spline, alors un

vecteur nodal uniforme donne des fonctions de base uniformes périodiques (figure 3-4 a).

$$N_{i,k}(u) = N_{i-1,k}(u) = N_{i+1,k}(u)$$

par exemple pour la courbe B-spline cubique périodique, $k = 4$ et $n + 1 = 4$, nous avons puisque la dimension de T est $n + k + 1 = 8$:

$$T = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$$

- Vecteur nodal uniforme ouvert : Il sert à représenter une courbe non périodique (i.e. qui passe aux points de contrôle d'extrémité). Dans ce cas, le vecteur nodal possède une multiplicité de valeurs nodales aux extrémités égale à l'ordre des fonctions de base de la B-spline (figure 3-4 b). Les noeuds intérieurs sont équidistants. En général, le vecteur nodal uniforme ouvert est défini par :

$$\begin{cases} t_i = 0 & 0 \leq i \leq k \\ t_i = i - k & k + 1 \leq i \leq n + 1 \\ t_i = n - k + 2 & n + 2 \leq i \leq n + k + 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

par exemple pour $k = 2, n = 4$ $T = [0, 0, 1, 2, 3, 4, 4]$,

pour $k = 3, n = 4$ $T = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3]$ et

pour $k = 4, n = 3$ $T = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$.

Vecteur nodal non uniforme : Dans ce cas, les noeuds ne sont pas équidistants ou il y a multiplicité aux noeuds intérieurs (figure 3-4 c). Par exemple :

$$T = [0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2] \quad \text{ou}$$

$$T = [0, 0, 0, 1, 1.7, 2.1, 3, 3, 3] .$$

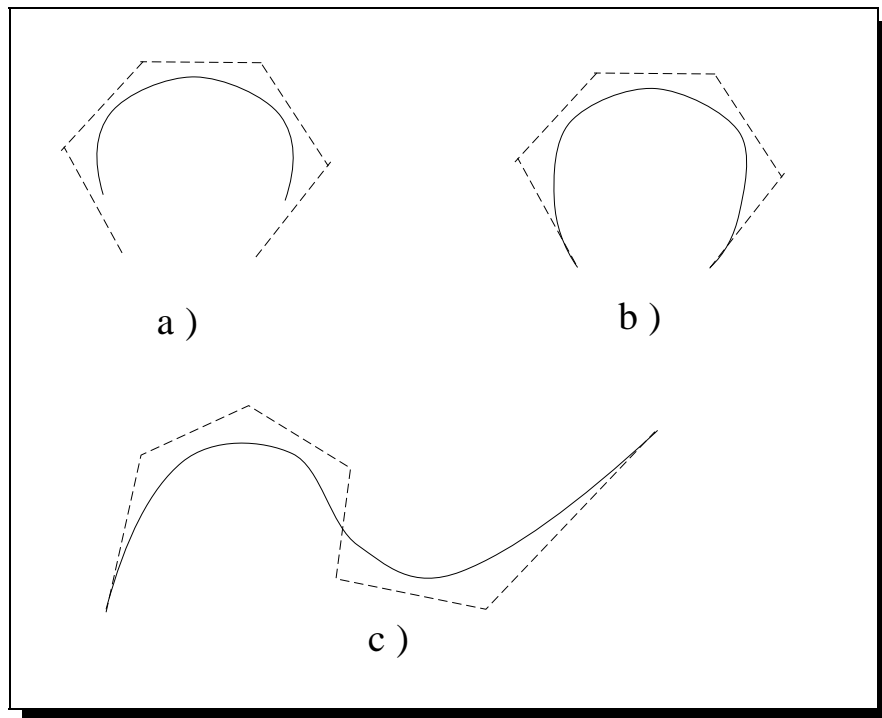


Figure 3-4 : a) la courbe B-spline uniforme périodique. b) la courbe B-spline uniforme ouvert. c) la courbe B-spline non uniforme.

