

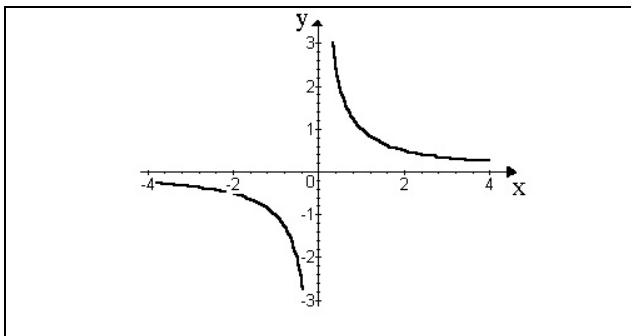
TEMA II FUNCIÓN LOGARITMO Y EXPONENCIAL

En el tema I del curso, se estudiaron las integrales definidas e indefinidas de diversos tipos de funciones. Una de las primeras fórmulas de integración fue

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

la cual sólo se demostró para valores racionales de n , y por supuesto no es aplicable cuando $n = -1$, debido a que el cociente $\frac{1}{n+1}$ no está definido. Si la función $\frac{1}{x}$ no fuera tan común en diversas ramas de la matemática, quizá se omitiría su estudio, y cuando fuese necesario integrarla se recurriría a métodos numéricos para obtener valores aproximados; sin embargo, la función $\frac{1}{x}$ es bastante común, y su integral define una función de gran importancia, la cual recibe el nombre de *función logaritmo natural*.

La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua excepto en $x = 0$, y su gráfica se muestra a continuación



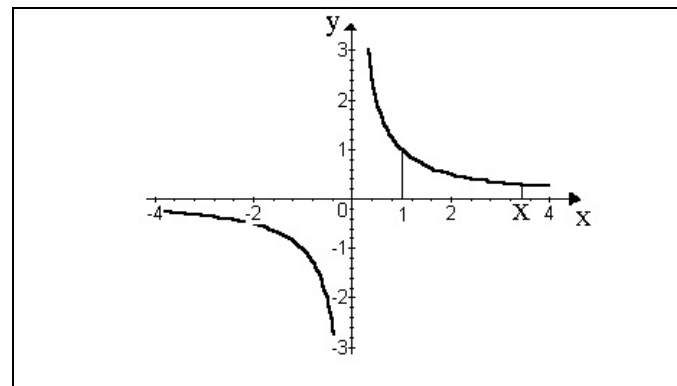
Para obtener el área bajo la curva y por arriba del eje x , se define una función cuya derivada es $\frac{1}{x}$.

Definición

La función logaritmo natural, para $x > 0$, se define como

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

La interpretación gráfica de $\ln x$ como un área se muestra en la siguiente figura.



La restricción $x > 0$ en la definición del logaritmo natural se debe a que la función $\frac{1}{x}$ no está definida en $x = 0$.

Por otro lado, del teorema fundamental del cálculo y de la definición de la función logaritmo natural, se tiene el siguiente teorema.

Teorema

La derivada de la función $\ln x$ es $\frac{1}{x}$, esto es,

$$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

o bien, de manera general si u es una función de x

$$\frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}, \quad u > 0$$

Es decir, $\ln x$ es una antiderivada de $\frac{1}{x}$.

El nombre de logaritmo, para la función \ln , se debe a que satisface las mismas propiedades de los logaritmos en diferentes bases estudiados por el álgebra.

Teorema

Si a y b son números reales positivos y t es un número racional. Entonces:

- 1) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- 2) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- 3) $\ln a^t = t \ln a$

Demostración de (1)

Definase una función $F(x) = \ln ax$ y $G(x) = \ln x$, entonces:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dG}{dx} = \frac{1}{x}$$

por lo que

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dG}{dx}$$

integrando en ambos lados

$$F(x) = G(x) + c$$

donde c es una constante, y puesto que

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0,$$

se tiene que

$$F(1) = G(1) + c$$

$$\Rightarrow \ln a = 0 + c$$

de donde $c = \ln a$, y sustituyendo se tiene

$$F(x) = G(x) + \ln a$$

Finalmente, si $x = b$, entonces

$$F(b) = G(b) + \ln a$$

$$\ln ab = \ln b + \ln a = \ln a + \ln b$$



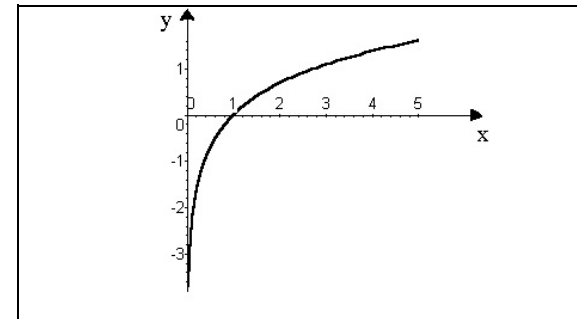
La función $\ln x$, $x > 0$, tiene una pendiente positiva, puesto que

