

Chapitre 2

Survol des méthodes de génération du maillage E.F.

2-1 Introduction :

Les méthodes de génération de maillage se divisent en deux grandes catégories:

- I. les méthodes qui donnent priorité aux noeuds, et
- II. les méthodes qui utilisent l'adaptation de gabarit de maillage.

2-1-1 Les méthodes qui donnent priorité aux noeuds :

Dans cette catégorie, deux approches sont possibles :

La première appelée *approche par décomposition topologique* ne considère comme noeuds initiaux que les seuls sommets des arêtes définissant le contour du domaine à étudier. Un algorithme de triangularisation est alors utilisé afin de produire

un ensemble composé d'un nombre minimal de triangles tels qu'il n'y ait aucun recouvrement et que la réunion de ces triangles restitue le domaine à mailler.

Le maillage ainsi produit ne peut généralement pas être utilisé tel quel pour effectuer l'analyse car, en effet, le maillage actuel est très grossier. Pour qu'il devienne utilisable, on fera intervenir des méthodes de raffinement de maillage et de repositionnement d'éléments qui doivent également satisfaire aux exigences de densité de maillage [29].

Une autre approche est l'*approche par connexion de noeuds*. Elle est constituée de deux étapes principales : la génération des noeuds, et la génération des éléments. Tous les noeuds sont générés tels qu'ils apparaîtront dans le maillage final ; ils vérifient donc d'emblée les exigences de densité de maillage. Cette génération peut reposer sur des méthodes aléatoires [5], ou on peut aussi chercher à générer un ensemble de points uniformément distribués [30]. Ensuite, le problème est de déterminer la meilleure façon de relier les noeuds afin de générer les éléments, avec les contraintes suivantes : aucun couple d'éléments ne doit présenter de zone de recouvrement, et la réunion de tous les éléments doit restituer l'objet à étudier.

On peut placer la méthode populaire de triangulation de Delaunay dans cette dernière catégorie. On verra cette méthode plus précisément dans la section 2-2.

2-1-2 Les méthodes adaptant un gabarit de maillage :

Le principe est de créer un gabarit de maillage très général et de l'appliquer sur l'objet à étudier. Les méthodes suivantes :

- Maillage par transformation isoparamétrique,
- Méthode de superposition de maillage,
- Méthode de quadtree/octree modifiée,

appartiennent à cette catégorie. Ces méthodes sont décrites dans les sections 2-3, 2-4

et 2-5.

2-2 Triangulation de Delaunay :

2-2-1 Partition de Dirichlet et triangulation de Delaunay :

Les méthodes de triangulation de Delaunay [11-18] sont basées sur la triangulation d'un ensemble de points dans un espace de dimension n , pour produire les simplexes à n dimensions. Donc les deux grandes étapes des méthodes basées sur la triangulation de Delaunay sont :

- I. la génération de l'ensemble initial des points, et
- II. la génération des triangles qui satisfont aux propriétés de Delaunay.

Les points générés doivent être placés de telle façon qu'ils satisfont aux attributs de contrôle du maillage et produisent un maillage valide.

Le maillage est valide s'il est topologiquement compatible et géométriquement similaire au modèle géométrique. "Topologiquement compatible" veut dire que la topologie (i.e. les relations entre les entités définissant le modèle) du maillage doit être équivalent à la topologie de l'objet origine. "Géométriquement similaire" veut dire que la géométrie (formes et dimensions) du maillage final est similaire à celle de l'objet à modéliser. Par triangulation d'un domaine, on entend un recouvrement du domaine par des éléments (triangles en deux dimensions et tétraèdres en trois dimensions), où l'intersection de deux éléments est soit vide, ou correspond à un sommet, à une arête, ou à une face.

Les propriétés de triangulation de Delaunay sont en relation avec la partition ("tessellation") de Dirichlet, qui peut être considérée comme le dual géométrique de la triangulation de Delaunay.

Étant donné un ensemble aléatoire de M points notés p_1, p_2, \dots, p_M dans l'espace à n -dimensions, une région "i" occupant un domaine D_i est définie comme suit :

$$D_i = \{ x: |x - P_i| \leq |x - P_j| \text{ pour tout } i \neq j \} \quad (2.1)$$

La collection D telle que :

$$D = \bigcup_{i=1}^M D_i \quad (2.2)$$

se nomme la partition ("tessellation" en anglais) de Dirichlet.

On peut prouver que la région D_i est l'intersection convexe des demi-plans qui séparent les points p_i et p_j . Cette région est la région de l'espace à n -dimensions qui est la plus proche du point p_i que des autres points. Dans l'espace à deux dimensions les D_i sont des polygones convexes et dans l'espace à trois dimensions, ce sont des polyèdres convexes (Voir figure 2-1).

La triangulation de Delaunay est alors définie de la façon suivante :

Étant donné une partition de Dirichlet D dans l'espace à n -dimensions, les lignes qui relient les points p_i et p_j faisant en sorte que D_i et D_j sont voisins, forment la triangulation de Delaunay. Ici D_i et D_j sont les régions correspondant aux points p_i et p_j .

En général, la triangulation génère des simplexes à n -dimensions ayant une propriété intéressante : "l'hyper-sphère circonscrite à chaque région contient seulement $n+1$ points des M points qui forment le simplexe à n -dimensions". Cette propriété du contenu de la sphère circonscrit est le point clé des différents algorithmes qui calculent la triangulation de Delaunay [11]. On doit faire attention à l'incompatibilité géométrique après la triangulation de Delaunay parce que la zone convexe des points peut introduire une incompatibilité géométrique pour les objets concaves. La figure (2-1) présente la partition de Dirichet et la triangulation de Delaunay pour des points aléatoires en deux dimensions.

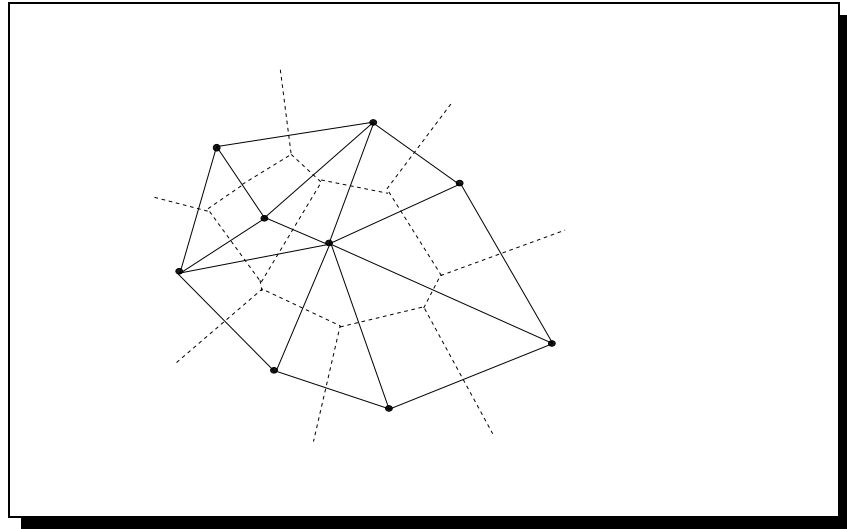


Figure 2-1 : Partition de Dirichet (ligne pointillée) et triangulation de Delaunay (ligne solide) en deux dimensions.

