



Isaac Newton
Matemático, físico y astrónomo inglés
(1642-1727)



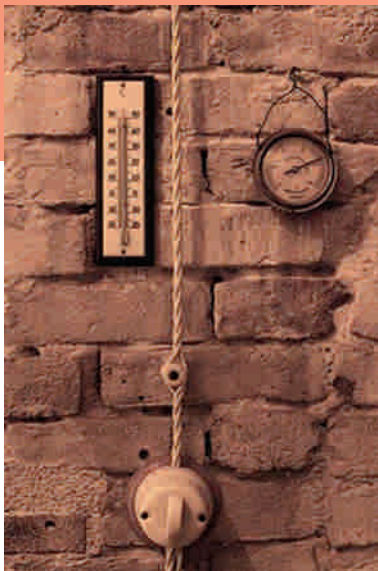
La expresión general de la función que modela la “Ley de enfriamiento de Newton” es $T = A + (T_0 - A) e^{-kt}$, siendo:

$T = T(t)$ temperatura (en grados) como función del tiempo t (en minutos en el gráfico)

$A =$ temperatura del medio ambiente

$T_0 =$ temperatura inicial del cuerpo que se enfría (agua en este caso)

$k =$ constante de enfriamiento



Funciones y sus gráficas

A continuación presentamos dos situaciones que conducen a las funciones y sus gráficas.

En algunos países como los Estados Unidos, Canadá y otros, puedes encontrar pronósticos del tiempo como el siguiente “mañana habrá una temperatura de 85 grados”. Para Venezuela esto es una temperatura muy elevada, lo que sucede es que en esos países se utiliza la escala en grados Fahrenheit y en Venezuela la de grados Centígrados, lo que corresponde a 29,44 °C.

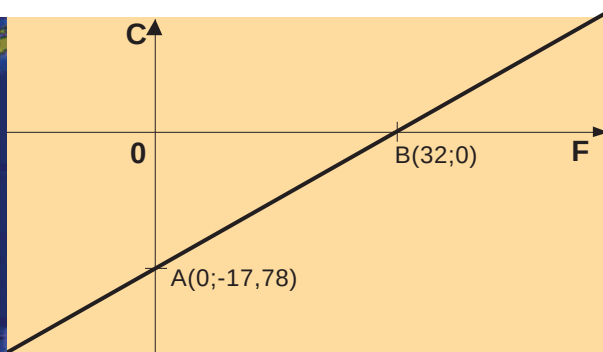
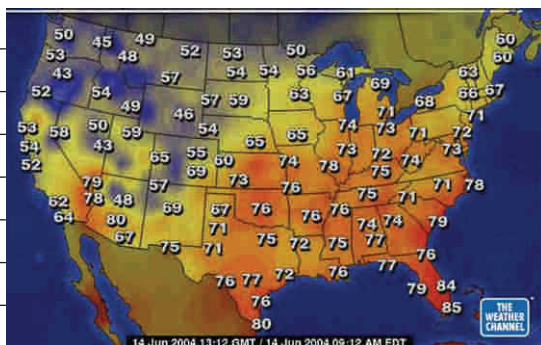
¿Cómo transformar grados Farenheit a grados centígrados?

Esto se hace mediante la fórmula $^{\circ}\text{C} = \frac{5}{9} (^{\circ}\text{F} - 32)$.

Así la temperatura de 85 °F equivale a $^{\circ}\text{C} = \frac{5}{9} (85 - 32) \approx 29,44 ^{\circ}\text{C}$.

Entonces se puede exclamar ¡Hace bastante calor! Esa relación entre los dos tipos de grados es una **función**, en donde C es la variable dependiente y se escribe en función de F que es la variable independiente. Podemos representar gráficamente esa función mediante un par de ejes de coordenadas cartesianas, F en el eje horizontal (eje de las abscisas) y C en el eje vertical (eje de las ordenadas), para lo cual construimos la siguiente tabla de valores:

$^{\circ}\text{F}$	$^{\circ}\text{C}$
0	$\frac{-160}{9} \approx -17,78$
10	$\frac{-110}{9} \approx -12,22$
32	0
60	15,56
75	23,89
80	26,67
85	29,44



La representación gráfica de esa función es una recta con pendiente $\frac{5}{9}$. Bastan dos puntos A y B para dibujarla. La gráfica muestra que es una función creciente.