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} > 0, \quad x > 0$$

y tiene una concavidad negativa

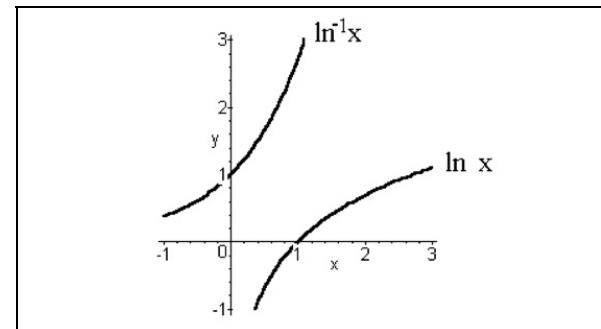
$$\frac{d^2}{dx^2} \ln x = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad x > 0$$

además, $\ln(1) = 0$, $\ln x < 0$ cuando $0 < x < 1$, $\ln x > 0$ cuando $x > 1$, lo que lleva a la siguiente gráfica



Función inversa de $\ln x$

Al observar cuidadosamente la gráfica de $\ln x$, es fácil darse cuenta que es inyectiva, por lo cual deberá tener función inversa.



Gráfica de la función $\ln x$

Función Exponencial

Por su importancia, la función inversa del logaritmo natural tiene nombre propio, y se llama función exponencial.

Definición

$$y = \exp x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \ln y$$

Debe observarse que, $\ln x$ sólo está definido para $x > 0$ y su recorrido son todos los reales, por lo que el dominio de $\exp x$ son todos los reales y su recorrido los reales no negativos, además

$$\begin{aligned} \ln(\exp x) &= x \quad \forall x \\ \exp(\ln x) &= x \quad x > 0 \end{aligned}$$

El número e

En particular, el valor de $\exp(1)$, es de tal importancia en las matemáticas que se denota por el símbolo e , en honor de L. Euler, así:

$$e = \exp(1) \approx 2.718281828459 \dots$$

El número e es irracional, y puesto que

$$\ln(\exp x) = x \quad \forall x$$

entonces $\ln(\exp 1) = 1$, es decir $\ln e = 1$. Utilizando las propiedades de la función logaritmo natural, se tiene que para cualquier real x ,

$$\ln e^x = x \ln e = x,$$

y de la definición de la función exponencial

$$e^x = \exp x$$

Cabe mencionar que es mucho más común utilizar la notación e^x , en lugar de $\exp x$.

La función e^x sigue las leyes de los exponentes.

Teorema

Sean a y b números reales cualquiera, y t un número racional. Entonces

$$\begin{array}{ll} 1) & e^0 = 1 \\ 2) & e^1 = e \\ 3) & e^a e^b = e^{a+b} \end{array} \quad \begin{array}{ll} 4) & \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \\ 5) & (e^a)^t = e^{at} \\ 6) & e^{-a} = \frac{1}{e^a} \end{array}$$

El número e puede ser expresado (o definido) como un límite

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}}$$

o bien

$$e = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$$

El valor aproximado de e es, $e \approx 2.718281828 \dots$

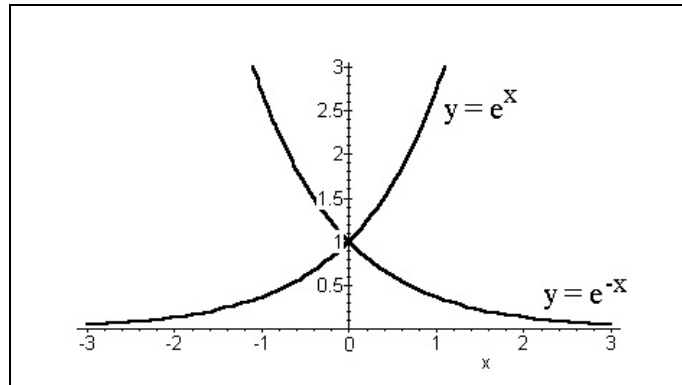
Logaritmo común y exponencial con base a

Los conocimientos adquiridos de la función e^x permiten definir la función exponencial con base a , como

$$f(x) = a^x \quad a > 0 \quad \text{y} \quad a \neq 1$$

si $a > 0$ el comportamiento es similar a e^x

si $0 < a < 1$ el comportamiento es similar a e^{-x} .