Quelquefois, plus de $n+1$ points peuvent être placés sur la sphère circonscrite. Cette situation est un cas dégénéré. Cependant la possibilité que cette situation arrive pour les points aléatoires est faible dans l'espace à n dimensions, mais on peut souvent rencontrer ce cas dégénéré pour les problèmes de géométrie réelle le parce que les points ne sont pas aléatoires. On peut résoudre les cas dégénérés par un choix d'éléments de façon telle que la dégénérescence puisse être résolue dans toutes les dimensions. La figure (2-2 a) donne un exemple où les six points a, b, c, d, e et f dans l'espace à trois dimensions sont dégénérés à cause de la dégénérescence des points b, c, d et e dans l'espace à deux dimensions. Donc avec la résolution du cas dégénéré dans l'espace à deux dimensions pour les points b à e , on peut résoudre la dégénérescence globale (figure 2-2 b).

À l'exception des cas dégénérés, la triangulation de Delaunay génère des éléments uniques pour l'ensemble des points donnés.

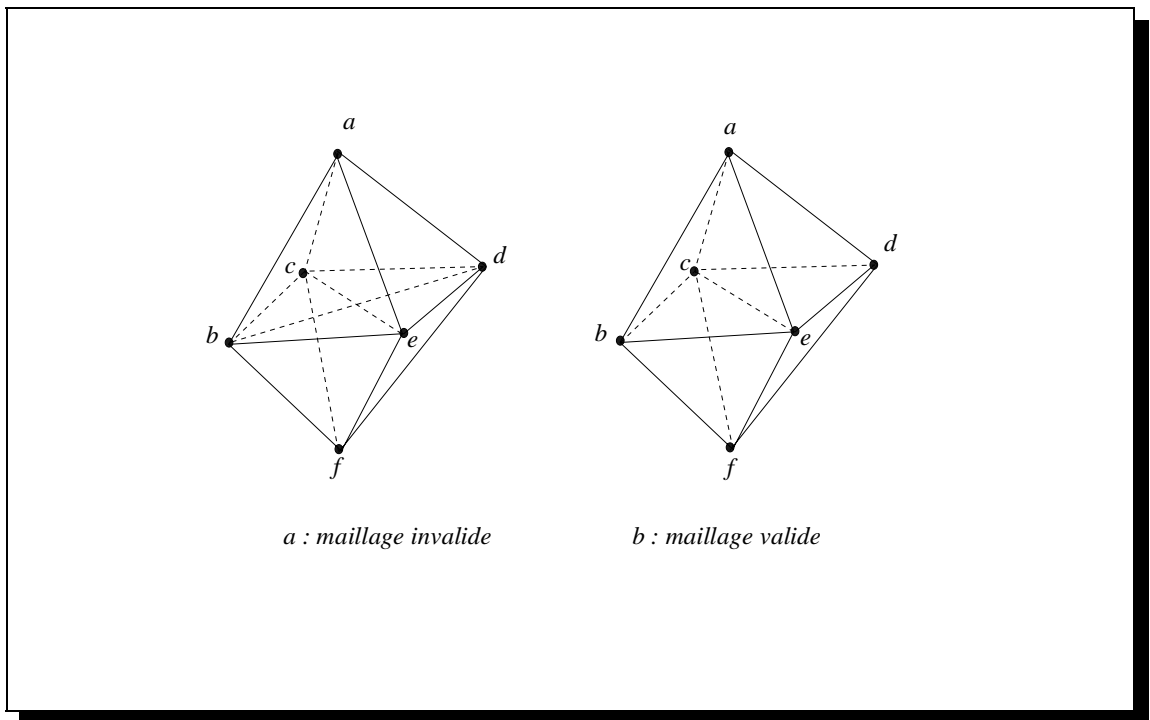


Figure 2-2 : Le cas dégénéré d'un problème à trois dimensions

2-2-2 Classification :

Le résultat de n'importe quel algorithme de triangulation de Delaunay après la correction des cas dégénérés est un maillage unique composé d'éléments topologiques de dimension n ou moins. L'algorithme débute avec des objets de dimension zéro où les points donnés sont classifiés par rapport à l'objet initial. Après que l'algorithme soit complété, les éléments avec une topologie de maillage élevée doivent être classifiés de telle sorte que le maillage final devienne géométriquement compatible avec l'objet initial.

Un algorithme de triangulation de Delaunay qui produit un maillage convenable d'après [11], est présenté ci-dessous. Cet algorithme utilise un schéma de classification de type "bottom-up/top-down". Il est écrit pour la génération du maillage

en trois dimensions, mais on peut l'adapter facilement pour le cas en deux dimensions.

1. *Générer le maillage initial.* Après la sélection des points initiaux, par un algorithme de triangulation de Delaunay, on classifie les sommets de maillage par rapport à la géométrie du modèle.
2. *Classifier les arêtes de maillage.* On classifie toutes les arêtes du maillage qui sont placées sur les frontières du modèle. Ici, on classifie aussi toutes les arêtes qu'on peut classifier en utilisant un test topologique du modèle.
3. *Résoudre les arêtes incompatibles.* On résout toutes les incompatibilités topologiques des arêtes, soit par re-classification, soit par ajout d'un autre point, c'est la méthode de "stitching". S'il n'y a pas d'incompatibilité aller à l'étape suivante, sinon aller à l'étape 2.
4. *Classifier les facettes du maillage.* On classifie toutes les facettes du maillage qui sont placées sur les frontières du modèle. Ici, on classifie aussi toutes les facettes qu'on peut classifier en utilisant le test topologique du modèle.
5. *Résoudre les facettes incompatibles.* On résout toutes les incompatibilités topologiques des facettes, soit par re-classification, soit par la méthode de "stitching" d'un autre point. S'il n'y a pas d'incompatibilité, aller à l'étape suivante, sinon aller à l'étape 4.
6. *Classifier les régions du maillage.* Une fois les frontières devenues topologiquement compatibles, les régions du maillage sont classifiées en utilisant les vecteurs d'orientation matérielle, les héritages des voisins classifiées, ou si nécessaire le test "in/out".
7. *Classification "top/down" des facettes de maillage.* En procédant à la classification des régions du maillage lesquelles sont des facettes du maillage composé, on classifie des facettes du maillage non classifié.
8. *Classification "top/down" des arêtes du maillage.* En procédant à la

classification des facettes du maillage lesquelles sont des arêtes de maillage composé, on classifie des arêtes de maillage non classifiées.