RETO:

Determina **F** en función de **C** y represéntala gráficamente. Luego superpón los dos gráficos. ¿Qué observas?



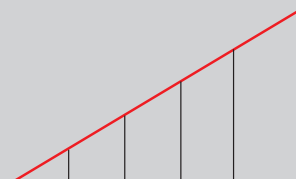
Nicole de Oresme
Artista y matemático francés
(¿1325? -1382)

¿SABÍAS QUE...?

Nicole de Oresme, uno de los “Maestros de París”, consideró la representación gráfica velocidad versus tiempo para lo cual dibujó un diagrama para un móvil con aceleración constante.

Llegar a la definición actual de función fue un proceso de varios siglos. Las primeras definiciones de función la hicieron los ingleses James Gregory (1638-1675) e Isaac Newton.

Posteriormente los suizos Johan Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783) así como otros matemáticos, también dieron algunas definiciones. Hasta que finalmente, en el siglo XIX, se llegó a la definición moderna de función dada por el matemático alemán Peter Dirichlet (1805-1859) quien, en 1837, consideró una función como una correspondencia entre variables. Dirichlet escribió: *Si una variable y está relacionada con otra variable x de manera tal que a cualquier valor de x corresponde un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable x.*



Johann Peter Dirichlet
Matemático alemán
(1805-1859)

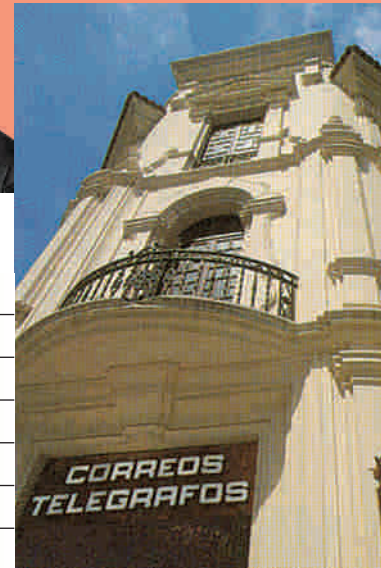
El ser matemático no fue más el número: fue la ley de variación, la función. La matemática no estaba únicamente enriquecida de nuevos métodos, ella estaba transformada en su objeto.

Jacques Hadamard
Matemático francés
(1865-1963)



La tabla siguiente presenta las tarifas postales nacionales para cartas (vigentes para marzo 2004):

Peso en gramos (g)		Costo (Bs.)
De 0	hasta 1	120
Más de 1	hasta 20	300
Más de 20	hasta 50	400
Más de 50	hasta 100	450
Más de 100	hasta 500	1 000
Más de 500	hasta 1 000	1 800

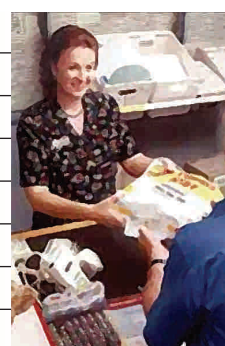


Cada 500 g adicionales o fracción, hasta 2 kg, cuesta Bs. 550.

Observa que en este caso el costo C de una carta (cantidad de bolívares) es una función del peso P (en gramos), esto es $C=f(P)$. Esta función no tiene una fórmula única para expresarla pues está definida por trozos o partes. Según la tabla anterior se tiene:

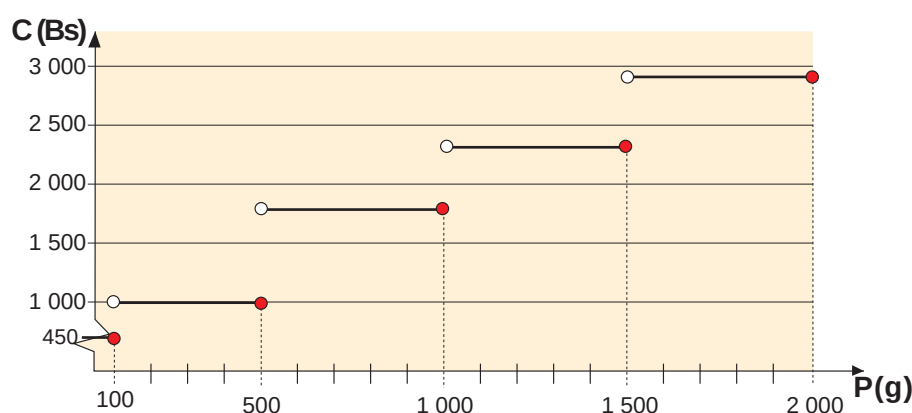
$C=120$ si $0 < P \leq 1$, $C=300$ si $1 < P \leq 20$, etc. Se acostumbra a escribir tales funciones como sigue:

$C=$	120	si	$0 < P \leq 1$
	300	si	$1 < P \leq 20$
	400	si	$20 < P \leq 50$
	450	si	$50 < P \leq 100$
	1000	si	$100 < P \leq 500$
	1 800	si	$500 < P \leq 1 000$
	2 350	si	$1 000 < P \leq 1 500$
	2 900	si	$1 500 < P \leq 2 000$



El dominio de esa función es el intervalo $0 < P \leq 2 000$

La gráfica de esta función presenta “saltos” (no es continua) y es la dibujada a continuación (escalas distintas en los ejes de coordenadas) para pesos mayores que 50 g. Observa que los valores de P oscilan entre 0 y 2 000.



Los puntos marcados en rojo son los extremos derechos de los intervalos considerados y estos puntos pertenecen a la gráfica. En cambio, los marcados en blanco no pertenecen a la gráfica. La gráfica de esa función es escalonada (constante por trozos) y es un tipo de función bastante usual en muchas situaciones donde las tarifas, en la moneda nacional, se calculan por intervalos.

Las dos situaciones antes presentadas tienen en común varias características que se resumen en la noción de función como una correspondencia entre dos conjuntos, a cada elemento x de un conjunto A se hace corresponder un único elemento y de un conjunto B . El conjunto A se denomina dominio de la función y B es el conjunto donde la función toma sus valores. El elemento y es la imagen del elemento x . De manera general se denota una función mediante $y=f(x)$, $y=g(x)$, $u=h(t)$ u otras letras según como resulte conveniente.

Los ejemplos dados anteriormente son funciones reales pues la variable dependiente toma valores reales, y son funciones de una variable real puesto que la variable independiente también toma valores reales; se dice que son funciones reales de una variable real. Existen otros tipos de funciones que están definidas entre conjuntos que no son números reales.



Leyendo gráficos y analizando

Una vez que se tiene una función, bien sea en forma analítica (una fórmula $y=f(x)$), mediante una gráfica o una tabla de valores numéricos de la función, es necesario conocer las propiedades de la misma, es decir, determinar cuáles son sus características.

Ya mencionamos algunas propiedades de las funciones: crecimiento, función “escalonada” que presenta “saltos” (no es continua). Presentaremos a continuación, de forma gráfica, algunos ejemplos.

Demanda y oferta de un bien

En un mercado de competencia, la cantidad comprada de un determinado bien o servicio depende del precio del mismo. Esta relación entre el precio unitario P del producto y la cantidad demandada o comprada Q , se denomina ecuación de la demanda y su representación gráfica es la curva de la demanda C_D .

Análogamente, la cantidad de un bien o de un servicio que los productores colocan en el mercado para su venta, es la oferta de ese producto y la misma depende del precio. Esta relación entre el precio unitario P del producto y la cantidad ofrecida S se denomina ecuación de la oferta y su representación gráfica es la curva de la oferta C_O . Estas ecuaciones son válidas para un período de tiempo determinado.

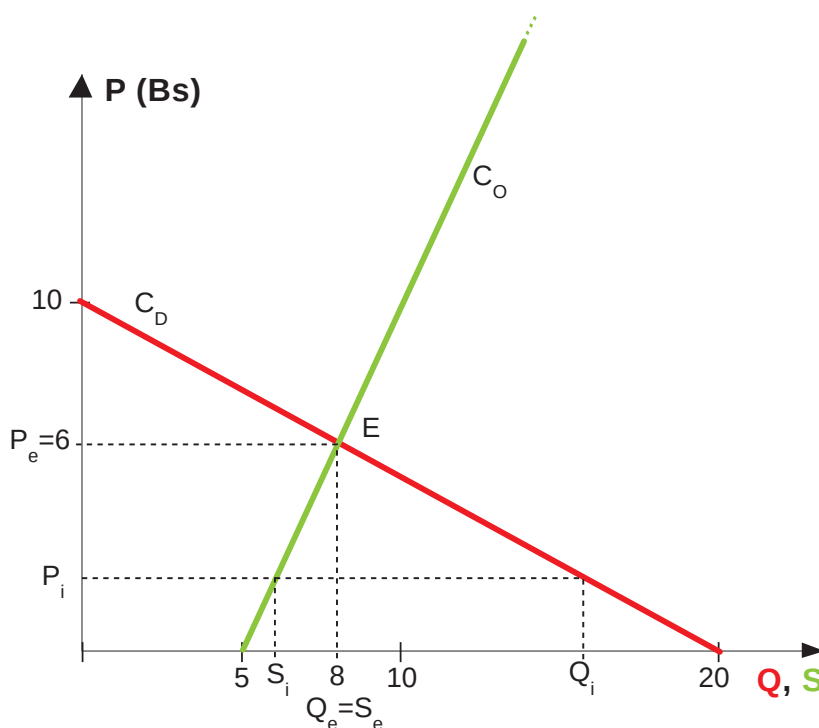
En economía es usual representar el precio P en el eje de las ordenadas y las cantidades demandadas Q u ofrecidas S en el eje de las abscisas.

