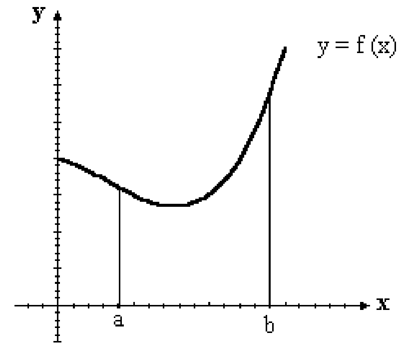
TEMA I
LAS INTEGRALES DEFINIDA E INDEFINIDA

Objetivo: El alumno comprenderá el concepto de Integral definida, sus propiedades e interpretación geométrica, así como el concepto de Integral indefinida y su relación con la antiderivada y con la integral definida.

Introducción

El término *"Cálculo"* proviene del latín *calculus,* diminutivo del término *calx*, que significa piedra. En las civilizaciones antiguas con frecuencia se usaban piedrecillas para hacer cuentas. El **Cálculo** se "inventó" en el siglo XVII como un medio para estudiar los problemas en los que intervenía el movimiento, en particular para estudiar los objetos con velocidad variable; sin embargo en la actualidad tiene una gran variedad de usos, desde los geométricos, cinemáticos, hasta los económicos. Una manera sencilla de definirlo es, el Cálculo es la rama de las matemáticas que se encarga del estudio de las cantidades infinitamente pequeñas. El curso antecedente, *Cálculo I,* está dedicado al estudio de uno de los conceptos fundamentales del Cálculo: *la derivada*; en la primera parte de este curso se estudiará otro de los conceptos fundamentales: ***La integral***.

La integral tiene su origen en el problema de evaluar el área de una región con frontera curva (problema formulado por los Griegos), o de manera simplificada, obtener el área bajo una curva trazada por la función $y = f(x)$, por encima del eje x y entre las rectas $x = a$ y $x = b$.



Ilustr. 1 El área bajo la curva.

La notación "Suma Abreviada" y sus propiedades

Para estudiar el concepto de integral definida es necesario primero repasar la notación suma abreviada, también llamada notación de sumatoria[1] o notación con sigma[2] o simplemente notación sigma [3]. Esta notación ya se estudió en el curso de Cálculo I, cuando se estudiaron las series; sin embargo, la notación de suma abreviada puede definirse como a continuación.

> **Definición** **Notación Suma Abreviada**
>
> La suma de n términos $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ se denota por
>
> $$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
>
> donde i es el índice de la suma,
> a_i es el i-ésimo término de la suma,
> 1 y n son los límites inferior y superior de la suma.

[1] Swokowski. Cálculo con Geometría Analítica 2a. edición.

[2] Zill. Cálculo con Geometría Analítica.

[3] Larson y Hostetler. Cálculo y Geometría analítica 6a. edición.

La suma abreviada o sumatoria tiene las siguientes propiedades.

Teorema **Propiedades de la Suma Abreviada**

1. $\sum_{i=1}^{n} k\,a_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$, donde k es una constante.
2. $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i \pm b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

A partir de los teoremas de las propiedades de la suma, puede obtenerse algunas fórmulas de utilidad.

Teorema **Fórmulas de la Suma Abreviada**

Si $c \triangleq$ constante.

1. $\sum_{i=1}^{n} c = c\,n$
2. $\sum_{k=0}^{n} c = (n+1)c$
3. $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
5. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
6. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \dfrac{n(n+1)\left(6n^3+9n^2+n-1\right)}{30}$

$$= \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

El teorema 1.2.2 se demuestra a continuación.
Desarrollando la notación de suma, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n \qquad (1.1)$$

o bien, en orden decreciente

$$\sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 \qquad (1.2)$$

y sumando (1.1) y (1.2) se tiene

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$

del lado derecho se tienen n términos de $(n+1)$, por lo que $2\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$, y despejando:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

■

Ejemplo

Calcular las sumas que se indican, desarrollandolas y usando las propiedades

1) $\sum_{i=1}^{6} i = 1+2+3+4+5+6 = 21$ ó

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{6(6+1)}{2} = 21$$

2) $\sum_{i=1}^{7} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2 = 140$ ó

$$\sum_{i=1}^{7} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{7(7+1)(2(7)+1)}{6} = 140$$

3) $\sum_{i=1}^{5} i^3 = 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 = 225$ ó

$$\sum_{i=1}^{5} i^3 = \frac{n^2(n+1)}{4} = \frac{5^2}{4}(5+1)^2 = 225$$

4) $\sum_{i=1}^{7} i^4 = 1^4+2^4+3^2+5^4+6^4+7^4 = 4676$ ó

$$\sum_{i=1}^{7} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$= \frac{7(7+1)(2(7)+\ )(3(7)^2+3(7)-1)}{40} = 4676$$

5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$

6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 55$ ó

$\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 5 = (n+1)c = (10+1)5 = 55$

7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2 - (k-1)^2 = 1^2 - (1-1)^2 + 2^2 - (2-1)^2 + 3^2 - (3-1)^2 +$

$+ 4^2 - (4-1) + 5^2 - (5-1)^2 = 25$

se observa que los términos se cancelan

$1^2 - 0^2$

$2^2 - (1)^2$

$3^2 - (2)^2$

$4^2 - (3)^2$

$5^2 - (4)^2$

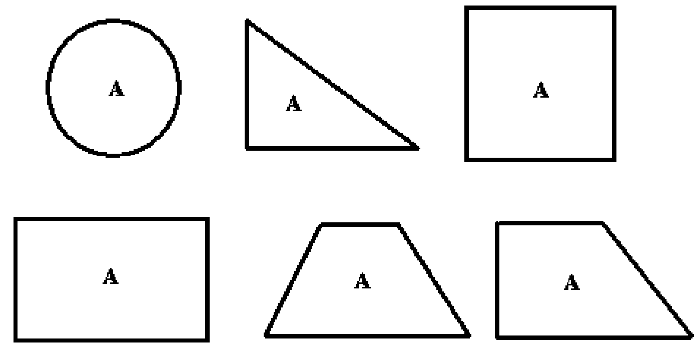
$= 25$

El problema del área y las sumas de Riemann

El concepto de la derivada estudiado en el curso de Cálculo I tiene su origen en el problema geométrico de encontrar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. De forma similar, el concepto de integral tiene su origen en el problema geométrico del cálculo de áreas.