2-3 Maillage par transformation isoparamétrique :

La méthode de maillage par transformation isoparamétrique utilise, comme gabarit, des maillages déjà établis sur des éléments de référence. L'objet original est divisé en blocs ou sous domaines (super-élément) normalement irréguliers. La forme des blocs dans l'espace cartésien (géométrique) est choisie de façon qu'elle puisse être construite par une transformation isoparamétrique standard d'une forme simple dans l'espace de référence mathématique (ξ et η en 2D) [31-36]. L'espace de référence mathématique est souvent appelé plan parent en 2D et les formes simples s'appellent éléments de référence et sont normalement, des triangles ou des rectangles dans l'espace à deux dimensions et des cubes ou hexaèdres dans l'espace en trois dimensions. La figure (2-3) montre la décomposition d'un objet en super-éléments.

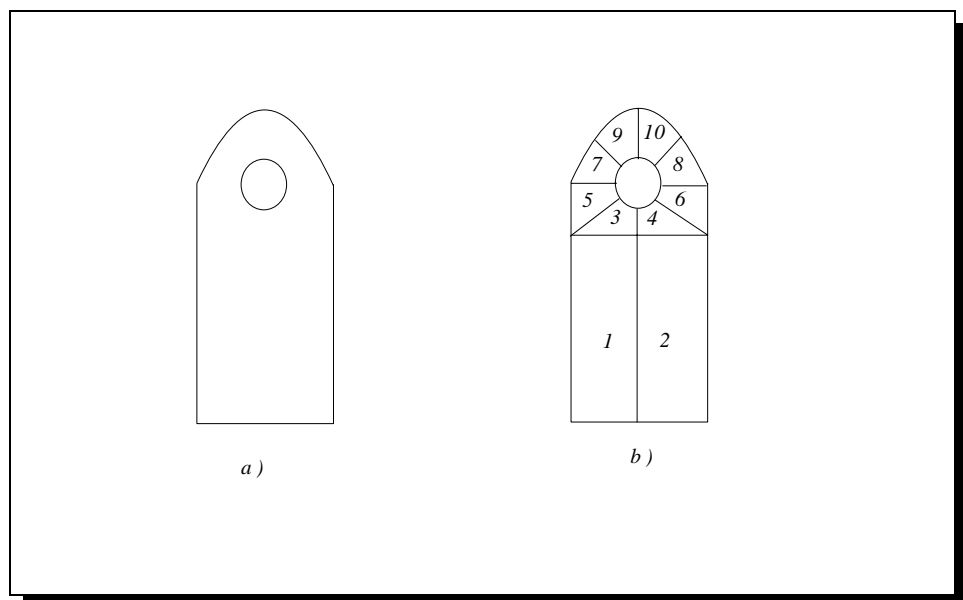


Figure 2-3 : a) l'objet à mailler b) décomposition de l'objet en 10 super-éléments

La figure (2-4) présente les transformations d'un super-élément de l'espace réel (x, y) vers l'espace (ξ, η) et l'inverse. La génération du maillage se fait dans l'espace de référence (ξ, η) et le maillage généré est ensuite transféré à l'espace réel (x, y) .

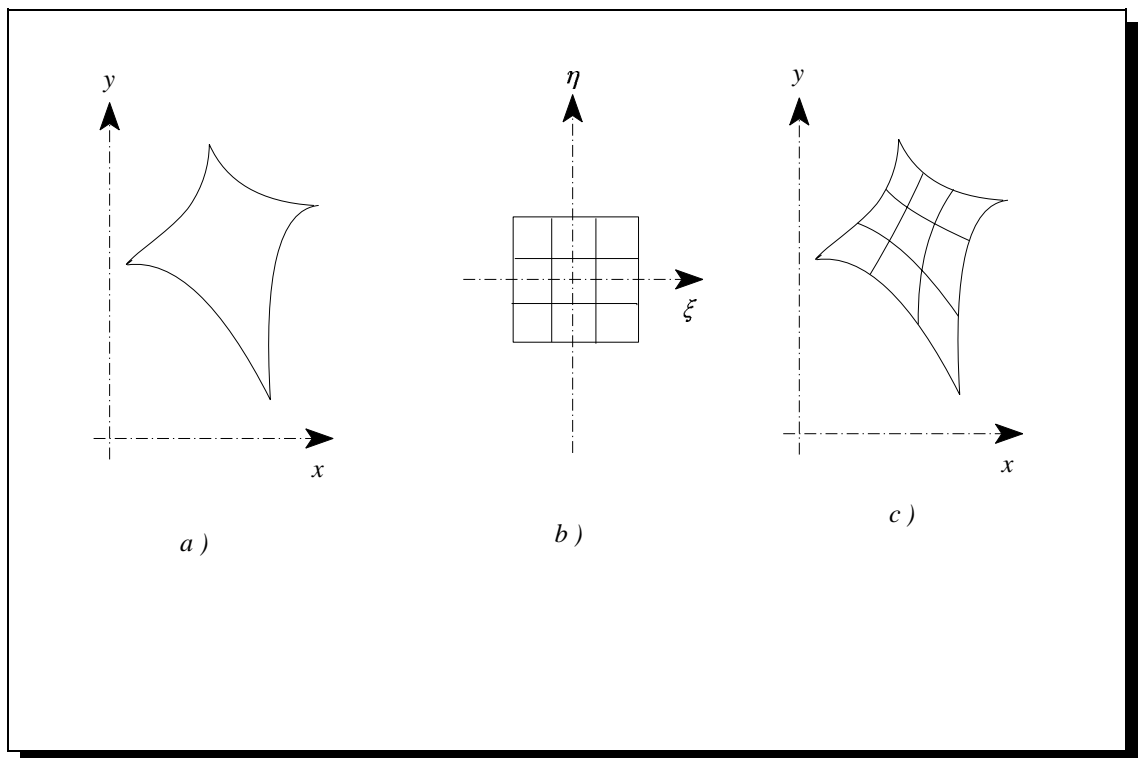


Figure 2-4 : a) super-élément dans l'espace x et y . b) transformation du super-élément dans l'espace de référence ξ et η et le maillage généré. c) transformation du maillage en l'espace x et y .