La gráfica en rojo C_D representa la relación entre la demanda y el precio, dada por la ecuación $Q+2P-20=0$.

La gráfica en verde C_O representa la relación entre la oferta y el precio de ese mismo producto, dada por la ecuación $2S-P-10=0$. Observemos las gráficas.

Demanda: Es “lineal” y se representa por un segmento pues $P \geq 0$ y $Q \geq 0$. Es decreciente, lo cual se debe a que los consumidores tienden a comprar cantidades menores cuando los precios aumentan (a mayor precio hay menor demanda).

Oferta: Es “lineal” y se representa por una semirrecta $P \geq 0$ y $Q \geq 0$. Es creciente, lo cual se debe a que el incentivo de mayores precios hace que los productores aumenten la oferta en el mercado a medida que el precio aumenta (a mayor precio hay mayor oferta).



Adam Smith
Economista inglés
(1723-1790)

¿SABÍAS QUE...?

En una economía de mercado donde hay la libre acción de los productores y de los consumidores, cada uno con sus propios intereses, pareciera que sin haber un mecanismo regulador de la economía se produciría “caos”. El economista inglés Adam Smith fundador de la economía clásica, en su obra “Investigaciones sobre la naturaleza y las causas de la riqueza de las naciones” (1776), afirmó que dicha economía tiende a un “equilibrio” explicable por las leyes de la demanda y la oferta. Smith fue un defensor del *laissez faire* (expresión en francés que significa “dejar hacer”), es decir, de la no intervención del Estado en los asuntos de la economía.

tablas de valores

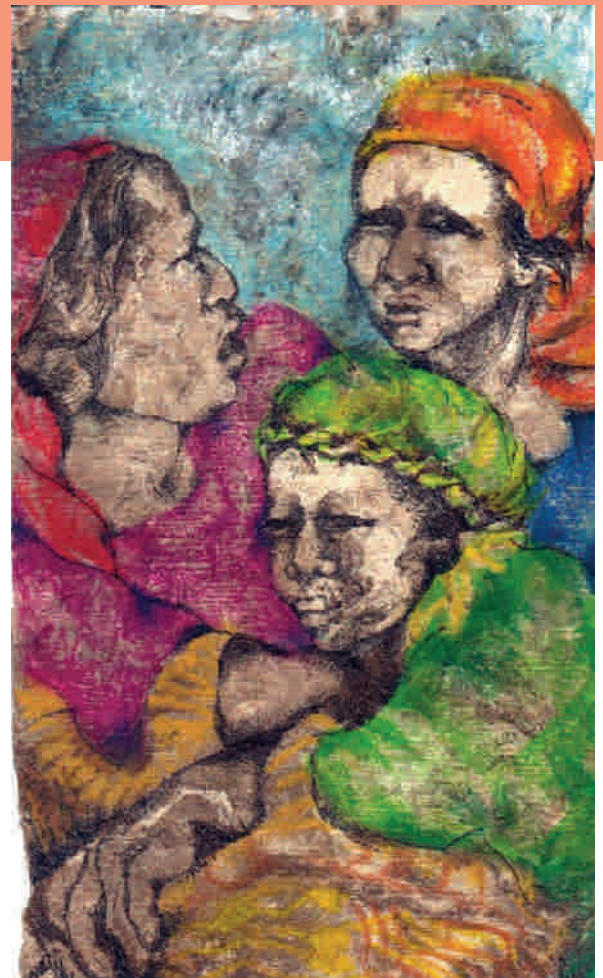
Las dos gráficas se cortan en el punto E denominado el punto de equilibrio. Este es el punto en donde se igualan la demanda y la oferta ($Q_e = S_e$) y el precio en ese punto es el precio de equilibrio P_e . En el caso de esas ecuaciones esto se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} Q_e + 2P_e - 20 = 0 \\ 2S_e - P_e - 10 = 0 \end{cases}$$