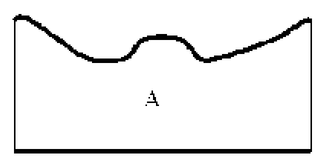
Los griegos a partir de Euclides definieron el área de una región plana, en su forma más sencilla, (El área de un rectángulo es base por altura), pero tuvieron algunos problemas para obtener áreas de figuras más complicadas.

En el curso de geometría hemos aprendido a calcular el área de regiones poligonales y circulares, como:

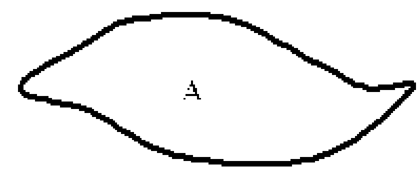


Ilustr. 2 El problema del área.

Ahora la pregunta es: cómo calcular el área de regiones diferentes a las aprendidas en el curso de geometría, como:



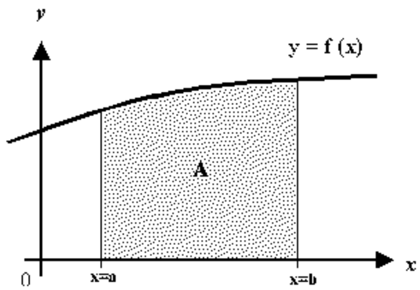
Ilustr. 3 Figura irregular 1.



Ilustr. 4 Figura irregular 2.

El método usado por los griegos para obtener áreas se le atribuye a Arquímedes (281-212 a.C.), quien propuso encajar el área en dos polígonos, uno inscrito en la región (en el interior de la región) y otro circunscrito (en el exterior de la región).

Primero considérese la gráfica de una función real de variable real $y = f(x)$, donde se quiere conocer el área limitada por $x = a$, $x = b$, el eje x y $f(x) = y$.

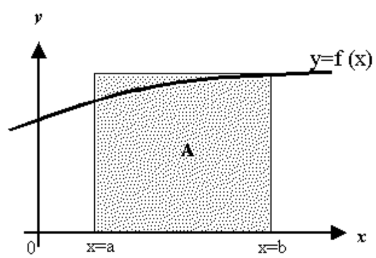


Ilustr. 5 Área bajo la curva.

Una burda aproximación del área que se desea calcular, es:

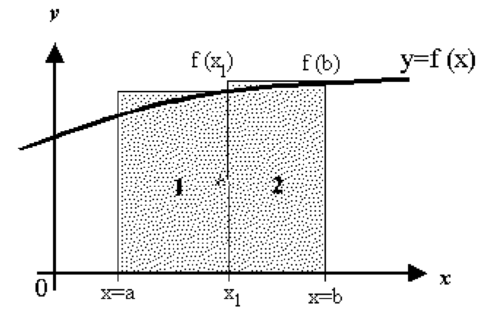
$$A = b \cdot h = (b - a)f(b) = S(1)$$

como se puede observar, se está usando geometría.



Ilustr. 6 Primera aproximación al problema del área.

Si ahora se consideran dos rectángulos en el área que se desea calcular se tiene:

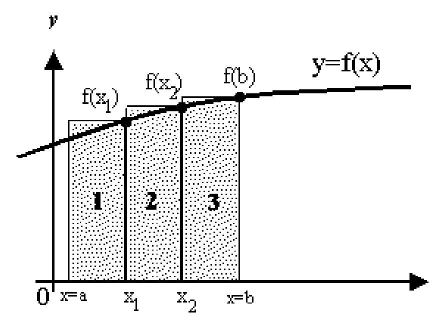


Ilustr. 7 Segunda aproximación al problema del área.

$$A \approx b_1 h_1 + b_2 h_2 = (x_1 - a)f(x_1) + (b - x_1)f(b) = S(2)$$

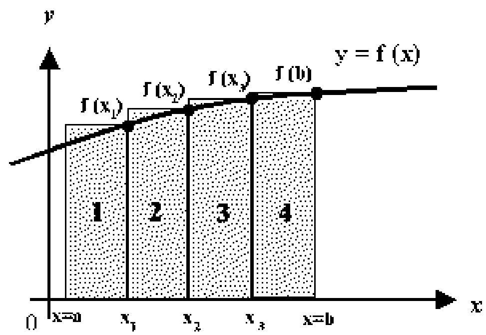
Si los dos subintervalos en los que dividimos el intervalo cerrado $[a, b]$ tienen la misma longitud, esto es, $\Delta x = x_1 - a$ y $\Delta x = b - x_1$, la aproximación queda como: $A = S(2) = \Delta x f(x_1) + \Delta x f(b) = \Delta x (f(x_1) + f(b))$.

A medida que el número de regiones rectangulares aumenta, la diferencia entre la suma de sus áreas y lo que se puede considerar como el área bajo la curva $y = f(x)$ disminuye.



Ilustr. 8 Área aproximada con tres rectángulos.

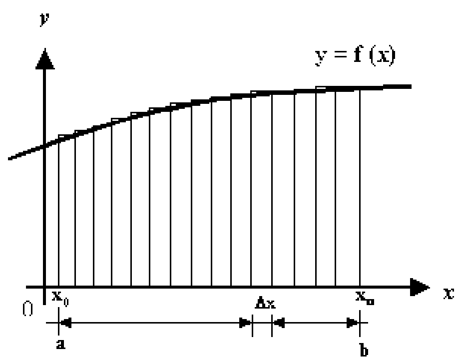
$$A \approx S(3) = \Delta x\left[f(x_1) + f(x_2) + f(b)\right]$$



Ilustr. 9 Área aproximada con cuatro rectángulos.

$$A \approx S(4) = \Delta x\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(b)\right]$$

Considerando n rectángulos en el intervalo $[a, b]$ el cual ha sido dividido en n subintervalos de igual longitud (Δx), se tiene:



Ilustr. 10 Área con n subintervalos.