La raison pour laquelle on utilise la transformation isoparamétrique est la suivante : le maillage de l'objet dans l'espace paramétrique est plus simple à réaliser que dans l'espace réel. Dans l'espace paramétrique, nous sommes en présence de formes simples, comme des triangles ou des rectangles en deux dimensions, ou des hexaèdres en trois dimensions, que l'on peut mailler très facilement. Par exemple, en deux dimensions, si les coordonnées des sommets de l'objet dans l'espace réel (x_i et y_i) sont connues, on peut calculer facilement les coordonnées dans l'espace réel de n'importe quel point de l'objet en utilisant les équations suivantes :

$$x = \sum_{i=1}^{nb-noeuds} N_i(\xi, \eta) x_i \quad (2.3)$$

$$y = \sum_{i=1}^{nb-noeuds} N_i(\xi, \eta) y_i \quad (2.4)$$

et en trois dimensions :

$$x = \sum_{i=1}^{nb-noeuds} N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \quad (2.5)$$

$$y = \sum_{i=1}^{nb-noeuds} N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \quad (2.6)$$

$$z = \sum_{i=1}^{nb-noeuds} N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \quad (2.7)$$

Les N_i sont les fonctions de forme ("shape function") et (ξ, η, ζ) sont les coordonnées paramétriques dans le plan parent ou le cube de référence. nb-noeuds représente le nombre de noeuds par élément.

Parce que le super-élément, par exemple, en deux dimensions est divisé selon les lignes ξ constant et η constant (plans en trois dimensions), le nombre de noeuds (ou de division) sur les côtés opposés doit être le même. Cette situation crée quelques restrictions pour la génération de maillage. Par exemple, dans le cas où les tailles des côtés opposés d'un super-élément seraient très différentes, le maillage généré n'est pas uniforme. Les éléments proches des côtés longs sont plus grands que les éléments proches des petits côtés.

Une variante de cette méthode (l'ancien travail de l'auteur), pour éliminer ce défaut, utilise deux transformations isoparamétriques [34. 35]. Ici, le super-élément est d'abord transféré dans l'espace (ξ, η) et après, pour les côtés opposés qui n'ont

pas le même nombre de divisions, le côté avec un petit nombre de noeuds est agrandi pour compenser la différence. Le nouvel objet créé dans l'espace (ξ, η) est maillé en utilisant la transformation isoparamétrique dans l'espace (ξ', η') . Les parties ajoutées à l'objet dans l'espace (ξ, η) sont éliminées et les noeuds proches des côtés sont projetés sur les côtés pour arriver à la forme originelle. Cette forme est ensuite transférée vers l'espace réel (x, y) .

La figure (2-5) présente différentes étapes de cette méthode pour un exemple en deux dimensions.

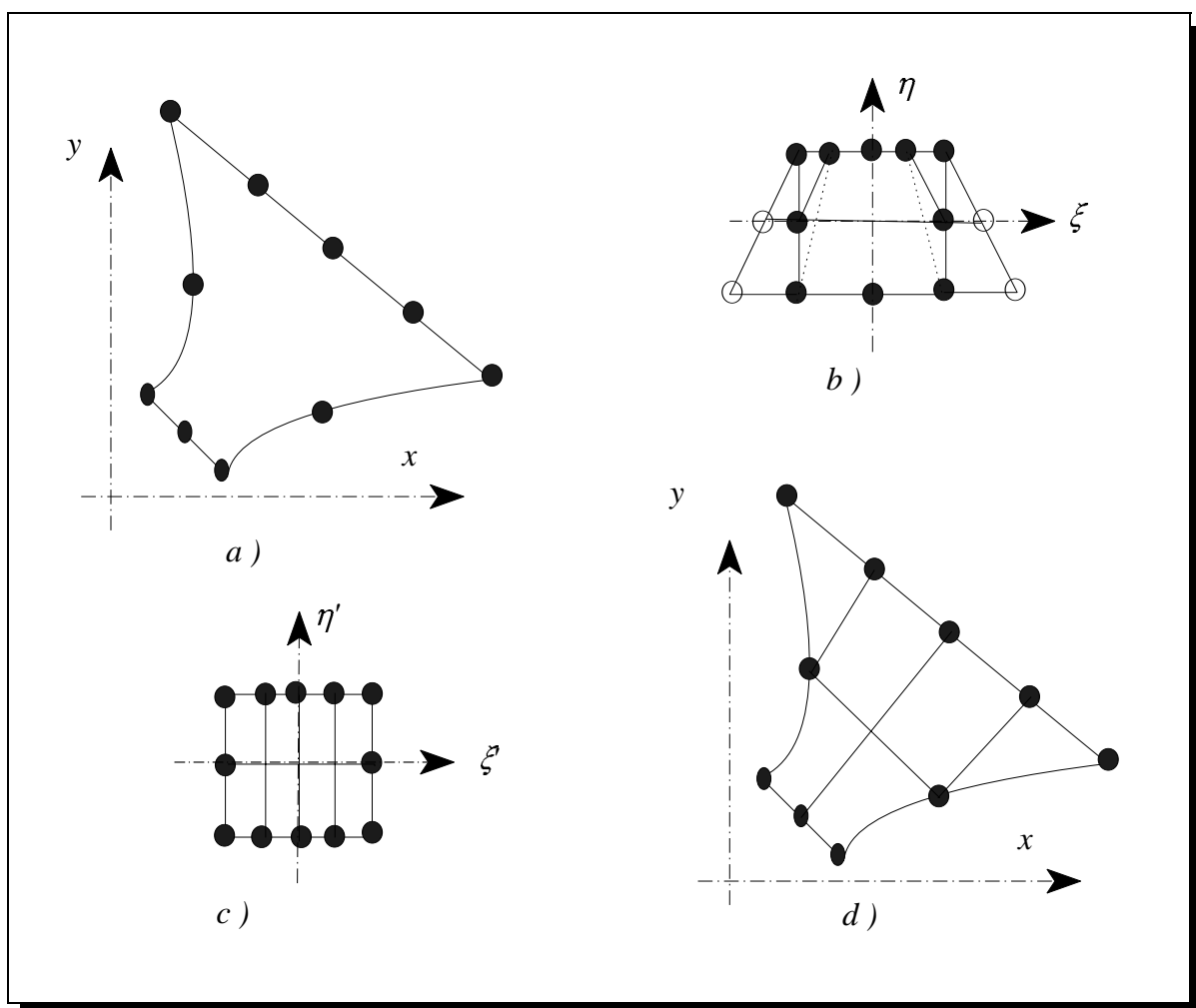


Figure 2-5 : a) l'objet à mailler. b) transformation en l'espace ξ et η . c) transformation en l'espace ξ' et η' . d) le maillage final.