3-3-2-1 Propriétés des courbes B-splines :

Les propriétés intrinsèques des courbes B-splines du point de vue CAO sont :

- Les différents segments de courbes sont joints aux extrémités avec une continuité d'ordre $k-2$.
- On peut abaisser l'ordre de continuité de la dérivée en augmentant la multiplicité à un ou plusieurs noeuds (répétition i.e. $t_i = t_{i+1}$).
- L'équation $p(u)$ et ses dérivées d'ordre 1, 2, ..., $k-2$ sont continues sur toute la courbe. La courbe B-spline la plus utilisée en pratique est une B-spline cubique i.e. d'ordre $k=4$.
- Les fonctions de forme sont normalisées et forment une partition de l'unité, i.e.

pour tout u , on a :

$$\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) = 1 \quad u \in [u_0, u_n] \quad (3.11)$$

3-3-2-2 La courbe B-spline cubique :

Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux courbes B-spline cubique avec un nombre quelconque de points de contrôle.

Prenons l'exemple d'une courbe cubique, c'est-à-dire $k=4$ avec 6 points de contrôle ; le vecteur nodal devient, dans le cas périodique (dimension de t est $n+k+1 = 10$)

$$T = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$$

après développement de l'équation (3.7), on obtient :

$$p^1(u) = (1-u)^3 P_0 + \frac{(7u^3 - 8u^2 + 12u)P_1}{4} + \frac{(18-11u)u^2 P_2}{12} + \frac{u^3 P_3}{6} \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$p^2(u) = \frac{(2-u)^3 P_1}{4} + \frac{(7u^3 - 36u^2 + 54u - 18)P_2}{12} + \frac{(-7u^3 + 27u^2 + 27u + 9)u^2 P_3}{12} + \frac{(u-1)^3 P_4}{4} \quad 1 \leq u \leq 2$$

$$p^3(u) = \frac{(3-u)^3 P_2}{6} + \frac{(11u^3 - 81u^2 + 189u - 135)P_3}{12} + \frac{(-7u^3 + 45u^2 - 93u + 63)P_4}{4} + (u-2)^3 P_5 \quad 2 \leq u \leq 3$$

En général, une courbe cubique B-spline définie par $(n+1)$ points de contrôle est constituée de $(n-k+2)$ segments de courbe p^i associés aux points de contrôle P_{i-1} , P_i , P_{i+1} et P_{i+2} , i variant de 1 à $(n-k+2)$. L'équation générale d'un segment p^i s'écrit, dans le cas périodique :

$$p^i(u) = \frac{(i+1-u)^3}{6} P_i + \frac{[(u-i+2)(i+1-u)^2 + (i+2-u)(u-i+1)(i+1-u) + (i+2-u)^2(u-i)]}{6} P_{i+1} + \frac{[(u-i+1)^2(i+1-u) + (u-i)(i-u+2)(u+1-i) + (i+3-u)(u-i)^2]}{6} P_{i+2} + \frac{(u-i)^3}{6} P_{i+3}$$

Si nous remplaçons i par $i - 1$ et u par $u + i$ nous pouvons écrire :

$$p^i(u) = [U] [M] [B] \quad (3.12)$$

où :

$$[U] = [u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1] \quad \text{vecteur de la base polynomiale d'approximation.}$$

$$[M] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{matrice de coefficients algébriques de la B-spline.}$$

$$[B] = [P_i \ P_{i+1} \ P_{i+2} \ P_{i+3}]^T \quad \text{matrice des points de contrôle.}$$

Les fonctions B-splines uniformes sont appropriées lorsque les points de contrôle sont régulièrement disposés. Cependant pour une disposition quelconque des points de contrôle on doit utiliser des fonctions de forme qui tiennent compte de la non uniformité des données.

3-3-3 Courbes B-spline composites non uniformes :

Si dans l'équation (3.8), on introduit les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \nabla_i &= t_{i+1} - t_i \\ \nabla_i^n &= \nabla_i + \dots + \nabla_{i+n-1} = \{t_{i+n} - t_i\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

alors pour une courbe B-spline d'ordre $k = 3$, nous pouvons écrire :

$$N_{i,3}(t) = \frac{t-t_i}{\nabla_i^2} N_{i,2}(t) + \frac{t_{i+3}-t}{\nabla_{i+1}^2} N_{i+1,2}(t) \quad (3.14)$$

Donc en développant, on trouve :

$$N_{i,3}(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_i)^2}{\nabla_i^2 \nabla_i} & \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \frac{(t-t_i)^2}{\nabla_i^2 \nabla_i} - \frac{\nabla_i(t-t_{i+1})^2}{\nabla_{i+1}^2 \nabla_{i+1} \nabla_i} & \text{pour } t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \\ \frac{(t_{i+3}-t)^2}{\nabla_{i+1}^2 \nabla_{i+2}} & \text{pour } t \in [t_{i+2}, t_{i+3}] \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.15)$$

À la figure (3-5), nous avons présenté les fonctions récursives de l'équation (3.8).