Haciendo la suma de productos

$$A \approx S(n) \approx \Delta x\left[f(x_1) + f(x_2) + \ . \ . \ . \ + f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

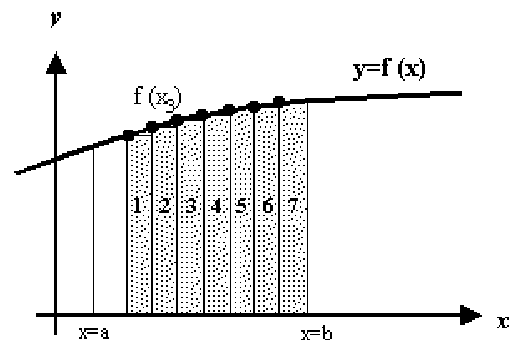
En forma intuitiva, se puede observar que, cuando el número n de rectángulos tiende a infinito, la suma de sus áreas tiende a un límite, que es el área buscada.

Se sabe entonces que

$$S(n) = \Delta x\left[f(x_1) + f(x_2) + \ . \ . \ . \ + f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

que se puede escribir como $S(n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x\, f(x_i)$ conocida como suma de Riemann[4].

Existe otra forma de dibujar los rectángulos para calcular el área. Considerando n rectángulos inscritos de base constante (Δx), y altura $f(x_{i-1})$, siendo x_{i-1}, la abscisa del extremo izquierdo del i-ésimo subintervalo, entonces se tiene:



Ilustr. 11 Rectángulos inscritos, utilizando ocho rectángulos.

$$A \approx S(8) = \Delta x(0) + \Delta x\left[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)+f(x_6)+f(x_7)\right]$$

Si se consideran n rectángulos inscritos en A en el intervalo $[a, b]$,

[4]Riemann. Famoso matemático alemán (1826-1866).

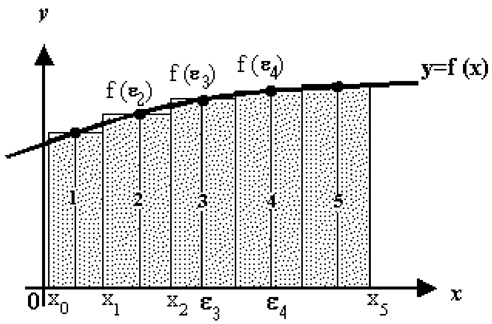
haciendo la suma de productos queda como

$$A \approx S(n) \approx \Delta x\left[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})\right]$$

El procedimiento para determinar el área limitada por dos rectas $x = a$, $x = b$, el eje x y la función $y = f(x)$ dada, que es no negativa para ningún valor del intervalo considerado, es

$$S(n) = \Delta x f(x_1) + \Delta x f(x_2) + \ldots + \Delta x f(x_{n-2}) + \Delta x f(x_{n-1})$$

También, si consideramos n rectángulos interscritos de base constante e igual a Δx y altura igual a $f(\varepsilon_i)$ siendo ε_i la abscisa del punto medio del *i*-ésimo subintervalo:



Ilustr. 12 Rectángulos interscritos, utilizando cinco rectángulos.

$$S(5) = \Delta x f(\varepsilon_1) + \Delta x f(\varepsilon_2) + \Delta x f(\varepsilon_3) + \Delta x f(\varepsilon_4) + \Delta x(\varepsilon_5)$$

por lo tanto para n rectángulos interscritos en A, se tiene:

$$S(n) = \Delta x f(\varepsilon_1) + \Delta x f(\varepsilon_2) + \Delta x f(\varepsilon_3) + \ldots + \Delta x f(\varepsilon_{i-1}) + \Delta x(\varepsilon_i)$$

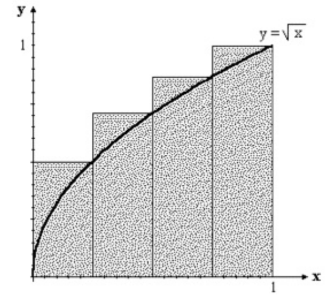
$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(\varepsilon_i)$$

Como puede observarse el método para el cálculo del área bajo una curva dada, funciona con rectángulos circunscritos, inscritos o interscritos.

Ejemplo

Utilizar las sumas superiores e inferiores para aproximar el área de la siguiente región, utilizando cuatro subintervalos.

$$y = \sqrt{x}$$



Ilustr. 13 Ejemplo

Resolución

El intervalo en el eje equis *[0, 1]*, está dividido en cuatro partes iguales de longitud $\frac{1}{4}$, si cada uno de estos incrementos de x se denota por $\Delta_i x$ con $i = 1, 2, 3, 4.$, y denotando el área superior por $S(\Delta)$ y $s(\Delta)$, entonces:

$$S(\Delta) = \sqrt{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right) + \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) + \sqrt{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{4}\right) + \sqrt{1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$S(\Delta) = \frac{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{8} = 0.768$$

$$s(\Delta) = 0\left(\frac{1}{4}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) + \sqrt{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$s(\Delta) = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{8} = 0.518$$

El área bajo la curva $y = \sqrt{x}$, del ejemplo anterior está entre *0.518* y *0.768*, es decir:

$$0.518 < A < 0.768$$

Ahora para llegar a la definición de Integral definida, considérese lo siguiente:

Sea $y = f(x)$

1.- $y = f(x)$ está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$.

2.- Divídase el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de amplitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. La partición P queda como

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

3.- Sea $\|P\|$ la amplitud del subintervalo más largo. Al número $\|P\|$ se le llama norma de la partición P.

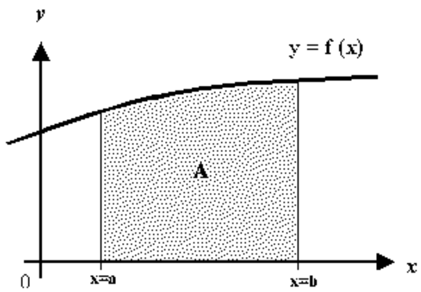
4.- Escójase un número ε_i en cada subintervalo.

$\varepsilon_1 \in [x_0, x_1]$, $\varepsilon_2 \in [x_1, x_2]$,...,$\varepsilon_i \in [x_{n-1}, x_n]$.

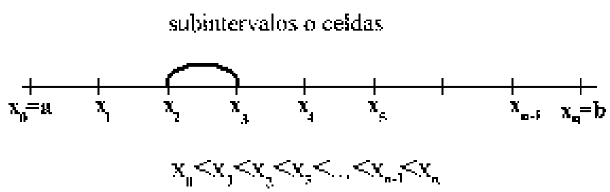
5.- Establezca la suma de los productos.