Cuando la base a es positiva y distinta de uno, entonces admite inversa, la cual recibe el nombre de función logarítmica con base a .

Una característica importante de la función exponencial es el hecho de que permite generalizar la operación de potenciación a todos los reales (en álgebra sólo se había definido para potencias racionales), convirtiéndola de una función discreta en una continua. En realidad no es la misma función, sino una función continua que coincide con la discreta en todos los puntos de la discreta, y que tiene las mismas propiedades que tiene la función discreta.

Definición
 $y = \log_a x$ si y sólo si $x = a^y$

Las leyes formuladas para las funciones exponencial y logaritmo natural son válidas para la función exponencial con base a y para la función logarítmica con base a .

Cambio de base

Utilizando las propiedades de los logaritmos, es posible cambiar la base de un logaritmo expresado $\log_b x$ en términos de $\log_a x$, para cualquier real positivo $b \neq 1$. De la definición de logaritmo,

$$y = \log_b x, \quad b^y = x$$

aplicando logaritmos de base a en ambos lados de la última ecuación

$$\log_a b^y = \log_a x$$

de donde

$$y \log_a b = \log_a x$$

resolviendo para y se tienen las siguientes fórmulas

Fórmulas para cambio de base

a) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ b) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

Por ejemplo, si $a = e$ y $b = 5$, entonces se tiene que:

$$\log_5 x = \frac{\ln x}{\ln 5} \quad \log_5 e = \frac{1}{\ln 5}$$

Es decir, el logaritmo natural puede escribirse en términos del logaritmo común y viceversa.

Derivación e integración de las funciones logaritmo natural y exponencial

Como se observó, la función $\ln x$ se define para obtener la primitiva de $\frac{1}{x}$, por lo que:

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c$$

Ejemplo

Obtener la integral indefinida de la función $f(x) = \tan x$.

Resolución

$I = \int \tan x dx$, pero $\tan x = \frac{\sen x}{\cos x}$, por lo que $I = \int \frac{\sen x}{\cos x} dx$, se

observa que si $u = \cos x$, entonces $du = -\operatorname{sen} x \, dx$, por lo que completando la diferencial $I = -\int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx$ y se tiene la forma $\int \frac{1}{u} \, du$
 $I = -\ln |\cos x| + c$
 que puede escribirse como $I = \ln |(\cos x)^{-1}| = \ln |\sec x|$
 es decir $\int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + c$

Ejemplo

Obtener:

$$\int \frac{x - 1}{3x^2 - 6x + 8} \, dx$$

Resolución

$I = \int \frac{x - 1}{3x^2 - 6x + 8} \, dx$, al hacer el cambio de variable $u = 3x^2 - 6x + 8$, se observa que $du = 6x - 6$, por lo que para obtener la forma $\frac{du}{u}$ debe completarse la diferencial, teniéndose:

$$I = \frac{1}{6} \int \frac{6x - 6}{3x^2 - 6x + 8} \, dx = \frac{1}{6} \ln |3x^2 - 6x + 8| + c$$

Retomando la definición de la función logaritmo natural, y utilizando el teorema fundamental del cálculo se tiene que, si u es una función de x :

$$\frac{d}{dx} (\ln|u|) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

Ejemplo

Obtener la derivada de la función

$$y = \ln(x^2 + 1)^5$$

Resolución

Al utilizar las propiedades del logaritmo se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [\ln(x^2 + 1)^5] = 5 \frac{d}{dx} [\ln(x^2 + 1)]$$

Utilizando el cambio de variable $u = x^2 + 1$, $\frac{du}{dx} = 2x$, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = 5 \frac{1}{x^2 + 1} (2x) = \frac{10x}{x^2 + 1}$$

Ejemplo

Obtener $\frac{d}{dx} [\ln(x \ln x)]$

Resolución

Considerando $u = x \ln x$, entonces se tiene la forma $\frac{d}{dx} (\ln u)$

$$\frac{d}{dx} [\ln(x \ln x)] = \frac{1}{x \ln x} \frac{d}{dx} (x \ln x)$$

Para obtener $\frac{d}{dx} (x \ln x)$ se utiliza la fórmula de derivación de un producto,

por lo que

$$\frac{d}{dx} (x \ln x) = x \left(\frac{1}{x} \right) + \ln x = 1 + \ln x$$

finalmente

$$\frac{d}{dx} [\ln(x \ln x)] = \frac{1 + \ln x}{x \ln x}$$

La derivada de la función $y = e^x$ se obtiene con facilidad al recordar que, si $y = e^x$, entonces $\ln y = x$, y derivando implícitamente se tiene $\frac{d}{dx} (\ln y) = \frac{d}{dx} (x)$, $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1$, de donde $\frac{dy}{dx} = y$, puesto que $y = e^x$ se

obtiene $\frac{d}{dx} e^x = e^x$.