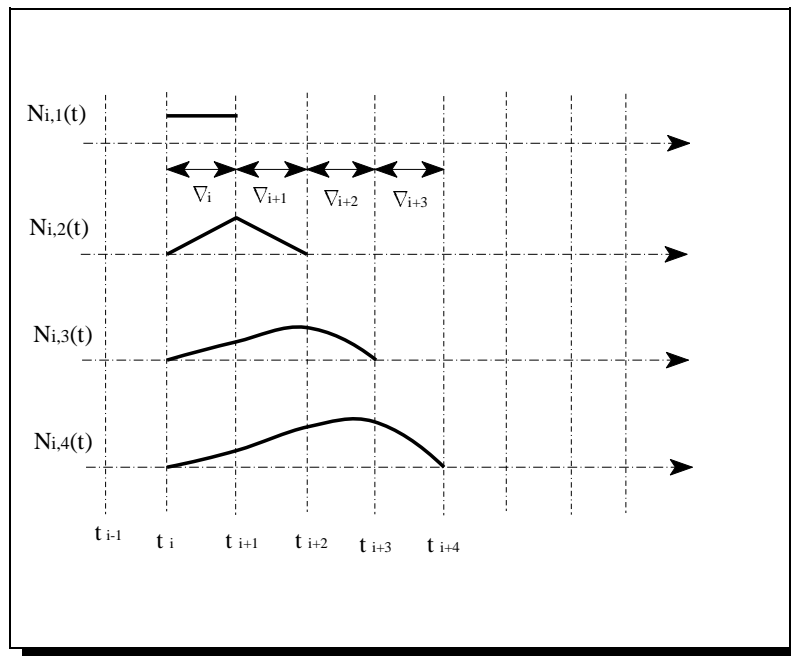


Figure 3-5 : fonctions de base de la courbe B-spline

Les fonctions de base B-spline ont des formes différentes dans les intervalles différents de l'espace paramétrique t et elles sont définies dans l'intervalle " l " par :

$$N_{i,k}^{(l)}(t) = N_{i,k}(t) \quad \text{pour } t \in [t_{i+l-1}, t_{i+l}], \quad l = 1, 2, \dots, k$$

Si on introduit la transformation suivante :

$$u = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{t - t_i}{\nabla_i} \quad (3.16)$$

Alors pour $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, ceci implique que $0 \leq u \leq 1$, et nous pouvons obtenir la forme normalisée des fonctions de base $N_{i,k}(u)$ dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Si nous restons dans le cas de la courbe non-uniforme cubique B-spline (NUBS), nous avons:

$$N_{i,4}(t) = N_{i,4}^{(l)}(t) \quad \text{pour } t \in [t_{i+l-1}, t_{i+l}], \quad l = 1, 2, 3, 4 \quad (3.17)$$

Avec :

$$N_{i,4}^{(1)}(t) = \frac{(t - t_i)^3}{\nabla_i^3 \nabla_i^2 \nabla_i} \quad \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (3.18 \text{ a})$$

$$N_{i,4}^{(2)}(t) = N_{i,4}^{(1)}(t) - \frac{\nabla_i^4 (t - t_{i+1})^3}{\nabla_{i+1}^3 \nabla_{i+1}^2 \nabla_{i+1} \nabla_i} \quad \text{pour } t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \quad (3.18 \text{ b})$$

$$N_{i,4}^{(3)}(t) = N_{i,4}^{(4)}(t) - \frac{\nabla_i^4 (t_{i+3} - t)^3}{\nabla_{i+2} \nabla_{i+1}^3 \nabla_{i+1}^2 \nabla_i^3} \quad \text{pour } t \in [t_{i+2}, t_{i+3}] \quad (3.18 \text{ c})$$

$$N_{i,4}^{(4)}(t) = \frac{(t_{i+4} - t)^3}{\nabla_{i+3} \nabla_{i+2}^2 \nabla_i^3} \quad \text{pour } t \in [t_{i+3}, t_{i+4}] \quad (3.18 \text{ d})$$