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x f(\varepsilon_i) = \Delta x_1 f(\varepsilon_1) + \Delta x_2 f(\varepsilon_2) + ... + \Delta x_n f(\varepsilon_n)$$

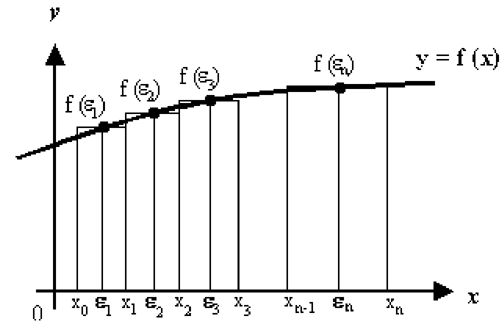
Gráficamente



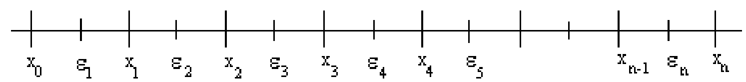
Ilustr. 14 Área buscada.



Ilustr. 15 Subintervalos.



Ilustr. 16 Partición.



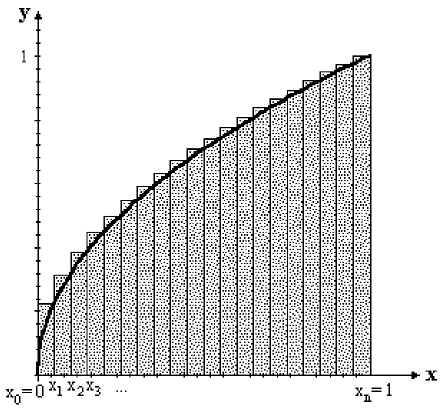
Haciendo los productos y la suma, se tiene

$$A = S(n) = \Delta x_1 f(\varepsilon_1) + \Delta x_2 f(\varepsilon_2) + ... + \Delta x_n f(\varepsilon_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\varepsilon_i)$$

a este resultado se le conoce como SUMA DE RIEMANN.

Para el ejemplo donde se utilizaron cuatro subintervalos, si se desea obtener una mejor aproximación, ya sea con las sumas superiores o con las sumas inferiores, basta con reducir la longitud de los incrementos. Entonces, si en lugar de 4 intervalos de longitud $\frac{1}{4}$, se utilizan n intervalos de longitud $\frac{1}{n}$, entonces, el área utilizando sumas superiores se puede aproximar mediante:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i)$$



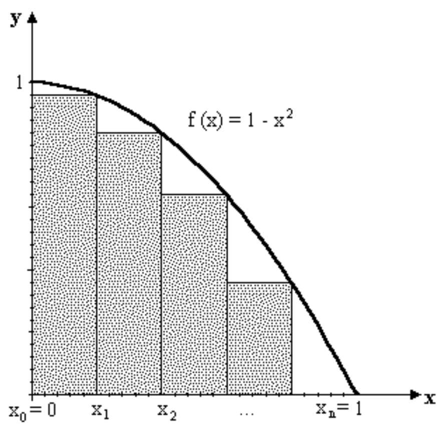
Cuando n es mayor, mejora la aproximación. Lo anterior se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Calcular el área bajo la gráfica de $f(x) = 1 - x^2$ entre 0 y 1.

Resolución

La región es



Si se divide el intervalo de 0 a 1 en n subintervalos iguales de longitud $\frac{1}{n}$, y se utilizan sumas inferiores, entonces:

$$\Delta_i x = \frac{1}{n}$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1 - x_i^2\right)$$

Y puesto que $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}$, ... ,

$$x_i = \frac{i}{n}$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{i^2}{n^3}\right)$$

Y utilizando las fórmulas de la suma abreviada

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$A \approx \frac{1}{n}(n) - \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$A \approx 1 - \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{4n^2 - 3n - 1}{6n^2}$$

Para obtener el área bajo la curva debe utilizarse una n muy grande, entonces:

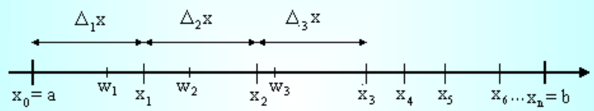
$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{4n^2 - 3n - 1}{6n^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{4}{6} - \frac{3}{6n} - \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{2}{3}$$

En el ejemplo anterior se empleó una *Suma de Riemann* para obtener el área. Como se explicó anteriormente, el concepto de Suma de Riemann es más general, puesto que los subintervalos (también llamados celdas) pueden tener diferentes longitudes, y el valor de x que se utiliza para valuar la función y calcular la altura del rectángulo no tiene que ser un extremo del intervalo, puede ser cualquier punto intermedio.

Por lo que pueden realizarse las siguientes definiciones:

Partición



Los valores w_i están en cualquier lugar dentro del subintervalo $\left[x_{i-1}\ ,\ x_i\right]$

Definición **Suma de Riemann**

Sea f una función definida en un intervalo cerrado $\left[\,a\,,b\,\right]$ y P una partición de $\left[\,a\,,b\,\right]$. Una suma de Riemann de f es una expresión de la forma

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f\left(w_i\right)\Delta_i x$$

donde w_i es un número entre $\left[\,x_{i-1}\ ,\ x_i\,\right]$.

Puesto que cada subintervalo de la partición puede tener distinta longitud, el subintervalo de longitud mayor recibe el nombre de norma de la partición, y se denota por $\|\Delta\|$.

Ejemplo

Evaluar la suma de Riemann R_P para

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x+4) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

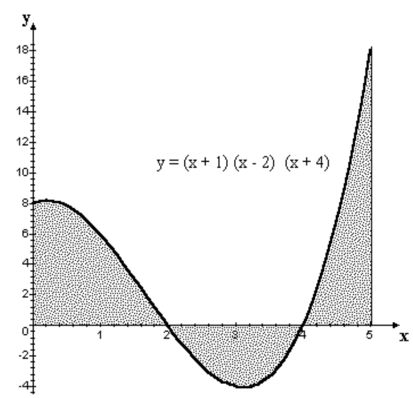
sobre el intervalo $\left[0\,,\,5\right]$ usando la partición P con puntos de separación en:

$$0 < 1.1 < 2 < 3.2 < 4 < 5$$

y los correspondientes puntos w_i , $w_1 = 0.5$, $w_2 = 1.5$, $w_3 = 2.5$, $w_4 = 3.6$ y $w_5 = 5$

Resolución

La gráfica de la función es:



Ilustr. 21 Ejemplo.