2-4 Méthode de superposition de maillage :

Les méthodes usuelles de calcul par éléments finis ne permettent pas de respecter à la fois les contraintes numériques (i.e. précision, souplesse d'utilisation, etc.) et les contraintes économiques (i.e. coût d'utilisation interactive, etc.). La méthode de superposition de maillage (MSM) est une nouvelle approche de calcul par la méthode des éléments finis qui peut accommoder ces deux groupes de contraintes en même temps [37-40].

Cette méthode de calcul par éléments finis en environnement interactif repose sur la donnée des "fenêtres" auxquelles sont attachés des maillages géométriquement indépendants. Ces maillages pris séparément sont des maillages classiques d'éléments finis [39].

Dans le domaine de la C.A.O., lorsque l'objet à concevoir est constitué de composants bien identifiés qu'il s'agit seulement d'introduire et de déplacer. L'association d'un sous modèle d'éléments finis avec chaque composant permet de préserver les calculs correspondant aux sous-modèles non modifiés. Les calculs à effectuer après une modification de l'objet, sont donc considérablement réduits. Cette méthode, qui consiste donc à intégrer dans le modèle informatique de chaque composant sa représentation MSM (sous maillage, etc.), permet en plus de réaliser de nombreux pré-calculs qui accélèrent également les phases finales d'assemblage et de résolution.

La méthode MSM est conçue comme une technique d'agrégation de sous-espaces d'approximation. Elle est, en fait, indépendante de la nature des sous-espaces utilisés. Ceci revient à dire qu'elle permet de faire coexister divers types d'approximations sur chaque fenêtre et qu'elle autorise également certains types de recollement d'ouverts disjoints.

2-4-1 Présentation de la méthode de MSM :

La méthode MSM poursuit deux objectifs :

- i. Accélérer la résolution séquentielle d'une suite de problèmes numériques analogues. Chacun est caractérisé par un placement spécifique des singularités qui décrivent le problème physique.
- ii. Faciliter le couplage de méthodes d'approximation distinctes respectivement définies sur des sous domaines qui réalisent un recouvrement du domaine principal.

Pour atteindre ce double objectif, on réalise une décomposition arborescente du problème P en sous problèmes P_i les plus indépendants possibles. Cette décomposition est choisie de telle sorte :

- a. Qu'un sous-problème P_i soit associé à chaque singularité susceptible d'être déplacée.
- b. Qu'à chaque sous-problème P_i soit attaché un sous-domaine et une méthode d'approximation spécifique (voir figure (2-6)).

Comme le problème P est global, il est clair que les sous-problèmes P_i associés à une décomposition arborescente de P , ne peuvent pas être choisis de manière complètement indépendante. La méthode MSM consiste alors à séparer les données de chaque sous-problème en deux parties distinctes.

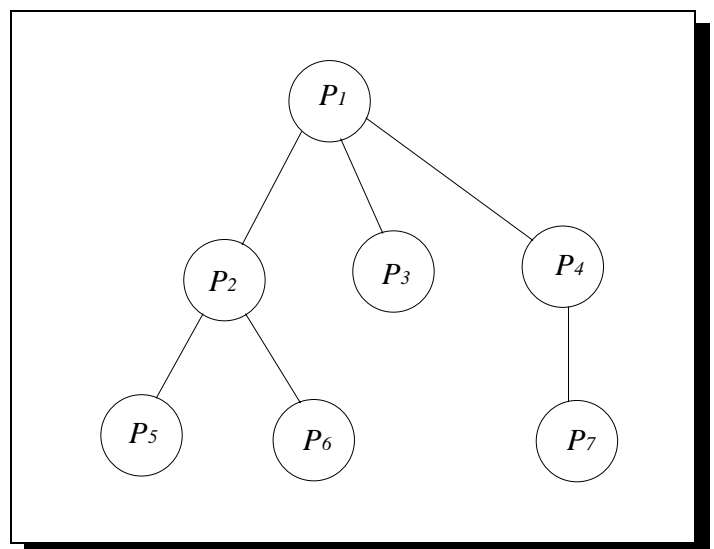


Figure 2-6 : Structure arborescente du problème P .

- La première est

indépendante du contexte dans lequel s'insère le sous-problème P_i , cette partie peut faire l'objet d'un calcul décentralisé au niveau de P_i .

- La seconde est dépendante du contexte dans lequel s'insère le sous-problème P_i , cette partie permet d'assurer la coordination entre les différents sous-problèmes qui interviennent dans la décomposition.

Les avantages de cette approche par décentralisation et coordination sont bien connus [38,41-43] ; elle permet en particulier :

- De réaliser en parallèle, une partie importante des calculs nécessaires à la résolution du problème global. De ce point de vue, la méthode MSM apparaît donc comme une méthode qui facilite la parallélisation des calculs par éléments finis.
- Lorsque le problème global doit être résolu plusieurs fois, de réutiliser les résultats partiels associés aux sous-problèmes non modifiés. De ce point de vue la méthode MSM permet de résoudre rapidement une suite de problèmes voisins et elle facilite également la constitution de bibliothèque de données associées à des sous-problèmes décentralisés d'utilisation fréquente.

2-4-2 Méthode de décomposition (fenêtrage) :

La mise en oeuvre de l'approche décentralisation-coordination dans la méthode MSM, repose sur l'utilisation de "fenêtres" [40] (l'ancien travail de l'auteur). Ces fenêtres qui sont géométriquement indépendantes, sont définies sur le domaine support. Pour illustrer cette démarche, prenons l'exemple d'une carte électronique à trois composants, figure (2-7 a), et attachons une fenêtre à chaque composant, figure (2-7 b). Nous en déduisons une structure arborescente du domaine support, figure (2-7 c). Les problèmes P_i qui composent le problème P , figure (2-7 d), sont alors construits de la manière suivante : P_i est le problème déduit de P par suppression des trois

composants, et P_2 , (resp. P_3 et P_4) est le problème P restreint à la fenêtre Ω_2 (resp. à la fenêtre Ω_3 et Ω_4). Il suffit alors de supposer que les fenêtres sont disjointes ou incluses pour en déduire une structure arborescente de décomposition du domaine Ω_1 .