Maintenant, on peut construire le modèle de courbe non-uniforme B-spline pour la suite des points donnés $\{P_j\}$ dans l'espace à n-dimensions en utilisant les fonctions de forme cubique B-spline, $N_{i,4}(t)$ ci-dessous :

$$r_i(t) = \sum_j P_j N_{j,4}(t) \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (3.19)$$

Dans le cas d'une courbe cubique, les fonctions de forme, $N_{i,4}(t)$, sont non nulles seulement pour $j = i-3, i-2, i-1$ et i . Donc, si on utilise les notations : $V_0 = P_{i-3}$, $V_1 = P_{i-2}$, $V_2 = P_{i-1}$ et $V_3 = P_i$ la fonction vectorielle (3.19) devient :

$$\begin{aligned} r_i(t) &= \sum_j N_{j,4}(t) P_j(t) \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (3.20) \\ &= N_{i-3,4}^{(4)}(t) P_{i-3} + N_{i-2,4}^{(3)}(t) P_{i-2} + N_{i-1,4}^{(2)}(t) P_{i-1} + N_{i,4}^{(1)}(t) P_i \\ &= N_{i-3,4}^{(4)}(t) V_0 + N_{i-2,4}^{(3)}(t) V_1 + N_{i-1,4}^{(2)}(t) V_2 + N_{i,4}^{(1)}(t) V_3 \end{aligned}$$

ou sous forme matricielle :

$$r_i(u) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(\nabla_i)^2}{\nabla_{i-1}^2 \nabla_{i-2}^3} & 1 - n_{11} - n_{13} & \frac{(\nabla_{i-1})^2}{\nabla_{i-1}^3 \nabla_{i-1}^2} & 0 \\ -3n_{11} & 3n_{11} - n_{23} & \frac{3\nabla_i \nabla_{i-1}}{\nabla_{i-1}^3 \nabla_{i-1}^2} & 0 \\ 3n_{11} & -(3n_{11} + n_{23}) & \frac{3(\nabla_i)^2}{\nabla_{i-1}^3 \nabla_{i-1}^2} & 0 \\ -n_{11} & n_{11} - n_{43} - n_{44} & n_{43} & \frac{(\nabla_i)^2}{\nabla_i^3 \nabla_i^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

$$= [U] [M_C] [V]$$

avec :

$$n_{43} = - \left\{ \frac{1}{3} n_{33} + n_{44} + \frac{(\nabla_i)^2}{\nabla_i^2 \nabla_{i-1}^3} \right\}$$

$$\nabla_i = t_{i+1} - t_i \quad (= |P_{i+1} - P_i| \text{ pour lissage})$$

$$\nabla_i^l = \nabla_i + \nabla_{i+1} \cdots + \nabla_{i+l-1}$$

n_{ij} : élément de la rangée i et de la colonne j

$[M_C]$ est la matrice des coefficients B-spline non-uniforme

Si on utilise les espacements nodaux uniformes $\nabla_i = 1$, on obtient la matrice de

coefficients B-spline uniforme :

$$\nabla_i = 1, \quad \nabla_i^2 = 2, \quad \nabla_i^3 = 3$$

$$[M_c] = [M_{BS}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Par ailleurs, si les valeurs nodales sont définies de la façon suivante :

$$t_{i-3} = t_{i-2} = t_{i-1} = t_i = 0 \quad \text{et}$$

$$t_{i+1} = t_{i+2} = t_{i+3} = t_{i+4} = 1$$

et qu'ensuite nous avons :

$$\nabla_i = 1 \quad \text{et}$$

$$\nabla_j = 0 \quad \text{pour tous les } j \neq i$$

et la matrice $[M_c]$ dégénère en la matrice des coefficients de Bézier [46-47]. Donc la représentation NUBS (non-uniform B-spline) est assez générale et inclut les courbes de Bézier et B-spline uniformes comme cas particuliers.