$$R_P = \sum_{i=1}^{5} f\left(w_i\right)\Delta_i x$$

$$R_P = f\left(w_1\right)\Delta_1 x + f\left(w_2\right)\Delta_2 x + f\left(w_3\right)\Delta_3 x + f\left(w_4\right)\Delta_4 x + f\left(w_5\right)\Delta_5 x$$

Sustituyendo los valores se llega al valor aproximado de:

$R_P = 23.9698\ [u^2]$

Ejemplo

Mediante el límite de las sumas de Riemann, calcular

$$\int_0^3 |x-2|\,dx$$

Resolución

$$\int_0^3 |x-2|\,dx = \int_0^2 (-x+2)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx$$

Para la primera integral

$$\Delta_i x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\varepsilon_i = 0 + \frac{2}{n}i = \frac{2}{n}i$$

$$f(\varepsilon_i) = -\frac{2i}{n} + 2$$

Para la segunda integral

$$\Delta_i x = \frac{3-2}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\varepsilon_i = 2 + \frac{i}{n}$$

$$f(\varepsilon_i) = 2 + \frac{i}{n} - 2 = \frac{i}{n}$$

Por lo que

$$\int_0^3 |x-2|\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(2-\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

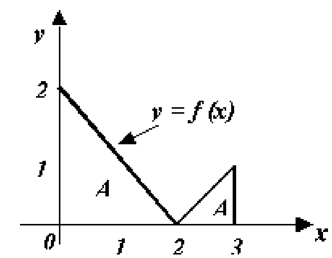
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4}{n}-\frac{4i}{n^2}\right) + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n^2}\right)$$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1) - 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n) - 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 4\lim_{n\to\infty} 1 - 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)$$

$$= 4 - 2(1+0) + \frac{1}{2}(1+0) = \frac{5}{2}u^2$$



Ejemplo

Mediante el límite de las sumas de Riemann, calcular

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx$$

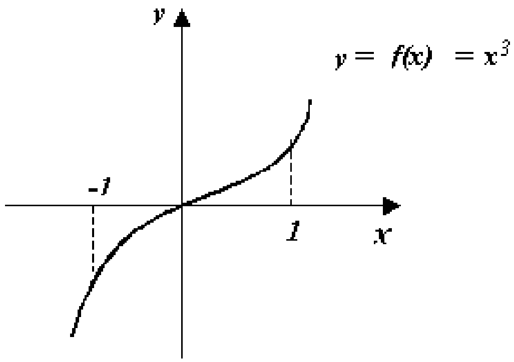
Resolución

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i x\, f(\varepsilon_i)$$

$$\Delta_i x = \frac{1-(-1)}{n} = \frac{1+1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\varepsilon_i = -1 + i\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2i}{n} - 1$$

$$f(\varepsilon_i) = \left(\frac{2i}{n}-1\right)^3 = \frac{8i^3}{n^3} - \frac{12i^2}{n^2} + \frac{6i}{n} - 1$$



Ilustr. 23 Integral de función que no representa área.

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left(\frac{8i^3}{n^3}-\frac{12i^2}{n^2}+\frac{6i}{n}-1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{16i^3}{n^4}-\frac{24i^2}{n^3}+\frac{12i}{n^2}-\frac{2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3-\lim_{n\to\infty}\frac{24}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2+\lim_{n\to\infty}\frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i-1}^{n}(1)$$

$$= 16\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\frac{n^2}{4}(n+1)^2-29\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$+\,12\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}-2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n)$$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(n+1)^2-4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(n+1)(2n+1)+6\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)-2$$

$$= 4-8+6-2=0$$

____

Definición **Integral Definida**

Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a,b]$. La integral definida de f entre a y b se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$ y está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\|\Delta\|\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{\forall i} f(w_i)\,\Delta_i x$$

siempre y cuando el límite exista.

Un equivalente a tomar el límite cuando la norma de la partición tiende a cero, es tomar el límite cuando n tiende a infinito y los subintervalos tienen la misma longitud.

El símbolo de la integral $\int$ es una modificación de la letra S, puesto que la integral definida es el límite de una suma.

Los valores a y b que aparecen en la integral definida reciben los nombres de límite inferior y límite superior, respectivamente.

La función $f(x)$ recibe el nombre de integrando, y el símbolo dx (diferencial de x) está asociado con el subintervalo $\Delta_i x$.

La integral definida tiene las siguientes propiedades básicas:

Teorema

1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(s)\,ds = \int_a^b f(t)\,dt$ variable muda

2. Si $b > a$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3. Si $f(a)$ existe, entonces $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Como es evidente, la integral definida resuelve el problema del área bajo la curva; sin embargo, es muy importante aclarar que la integral definida se utiliza para muchas otras aplicaciones físicas, económicas y matemáticas.

Teorema

Si f es una función integrable y $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área bajo la curva trazada por f entre a y b es

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

No todas las funciones son integrables, pero las continuas sí lo son.

Teorema

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Teorema

$\int_a^b c\,dx = c\,(b - a)$; donde c es una constante.

Teorema

Si f es integrable en $[a, b]$ y c es un número real arbitrario, entonces cf es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema

Si f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ y $f - g$ son integrables en $[a, b]$ y

1) $\int_a^b [\,f(x) \pm g(x)\,]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

Teorema

Si $a < c < b$ y f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Teorema

Si f es integrable en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

De este teorema se desprende un corolario

Corolario

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces

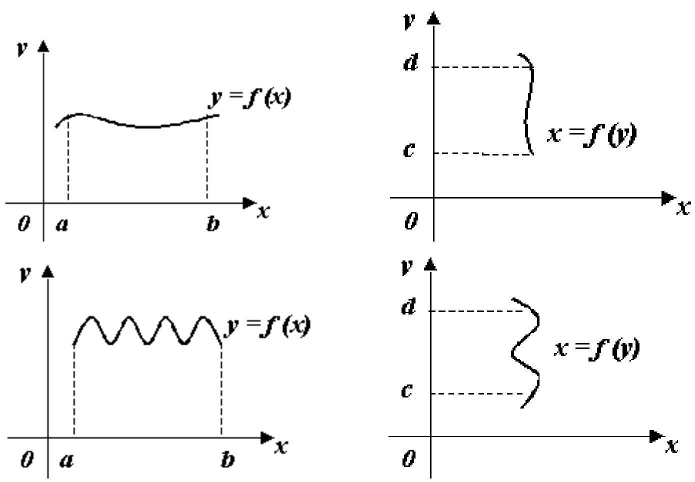
$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$$

Función integrable

Sea una función $y = f(x)$ cuyo dominio incluye al intervalo $[a, b]$. Se dice que $y = f(x)$ es integrable en $[a, b]$ si existe un número L que satisface la condición de que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x - L \right| < \varepsilon$$

para toda partición en que $\|\Delta\| < \delta$ y para cualquier $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. En otras palabras se puede decir que: si una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función es integrable en $[a, b]$.