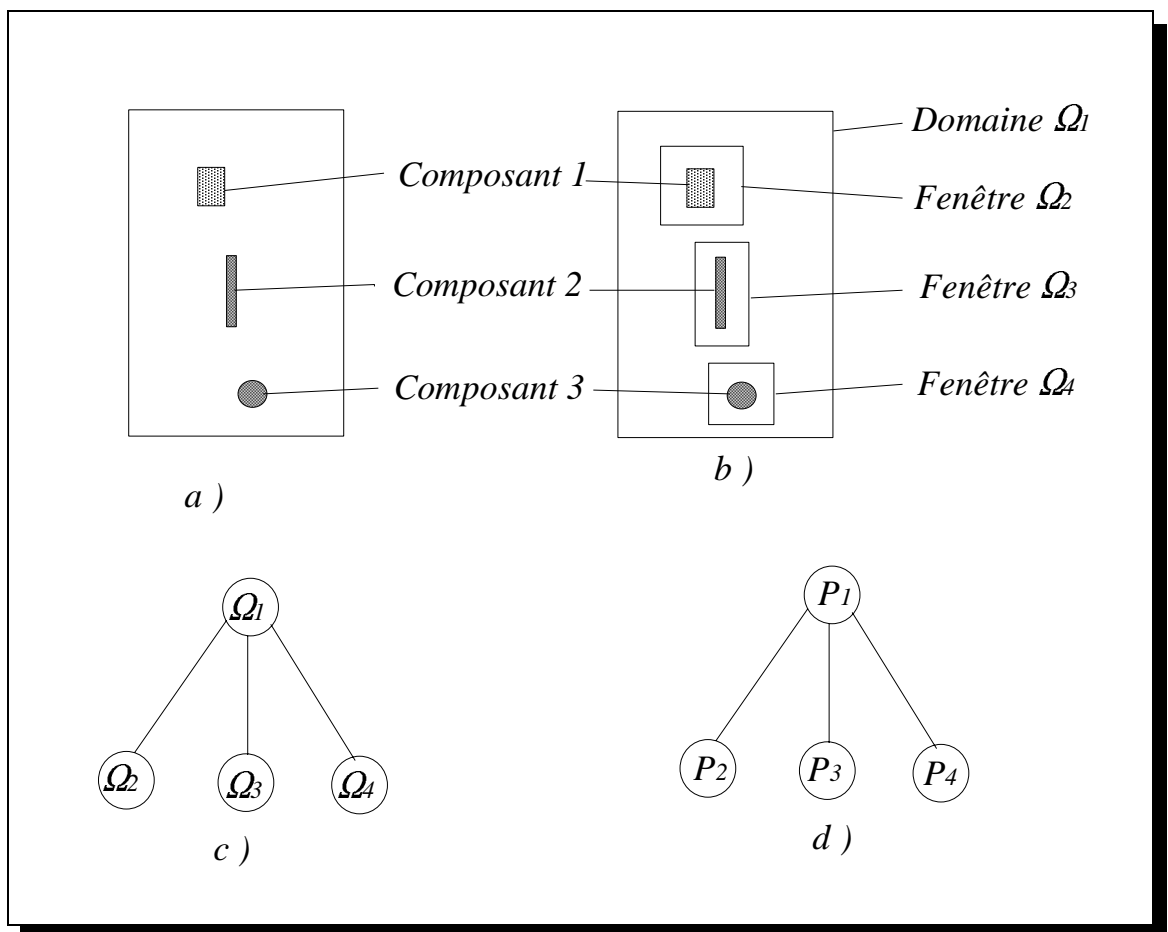


Figure 2-7 : fenêtrage d'une carte électronique à trois composants. a) carte électronique, b) fenêtrage, c) arborescence du domaine, d) arborescence du problème.

D'une manière générale, lorsque P est un problème posé sur le domaine Ω_1 , une procédure analogue à la précédente permet de définir une décomposition arborescente du problème P . Remarquons que les décompositions possibles d'un problème sont nombreuses tant au niveau du choix des fenêtres qu'au niveau de la

définition des problèmes P_i (en particulier lorsque des portions de frontières liées à la description des conditions aux limites du problème P sont recouvertes par une fenêtre). Notons également que la modification d'un des paramètres associés à un problème P_j (par exemple déplacement de la fenêtre Ω_j) n'influence que la branche de l'arbre reliant P_j à la racine. Il en résulte que l'ensemble des calculs décentralisés effectués pour résoudre les problèmes P_i sont préservés, sauf éventuellement ceux appartenant à la branche reliant P_j à la racine de l'arbre [38,40].

2-4-3 Espace d'approximation MSM :

Pour préciser le mécanisme de construction et de manipulation de l'arbre associé au traitement du problème par la méthode MSM, nous considérons maintenant le problème d'une carte électronique à un seul composant, figure (2-8).

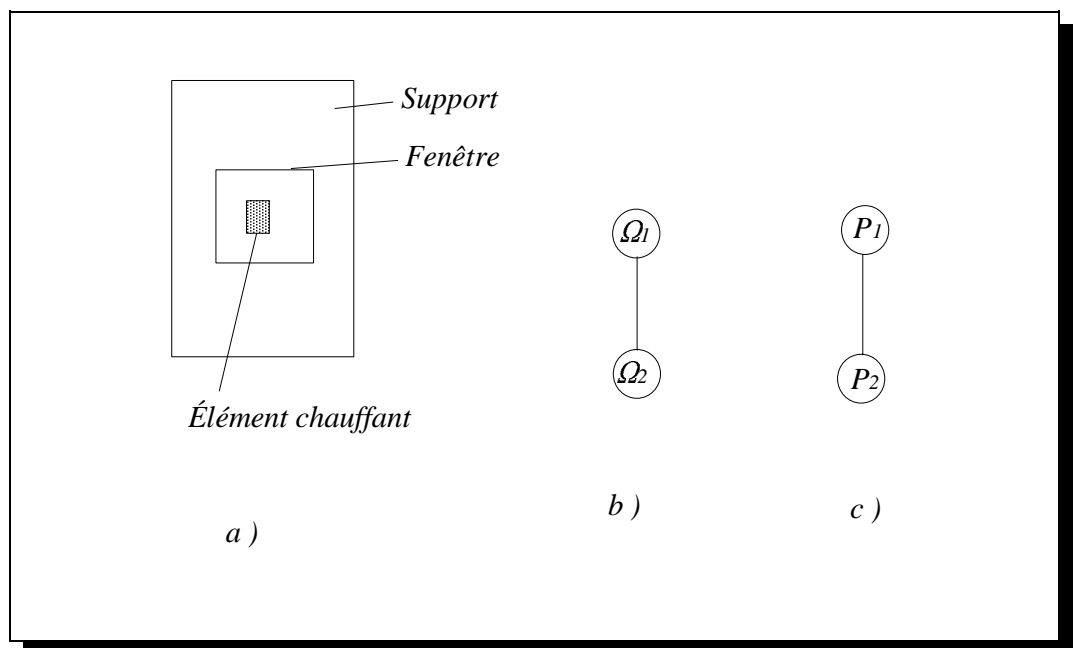


Figure 2-8 : a) Carte à un seul composant définissant le problème P et choix d'une fenêtre Ω_2 . b) Décomposition de Ω . c) Décomposition de P .