Es importante observar que la función e^x tiene la propiedad de ser igual a su derivada. En general, si $u = u(x)$ y aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

Ejemplo

Determinar la derivada de $y = x e^{3x^2}$

Resolución

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x e^{3x^2})$ aplicando la expresión para derivar un producto de funciones.

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{d}{dx} (e^{3x^2}) + e^{3x^2} (1)$$

y puesto que $\frac{d}{dx} (e^{3x^2})$ se ajusta a la forma e^u , con $u = 3x^2$, entonces

$$\frac{d}{dx} (e^{3x^2}) = 6x e^{3x^2}, \quad \text{f i n a l m e n t e}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 e^{3x^2} + e^{3x^2} = e^{3x^2} (6x^2 + 1)$$

A partir de la fórmula de derivación de la función exponencial se obtiene la fórmula de integración, si $\frac{d}{dx} (e^x) = e^x$, entonces $\int e^x dx = e^x + c$, en general:

$$\int e^u du = e^u + c$$

Ejemplo

Calcular $\int x e^{-2x^2+4} dx$

Resolución

$I = \int x e^{-2x^2+4} dx$, si $u = -2x^2 + 4 \Rightarrow du = -4x$

por lo que completando la diferencial se tiene

$$I = -\frac{1}{4} \int -4x e^{-2x^2+4} dx = -\frac{1}{4} e^{-2x^2+4} + c$$

Derivada de una función elevada a un exponente real

En el curso de Cálculo I se estudió la derivada de una función elevada a un exponente natural, de hecho, se generalizó para un exponente real; sin embargo, es hasta esta parte del curso de Cálculo II, que se puede demostrar la validez de la expresión:

$$\frac{d}{dx} (x^r) = r x^{r-1}$$

Considérese la función $y = x^r$ donde r es un número real, aplicando el logaritmo natural en ambos lados se tiene:

$$\ln y = \ln x^r$$

aplicando propiedades

$$\ln y = r \ln x$$

derivando implícitamente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r}{x} y$$

pero $y = x^r$, por lo que

$$\frac{dy}{dx} = r x^{r-1}$$

Ejemplo

Dada la función $y = x^{3e} + x^\pi$ obtener $\frac{dy}{dx}$.

Resolución

Se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x^{3e} + x^\pi) = 3 e x^{3e-1} + \pi x^{\pi-1}$$

Los cambios de base vistos anteriormente permiten generalizar las expresiones para $\frac{d}{dx}(e^x)$ a otras bases; es decir, si se desea derivar a^x , entonces deberá recordarse que $y = a^x$ si y sólo si $\log_a y = x$, pero

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

Por lo que $y = a^x$ implica que $\log_a y = x = \frac{\ln y}{\ln a}$ y derivando implícitamente se tiene que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln y}{\ln a} \right) \Rightarrow \square = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(a^x) = \ln a (a^x) = a^x \ln a$$

Es decir: $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

En general si u es una función de x , $y = u(x)$, entonces

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \frac{du}{dx} \ln a$$

que lleva a la fórmula de integración

$$\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + c$$

Ejemplo

Obtener $\int 3^{x^3} x^2 dx$

Resolución

$I = \int 3^{x^3} x^2 dx$; si $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2$

por lo que debe completarse la diferencial

$$I = \frac{1}{3} \int (3)(3^{x^3})(x^2) dx = \frac{1}{3} \frac{3^{x^3}}{\ln 3} + c$$

Derivada de una función elevada a otra función

Considérese el caso en el cual se tienen una función

$$y = f(x) = u^v$$

donde $u = u(x)$, $v = v(x)$, la cual se conoce como función exponencial general. Si se desea obtener su derivada, entonces se deben aplicar las propiedades de los logaritmos de la siguiente manera:

Partiendo de $y = u^v$;
 aplicando logaritmos, $\ln y = \ln u^v$;
 aplicando propiedades, $\ln y = v \ln u$;
 derivando implícitamente, $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = v \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx}$;
 despejando a $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{v}{u} \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \ln u \right)$;
 sustituyendo $y = u^v$, $\frac{dy}{dx} = u^v \left(\frac{v}{u} \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \ln u \right)$.