Ilustr. 24-27

Teorema del valor medio del cálculo integral

Si $y = f(x)$ es continua en $[a, b]$, m es el mínimo absoluto que ocurre en x_m, M es el máximo absoluto que ocurre en x_M. Es decir

$f(x_m) = m,\ a \leq x_m \leq b;\ f(x_M) = M,\ a \leq x_M \leq b,$

$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

Entonces existe un número $x_0 \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(x_0)(b - a) \quad ; \quad a \leq x_0 \leq b, \quad m \leq f(x_0) \leq M$$

Demostración

Se sabe que $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a)$

dado que $b - a \neq 0$, se puede dividir entre $b - a$

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M$$

se obtiene

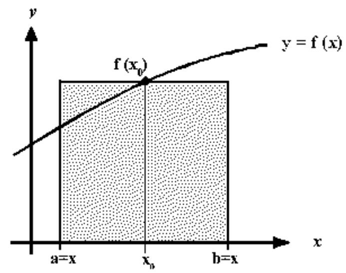
$$f(x_m) \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx \leq f(x_M)$$

recordando el teorema de Bolzano, se sabe que existe un número $x_0 \in [a, b]$ de tal manera que $f(x_0) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx$

despejando, se obtiene finalmente

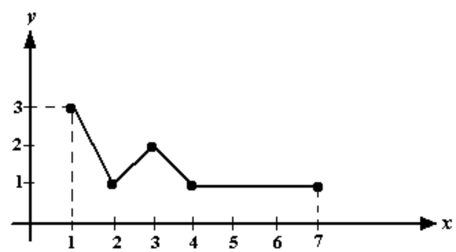
$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a) f(x_0)$$

■



Ilustr. 28 Teorema del valor medio del cálculo integral.

Ejemplo
Sea la función $y = f(x)$ cuya gráfica es



Determinar el valor medio de la función dada, en el intervalo $[1, 7]$ y el o los valores de x cuya existencia garantiza el Teorma del Valor Medio del Cálculo Integral.

Resolución
Usando el límite de la suma de Riemann para lo cual primero definimos la regla de correspondencia

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5 & ; \quad 1 \le x \le 2 \\ x - 1 & ; \quad 2 < x \le 3 \\ -x + 5 & ; \quad 3 < x \le 4 \\ 1 & ; \quad 4 < x \le 7 \end{cases}$$

por lo tanto

$$\int_1^7 f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x = 8u^2 \; ; f(x) > 0$$

sustituyendo en $\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b - a)$, $8 = f(x_0)(7 - 1)$

entonces

$$f(x_0) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

se observa que $x_{0_1} = \frac{11}{6}$, $x_{0_2} = \frac{7}{3}$ y $x_{0_3} = \frac{11}{3}$.

Integral definida a partir de la Integral Definida con Extremo Superior Variable

Definición Antiderivada
Una función F será antiderivada de otra función f en un intervalo $[a, b]$, si $F'(x) = f(x)$ para todo valor de x en un intervalo.

Ejemplos
Obtener la derivada de las siguientes funciones:
a) $F(x) = \operatorname{sen} x$
b) $F(x) = x^3 + x - 2$
c) $G(x) = ang\,tg\; x^2$

Resolución
a) $F'(x) = \cos x = f(x)$
b) $F'(x) = 3x^2 + 1 = f(x)$
c) $G'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^4} = g(x)$

Ejemplos

Obtener la antiderivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

c) $f(x) = csc^2 x$

Resolución

a) $F(x) = \dfrac{1}{3} x^3$

b) $F(x) = \text{ang sen } x$

c) $F(x) = -ctg\ x$

Teorema

La función $f(x) = y$ tiene una antiderivada particular en $[a, b]$ que es $F(x)$. Entonces la antiderivada general de $f(x)$ es: $F(x) + c$ donde c es una constante arbitraria y todas las antiderivadas de $f(x)$ se pueden obtener asignándole algún valor particular a c.

Demostración

Suponiendo que $G(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.
Por lo tanto $G'(x) = f(x)$ en $[a, b]$.
Por la hipótesis del teorema se tiene: $F'(x) = f(x)$ en $[a, b]$ por lo que $G'(x) = F'(x)$ en $[a, b]$, entonces $G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$
Como se supuso que $G(x)$ es una antiderivada cualquiera de $f(x)$, es claro que todas sus antiderivadas se pueden obtener por medio de $F(x) + c$, dándole algún valor particular a la constante arbitraria c.

■

Si F es un a antiderivada de f, entonces $F'(x) = f(x)$ diferenciando $d[F(x)] = f(x)\ dx$

Obsérvese que el proceso de antidiferenciar equivale a encontrar la antiderivada general de una función dada.

Ejemplos

Obtener la antiderivada general de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = \sec x \tan x$

c) $g(x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Resolución

a) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + c$

b) $F(x) = \sec x + c$

c) $G(x) = \text{ang cot } x + c$

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Al ser una función continua es integrable en ese mismo intervalo. Por lo anterior $\int_a^b f(t)\ dt$ existe y proporciona un valor único.

Si x es un número en $[a, b]$ se sigue que $f(x)$ es continua en $[a, x]$, entonces $\int_a^x f(t)\ dt$ define una función F cuyo dominio son todos los valores del intervalo $[a, b]$. El valor de la función para cualquier valor $x \in [a, b]$ será

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

Para evitar confusiones, se ha empleado a t como variable de integración, dado que se está considerando el extremo superior variable y ha sido representado con x.

Teorema

Sea la función $y = f(t)$ es continua en el intervalo $[a, b]$; x es un valor cualquiera del intervalo $[a, b]$ y F es una función definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Entonces

$$F'(x) = f(x)$$

Si se considera que $x = a$ la derivada podrá ser por la derecha de a y si $x = b$ la derivada podrá ser por la izquierda de b.