3-3-3-1 Lissage basé sur le modèle de courbe B-spline non-uniforme composite:

Ici on veut résoudre le problème de la construction d'une courbe cubique B-spline qui passe aux points donnés $\{P_i, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ et qui satisfait les conditions sur les vecteurs tangents aux extrémités de la courbe de lissage T_0 et T_n et des conditions de continuité C^2 sur toute la courbe. On doit alors trouver les $n+3$ points de contrôle $\{V_i, i = 0, 1, 2, \dots, n+2\}$ et les $n+4$ espacements nodaux associés $\{\nabla_i = (t_{i+1} - t_i), i = -2, -1, 0, \dots, n+1\}$ d'une courbe composite construite à partir de n segments B-spline

non-uniforme cubiques (NUBS). Pour ce problème, on peut utiliser l'algorithme suivant largement utilisé dans la littérature [47] :

Étape I. **Trouver les espacements nodaux $\{\nabla_i\}$** : On sait qu'une courbe composite B-spline non-uniforme est supportée par n intervalles nodaux $\nabla_0, \nabla_1, \dots, \nabla_{n-1}$, appelés intervalles de support, les intervalles restants étant appelés intervalles auxiliaires.

- a. *Intervalles de support* : Les intervalles nodaux supportant la courbe peuvent être approximés raisonnablement par la méthode des longueurs de cordes entre points successifs i.e. :

$$\nabla_i = | P_{i+1} - P_i |, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.23)$$

- b. *Intervalles auxiliaires* : Le choix des intervalles auxiliaires n'affecte pas la qualité de la courbe NUBS résultante, on peut les choisir nul i.e. :

$$\nabla_{-2} = \nabla_{-1} = \nabla_{n+1} = \nabla_n = 0 \quad (3.24 \text{ a})$$

ou, on peut leur assigner une valeur uniforme :

$$\nabla_{-2} = \nabla_{-1} = \nabla_0 \quad ; \quad \nabla_{n+1} = \nabla_n = \nabla_{n-1} \quad (3.24 \text{ b})$$

Étape II. **Construction des systèmes linéaires pour calculer les points de contrôle inconnus** :

- a. Évaluer l'équation de la courbe NUBS pour chaque segment :

$$r_i(u) = [U] [M_C] [V], \quad 0 \leq u \leq 1, \quad i = 1, \dots, n-1$$

avec :

$$[V^{(i)}] = [V_i, V_{i+1}, V_{i+2}, V_{i+3}]$$

$r_i(u)$ joignant les points P_i et P_{i+1} pour $i = 0, 1, \dots, n-1$ donc :

$$r_i(0) = P_i \quad \text{et} \quad (3.25)$$

$$r_i(1) = P_{i+1}$$

Ce qui donne un système de $n+1$ équations de la forme :

$$f_i V_i + h_i V_{i+1} + g_i V_{i+2} = P_i \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.26)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 h_i &= 1 - f_i - g_i \\
 f_i &= \frac{(\nabla_i)^2}{\nabla_{i-1}^2 \nabla_{i-2}^3} \\
 g_i &= \frac{(\nabla_{i-1})^2}{\nabla_{i-1}^2 \nabla_{i-1}^3}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

- b. Écrire les 2 équations des tangentes aux extrémités :
pour l'extrémité gauche, on a :

$$T_0 = p_0^u(0) = a_0 V_2 + (b_0 - a_0) V_1 - b_0 V_2 \tag{3.28}$$

où :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{3 \nabla_0 \nabla_{-1}}{\nabla_{-1}^2 \nabla_{-1}^3} \\
 b_0 &= \frac{3 (\nabla_0)^2}{\nabla_{-1}^2 \nabla_{-2}^3}
 \end{aligned}$$

et pour l'extrémité droite, on a :

$$T_n = p_{n-1}^u(1) = a_1 V_{n+2} + (b_1 - a_1) V_{n+1} - b_1 V_n \tag{3.29}$$

Ce système tridiagonal doit être résolu par un algorithme qui permet l'échange de colonnes et de rangées car il contient des valeurs nulles sur la diagonale.

Remarque : Lorsque tous les intervalles nodaux de support sont identiques, le système (3.30) se réduit au système d'équations déjà obtenu pour les B-spline uniformes.

3-3-3-2 Lissage de courbes B-spline composites fermées :

En pratique, en CAO, on doit travailler avec des objets ayant un contour fermé. On doit alors modifier l'algorithme précédent.

Étant donné les $n + 1$ points nodaux $\{P_i, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ ($P_0 = P_n$) qui forment un contour fermé et $n + 1$ valeurs nodales $\{\phi_i, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ ($\phi_0 = \phi_n$), le problème consiste à construire une courbe cubique B-spline qui passe aux points donnés et interpole les valeurs nodales. On doit trouver les $n+3$ points de contrôle $\{V_i, i = -1, 0, 1, 2, \dots, L+1\}$ et les $n+4$ espacements nodaux associés $\{\nabla_i = (t_{i+1} - t_i), i = -2, -1, 0, \dots, n+1\}$ d'une courbe composite construite de n segments B-spline non-uniformes cubiques (NUBS) en tenant compte des conditions de fermeture.