Finalmente:

$$\frac{d}{dx} (u^v) = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \frac{dv}{dx} \ln u$$

Ejemplo

Obtener la derivada de $y = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$.

Resolución

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\sqrt{x}^{\sqrt{x}})$; si $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{x}$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \sqrt{x^{\sqrt{x}} - 1} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) + \sqrt{x^{\sqrt{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \ln \sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^{\sqrt{x}}}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)$$

y sus inversas, se definen en relación a la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$, por lo que se les llama funciones circulares; se puede definir otras funciones a partir de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$, las cuales reciben el nombre de funciones hiperbólicas, y son de gran utilidad en la práctica. A continuación se presentan sus definiciones y se analizan sus características y relaciones principales.

Serie de potencias de las funciones logaritmo y exponencial

Una forma de obtener valores aproximados de las funciones logaritmo y exponencial es mediante su desarrollo en series de potencias, y un caso particular de ellas es la serie de la serie de Taylor estudiada en Cálculo I.

Serie de Taylor para $f(x)$ en c

Si f es una función diferenciable tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

para toda x en un intervalo abierto que contiene a c , entonces $f^{(n)}(c)$ existe para $n = 0, 1, 2, \dots$ y se tiene:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \dots$$

Con base en lo anterior, el desarrollo en serie de Taylor de la función e^x en $c = 0$ está dada por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

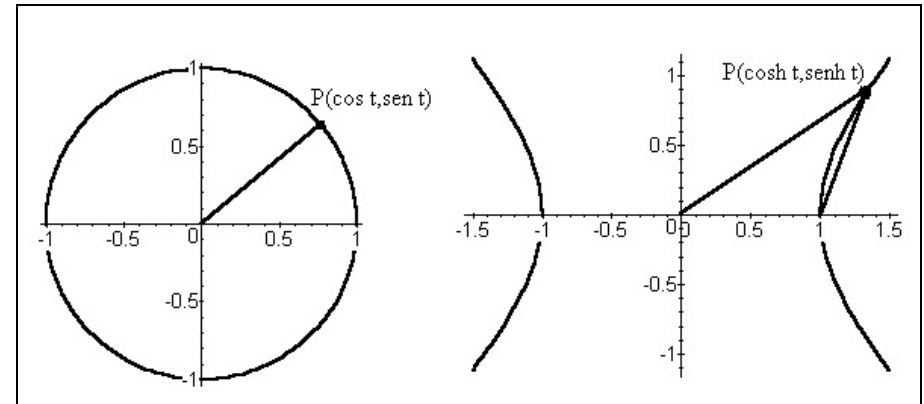
y converge en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

El desarrollo en serie de Taylor de la función $\ln x$ en $c = 1$ está dado por

$$\ln x = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2!} + \frac{(x - 1)^3}{3!} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} (x - 1)^n$$

Funciones Hiperbólicas

Así como las funciones trigonométricas $\text{sen } x$, $\text{cos } x$, $\text{tan } x$, $\text{cot } x$, $\text{sec } x$, $\text{csc } x$

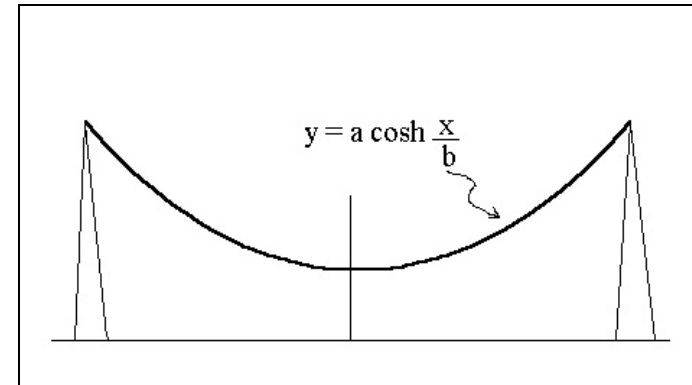
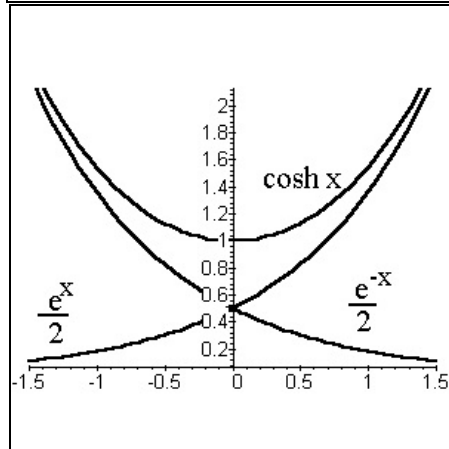
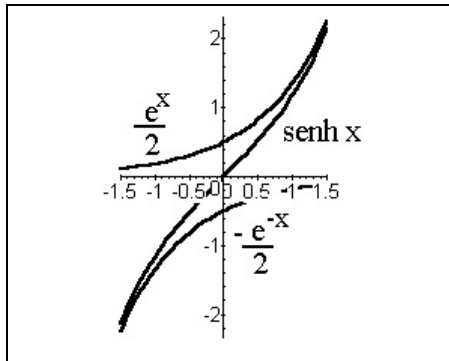