Demostración

Sean x y $x + \Delta x$ dos valores del intervalo cerrado $[a, b]$.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \text{ y } F(x + \Delta x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t)\, dt$$

entonces

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt$$

Sabiendo que

$$-\int_a^x f(t)\, dt = \int_x^a f(t)\, dt$$

se tiene

$$\int_a^{x + \Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_x^a f(t)\, dt + \int_a^{x + \Delta x} f(t)\, dt$$

por lo cual el teorema se puede escribir como

$$\int_x^a f(t)\, dt + \int_a^{x + \Delta x} f(t)\, dt = \int_x^{x + \Delta x} f(t)\, dt$$

con lo que

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x + \Delta x} f(t)\, dt$$

Por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral se puede asegurar la existencia de un valor $x_0 \in [x, x + \Delta x]$ tal que:

$$\int_x^{x + \Delta x} f(t)\, dt = f(x_0)(x + \Delta x - x) = f(x_0)\Delta x$$

Por lo que

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(x_0)\Delta x$$

dividiendo entre Δx

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x_0)$$

tomando límites cuando $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0)$$

se observa que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

por otro lado, como $x_0 \in [x, x + \Delta x]$, al tender $\Delta x \to 0$ implica que $x_0 \to x$ y por tanto

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) = \lim_{x_0 \to x} f(x_0) = f(x)$$

por lo que $F'(x) = f(x)$

.

■

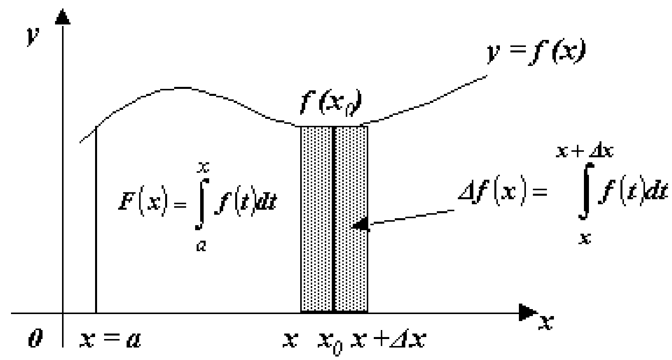
La expresión anterior se puede escribir como

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

en donde se ve que si en la integral definida $\int_a^b f(t)\, dt$ se considera variable el extremo superior de integración, se obtiene una función de él

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

cuya derivada es igual a la función integrando como función de dicho extremo: $f(x)$



Ilustr. 30 Interpretación de la integral definida con límite superior variable.

Lo anterior puede resumirse en la siguiente definición.

Definición. Integral Indefinida

Se llama integral indefinida de la función continua $f(x)$, a:

$$\int_a^x f(u)\, du + c$$

como se sabe $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(u)\, du = f(x)$

Se observa que $\displaystyle\int_a^x f(u)\, du$ es una antiderivada de $f(x)$, luego

$$\int_a^x f(u)\, du + c$$

es antiderivada general de $f(x)$.

Obsérvese que los conceptos de integral indefinida y antiderivada son distintos; pero para las funciones continuas, la integral indefinida y la antiderivada son la misma función. En las aplicaciones se trata con funciones que tienen derivada y esta derivada es continua.

Ejemplos

1) $\displaystyle\int 5\, dx = 5\int dx = 5x + c$

2) $\displaystyle\int 10x\, dx = 10\int x\, dx = 10\left(\frac{x^2}{2}\right) + c = 5x^2 + c$

3) $\displaystyle\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + c$

4) $\displaystyle\int (5 + 10x + x^2)\, dx = 5\int dx + 10\int x\, dx + \int x^2\, dx$

$$= 5x + 5x^2 + \frac{x^3}{3} + c$$

5) $\displaystyle\int \cos\theta\, d\theta = \operatorname{sen}\theta + c$

6) $\displaystyle\int \operatorname{sen}\phi\, d\phi = -\cos\phi + c$

7) $\displaystyle\int \sec^2 y\, dy = tg\, y + c,$ se uso $F'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental del Cálculo

Sea

1) La función $f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$.

2) La función $g(x)$ tal que $g'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$

Entonces

$$\int_a^b f(t)\, dt = g(b) - g(a)$$

Demostración

Se tiene que la integral $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$, con extremo superior variable, da una función F cuya derivada en el intervalo $[a, b]$ es f.

Por otra parte, la hipótesis de este teorema, establece que

$$g'(x) = f(x)$$

Se sabe que $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt + k$; k es constante.

Si $x = b$ $\quad g(b) = \int_a^b f(t)\, dt + k$; $\quad k$ es constante.

Si $x = a$ $\quad g(a) = \int_a^a f(t)\, dt + k$; $\quad k$ es constante.

Si se obtiene $g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^a f(t)\, dt$

Se sabe que $\int_a^a f(t)\, dt = 0$

por lo tanto

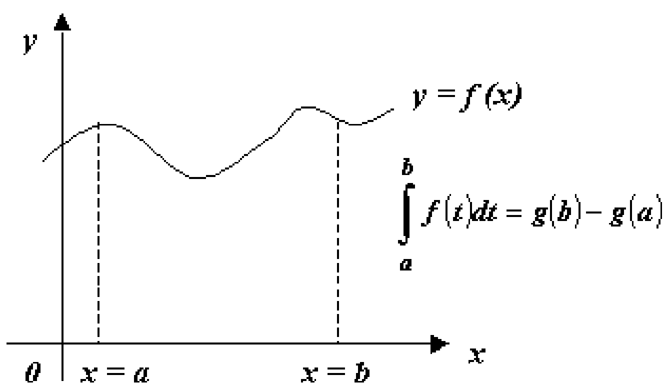
$$\int_a^b f(t)\, dt = g(b) - g(a)$$

■

Este teorema da la posibilidad de determinar el valor exacto de una integral definida y al aplicarlo se usarán diferentes notaciones, por ejemplo:

$$g(x)\Big]_a^b = g(b) - g(a),\ F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

esta aplicación se conoce como regla de Barrow.



Ilustr. 31 Regla de Barrow.

Ejemplos

Calcular las siguientes integrales.