sabiendo que $Q_e = S_e$. Resulta $Q_e = S_e = 8$ (unidades del producto), $P_e = 6$ Bs.

Todavía puedes obtener otras conclusiones de esos gráficos. Por ejemplo, si tenemos un precio P_i menor que el precio de equilibrio, entonces la cantidad demandada Q_i es mayor que la cantidad ofrecida S_i y esto genera una situación de escasez en el mercado.

Los gráficos anteriores responden a **modelos lineales** de la demanda y la oferta. Pero también se podrían utilizar modelos no lineales.

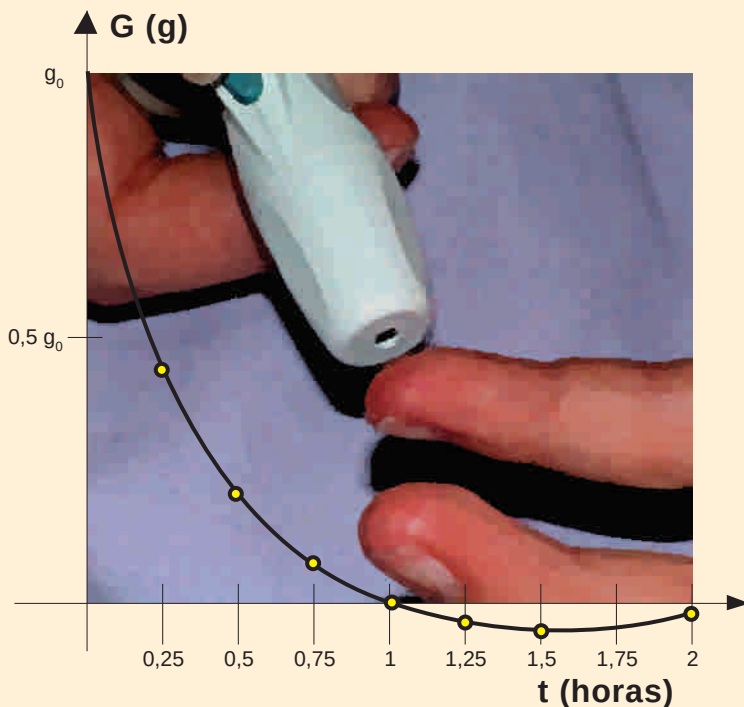


RETO:

Si P_s es un precio mayor que el precio de equilibrio P_e ¿qué sucede con la oferta y la demanda?

Observa las gráficas siguientes donde anotamos algunas de sus propiedades:

Test de tolerancia a la glucosa

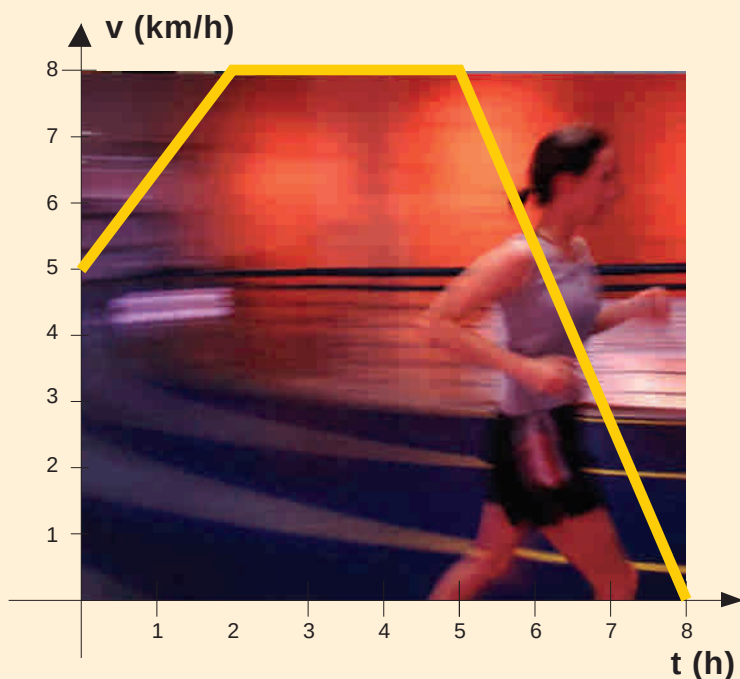


Esta es una gráfica que da la concentración de glucosa G (gramos) en función del tiempo t (horas) y está relacionada con el test de tolerancia a la glucosa (test para diabetes). En el modelo matemático descrito por la gráfica, g_0 indica la cantidad total de glucosa inyectada y se supone que en un intervalo pequeño de tiempo la concentración de insulina permanece nula. El tiempo en que la concentración de glucosa regresa a lo normal ($G=0$) para una persona sana, es aproximadamente una hora. Observando la gráfica se trata de una función decreciente, con valores positivos en el intervalo $0 \leq t < 1$ y con valores negativos en el intervalo $1 < t \leq 2$. En $t=1$ la función cambia de signo. Existen algunos refinamientos de este modelo matemático.

Fuente: G. Fulford, P. Forester, A. Jones. *Modelling with differential and difference equations* (1997). Australian Mathematical Society. Lecture Series 10, Cambridge University Press.

Leyendo gráficos y analizando

Movimiento de un corredor



Este gráfico se refiere al movimiento de un corredor, siendo v la velocidad (km/h) y t el tiempo (h).

¿Qué información podemos extraer de este gráfico?

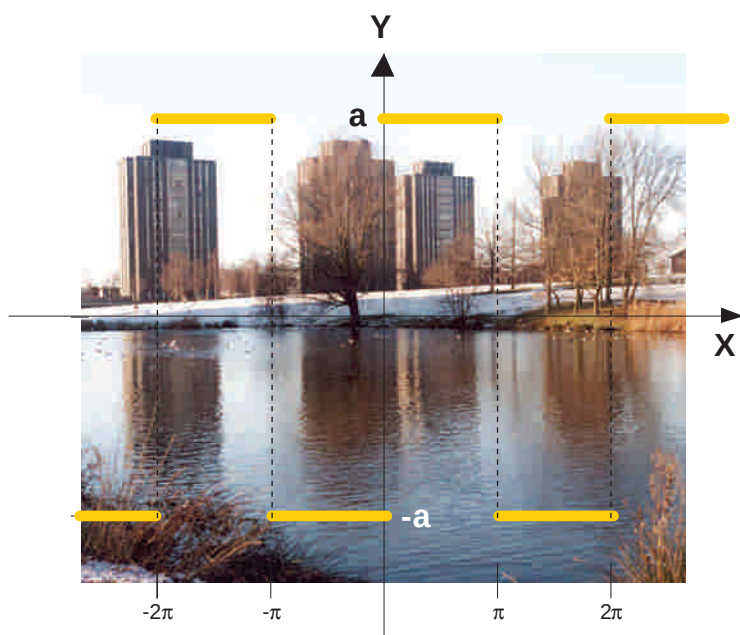
He aquí algunas respuestas:

- a) La velocidad inicial es $v_0 = 5$ km/h.
- b) El corredor parte con esa velocidad inicial y luego acelera de tal manera que la velocidad se incrementa proporcionalmente al tiempo. Por lo tanto hay una aceleración constante positiva igual a $3/2$ (km/h^2) $= 1,5$ km/h^2 .
- c) Al cabo de 2 horas, pasa a una velocidad constante igual a 8 km/h y así sigue durante 3 horas.

RETO:

¿Cómo es el movimiento en las 3 horas posteriores?

Onda cuadrada



Este gráfico se refiere a una función y tal que: al aumentar o disminuir la variable independiente en 2π , entonces se repiten los valores de la función.

Tales funciones [$y = f(x)$] son periódicas con período 2π , lo que se expresa mediante $f(x \pm 2\pi) = f(x)$ cualquiera que sea el valor de x .

La función del gráfico se conoce con el nombre de “onda cuadrada”.

Las funciones periódicas intervienen en muchos procesos (llamados periódicos) y ese tipo de funciones es utilizado en señales, descripción de movimientos....



Jean Baptiste Joseph Fourier
(1768-1830)

¿SABÍAS QUE...?