Étape I. **Trouver les espacements nodaux $\{\nabla_i\}$:**

- a. *Intervalles de support* : Les intervalles nodaux supportant la courbe peuvent être approximés raisonnablement par la méthode des longueurs des cordes entre points successifs comme dans le cas de la section précédente i.e. :

$$\nabla_i = |P_{i+1} - P_i|, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

- b. *Intervalles auxiliaires* : Les intervalles auxiliaires doivent être choisis de la façon suivante (conditions de fermeture) :

$$\nabla_{-1} = \nabla_{n-2}, \nabla_{-2} = \nabla_{n-3}, \nabla_{n+1} = \nabla_2, \nabla_n = \nabla_1 \quad (3.31)$$

Étape II. **Construction des systèmes linéaires pour calculer les points de contrôle inconnus :**

Évaluer l'équation de la courbe NUBS pour chaque segment :

$$r_i(u) = [U] [M_c] [V], \quad 0 \leq u \leq 1, i = 1, \dots, n$$

avec :

$$[V^{(i)}] = [V_{i-2}, V_{i-1}, V_i, V_{i+1}]$$

$r_i(u)$ joignant les points P_i et P_{i+1} pour $i = 0, 1, \dots, n-1$ donc :

$$r_i(0) = P_i \quad \text{et}$$

$$r_i(1) = P_{i+1}$$

Ce qui donne un système de n équations de la forme :

$$f_i V_i + h_i V_{i+1} + g_i V_{i+2} = P_i \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.32)$$

avec :

$$h_i = 1 - f_i - g_i$$

$$f_i = \frac{(\nabla_i)^2}{\nabla_{i-1}^2 \nabla_{i-2}^3}$$

$$g_i = \frac{(\nabla_{i-1})^2}{\nabla_{i-1}^2 \nabla_{i-1}^3}$$

De plus, nous devons imposer les conditions de fermeture suivantes :

$$V_{-1} = V_{n-1}, V_n = V_0 \quad \text{et} \quad V_{n+1} = V_1$$

Étape III. **Construction de la matrice de système et résolution pour $\{V_i\}$:**

Avec les valeurs des coefficients f_i , g_i et h_i , on obtient le système matriciel suivant pour les points de contrôle $\{V_i\}$:

$$\begin{bmatrix} h_0 & g_0 & 0 & & & 0 & f_0 \\ f_1 & h_1 & g_1 & & & & \\ 0 & f_2 & h_2 & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ g_{n-1} & 0 & 0 & & & f_{n-1} & h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{n-1} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Le système tridiagonal cyclique doit être résolu par un algorithme qui permet l'échange de colonnes et de rangées car il contient des valeurs sur la diagonale nulles.

3-3-3-3 Conversion d'une courbe B-spline composite en une courbe de Bézier:

Pour fin d'affichage graphique d'une courbe B-spline, il est plus commode de passer d'abord à sa représentation sous forme d'une courbe de Bézier par morceaux. Nous pouvons remarquer que la conversion d'une représentation B-spline en une représentation de Bézier est utile pour fin de définition d'éléments finis géométriques décrits localement à l'aide des points de contrôle de Bézier. On évite de cette façon le chevauchement des points de contrôle dans la définition de courbes en segments locaux qui intervient dans la représentation B-spline.

Lorsque deux éléments consécutifs du vecteur nodal sont de multiplicité d'ordre

k, le segment correspondant à cet intervalle est un segment de Bézier. Lorsque le vecteur nodal uniforme ouvert contient k zéros suivis de k "1", pour une valeur k donnée, par exemple : pour k = 4, si le vecteur nodal correspondant est

$$t = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$$

alors la courbe B-spline coïncide avec la courbe de Bézier de même ordre et le nombre de sommets du polygone de contrôle est égal à l'ordre de la B-spline.