1) $\int_1^3 (2x - 1)\, dx$

2) $\int_{-1}^2 |x^2 - 1|\, dx$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$

Resolución

A) $\int_1^3 (2x - 1)\, dx = 2\int_1^3 x\, dx - \int_1^3 1\, dx = x^2 - x\Big]_1^3 = 6$

Se observa que $F(x) = g(x) = x^2 - x$

2) $\int_{-1}^2 |x^2 - 1|\, dx = 2\int_0^1 (-x^2 + 1)\, dx + \int_1^2 (x^2 - 1)\, dx$

$$= -2\int_0^1 x^2\, dx + 2\int_0^1 dx + \int_1^2 x^2\, dx - \int_1^2 1\, dx$$

$$= -2\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 + 2x\Big]_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big]_1^2 - x\Big]_1^2$$

$$= -\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1 + 2x\Big]_0^1 + \frac{1}{3}x^3\Big]_1^2 - x\Big]_1^2$$

$$= \frac{8}{3}$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1$

Se uso $F'(x) = f(x)$ y la regla de Barrow.

Como primera aplicaión importante del Teorema Fundamental del Cálculo, es que por ser operaciones inversas la derivada y la integración, las fórmulas para derivar vistas anteriormente pueden usarse para encontrar las correspondientes de integración.

Fórmulas de Integración

1) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c;\ n \neq -1$

2) $\int dx = x + c$

3) $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$

4) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$

5) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

6) $\int \csc^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} c + c$

7) $\int \sec x\ \tan x\,dx = \sec x + c$

Fórmulas de Integración (Cont.)

8) $\int \csc x\ \operatorname{ctg} x\,dx = -\csc x + c$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{ang\,sen} x + c$

10) $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{ang\,cos} x + c$

11) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{ang\,tan} x + c$

12) $\int -\frac{1}{1+x^2}\,dx = ang\,ctg\ x + c$

13) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = ang\sec x + c$

14) $\int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = ang\,csc\ x + c$

15) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \frac{1}{a}\,ang\operatorname{sen}\left(\frac{u}{a}\right) + c$

16) $\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\,ang\,tg\left(\frac{u}{a}\right) + c$

17) $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{a}\,ang\sec\left(\frac{u}{a}\right) + c$

Las antiderivadas de las integrales indefinidas, son también de las integrales definidas.

Integrales Inmediatas e Integrales que se transforman en Inmediatas Completando la Diferencial

El método más sencillo para resolver integrales, es el comparar directamente la función integrando con el de una de las fórmulas. A este procedimiento se le conoce como integración inmediata.

Antes de integrar deberá estar completa la diferencial, por lo cual si hace falta una constante como factor se multiplica y divide la integral por dicha constante, sacando de la integral la constante que no haga falta para completar la diferencial, tal y como

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

Si $u = g(x)$ diferenciando $du = g'(x)\,dx$

Ejemplos

Usar el método de sustitución para completar las integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = \int \frac{1}{3\sqrt{x}u^2}2\sqrt{x}\,du = \frac{2}{3}\int u^{-2}\,du = \frac{2}{3}\frac{u^{-1}}{-1} + c$

$u = 1 + \sqrt{x}$

$du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$dx = 2\sqrt{x}\,du$

$$\int \frac{dx}{3\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = -\frac{2}{3}\frac{1}{u} + c = -\frac{2}{3}\frac{1}{(1+\sqrt{x})} + c$$

b) $\displaystyle\int x\,ctg\,x^2(csc\,x^2)^4\,dx = \int x\,ctg\,x^2\,csc\,x^2\,csc^3\,x^2\,dx$

$u = csc\,x^2$

$du = -2x\,csc\,x^2\,ctg\,x^2\,dx$

$$\int x\,ctg\,x^2(csc\,x^2)^4\,dx = \int x\,ctg\,x^2\,csc\,x^2\,u^3\cdot\frac{du}{-2x\,csc\,x^2\,ctg\,x^2}dx$$

$$= \int -\frac{u^3}{2}\,du = -\frac{1}{2}\int u^3\,du = -\frac{1}{2}\frac{u^4}{4} + c$$

$$= -\frac{1}{8}u^4 + c = -\frac{1}{8}csc^4\,x^2 + c$$

c) $\displaystyle\int \frac{\cos(3x) - \csc^3(3x)}{\csc(3x)}\,dx = \int \frac{\cos(3x)}{\csc(3x)}\,dx - \int \frac{\csc^3(3x)}{\csc(3x)}\,dx$

$u = \text{sen}\,(3x)$

$du = 3\cos(3x)\,dx$

$$\int \frac{\cos(3x) - csc^3(3x)}{csc(3x)}\,dx = \int \text{sen}(3x)\cos(3x)\,dx - \int csc^2(3x)\,dx$$

$$= \int \text{sen}(3x)\cos(3x)\,dx + \frac{1}{3}\cot(3x) + c$$

$$= \frac{1}{3}\int u\cdot du + \frac{1}{3}\cot(3x) + c$$

$$\int \frac{\cos(3x) - csc^3(3x)}{csc(3x)}\,dx = \frac{1}{3}\frac{u^2}{2} + \frac{1}{3}\cot(3x) + c$$

$$= \frac{1}{6}\text{sen}^2(3x) + \frac{1}{3}\cot(3x) + c$$

Bibliografía

Andrade A., García P., Castañeda E.**-Cálculo Diferencial e Integral**.-Universidad Nacional Autónoma de México.-México, 1984.

Larson R., Hostetler R., Edwards B**.-Cálculo.** Octava Edición. Volumenes 1 y 2.-McGraw Hill.-China, 2006.

Estrada O., García P., Monsivais G.**-Cálculo Vectorial y Aplicaciones**.-Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.-México, 1999.

Smith R., Minton R.-**Cálculo,** Tomos I y II.-Segunda Edición.- McGraw-Hill.-España, 2003.

Thomas G., Finney R.-**Cálculo de una variable**.-Addison Wesley Longman.-México, 1998.

Thomas G., Finney R**.-Cálculo de varias variables**. Novena Edición. Volumen 2.-Addison Wesley Longman.-México, 1998.

Stewart J.-**Cálculo Conceptos y Contextos**. Segunda Edición.-Thompson.-México, 2006.

Leithold L.-**El cálculo.** Séptima edición.-Oxford.-México,1998.

Flores C.-**Módulo 1. Sumatoria y Notación Sigma**.-Trillas.-México, 1984.

Flores C.-**Módulo 2. La Integral definida y la Integral indefinida**. Primera edición.-Trillas.-México, 1984.