Et nous associons une fenêtre Ω_2 au composant.

La méthode de fenêtrage permet de construire une décomposition arborescente du domaine Ω et du problème P, figure (2-8 b, c). Pour résoudre ce problème par la méthode MSM, nous utilisons alors une méthode d'éléments finis classique sur chacun des domaines Ω_1 et Ω_2 . Ceci conduit à définir un maillage propre à chaque domaine.

Pris séparément, les maillages utilisés sont typiquement des maillages par éléments finis et sont traités en tant que tels. La différence essentielle avec les maillages classiques vient du fait que ces maillages se superposent et sont totalement indépendants tant de point de vue géométrique que du point de vue fonctionnel. Le maillage fin est lié au composant et couvre la zone critique de forte variation du champ de température, alors que le maillage grossier est lié au support et sert à représenter le champ de températures dans une zone où il est assez régulier. L'espace d'approximation global V_h ($h=\{h_1, h_2\}$) est défini par une technique d'agrégation fonctionnelle des espaces d'approximation V_{h_1} et V_{h_2} usuellement associés au maillage grossier et au maillage fin par la méthode des éléments finis :

$$V_h = \lambda^+ V_{h_2} + \lambda^- V_{h_1} \quad (2.8)$$

Les fonctions λ^+ et λ^- qui interviennent dans la définition de V_h sont destinées à assurer la régularité des fonctions de V_h : elles réalisent une partition de l'unité du domaine Ω :

$$\lambda^+(x) + \lambda^-(x) = 1 \quad ; x \in \Omega \quad (2.9)$$

telle que sur le domaine $(\Omega_2 - \Lambda)$, l'espace V_h se confond avec V_{h_2} et sur le $(\Omega - \Omega_2)$, l'espace se confond avec V_{h_1} . La bande de collement Λ est la zone de collement du support et de la fenêtre.

$$\lambda^+(x) \in R \quad ; x \in \Omega \quad (2.10 a)$$

$$\lambda^+(x) = 0 \quad ; x \in \Omega \text{ et } x \notin \Omega_2 \quad (2.10 \text{ b})$$

$$\lambda^+(x) = 1 \quad ; x \in \Omega_2 \text{ et } x \notin \Lambda \quad (2.10 \text{ c})$$

Il en résulte que pour tout élément $u_{hi} \in V_{hi}$ ($1 \leq i \leq 2$), la fonction u_h de V_h associée à la méthode MSM, satisfait aux relations suivantes :

$$u_h(x) = \lambda^+(x)u_{h2}(x) + \lambda^-(x)u_{h1}(x) \quad ; x \in \Omega \quad (2.11 \text{ a})$$

$$u_h(x) = u_{h1}(x) \quad ; x \in \Omega \text{ et } x \notin \Omega_2 \quad (2.11 \text{ b})$$

$$u_h(x) = u_{h2}(x) \quad ; x \in \Omega_2 \text{ et } x \notin \Lambda \quad (2.11 \text{ c})$$

La zone de recouvrement Λ des supports associés aux deux fonctionnelles λ^+u_{h1} et λ^+u_{h2} est nommée la bande de collement, figure (2-9). Notons que cette bande de collement peut être plus ou moins importante et qu'elle sera toujours choisie de façon à réduire le volume des calculs. La notion de bande de collement constitue la base de la technique d'agrégation fonctionnelle utilisée dans la méthode MSM. Pour plus d'informations se référer à [37-40].

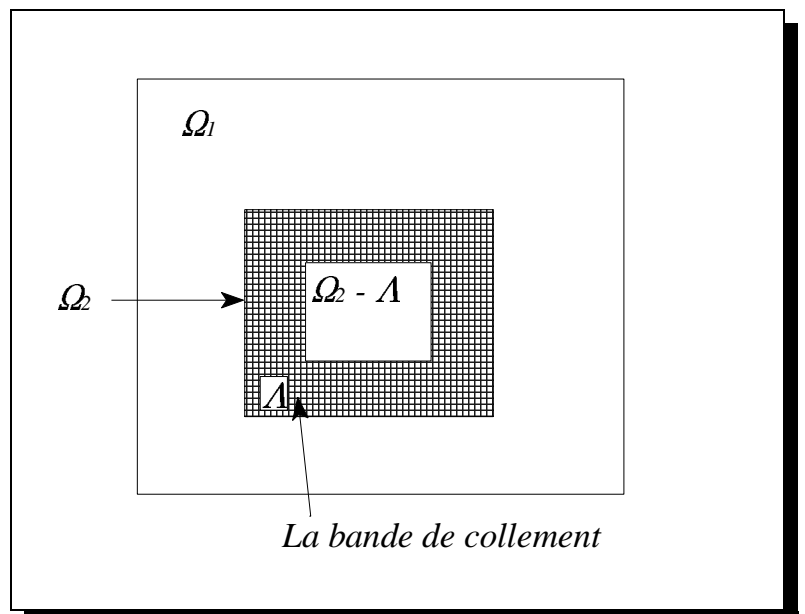


Figure 2-9 : Présentation de la bande de collement.

2-5 Méthode de quadtree/octree modifiée :

Dans cette approche, on représente le domaine de l'objet par un ensemble de carrés (ou cubes) disjoints, appelés quadrants (ou octants en 3D) qui font partie d'un arbre.

À partir de la représentation quadtree/octree modifiée[2-3,19-27], on doit alors réaliser un maillage pour la méthode éléments finis en utilisant diverses techniques de contrôle de maillage. Une première façon de contrôler un maillage est de partir d'une très bonne représentation de la frontière de l'objet, par un choix particulier :

- Du maillage frontière (taille et densité des éléments i.e. "initial boundary mesh").

et d'un certain nombre de paramètres de contrôle du maillage comme :

- Dimension maximum ou minimum des éléments.
- Le nombre de niveaux permis dans l'arbre.
- etc.