En se limitant au cas d'une B-spline cubique (degré 3), on sait qu'un segment d'une courbe B-spline non-uniforme est définie par une suite de points de contrôle $\{V_i\}$ et d'intervalles nodaux $\{\nabla_j\}$ respectivement donnés par :

- les quatre points de contrôle $\{V_i, V_{i+1}, V_{i+2}, V_{i+3}\}$
- les cinq espacements nodaux $\{\nabla_{j-2}, \nabla_{j-1}, \nabla_j, \nabla_{j+1}, \nabla_{j+2}\}$

La conversion d'une courbe B-spline en une courbe de Bézier équivalente se fait par un algorithme d'insertion des noeuds de Boehm (1980) [46]. C'est un algorithme récursif qui calcule les points de Bézier à partir des points de contrôle de la courbe B-spline $\{V_i\}$ en exploitant le fait que les points de jonction de deux segments B-spline adjacents soient aussi des points de contrôle de Bézier d'extrémités du polygone de contrôle. Il faut alors déterminer les points de contrôle intérieurs.

En désignant par b_j , les points de contrôle de Bézier, l'algorithme général d'insertion des noeuds s'écrit :

$$b_{j+d}^m(u) = \alpha_j^m(u) b_{j+d}^{m-1}(u) + (1 - \alpha_j^m(u)) b_{j+d-1}^{m-1}(u) \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (3.34)$$

avec :

$$\alpha_j^m(u) = \frac{(u \nabla_i + \nabla_j^{i-j})}{\nabla_j^{d-m+1}} \quad \text{pour } i - d + m \leq j \leq i \quad (3.35)$$

$$b_j \equiv V_j$$

d = degré de la courbe B-spline

m = multiplicité du noeud ($1 \leq m \leq d$)

$$\nabla_j^k = \nabla_j + \nabla_{j+1} \cdots + \nabla_{j+k-1}$$

La figure (3-6) illustre la technique d'insertion des noeuds. Où l'on considère le cas particulier d'une courbe B-spline cubique ($d = 3$) avec $u = 0$ et $u = 1$. Dans ce cas l'algorithme d'insertion devient :

$$b_{j+3}^m(0) = \alpha_j^m(0) b_{j+3}^{m-1}(0) + (1 - \alpha_j^m(0)) b_{j+2}^{m-1}(0) \quad (3.36)$$