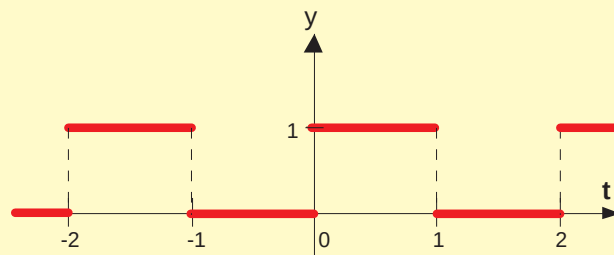
En 1822 el gran matemático, egiptólogo y administrador francés Jean Baptiste Joseph Fourier, colaborador de Napoleón Bonaparte, con quien viajó a Egipto, publicó un trabajo titulado “Teoría analítica del calor” que tuvo gran influencia sobre la teoría matemática de la conducción del calor. Fue una obra maestra no sólo por este nuevo campo que exploraba, sino porque en el mismo introdujo las series infinitas de funciones trigonométricas (cosenos y senos) lo que se hizo famoso posteriormente como las **Series de Fourier**. Fue prefecto de Isère (Francia) en donde hay una universidad que lleva su nombre.

tablas de valores



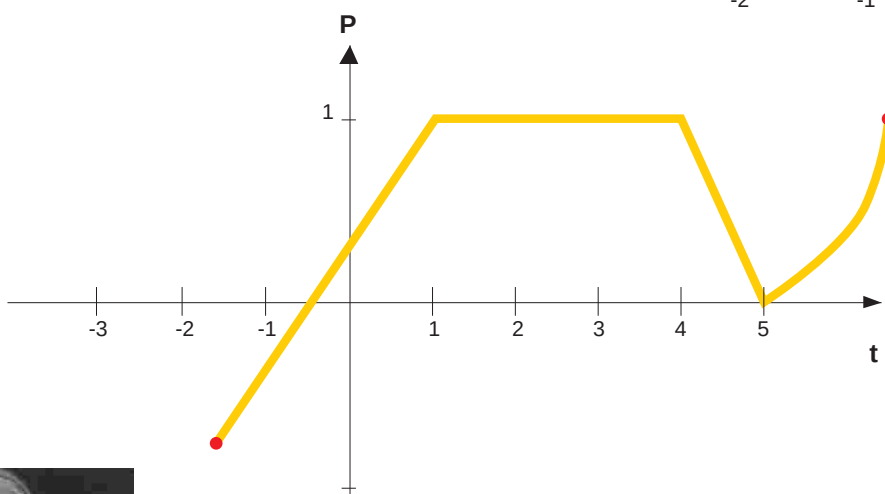
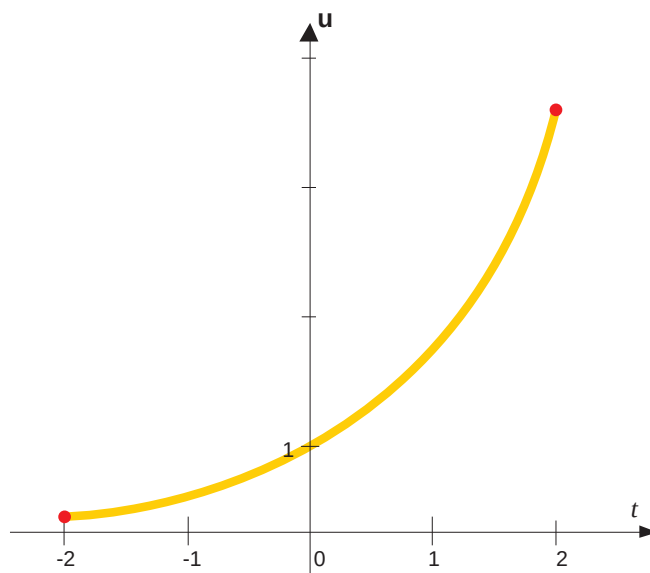
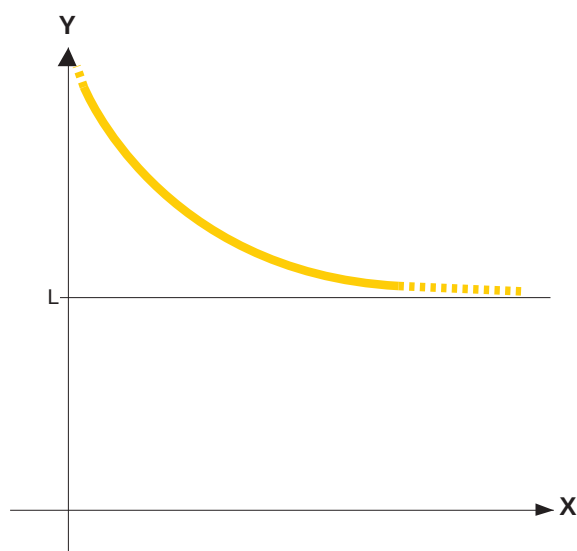
Interesante