Definición

Para todo número real x , las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico, denotadas $\text{senh } x$ y $\text{cosh } x$, respectivamente se definen como:

$$\text{senh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{cosh } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Las gráficas de las funciones $\text{senh } x$ y $\text{cosh } x$ se pueden obtener a partir de las gráficas de $\frac{e^x}{2}$, $\frac{e^{-x}}{2}$ y $-\frac{e^{-x}}{2}$ como se muestra enseguida.



A partir de las funciones $\sinh x$ y $\cosh x$, es posible definir a las funciones tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica, secante hiperbólica y cosecante hiperbólica, como una extensión de las definiciones para las circulares.

Para la función $\sinh x$, el dominio y el recorrido son todos los reales, mientras que para el $\cosh x$, el dominio son todos los reales y el recorrido los reales mayores o iguales a uno.

La principal aplicación del coseno hiperbólico se encuentra al estudiar la forma de un cable (cuerda o cadena) flexible y uniforme que cuelga por efecto de su propio peso y cuyos extremos se encuentran fijos. La forma que asume el cable recibe el nombre de catenaria, que significa literalmente cadena colgante, y su ecuación está dada por:

$$y = a \cosh \left(\frac{x}{b} \right)$$

Definición

$$\begin{aligned} \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0 \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \\ \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

Las semejanzas entre las funciones circulares y las hiperbólicas van más allá de sus definiciones, las identidades hiperbólicas son muy parecidas a las trigonométricas.

Teorema

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x &= 1 \\ \operatorname{coth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x &= 1 \\ \sinh(x + y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \sinh(x - y) &= \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y \\ \cosh(x + y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \cosh(x - y) &= \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\ \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ \cosh 2x &= 2 \sinh^2 x + 1 \\ \cosh 2x &= 2 \cosh^2 x - 1 \end{aligned}$$

Las fórmulas de derivación e integración de las funciones hiperbólicas, también se asemejan a las circulares.

Teorema

Derivadas de funciones hiperbólicas

Si $u = u(x)$ es una función derivable de x , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\sinh u) &= \cosh u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} (\cosh u) &= \sinh u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} (\tanh u) &= \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} (\coth u) &= -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} (\operatorname{sech} u) &= -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} (\operatorname{csch} u) &= -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

Demostración de (2) y (4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\cosh u) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(e^u \frac{du}{dx} - e^{-u} \frac{du}{dx} \right) \\ \frac{d}{dx} (\cosh u) &= \frac{1}{2} (e^u - e^{-u}) \frac{du}{dx} = \sinh u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} (\coth u) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\cosh u}{\sinh u} \right) = \frac{(\sinh u)(\sinh u) \frac{du}{dx} - (\cosh u)(\cosh u) \frac{du}{dx}}{\sinh^2 u} \\ \frac{d}{dx} (\coth u) &= \frac{(\sinh^2 u - \cosh^2 u) \frac{du}{dx}}{\sinh^2 u} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sinh^2 u} = \operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx} \end{aligned}$$



El resto de las expresiones se pueden probar de manera similar.

Las fórmulas integrales correspondientes a las fórmulas de derivación de las funciones hiperbólicas están dadas en el siguiente teorema, y aunque no se presenta la demostración, es fácil verificarlas mediante derivación.