Le principe simplifié de la subdivision se décrit alors comme suit :

1. Entourer le domaine d'intérêt d'un cube (carré) appelé espace universel ou cube-mère.
2. Subdiviser le cube-mère en 8 octants (carré en 4 quadrants).
 - a. Tester pour vérifier si les octants (quadrants) sont :
 - i. Plein, et leur étiquetage en F,
 - ii. Vide, et leur étiquetage en V, ou
 - iii. Partiel, et leur étiquetage en P.
 - b. Les octants (quadrants) vides sont déclarés branches terminales et enlevés de la base de données (B.D.).
 - c. Les octants (quadrants) pleins ou partiels sont testés pour voir s'ils peuvent être subdivisés davantage en se basant sur les informations de

contrôle du maillage (prédéfinies) propres à cette région de l'espace occupé par l'octant (quadrant) :

- i. Si la subdivision est permise, l'octant (quadrant) est déclaré inconnu et son noeud dans l'arbre est étiqueté noeud de continuation et l'octant est subdivisé de façon récursive.
- ii. Octants (quadrants) partiels restant à la fin du processus (i.e. lorsque le niveau maximum permis est atteint ou si d'autres critères sont satisfaits) sont déclarés octants (quadrants) coupés.
- d. A cette étape, le modèle est encore ambigu (i.e. grossier) car la taille des octants (quadrants) est quelconque et les octants (quadrants) englobent encore une partie du domaine extérieur à l'objet considéré.

3. Classification des octants (quadrants) :

Pour lever cette ambiguïté, on doit se référer à la définition des octants (quadrants) coupés qui contiennent des portions à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet et donner une définition exacte de la topologie des entités frontières :

- a. Classifier les octants frontières en :
 - i. Octant coupé de type face si l'octant coupe une ou plusieurs faces qui ne s'intersectent pas.
 - ii. Octant coupé de type arête (edge) si une ou plusieurs arêtes rentrant ne s'intersectent pas et un minimum de deux segments de faces y sont reliés.
 - iii. Octant coupé de type sommet (vertex) si au moins un sommet avec un minimum de trois arêtes et un minimum de trois segments de face existe dans l'octant.

Cette classification se fait en fait après avoir calculé la projection ou l'intersection des octants coupés avec la surface frontière (représentée de façon paramétrique soit par des B-splines ou soit par d'autres méthodes).

Donc :

- a. Octant-surfacique : intersection de l'octant avec la surface frontière.
 - b. Octant-arête : intersection avec des arêtes.
 - c. Octant-sommet : intersection avec des sommets.
4. Insertion de l'information concernant les octants coupés dans l'arbre en commençant par les sommets (vertex), ensuite les arêtes (edge) et enfin les surfaces (face).
Compléter ensuite l'intérieur de l'octree par une traversée de l'arbre.
5. Pour le maillage en Éléments Finis basé sur la méthode d'octree/quadrants modifiée, on peut exiger que les octants (quadrants) partageant ou ayant des arêtes et faces en commun, aient une différence de niveau d'au plus un.
6. Génération du maillage E.F. dans la méthode d'octree/quadrant modifiée :
- a. définition de la topologie du maillage sur une base octant (quadrant) par octant (quadrant) :
 - i. Utiliser un algorithme de triangulation des octants (quadrants).
 - ii. Utiliser des schémas de maillage prédéfinis ou patrons de maillage (templates).
La division en E.F. de chaque octant (quadrants) dépend de sa taille.
 - b. finalisation du maillage en trois étapes :
 - i. positionnement des noeuds en utilisant des informations de connectivité.
 - ii. Redéfinition de la topologie.
 - iii. Repositionnement des noeuds.
7. Utilisation des techniques de contrôle de maillage a priori ou a posteriori pour améliorer la taille, la finesse et la densité du maillage :
- c. Contrôle de la grandeur (taille) des quadrants ou octants (au départ une

bonne modélisation de la frontière).

- d. Utilisation des tolérances variables associées avec différentes entités géométriques.
- e. Utilisation des points de raffinement dans l'espace i.e. des données de localisation des points dans l'espace où la tolérance doit être modifiée d'une quantité connue.

2-6 Conclusions :

En fait une méthode de maillage robuste combinera toutes les méthodes et essaiera de tirer profit des divers avantages propres à chacune des méthodes après avoir décomposé le domaine en plusieurs blocs.

Les problèmes majeurs de la méthode de triangulation de Delaunay sont rencontrés aux étapes suivantes :

1. Génération des points initiaux sur les frontières et à l'intérieur de l'objet.
2. Le traitement des zones dégénérées et la résolution des dégénérescences.
3. La classification des éléments pour arriver à un maillage convenable.

L'inconvénient principal du maillage par transformation isoparamétrique est que la phase de décomposition de l'objet en sous-domaines à 3 ou 4 côtés doit être effectuée par l'utilisateur. Cette décomposition dépend de la nature du problème et la connaissance des éléments finis de l'utilisateur. Donc pour un mailleur entièrement automatique, ceci n'est pas acceptable.

Il en résulte que la méthode MSM permet de réaliser des gains de temps substantiels par rapport aux méthodes usuelles lorsqu'il s'agit de résoudre une succession de problèmes voisins.

Pris séparément, les maillages de la méthode MSM sont typiquement des maillages par éléments finis classiques et sont traités en tant que tels. La différence essentielle provient du fait que le maillage principal est défini sur le domaine support, alors que les maillages secondaires sont définis sur les petites zones (i.e. fenêtres). Donc, on a besoin d'une méthode de génération de maillage, cependant, pour mailler des zones assez simples.

Dans la méthode quadtree/octree modifiée, des efforts importants doivent être effectués pour :

- Le calcul d'intersection pour le découpage et la classification des octants.
- Le calcul de la configuration des noeuds (octants/quadrants) lors des test in/out.
- Le calcul de génération du maillage intérieur selon des patrons de maillage intérieur.
- Le calcul de génération du maillage des octants (quadrants) frontières.

Dans cette thèse, nous considérons seulement la génération de maillage par la technique quadtree/octree modifiée et nous essaierons de proposer des éléments susceptibles d'améliorer ou de répondre aux questions soulevées ci-dessus.

Mais avant de présenter de façon précise l'approche suivie pour la génération de maillage par octree/quadtree, nous présentons d'abord une approche unifiée de modélisation géométrique basée entièrement sur la représentation par les limites (B. Rep.) et ce, en conformité avec les tendances actuelles en modélisation géométrique que l'on retrouve dans les nouvelles générations de logiciel CAO/FAO (PRO-ENGINEER, I-DEAS, ...).