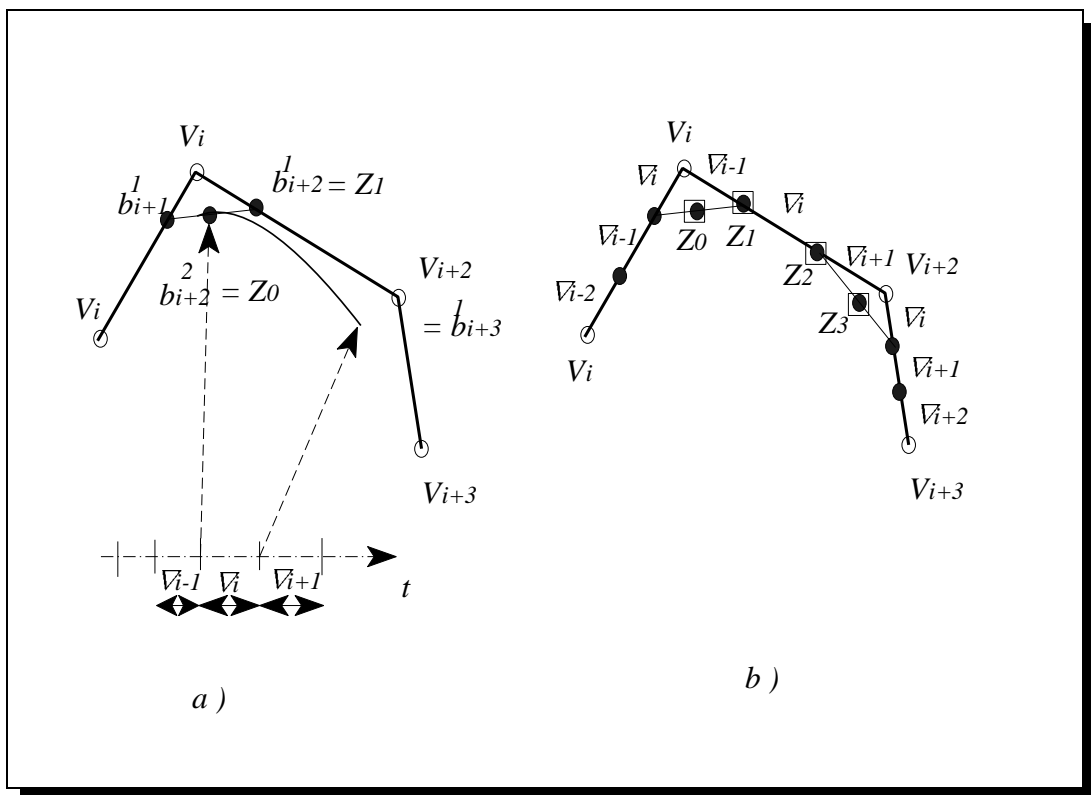


Figure 3-6 : a) insertion au bord gauche, b) construction des points $\{z_i\}$ à partir du polygone B-spline.

$$b_{j+3}^m(1) = \alpha_j^m(1) b_{j+3}^{m-1}(1) + (1 - \alpha_j^m(1)) b_{j+2}^{m-1}(1) \quad (3.37)$$

avec :

$$\alpha_j^m(0) = \frac{\nabla_j^{i-j}}{\nabla_j^{A-m}} \quad (3.38)$$

$$\alpha_j^m(1) = \frac{(\nabla_i + \nabla_j^{i-j})}{\nabla_j^{A-m}} \quad \text{pour } i-3+m \leq j \leq i$$

En évaluant l'équation (3.36), les points intermédiaires de DeBoor $b_i^m(0)$ (figure 3-6 a) deviennent :

Pour $m = 1$ alors si $j = \{i-2, i-1, i\}$ on a :

$$\begin{aligned} j = i-2; \quad b_{i+1}^1(0) &= (\nabla_{i-2}^2 / \nabla_{i-2}^3) b_{i+1}^0(0) + (1 - \nabla_{i-2}^2 / \nabla_{i-2}^3) b_i^0(0) \\ &= [(\nabla_{i-2} + \nabla_{i-1}) V_{i+1} + \nabla_i V_i] / \nabla_{i-2}^3 \end{aligned}$$

$$j = i-1; \quad b_{i+2}^1(0) = [\nabla_{i-1} V_{i+2} + (\nabla_i + \nabla_{i-1}) V_{i+1}] / \nabla_{i-1}^3 = Z_1$$

$$j = i; \quad b_{i+3}^1(0) = V_{i+2}$$

Pour $m = 2$ alors si $j = \{i-1, i\}$ on a :

$$j = i-1; \quad b_{i+2}^2(0) = [\nabla_{i-1} b_{i+2}^1(0) + \nabla_i b_{i+1}^1(0)] / \nabla_{i-1}^2 = Z_0$$

$$j = i; \quad b_{i+3}^2(0) = b_{i+2}^1(0)$$

En désignant par $\{Z_i, i = 0, \dots, 3\}$ les points de Bézier de la courbe cubique (segment) de la figure (3,6 a), on obtient :

$$Z_0 = b_{i+2}^2(0) , \quad Z_1 = b_{i+2}^1(0)$$

En évaluant l'équation (3.37), on obtient les autres points de Bézier :

$$Z_2 = b_{i+2}^1(1) , \quad Z_3 = b_{i+3}^1(1)$$

La séquence d'évaluation se fait de gauche à droite comme suit :

Équation (3.36)

$$V_i = b_i^0(0)$$

$$V_{i+1} = b_{i+1}^0(0) \rightarrow b_{i+3}^1(0)$$

$$V_{i+2} = b_{i+2}^0(0) \rightarrow b_{i+2}^1(0) \rightarrow b_{i+2}^2(0)$$

Équation (3.37)

$$V_{i+1} = b_{i+1}^0(1)$$

$$V_{i+2} = b_{i+2}^0(1) \rightarrow b_{i+2}^1(1)$$

$$V_{i+3} = b_{i+3}^0(1) \rightarrow b_{i+3}^1(1) \rightarrow b_{i+3}^2(1)$$

Donc les points de Bézier $\{Z_i, i = 0, \dots, 3\}$ sont obtenus par subdivision récursive du polygone de contrôle B-spline, selon le rapport des espacements nodaux. La courbe aussi obtenu est une courbe Bézier cubique par morceaux de continuité C^1 .

On peut trouver les points de Bézier d'une surface tensorielle B-spline par un algorithme semblable en l'appliquant à chaque colonne des points du polyèdre B-spline et ensuite à chaque rangée du réseau des points intermédiaires.