Teorema

Integrales de funciones hiperbólicas

Si $u = u(x)$ es una función de x , entonces:

$$\int \sinh u \, du = \cosh u + c$$

$$\int \cosh u \, du = \sinh u + c$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + c$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\operatorname{coth} u + c$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + c$$

$$\int \operatorname{csch} u \operatorname{coth} u \, du = -\operatorname{csch} u + c$$

Ejemplo

Obtener $\int x^2 \operatorname{sech}^2 x^3 \, dx$

Resolución

Si $u = x^3$ entonces $du = 3x^2 dx$, por lo que, completando la diferencial se tiene:

$$I = \int x^2 \operatorname{sech}^2 x^3 \, dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 \operatorname{sech}^2 x^3 \, dx = \frac{1}{3} \tanh x^3 + c$$

Las funciones hiperbólicas tienen inversas, las cuales se proporcionan en el siguiente teorema

Teorema

$$\operatorname{angsenh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$\operatorname{angcosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad x \geq 1$$

$$\operatorname{angtanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{angcoth} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \quad |x| > 1$$

$$\operatorname{angsech} x = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right) \quad 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{angcsch} x = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \right) \quad x \neq 0$$

Las fórmulas de derivación de las funciones hiperbólicas pueden obtenerse derivando las funciones logaritmo natural, o bien, utilizando la función inversa y derivando implícitamente; en particular si $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ entonces:

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

reescribiendo

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

multiplicando por

$$e^y \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

despejando e^y (ecuación de segundo grado)

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

puesto que

$$e^y \forall y \quad e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

derivando implícitamente

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

despejando $\frac{dy}{dx}$ y sustituyendo

$$e^y \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

simplificando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \operatorname{angsenh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Con lo que se demuestra la fórmula para derivar al seno hiperbólico inverso. De hecho, el análisis anterior (hasta antes de derivar) también es utilizado para escribir las funciones hiperbólicas en términos de logaritmo natural.

Teorema

Si $u = u(x)$ es una función derivable de x , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{angsenh} u &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \operatorname{angcosh} u &= \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}, & u > 1 \\ \frac{d}{dx} \operatorname{angtanh} u &= \frac{1}{1 - u^2} \frac{du}{dx}, & |u| < 1 \\ \frac{d}{dx} \operatorname{angcoth} u &= \frac{1}{1 - u^2} \frac{du}{dx}, & |u| > 1 \\ \frac{d}{dx} \operatorname{angsech} u &= -\frac{1}{u \sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}, & 0 < u < 1 \\ \frac{d}{dx} \operatorname{angcsch} u &= -\frac{1}{|u| \sqrt{1 + u^2}} \frac{du}{dx}, & u \neq 0 \end{aligned}$$

A partir de las fórmulas de derivación, se tienen las siguientes fórmulas de integración:

Teorema

Si $u = u(x)$ es una función de x y a es una constante positiva, entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} &= \operatorname{angsenh} \frac{u}{a} + c = \ln \left(u + \sqrt{u^2 + a^2} \right) + c, \\ \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} &= \operatorname{angcosh} \frac{u}{a} + c = \ln \left(u + \sqrt{u^2 - a^2} \right) + c, & u > a \\ \int \frac{du}{a^2 - u^2} &= \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{angtanh} \frac{u}{a} + c, & |u| < a \\ \frac{1}{a} \operatorname{angcoth} \frac{u}{a} + c, & |u| > a \end{cases} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + u}{a - u} \right| + c & u \neq a \\ \int \frac{du}{u \sqrt{1 - u^2}} &= -\operatorname{angsech} u + c = -\ln \left(\frac{1}{u} + \frac{\sqrt{1 - u^2}}{u} \right), & 0 < u < 1 \\ \int \frac{du}{|u| \sqrt{1 - u^2}} &= -\operatorname{angcsch} u + c = -\ln \left(\frac{1}{u} + \frac{\sqrt{1 + u^2}}{|u|} \right), & u \neq 1 \end{aligned}$$

Regla de L'hopital y sus aplicaciones

La regla de L'Hopital se utiliza para calcular límites de cocientes de funciones cuya sustitución directa lleva a las formas indeterminada $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, por ejemplo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Antes de enunciar la regla de L'Hopital, debe enunciarse el teorema de Cauchy, el cual es una extensión del teorema del valor medio del cálculo diferencial.

Teorema de Cauchy

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , y $g'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b) . Entonces existe un número tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Obsérvese que si $g(x) = x$, entonces el teorema de Cauchy se reduce al teorema del valor medio del cálculo diferencial estudiado en el curso de Cálculo I.