En ingeniería eléctrica se usa este tipo de onda cuadrada como modelo del flujo eléctrico cuando un interruptor se abre y se cierra repetidamente.



RETO:

Los gráficos siguientes corresponden a funciones ¿Cuáles propiedades de dichas funciones se deducen de estos gráficos?



Johann Sebastian Bach
(1685-1750)

¿SABÍAS QUE...?

Bach, en varias de sus composiciones, utiliza el contrapunto con muchos instrumentos a la vez para lograr sus magistrales fugas (un recurso musical en el que se expone un tema y las otras voces lo van imitando), algo que requiere una precisión a veces incluso matemática. Algunas personas afirman que cualquier obra de Bach puede representarse con una función matemática.



Tasas de variación o de cambio

Si tenemos una variable y que depende de otra variable independiente x , esto es una función $y=f(x)$, es necesario estudiar las propiedades de esa dependencia y conocer cómo cambian los valores de la función a medida que la variable independiente también cambia. Este cambio o variación se mide a través de las tasas de cambio, para lo cual presentamos dos situaciones que conducen a definir las: dinámica de poblaciones y movimiento de un automóvil (ver fascículo 10).

Dinámica de poblaciones

Los dos últimos censos de población de Venezuela arrojaron los siguientes datos: censo de 1990, 18 105 265 habitantes y censo de 2001, 24 920 902 habitantes.

La población P de Venezuela cambia con el tiempo t , esto es $P = F(t)$, t en años.

De esos datos obtenemos:



Proyecto Fundación Polar para el apoyo a productoras de erizos en la Isla de Margarita. Fotografías: Armando Hernández

- **La variación total o absoluta** de población en ese lapso de tiempo fue $F(2001) - F(1990) = 24\,920\,902 - 18\,105\,265 = 6\,815\,637$ (habitantes). Esto es, la población en Venezuela en esos 11 años aumentó en 6 815 637 habitantes.

- Debemos analizar con qué rapidez cambió esa población y para ello es preciso tomar en cuenta el tiempo transcurrido. Así, el cociente $\frac{F(2001) - F(1990)}{2001 - 1990} \frac{\text{hab}}{\text{año}} = 619\,603,363\,6 \frac{\text{hab}}{\text{año}}$ da esa rapidez de cambio.

Luego, entre 1990 y 2001 la población aumentó, en promedio, 619 603 habitantes por año. Ese cociente es la **tasa media de cambio o de variación** de $P = F(t)$, en ese período.

- Otra tasa de cambio o de variación se refiere a considerar el cambio por año y por habitante, para lo que se toma en cuenta la población inicial del período y el tiempo transcurrido:

$$\frac{F(2001) - F(1990)}{F(1990)(2001 - 1990)} = 0,034\,222\,275.$$

Lo cual indica que entre 1990 y 2001 la población aumentó, en promedio, 0,034 222 275 por año y por habitante. Ese cociente da la **tasa media de variación relativa** en ese período y es costumbre expresarla en porcentaje multiplicándola por 100, resultando 3,42% la tasa de crecimiento promedio de la población de Venezuela en el lapso 1990-2001.

Hay otras tasas de cambio o de variación de una función.

RETOS:

- 1- La población mundial en el año 1990 fue $5\,284,68 \times 10^6$ habitantes y en el año 2000 fue de $6\,134 \times 10^6$ habitantes ¿Cómo ha variado la población en el período 1990-2000?
- 2- La presión atmosférica al nivel del mar es igual a $1,013 \times 10^5$ pascales y a 5 km de altura (aproximadamente la altura del Pico Bolívar) es $0,540 \times 10^5$ pascales. ¿Cuánto es la tasa media de variación relativa en el intervalo 0m - 5 000m?