Regla de L'Hopital

Si $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las condiciones del Teorema de Cauchy, y $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ es

una forma indeterminada $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración para el caso $\frac{0}{0}$

Puesto que $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, entonces puede suponerse que $f(x_0) = 0$ y $g(x_0) = 0$ y aplicando el teorema de Cauchy, existe un número entre x y x_0 tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

cuando $x \rightarrow x_0$, y de esta manera

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \blacksquare$$

Ejemplo

Determinar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$

Resolución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \text{sen } x}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{cos } x}{1} = 1$$

Ejemplo

Determinar $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x^2 + 5)}{\ln(5x^2 + 2)}$

Resolución

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x^2 + 5)}{\ln(5x^2 + 2)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} [\ln(3x^2 + 5)]}{\frac{d}{dx} [\ln(5x^2 + 2)]} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x}{3x^2 + 5}}{\frac{10x}{5x^2 + 2}} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x^2 + 5)}{\ln(5x^2 + 2)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x(5x^2 + 2)}{10x(3x^2 + 5)} = 1 \end{aligned}$$

Obsérvese que si al aplicar la regla de L'Hopital la indeterminación continua, entonces se puede volver a aplicar dicha regla.

Además, si la forma indeterminada no es del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, entonces puede realizarse una manipulación algebraica para intentar obtener una indeterminación adecuada y aplicar la regla de L'Hopital.

De hecho existen ya algunas formas de manipulación que se han desarrollado para ciertos tipos específicos de indeterminación.

Integrales impropias

Al realizar integrales de la forma $\int_a^b f(x) dx$, hasta ahora, se ha supuesto que los límites son números reales finitos y que la función es acotada (y continua) en el intervalo; sin embargo, si alguna de estas condiciones no se satisface entonces se tiene un caso especial de integrales, el cual se conoce como integral impropia.

Existen tres casos de integrales impropias con al menos un límite en el infinito.

Si f es continua en $[a, \infty)$ entonces $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$

Si f es continua en $(-\infty, b]$ entonces $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$

Si f es continua en $(-\infty, \infty)$ entonces para cualquier real a se tiene $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$

Cuando los límites existen se dice que la integral converge, de lo contrario se dice que diverge.

Ejemplo

Evaluar, si es posible $\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2} dx$

Resolución

$$I = \int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx + \int_0^\infty x e^{-x^2} dx$$

$$I = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 x e^{-x^2} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-x^2} dx$$

$$I = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_b^0 \right] + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^b \right]$$

$$I = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Otro tipo de integrales impropias se tiene cuando la función a integrar tiende a infinito en el intervalo de integración, por ejemplo la función $f(x) = \frac{1}{x^3}$ es discontinua en $x = 0$, por lo que su integral en el intervalo $[-1, 2]$ es impropia; es decir, sería un error intentar evaluarla como $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \Big|_{-1}^2 = \frac{3}{8}$. El

procedimiento correcto es:

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b \rightarrow 0} \int_{-1}^b \frac{1}{x^3} dx + \lim_{b \rightarrow 0} \int_b^2 \frac{1}{x^3} dx$$

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{b^2} + \frac{1}{2} \right) + \lim_{b \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{b^2} \right)$$

Y los límites tienden a infinito, por lo que la integral diverge.

Ejemplo

Evaluar, si es posible, $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$

Resolución

$$I = \int_1^e \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow 1^+} \int_b^e \frac{1}{\ln x} \frac{dx}{x}$$

Si $u = \ln x$ entonces $du = \frac{dx}{x}$ y se tiene la forma $\int \frac{1}{u} du$, por lo que

$$I = \lim_{b \rightarrow 1^+} \ln(\ln x) \Big|_b^e = \lim_{b \rightarrow 1^+} [0 - \ln(\ln b)]$$

Y el límite tiende a infinito por lo que la integral diverge y no es posible evaluarla.

Bibliografía

Andrade A., García P., Castañeda E.-**Cálculo Diferencial e Integral**.-Universidad Nacional Autónoma de México.-México, 1984.

Larson R., Hostetler R., Edwards B.-**Cálculo**. Octava Edición. Volúmenes 1 y 2.-McGraw Hill.-China, 2006.

Estrada O., García P., Monsivais G.-**Cálculo Vectorial y Aplicaciones**.-Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.-México, 1999.

Smith R., Minton R.-**Cálculo**, Tomos I y II.-Segunda Edición.- McGraw-Hill.-España, 2003.

Thomas G., Finney R.-**Cálculo de una variable**.-Addison Wesley Longman.-México, 1998.

Thomas G., Finney R.-**Cálculo de varias variables**. Novena Edición. Volumen 2.-Addison Wesley Longman.-México, 1998.

Stewart J.-**Cálculo Conceptos y Contextos**. Segunda Edición.-Thompson.-México, 2006.

Leithold L.-**El cálculo**. Séptima edición.-Oxford.-México, 1998.

Swokowski, Earl W.- *Cálculo con Geometría Analítica*.-2a. edición.-Edit. Grupo Editorial Iberoamérica.-México, 1989.

Zill, Dennis G.- *Cálculo con Geometría Analítica*.-Edit. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1985.